中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

佳作

040404

多邊形及中心多邊形自守數的尋找及性質探究

學校名稱：新北市立中和高級中學

作者：	指導老師：
高一 吳君蕙 高一 許賀翔	王晞安

關鍵詞：同餘、(中心)多邊形自守數、遞迴關係

多邊形及中心多邊形自守數的尋找及性質探究

摘要

多邊形及中心多邊形自守數是鮮有人研究的課題，將廣為人知的「(中心)多邊形數」與「自守數」綜合起來，形成相當有趣的幾何與數論結合課題。

歷史文獻中僅提出六邊形與中心六邊形($s=6$)自守數的想法，亦僅做了不完整的探究：1987 年特里格(Trigg, C.)只尋找到小於 10000 的六邊形自守數，而 2003 年皮寇弗(Clifford A. Pickover)也只列出八位數以內的六邊形自守數及不完整的數列。

本研究首先討論$s=3,4,5,6$的情形，透過 Bezout's identity 確立各位數數量，並利用尾數重複出現的性質，找出各多邊形及中心多邊形自守數衍生的方法；再根據各判別條件，整理出s邊形自守數間的包含關係，以及中心s邊形自守數間的交集。

壹、研究動機

在老師推薦的科普書「數字的異想世界」中，記載了兩個有趣的類似問題。依照圖 1 及圖 2 的排列方式：當我們需要排成「第 n 個圖形，每邊有 n 個點的空心正六邊形堆疊」，以及「第 n 個圖形，由內向外堆疊，每邊有 n 個點的實心正六邊形」時，各需要多少個點？更進一步：求出所需的點數量後，有哪些邊長的六邊形，它們所需點的數量，尾數恰好與此時每邊的點個數相同？

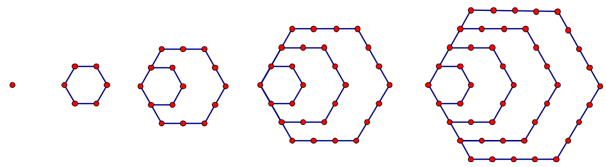


圖 1：空心六邊形堆疊

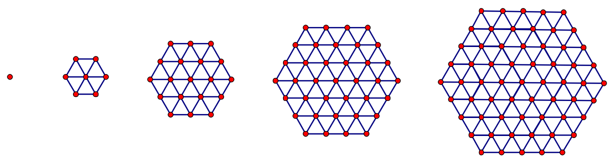


圖 2：實心六邊形堆疊

這引發了我們的興趣，首先解決文獻中尚不完整的資料問題，嘗試尋找出所有滿足條件的 n 值(六邊形與中心六邊形自守數)，將$s=3,4,5,6$的情形一併找完；再者將結論擴充，找出任意s邊形與中心s邊形自守數的出現特性。

貳、研究目的

一、找出$s=3,4,5,6$的多邊形自守數。

二、找出$s=3,4,5,6$中心多邊形自守數。

三、找出s邊形與中心s邊形自守數的出現特性。

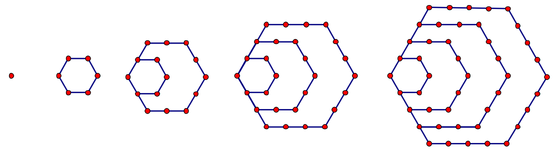
參、研究器材

紙、筆、Microsoft Office Excel

肆、名詞解釋

一、多邊形數：

多邊形數是一種與幾何排列有關的數字。當構成空心s邊形的堆疊時，規定第n個圖形，每邊要有n個點，將所需的點之總數記作$S_s(n)$，稱為s邊形數。以$s=6$為例，如圖所示，可知$S_6(1)=1$、$S_6(2)=6$、$S_6(3)=15$、$\cdots$。

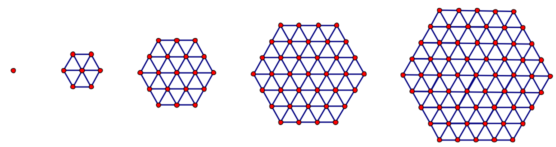


二、多邊形自守數：

若$S_s(n)$的尾數恰好為n，則稱n為一個s邊形自守數。

三、中心多邊形數：

由中間的一點開始，以後每層就以固定的s邊形包圍在其四周。層的每邊都比上一層多一點由內向外堆疊，規定第n個圖形，每邊要有n個點，將所需的點之總數記作$SC_s(n)$，稱為中心s邊形數。如圖所示，可知$SC_6(1)=1$、$SC_6(2)=7$、$SC_6(3)=19$、$\cdots$。



四、中心多邊自守數：

若$SC_s(n)$的尾數恰好為n，則稱n為一個中心s邊形自守數。

五、平方自守數：

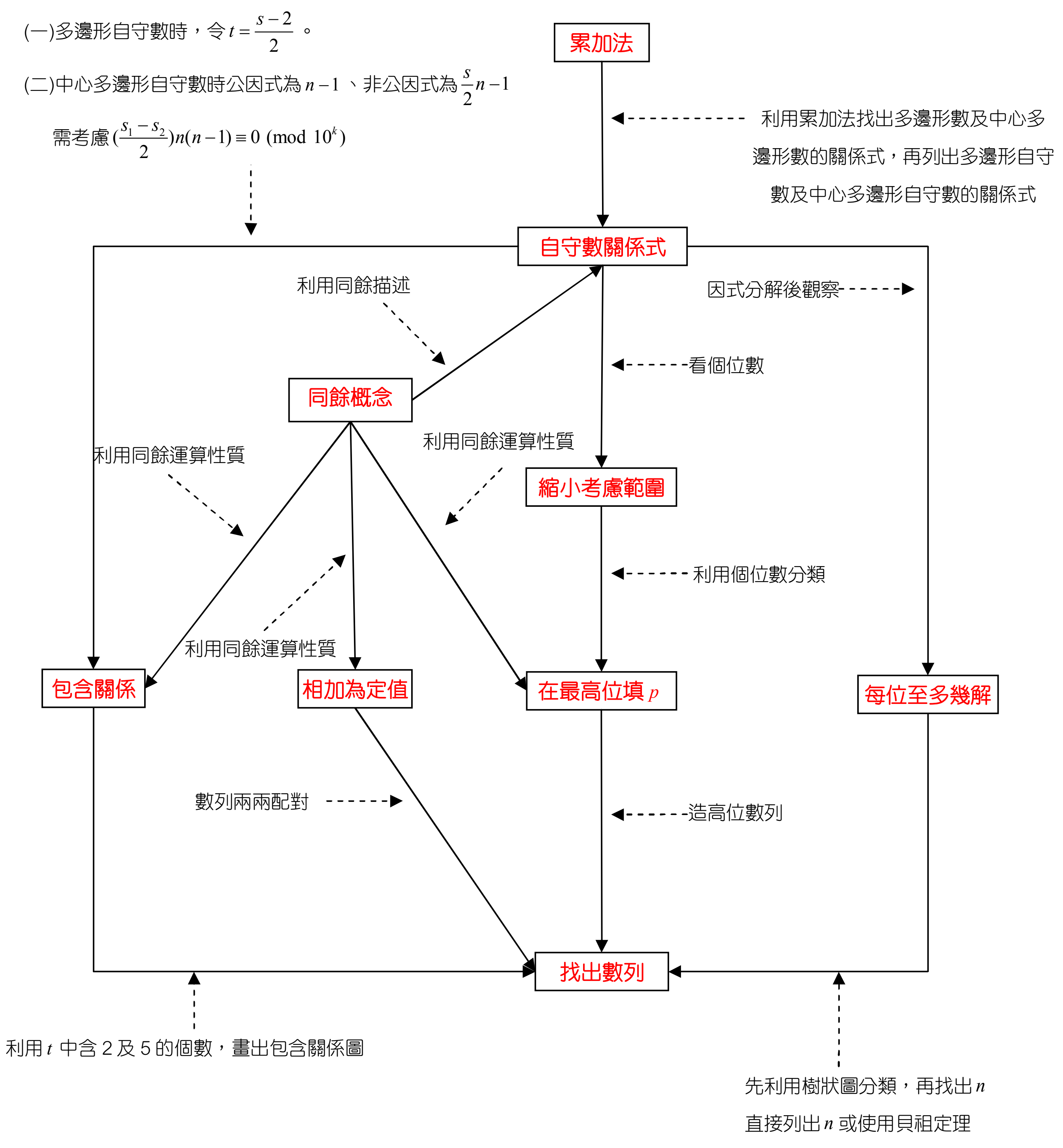
設n為一正整數，若n^2的尾數恰好為n，則稱n為一個平方自守數。

六、連續數字符號t_i：

設t為一 0 到 9 之間的正整數。定義$t_i=t\ t\ t\ t\cdots t$，下標的數字i代表t連續出現的次數。例如$4_5=44444$、$50_31=50001$。

伍、研究架構圖

本研究的架構圖如下，依循此脈絡能尋找任意多邊形及中心多邊形自守數：



陸、研究結果

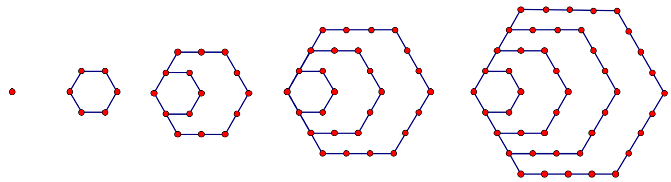
s 邊形自守數所符合的關係式：

如圖(以 $s=6$ 為例)，s 邊形數的第 n 個圖形，是第 $n-1$ 個圖形向外擴張，因此：

$$\begin{cases} S_s(1)=1 \\ S_s(n)=S_s(n-1)+(s-2)n-(s-3) \text{ ，} \forall n\geq 2 \text{ ，} n\in \mathrm{N} \end{cases}$$

$$=S_s(n-1)+(n-1)s-2n+3 \text{ ，} \forall n\geq 2 \text{ ，} n\in \mathrm{N}$$

使用累加法可以得到 $S_s(n)$ 如下：



$$S_s(1)=1$$

$$S_s(2)=S_s(1)+1\cdot s-2\cdot 2+3$$

$$S_s(3)=S_s(2)+2\cdot s-2\cdot 3+3$$

$$\vdots$$

$$+)\quad S_s(n)=S_s(n-1)+(n-1)s-2n+3$$

$$S_s(n)=1+\frac{n(n-1)}{2}s-2\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{2}+3(n-1)=\frac{1}{2}n[(s-2)n-(s-4)]$$

可知 $S_s(n)-n=\dfrac{s-2}{2}(n^2-n)$

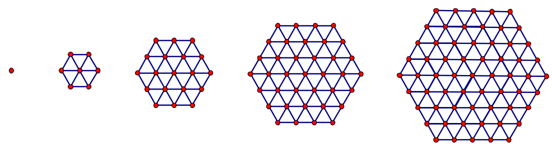
故 k 位數的 s 邊形自守數所符合的關係式為 $\dfrac{s-2}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$

中心 s 邊形自守數所符合的關係式：

如圖(以 $s=6$ 為例)，中心 s 邊形數的第 n 個圖形，是第 $n-1$ 個圖形向外擴張，因此：

$$\begin{cases} SC_s(1)=1 \\ SC_s(n)=SC_s(n-1)+(n-1)s \text{ ，} \forall n\geq 2 \text{ ，} n\in \mathrm{N} \end{cases}$$

使用累加法可以得到 $SC_s(n)$ 如下：



$$SC_s(1)=1$$

$$SC_s(2)=SC_s(1)+s$$

$$SC_s(3)=SC_s(2)+2s$$

$$\vdots$$

$$+)\quad SC_s(n)=SC_s(n-1)+(n-1)s$$

$$SC_s(n)=1+[1+2+\ldots+(n-1)]s=\frac{s}{2}n(n-1)+1$$

可知 $SC_s(n)-n=\dfrac{s}{2}n(n-1)-n+1=(\dfrac{s}{2}n-1)(n-1)$

故 k 位數的中心 s 邊形自守數所符合的關係式為 $(\dfrac{s}{2}n-1)(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}$

一、s邊形自守數的尋找

(一)四邊形自守數

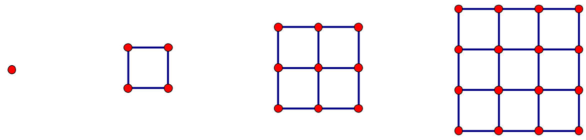


圖 3：四邊形堆疊

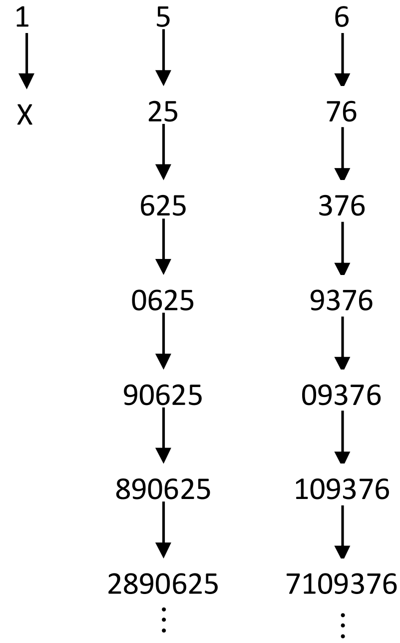


圖 4：平方自守數數列

$s=4$ 時，k 位數的四邊形自守數所符合的關係式為

$\frac{4-2}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k} \ \Rightarrow\ n^2-n\equiv 0 \pmod{10^k}$

注意 $n^2-n\equiv 0 \pmod{10^k}$ 符合平方自守數的定義(n 為 k 位數，平方後尾數仍為 n)，因此四邊形自守數即為平方自守數。

平方自守數的尋找已有諸多文獻，故不贅述。

(二)三角形自守數

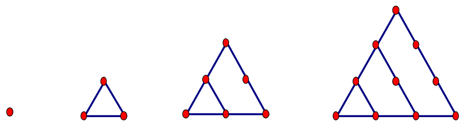


圖 5：三角形堆疊

$s=3$ 時，k 位數的三角形自守數所符合的關係式為 $\frac{1}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$

1.三角形自守數的個位數字只有可能是 0、1、5。

設 a_0 為 n 的個位數字，利用三角形自守數 n 滿足 $\frac{1}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$ 來檢驗：

若 $a_0=0$，則 $\frac{1}{2}(n^2-n)$ 的個位數為 0，故 $\frac{1}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$ 可能成立；

若 $a_0=1$，則 $\frac{1}{2}(n^2-n)$ 的個位數為 0，故 $\frac{1}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$ 可能成立；

若 $a_0=5$，則 $\frac{1}{2}(n^2-n)$ 的個位數為 0，故 $\frac{1}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$ 可能成立；

其餘當 $a_0=2,3,4,6,7,8,9$ 時，$\frac{1}{2}\times a_0{}^2-\frac{1}{2}\times a_0$ 的個位數均不為 0，

故三角形自守數的個位數字只有可能是 0、1、5。

2. 由平方自守數來進一步篩選三角形自守數

$s=3$ 時，三角形自守數的關係式為 $\frac{3-2}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k} \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$

(1)若 n 滿足 $\frac{1}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$，則 n 必滿足 $n^2-n\equiv 0 \pmod{10^k}$，故平方自守數的集合包含三角形自守數的集合。

(2)因為三角形自守數的個位數字只有可能是 0、1、5，故將個位數為 6 的平方自守數篩去。

(3) $\frac{1}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$ 比 $n^2-n\equiv 0 \pmod{10^k}$ 條件強在「除以 2 之後，末尾仍需有 k 個 0，故 n^2 的第 k+1 位數必須為偶數。

根據上述三點，我們可確定所有的三角形自守數列，如圖 7。

(三)五邊形自守數

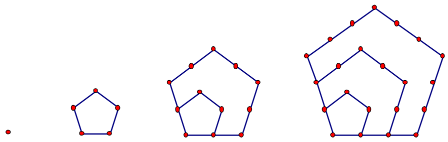
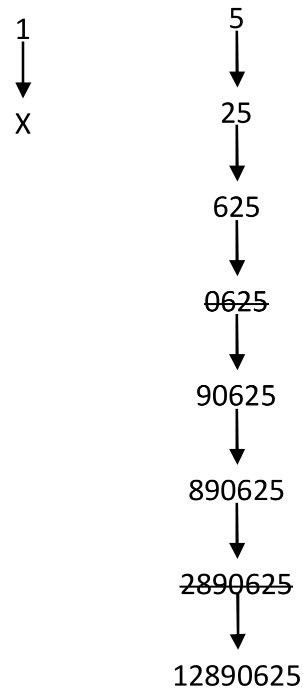


圖 6：五邊形堆疊



$s=5$時，k位數的五邊形自守數所符合的關係式為 $\frac{3}{2}(n^2-n)\equiv 0\ (\text{mod}\ 10^k)$

1.三角形自守數與五邊形自守數是同一個集合。

$s=3$時，k位數三角形自守數需滿足 $\frac{1}{2}(n^2-n)\equiv 0\ (\text{mod}\ 10^k)$

$s=5$時，k位數五邊形自守數需滿足 $\frac{3}{2}(n^2-n)\equiv 0\ (\text{mod}\ 10^k)$

當$\frac{1}{2}(n^2-n)$的末尾有 k 個 0 時，$\frac{3}{2}(n^2-n)$末尾亦有 k 個 0；

反之，因為乘上 3 倍不影響 0 的個數(只有乘以 2 或 5 才有可能增加)，

故當$\frac{3}{2}(n^2-n)$的末尾有 k 個 0 時，$\frac{1}{2}(n^2-n)$末尾亦有 k 個 0，

因此三角形自守數與五邊形自守數是同一個集合。

圖 7：三角形自守數與五邊形自守數數列

(四)六邊形自守數

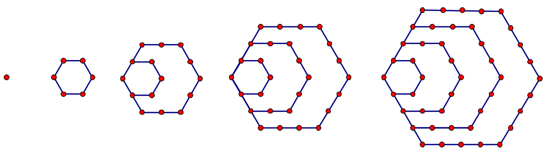


圖 8：六邊形堆疊

$s=6$時，k位數六邊形數$S_6(n)=2n^2-n$；

k位數六邊形自守數所符合的關係式為$2(n^2-n)\equiv 0\ (\text{mod}\ 10^k)$

1. 六邊形自守數的個位數字只有可能是 1、5、6、0。

設a_0為n的個位數字，利用六邊形自守數n滿足$2n^2-2n\equiv 0\ (\text{mod}\ 10^k)$來檢驗：

若$a_0=0$，則$2\times 0^2-2\times 0$的個位數為 0，故$2n^2-2n\equiv 0\ (\text{mod}\ 10^k)$可能成立；

若$a_0=1$，則$2\times 1^2-2\times 1$的個位數為 0，故$2n^2-2n\equiv 0\ (\text{mod}\ 10^k)$可能成立；

若$a_0=5$，則$2\times 5^2-2\times 5$的個位數為 0，故$2n^2-2n\equiv 0\ (\text{mod}\ 10^k)$可能成立；

若$a_0=6$，則$2\times 6^2-2\times 6$的個位數為 0，故$2n^2-2n\equiv 0\ (\text{mod}\ 10^k)$可能成立；

其餘當$a_0=2,3,4,7,8,9$時，$2\times {a_0}^2-2\times a_0$的個位數均不為 0，

故三角形自守數的個位數字只有可能是 0、1、5、6。

2. 若n為一個k位數的六邊形自守數，則(10^k+1-n)亦為一個k位數的六邊形自守數。

猜測源於將k位數的六邊形自守數兩兩配對相加，恰好都會得到10^k+1的結果，如圖 9 中的例子，可以發現$125+876=1001$、$376+625=1001$、$500+501=1001$。

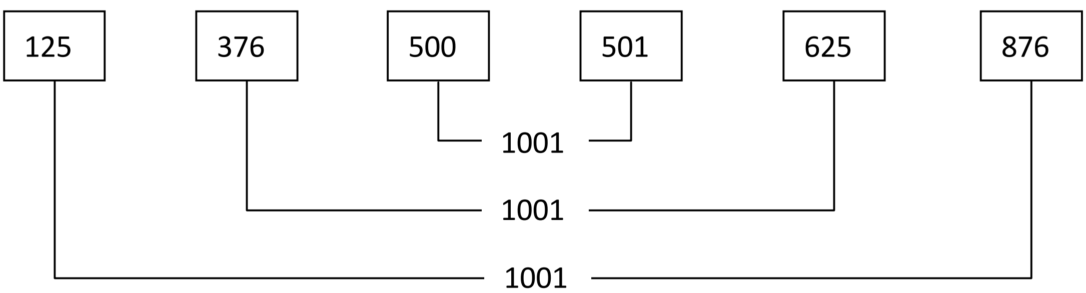


圖 9：6 個三位數的六邊形自守數，兩兩配對相加的結果皆為 1001

設 n 為一個 k 位數的六邊形自守數，則有 $2n^2-2n\equiv 0 \pmod{10^k}$，

故 $\quad 2(10^k+1-n)^2-2(10^k+1-n)$

$\equiv 2[10^{2k}+1+n^2+2\times 10^k-2n-2n\times 10^k]-2\times 10^k-2+2n$

$\equiv 2[n^2-2n+1]-2+2n$

$\equiv 2n^2-2n\equiv 0 \pmod{10^k}$

因此 (10^k+1-n) 也會是一個 k 位數的六邊形自守數。

3.每位數中至多會有 6 個六邊形自守數。

設 n 為 k 位數的六邊形自守數，則 $2n^2-2n\equiv 0 \pmod{10^k} \;\Rightarrow\; 10^k \mid 2n^2-2n$

$\Rightarrow\; 2^{k-1}\times 5^k \mid n(n-1)$

$\Rightarrow\; 5^k \mid n$ 或 $5^k \mid n-1$ ；且 $2^{k-1}\mid n$ 或 $2^{k-1}\mid n-1$。

將上述條件分為四種情形討論如下：

若 $5^k \mid n$，可令 $n=5^k x$、$n-1=5^k x-1$，其中 $\dfrac{10^{k-1}}{5^k}<x<2^k$，$x\in\mathrm{N}$。

(1)若 $2^{k-1}\mid 5^k x$，則 $x=2^{k-1} \;\Rightarrow n=5^k\times 2^{k-1} \;\Rightarrow$ **(1)恰有一個解**

(2)若 $2^{k-1}\mid 5^k x-1$，根據關於整數的貝祖定理，

(Bezout´s identity：設 a,b,m 均為整數，則 $(a,b)\mid m \Leftrightarrow ax+by=m$ 有整數解 (x,y))

必有滿足此關係的最小正整數解 x_1，且下一個滿足此關係的正整數解 $x_2=x_1+2^{k-1}$

由於 $x<2^k$，因此若 $x_1<2^{k-1}$，則 $x_2=x_1+2^{k-1}<2^k \;\Rightarrow x_2$ 存在；

若 $x_1>2^{k-1}$，則 $x_2=x_1+2^{k-1}>2^k \;\Rightarrow x_2$ 不存在； $\Rightarrow$ **(2)至多兩個解**

若 $5^k \mid n-1$，可令 $n=5^k y+1$、$n-1=5^k y$，其中 $\dfrac{10^{k-1}}{5^k}<y<2^k$，$y\in\mathrm{N}$。

(3)若 $2^{k-1}\mid 5^k y$，則 $y=2^{k-1} \;\Rightarrow n=5^k\times 2^{k-1}+1 \;\Rightarrow$ **(3)恰有一個解**

(4)若 $2^{k-1}\mid 5^k y+1$，根據貝祖定理，

必有滿足此關係的最小正整數解 y_1，且下一個滿足此關係的正整數解 $y_2=y_1+2^{k-1}$

由於 $y<2^k$，因此若 $y_1<2^{k-1}$，則 $y_2=y_1+2^{k-1}<2^k \;\Rightarrow y_2$ 存在；

若 $y_1>2^{k-1}$，則 $y_2=y_1+2^{k-1}>2^k \;\Rightarrow y_2$ 不存在； $\Rightarrow$ **(4)至多兩個解**

由上述的(1)(2)(3)(4)，每位數中的六邊形自守數至多有 $1+2+1+2=6$ 個。

4. k位數的六邊形自守數必有50_{k-1}及$50_{k-2}1$。

在上述的第 3. 點的(1)(3)中，我們可以發現 k 位數的六邊形自守數一定會有下列兩個：

$n=5^k\times 2^{k-1}$	$n=5^k\times 2^{k-1}+1$
$\Rightarrow\; n=5\times 10^{k-1}$	$\Rightarrow\; n=5\times 10^{k-1}+1$
$\Rightarrow\; n=50_{k-1}$	$\Rightarrow\; n=50_{k-2}1$

因此 k 位數的六邊形自守數必有 50_{k-1} 及 $50_{k-2}1$，且其和恰為 $10_{k-1}1$，恰為兩兩配對的同一組。

5. 若n是一個平方自守數，則n是一個六邊形自守數；反之不一定成立。

平方自守數的定義為「設 n 為一正整數，若 n^2 的尾數恰好為 n，則稱 n 為一個平方自守數。」若 n 為 k 位數，我們會得到平方自守數所滿足的式子為 $n^2-n\equiv 0 \pmod{10^k}$。

注意若 $n^2-n\equiv 0 \pmod{10^k} \;\Rightarrow 2n^2-2n\equiv 0 \pmod{10^k}$，平方自守數符合六邊形自守數的形式。也就是說，若 n 是一個平方自守數，那麼 n 一定是一個六邊形數。

但是由 $2n^2-2n\equiv 0 \pmod{10^k}$ 並無法推得 $n^2-n\equiv 0 \pmod{10^k}$，因此六邊形自守數不一定是平方自守數。可見六邊形自守數的數量，要比平方自守數來得多。

6.個位數為 5 的六邊形自守數主幹及其分支

將個位數為 5 的六邊形自守數收集起來，發現形成一條可持續衍生發展的「主幹」，以及每位數主幹衍生出來的「分支」，這個分支無法由既有的所有位數持續衍生發展，如圖 10。

進一步我們發現，同位數的分支與主幹間，最高位數字也存在著總是相差 5 的規律。下列將對於上述兩個現象加以說明，並據此推導出兩條無窮的六邊形自守數數列。

設 a_i 表個位數為 5 的六邊形自守數主幹中，第 i 位數的值、

A_k 表個位數為 5 的六邊形自守數主幹中，k 位數的六邊形自守數

因此 $A_k=\sum_{i=1}^{k}10^{i-1}a_i$ 。

(例如 $a_1=5$ 、 $a_2=2$ 、 $a_3=6$ 、…

$A_1=a_1=5$ 、 $A_2=25$ 、 $A_3=625$ 、…可衍生的主幹)

B_k 表個位數為 5 的六邊形自守數分支中，k 位數的六邊形自守數

b_k 表個位數為 5 的六邊形自守數分支中，第 k 位數的值；

(例如 $A_1=B_1=5$ 、 $B_2=75$ 、 $B_3=125$ 、…不可衍生的分支、

$b_1=a_1=5$ 、 $b_2=7$ 、 $b_3=1$ 、…)

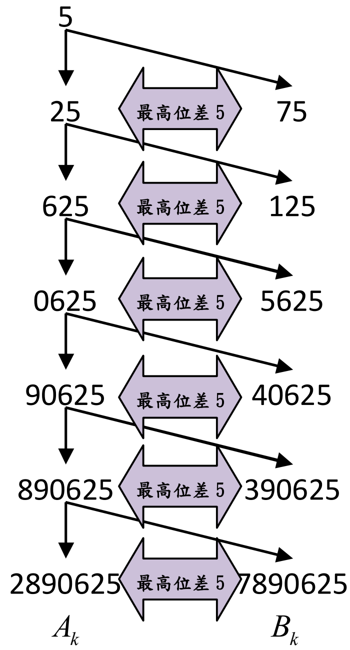


圖 10：個位數為 5 的六邊形自守數出現規律

造出這系列六邊形自守數的方式如下列的性質。

> 性質甲：$\forall k\in \mathrm{N}$ ，
>
> $A_{k+1}=[A_k^{\,2}\text{之第}k+1\text{位數}]\times 10^k+A_k=[(\sum_{i=1}^{k}10^{i-1}a_i)^2\text{之第}k+1\text{位數}]\times 10^k+\sum_{i=1}^{k}10^{i-1}a_i$ ；
>
> $B_{k+1}=[A_k^{\,2}\text{之第}k+1\text{位數}\pm 5]\times 10^k+A_k=[(\sum_{i=1}^{k}10^{i-1}a_i)^2\text{之第}k+1\text{位數}\pm 5]\times 10^k+\sum_{i=1}^{k}10^{i-1}a_i$
>
> 意即 $a_{k+1}=[A_k^2\text{之第}k+1\text{位數}]$ 、 $b_{k+1}=[A_k^2\text{之第}k+1\text{位數}\pm 5]$ 。

說明：

(1)<1>只有 1 位數的六邊形自守數可寫為 $A_1=a_1=\sum_{i=1}^{1}10^{i-1}a_i=5$ 。

<2>設 k 位數的六邊形自守數主幹可寫為 $A_k=\sum_{i=1}^{k}10^{i-1}a_i$ ，$\forall k\geq 1$ 。

今欲造出 $k+1$ 位數的六邊形自守數的主幹及分支(即尋找 a_{k+1} 及 b_{k+1} 的值)：

令 $A_{k+1}=10^k p+A_k$ ，其中 p 為 $0\sim 9$ 的整數。

則 $S_6(A_{k+1})=2(10^k p+A_k)^2-(10^k p+A_k)$

$=\underbrace{2\times 10^{2k}\times p^2}_{①}+\underbrace{4\times 10^k\times p\times A_k}_{②}+2A_k^2-\underbrace{10^k p-A_k}_{③}$

①因為 $2\times 10^{2k}\times p^2$ 末尾至少有 $2k$ 個零，所以 $2\times 10^{2k}\times p^2$ 的第 $k+1$ 位數為零；

②若 $p=0$ ，則 $4\times 10^k\times p\times A_k$ 的第 $k+1$ 位數為零、

若 $p\neq 0$ ，則 $4\times A_k$ 至少有 1 個零 $\Rightarrow 4\times 10^k\times p\times A_k$ 的第 $k+1$ 位數為零；

③因為 A_k 只有 k 位數，所以 A_k 的第 $k+1$ 位數為零。

因為 $S_6(A_{k+1})$ 的第 $k+1$ 位數必須為 p ，且第①②③部份不需考慮，

故 $2\times[A_k^2\text{之第}k+1\text{位數}]-p\equiv p \pmod{10}$

$\Rightarrow 2\times[A_k^2\text{之第}k+1\text{位數}]-2p\equiv 0 \pmod{10}$

$\Rightarrow 5 \mid [A_k^2$之第$k+1$位數$]-p$

則我們可以有兩種 p 可以取，第一種是 $p=[A_k^2$之第$k+1$位數$]$；

第二種是當$[A_k^2$之第$k+1$位數$]\geq 5$ 時，取 $p=[A_k^2$之第$k+1$位數$]-5$

當$[A_k^2$之第$k+1$位數$]<5$ 時，取 $p=[A_k^2$之第$k+1$位數$]+5$

過程中可知<1> 1 位數的六邊形自守數主幹，即 $A_1=a_1=5$；

<2>k 位數的六邊形自守數主幹 A_k 能造出兩個 $k+1$ 位數的六邊形自守數。

因此六邊形自守數有無限多個。

(2)令 $r=[A_k^2$之第$k+1$位數$]$ (第一種取法)、

$$s=\begin{cases}[A_k^2\text{之第}k+1\text{位數}]-5\text{ ，當}[A_k^2\text{之第}k+1\text{位數}]\geq 5\text{ 時；}\\ [A_k^2\text{之第}k+1\text{位數}]+5\text{ ，當}[A_k^2\text{之第}k+1\text{位數}]<5\text{ 時。}\end{cases}$$ (第二種取法)：

<1>現在已知$10^k r+A_k=[A_k^2$之第$k+1$位數$]\times 10^k+A_k$

為一個 $k+1$ 位數的六邊形自守數。

現再取$u=\underbrace{[(10^k r+A_k)^2\text{之第}k+2\text{位數}]\times 10^{k+1}}_{\text{至少}k+1\text{個零}}+(10^k r+A_k)$

則u為一個 $k+2$ 位數的六邊形自守數，且u的末$k+1$位剛好是$10^k r+A_k$。

<2>同樣$10^k s+A_k$亦為$k+1$位數的六邊形自守數。

現再取$v=[(10^k s+A_k)^2$之第$k+2$位數$]\times 10^{k+1}+(10^k s+A_k)$

則v並不會是一個六邊形自守數。

另一方面$[(10^k s+A_k)^2$之末$k+2$位數$]$也是一個六邊形自守數，且其值恰為：

$(u\pm 5)\times 10^{k+1}=[(10^k r+A_k)^2$之第$k+2$位數$\pm 5]\times 10^{k+1}+(10^k r+A_k)$。

根據我們對於數列$\langle a_i \rangle$、$\langle b_i \rangle$的定義，由<1><2>可知$r=a_{k+1}$、$s=b_{k+1}$。

綜合(1)(2)得到性質甲成立。因為我們可以不斷利用既有的六邊形自守數，造出更高一位的 5 系列六邊形自守數，因此 5 系列的六邊形自守數有無限多個。

性質乙：A_k 數列就是「個位數為 5 的平方自守數數列」。

說明：

平方自守數除了個位數的 1 以外，可以分為「個位數為 5 者」以及「個位數為 6 者」。

我們發現個位數為 5 的平方自守數數列與 A_k 相同。

設M_k為一個個位數為 5 的 k 位平方自守數，因此會有$M_k^2-M_k\equiv 0 \pmod{10^k}$。

今欲造出$k+1$位數的平方自守數，令$M_{k+1}=10^k x+M_k$，其中 x 為$0\sim 9$的整數，則：

$$(10^k x+M_k)^2-(10^k x+M_k)$$
$$=\underbrace{10^{2k}x^2}_{①}+\underbrace{2\cdot 10^k x\cdot M_k}_{②}+M_k^2-10^k x\underbrace{-M_k}_{③}$$

①因為$10^{2k}x^2$末尾至少有$2k$個零，所以$10^{2k}x^2$的第$k+1$位數為零；

②若$x=0$，則$2\cdot 10^k x\cdot M_k$的第$k+1$位數為零、

若$x\neq 0$，則$2\times M_k$至少有1個零 $\Rightarrow 2\cdot 10^k x\cdot M_k$ 的第$k+1$位數為零；

③因為M_k只有k位數，所以M_k的第$k+1$位數為零。

因為$M_{k+1}=10^k x+M_k$的第$k+1$位數必須為x，且第①②③部份不需考慮，

故$[M_k^2$之第$k+1$位數$]-x\equiv 0 \pmod{10}$

$\Rightarrow 10 \mid [M_k^2$之第$k+1$位數$]-x$，所以必須將 x 取為$[M_k^2$之第$k+1$位數$]$。

由於M_k為平方自守數，所以M_k^2的末k 位數即為M_k。按照 x 的取法，我們可以得知：

$M_{k+1}=10^k x+M_k=[M_k^2$之末$k+1$位數$]$。

並且從式子中發現：x 的取法，與性質甲中 p 的第一種取法相同；又因為 $A_1=M_1=5$，故可得知 A_k 數列即為 M_k 數列。也就是說，A_k 數列就是「個位數為 5 的平方自守數數列」。

> 性質丙：
> (1) $A_{k+1}=[A_k{}^2$之末$k+1$位數$]$，$\forall k\in\mathrm{N}$；
> (2) $B_{k+1}=[B_k{}^2$之末$k+1$位數$]$，$\forall k\geq 3$，$k\in\mathrm{N}$。($B_1=5$、$B_2=75$、$B_3=125$)

說明：

(1)根據性質乙，因為 A_k 數列就是「個位數為 5 的平方自守數數列 M_k」，且 $M_{k+1}=[M_k^2$之末$k+1$位數$]$。所以 A_k 數列亦滿足 $A_{k+1}=[A_k{}^2$之末$k+1$位數$]$。

(2)<1>(B_k^2 的末 $k+1$ 位數與 A_{k+1} 相異)

因為 $B_k=(a_k\pm 5)\times 10^{k-1}+A_{k-1}$

所以 $B_k^2=(10^{k-1}a_k\pm 5\times 10^{k-1}+A_{k-1})^2$

$=10^{2k-2}a_k^2+25\times 10^{2k-2}+A_{k-1}^2\pm 10^{2k-1}a_k\pm 10^k A_{k-1}+2\times 10^{k-1}a_k A_{k-1}$

現欲觀察 B_k^2 的末 $k+1$ 位數，故要求 $2k-2\geq k+1\ \Rightarrow k\geq 3$。

在 $k\geq 3$ 的前提下，可知 B_k^2 的末 $k-1$ 位數必定為 A_{k-1}；

但是第 k 位數及第 $k+1$ 位數則與 A_{k+1} 相異。

<2>(B_k^2 的末 $k+1$ 位數是一個六邊形自守數)

已知 B_k 為一六邊形自守數，故 $2B_k^2-2B_k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 10^k)$。

注意 B_k^2 的末 $k+1$ 位數可表示為 $B_k^2-[\frac{B_k^2}{10^{k+1}}]\times 10^{k+1}$，並且因為：

$$2(B_k^2-[\frac{B_k^2}{10^{k+1}}]\times 10^{k+1})^2-2(B_k^2-[\frac{B_k^2}{10^{k+1}}]\times 10^{k+1})$$

$$\equiv \underbrace{2B_k^4-2B_k^2}_{①}\equiv \underbrace{(B_k^2+B_k)}_{②}(2B_k^2-2B_k)$$

①因為 B_k^2 與 B_k 個位數都為 5，所以相加至少有 1 個零；

② $2B_k^2-2B_k$ 末尾至少有 k 個零。

$\Rightarrow$ 相乘後至少有 $k+1$ 個零。

$\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 10^{k+1})$

即 B_k^2 的末 $k+1$ 位數，$k\geq 3$ 所形成的數列，亦是一個六邊形自守數數列。

<3>(個位數為 5 的六邊形自守數數列只會有相異兩條)

回顧性質甲中，第 $k+1$ 位數的 p 值只有兩種相異的取法：

$p=[A_k^2$之第$k+1$位數$]$ 或是 $p=[A_k^2$之第$k+1$位數$\pm 5]$其一。

因此個位數為 5 的六邊形自守數數列，只會有相異的兩條數列 A_k 與 B_k。

綜合上述的<1><2><3>點，可得由 B_k^2 的末 $k+1$ 位數，$k\geq 3$ 所形成的數列，是一個與 A_k 相異的六邊形自守數數列，又因為個位數為 5 的六邊形自守數數列，只會有相異兩條。因此強迫「B_k^2 的末 $k+1$ 位數，$k\geq 3$ 所形成的數列」即為 B_k 數列。也就是說：

$B_{k+1}=[B_k{}^2$之末$k+1$位數$]$，$\forall k\geq 3$，$k\in\mathrm{N}$。

7.個位數為 6 的六邊形自守數主幹及其分支

我們仿照個位數為 5 時的定義，分別列出個位數為 6 的六邊形自守數中可衍生的主幹 C_k ，及不可衍生的分支 D_k ，如圖 11。

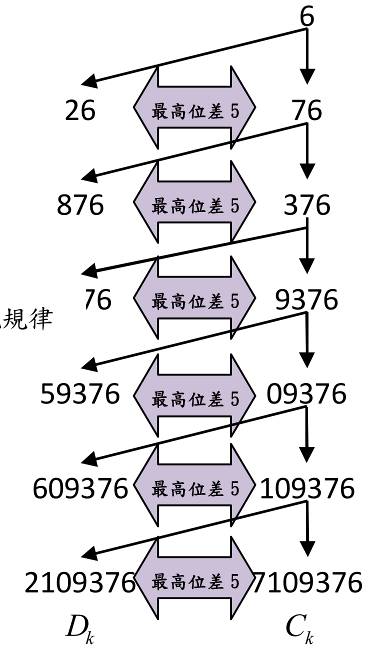


圖 11：個位數為 6 的六邊形自守數出現規律

設 c_i 表個位數為 6 的六邊形自守數主幹中，第 i 位數的值、
C_k 表個位數為 6 的六邊形自守數主幹中，k位數的六邊形自守數

因此 $C_k=\sum_{i=1}^{k}10^{i-1}c_i$ 。

(例如 $c_1=6$ 、 $c_2=7$ 、 $c_3=3$ 、$\cdots$ $C_1=c_1=6$ 、 $C_2=76$ 、 $C_3=376$ 、$\cdots$ 可衍生的主幹)

D_k 表個位數為 6 的六邊形自守數分支中，k位數的六邊形自守數
d_k 表個位數為 6 的六邊形自守數分支中，第 k 位數的值。
(例如 $C_1=D_1=6$、$D_2=26$、$D_3=876$、$\cdots$不可衍生的分支、$d_1=c_1=6$、$d_2=2$ 、 $d_3=8$ 、$\cdots$)

根據第(四)部份的第 2.點「若 n為一個k位數的六邊形自守數，則(10^k+1-n) 亦為一個k位數的六邊形自守數」，我們將個位數為 5 的兩條六邊形自守數列，及個位數為 6 的兩條六邊形自守數列對照，若將「相加為10^k+1」視為一種對應關係，則我們可以得到以下的性質丁。

> 性質丁：主幹的對應是主幹；分支的對應是分支。
> 亦即 (1) $A_k+C_k=10^k+1$ ； (2) $B_k+D_k=10^k+1$

也就是說，造出C_k 及 D_k 其實不再需要重新個別觀察規律。我們只需要先造出前述中，個位數為 5 的兩條六邊形自守數 A_k 及 B_k ，便可再利用性質丁造出C_k 及 D_k 。由於 A_k 及 B_k 皆為無窮的六邊形自守數列，故C_k 及 D_k 亦皆為無窮的六邊形自守數數列。
但也不一定得先從個位數為 5 的情形出發， C_k 及 D_k 同樣有類似於 A_k 及 B_k 的出現規則：

> 性質戊： $\forall k\in\mathrm{N}$ ，
> $C_{k+1}=[(10-C_k^2\text{之第}k+1\text{位數})\text{之個位數}]\times10^k+C_k$
> $D_{k+1}=[(10-C_k^2\text{之第}k+1\text{位數})\text{之個位數}\pm5]\times10^k+C_k$

證明方法類似，以下略。

> 性質己： C_k 數列就是「個位數為 6 的平方自守數數列」。

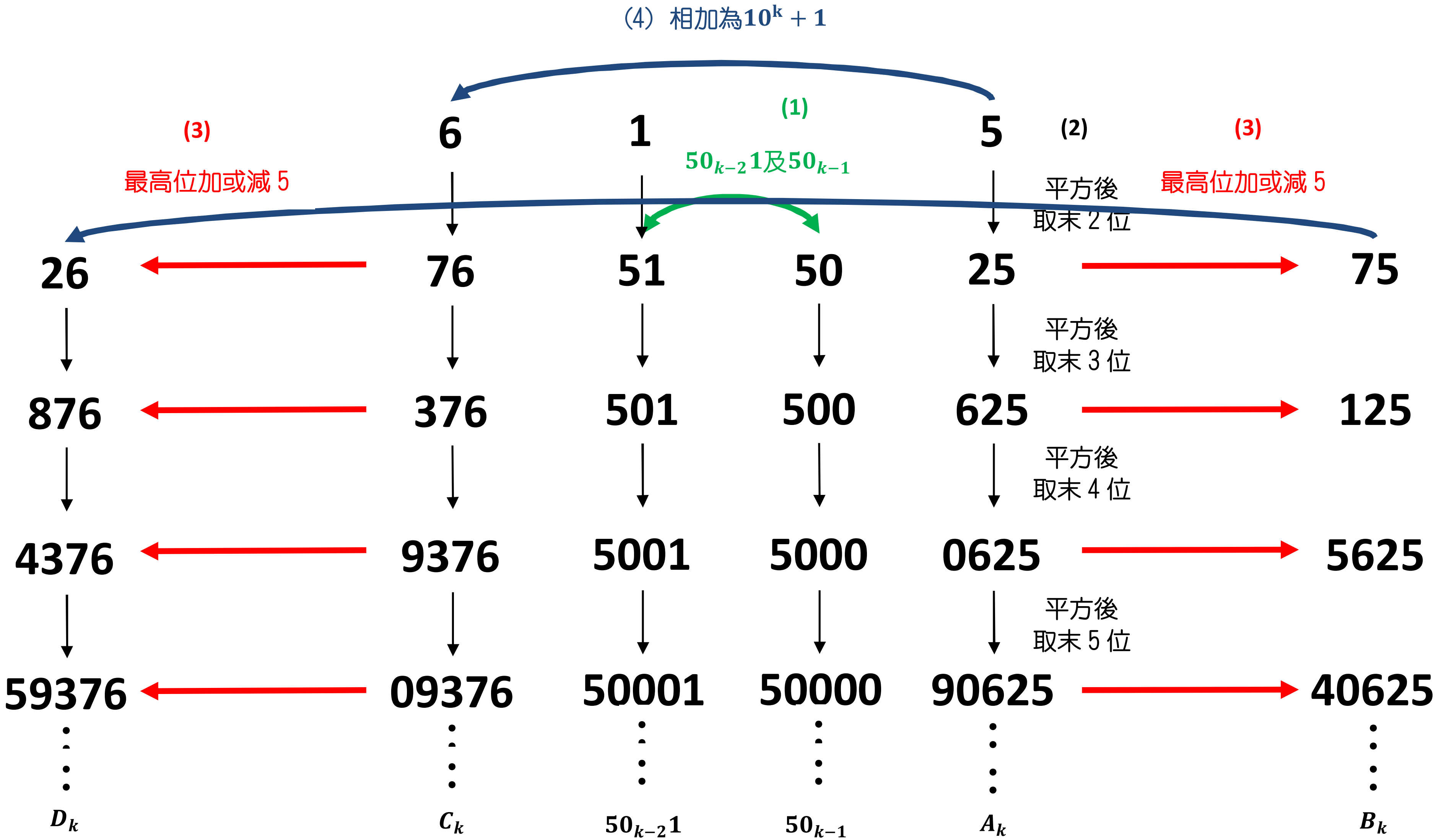
說明：

根據文獻中的資料「若 n 為一個 k 位數的平方自守數，則10^k+1-n 亦為一個 k 位數的平方自守數」。因前述性質乙中已證明 A_k 即為個位數為 5 的平方自守數數列，又因 $A_k+C_k=10^k+1$ ，故C_k 數列就是「個位數為 6 的平方自守數數列」。

8.小結：找出所有的六邊形自守數

根據性質甲~己，我們可以依下列的簡便程序，快速且不漏列地寫出所有的六邊形自守數：
(1)列出50_{k-1}及$50_{k-2}1$的六邊形自守數列；
(2)從個位數 5 出發，平方後取末 k 位，造出 k 位數的六邊形自守數 A_k ；
(3)將最高位加或減 5(但不能進或退位)，造出 k 位數的六邊形自守數 B_k ；
(4)將10^k+1分別減去 A_k 及 B_k 數列，得到 C_k 及 D_k 數列。

圖 12：六邊形自守數的完整尋找法



對於一個正整數位數的定義放寬，使得 0 也可以是當作首位數字(例如 0625 是四位數、09376 是五位數⋯)，根據(1)(2)(3)(4)，總共造出了 6 條相異的六邊形自守數無窮數列；另一方面我們也曾經證明，每位數至多存在 6 個六邊形自守數。**至此，我們能夠完全確定，自然數系中的所有六邊形自守數，就是本文所造出的 6 條數列，而不會有任何遺漏**，它們分別是：

A_k ：個位數為 5，持續衍生發展的主幹　B_k ：個位數為 5，由主幹衍生出的分支

C_k ：個位數為 6，持續衍生發展的主幹　D_k ：個位數為 6，由主幹衍生出的分支

$5\underbrace{0}_{k-1}$ ：首位為 5，持續增加 0 的個數　　$5\underbrace{0}_{k-2}1$ ：首位為 5 個位為 1，持續增加中間 0 的個數

二、中心s邊形自守數的尋找

(一)中心三角形自守數

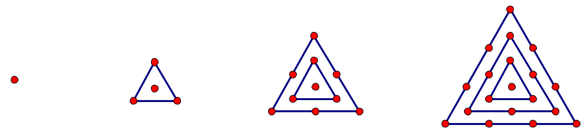


圖 13：中心三角形堆疊

$s=3$ 時， k 位數的中心三角形數為 $SC_3(n)=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1$

k 位數的中心三角形自守數所符合的關係式為 $(\frac{3}{2}n-1)(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}$

1.中心三角形自守數的個位數字只有可能是 1、6、9。

類似前述檢驗個位數的方法，設 a_0 為 n 的個位數字代入關係式，

可知當 $a_0=1,6,9$ 時， $(\frac{3}{2}a_0-1)(a_0-1)$ 的個位數字才會是 0。

2.2 位數以上時，每位數中至多會有 2 個中心三角形自守數。

設 n 為 k 位數的中心三角形自守數，則 $(\frac{3}{2}n-1)(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}$ $\Rightarrow 10^k|\frac{(n-1)(3n-2)}{2}$

$\Rightarrow 2^{k+1}\times 5^k|(n-1)(3n-2)$

$\Rightarrow 5^k|(n-1)$ 或 $5^k|(3n-2)$ ；且 $2^{k+1}|(n-1)$ 或 $2^{k+1}|(3n-2)$ 。

將上述條件分為四種情形討論如下:

若 $5^k|(n-1)$ ，可令 $n-1=5^k x$ $(n=5^k x+1)$、 $3n-2=3\times 5^k x+1$ ，其中 $\frac{10^{k-1}}{5^k}<x<2^k$ ， $x\in N$ 。

(1) 若 $2^{k+1}|5^k x$ ，則 x **無解**(∵範圍限制)

(2) 若 $2^{k+1}|3\times 5^k x+1$ ，根據關於整數的貝祖定理，必有滿足此關係的最小正整數解 x_1 ，且下一個滿足此關係式的正整數解 $x_2=x_1+2^{k+1}\not<2^k$ ，故無 x_2 $\Rightarrow$ **(2)至多一個解**

若 $5^k|(3n-2)$ ，令 $3n-2=5^k y$ $(n=\frac{5^k y+2}{3})$、 $n-1=\frac{5^k y-1}{3}$ ， $\frac{3\times 10^{k-1}-2}{5^k}<y<\frac{3\times 10^k-2}{5^k}$ ， $y\in N$ 。

(3) 若 $2^{k+1}|5^k y$ ，則 y **無解**(∵範圍限制)

(4) 若 $2^{k+1}|\frac{5^k y-1}{3}$ ，根據貝祖定理，必有滿足此關係的最小正整數解 y_1 ，且下一個滿足此關係式的正整數 $y_2=y_1+2^{k+1}\not<2^k$ ，故無 y_2 $\Rightarrow$ **(4)至多一個解**

由上述的(1)(2)(3)(4)，每位數中的中心三角形自守數至多有 **0+1+0+1=2 個**。

3.中心三角形自守數的出現規則

設k位數的中心三角形自守數為B_k，

今欲造出k+1位數的中心三角形自守數B_{k+1}，

令$B_{k+1}=10^k p+B_k$，其中p為$0\sim 9$的整數，則B_k具有下述性質。

性質：$\forall k\in \mathrm{N}$，

個位數為 1 者：p需滿足$10\mid \frac{1}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_k^{\ 2}-\frac{3}{2}B_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]$

個位數為 6 者：p需滿足$10\mid \frac{11}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_k^{\ 2}-\frac{3}{2}B_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]$

個位數為 9 者：p需滿足$10\mid \frac{9}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_k^{\ 2}-\frac{3}{2}B_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]$

說明：

令$B_{k+1}=10^k p+B_k$，其中p為$0\sim 9$的整數。

$$\text{則}SC_3(B_{k+1})=\frac{3}{2}\left[(10^k p+B_k)^2-(10^k p+B_k)\right]+1$$

$$=\underbrace{\frac{3}{2}10^{2k}p^2}_{①}+\underbrace{3\times 10^k p\times B_k}_{②}+\underbrace{\frac{3}{2}B_k^{\ 2}}_{③}-\underbrace{\frac{3}{2}10^k p}_{④}-\underbrace{\frac{3}{2}B_k}_{⑤}+\underbrace{1}_{⑥}$$

(一) B_k的個位數字為 1

觀察第$k+1$位數：

①、⑥的第$k+1$位數為 0

②考慮$3p$的個位數

③、⑤考慮$\frac{3}{2}B_k^{\ 2}-\frac{3}{2}B_k$的第$k+1$位數

④考慮$-\frac{3}{2}p$的個位數

$\Rightarrow \frac{3}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_k^{\ 2}-\frac{3}{2}B_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]\equiv p \pmod{10}$ $\Rightarrow 10\mid \frac{1}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_k^{\ 2}-\frac{3}{2}B_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]$

$\frac{1}{2}p$的個位數之值為 0~4，故$\frac{1}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_k^{\ 2}-\frac{3}{2}B_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]$的個位數之值需為 0 或 10

<i>$k=1$時，$B_1=1$，$\frac{1}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_1^{\ 2}-\frac{3}{2}B_1\text{的第2位數}\right]=0$

$\Rightarrow p=\left[\frac{3}{2}B_1^{\ 2}-\frac{3}{2}B_1\text{的第2位數}\right]=0$

<ii>$k=1$時，$B_1=1$，$\frac{1}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_1^{\ 2}-\frac{3}{2}B_1\text{的第2位數}\right]=10$

$\therefore p$無個位數的整數解

(二) B_k的個位數字為 6

觀察第$k+1$位數：

①、⑥的第$k+1$位數為 0

②考慮$18p$的個位數

③、⑤考慮$\frac{3}{2}B_k{}^2-\frac{3}{2}B_k$的第$k+1$位數

④考慮$-\frac{3}{2}p$的個位數

$\Rightarrow \frac{33}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_k{}^2-\frac{3}{2}B_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]\equiv p\ (\text{mod } 10)$ $\Rightarrow 10\mid \frac{11}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_k{}^2-\frac{3}{2}B_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]$

$\frac{11}{2}p$的個位數之值為 0~4，故$\frac{11}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_k{}^2-\frac{3}{2}B_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]$的個位數之值需為 0 或 10

<i>$k=1$時，$B_1=6$，$\frac{11}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_1{}^2-\frac{3}{2}B_1\text{的第2位數}\right]$=0

$\therefore p$ 無個位數的整數解

<ii>$k=1$時，$B_1=6$，$\frac{11}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_1{}^2-\frac{3}{2}B_1\text{的第2位數}\right]$=10

$\Rightarrow \frac{11}{2}p+4=10$

$\Rightarrow \frac{11}{2}p=6$

$\therefore p$ 無個位數的整數解，B_2不存在，故個位數為 6 的中心三角形自守數只有 6。

(三) B_k的個位數字為 9

第$k+1$位數：

①、⑥的第$k+1$位數為 0

②考慮$27p$的個位數

③、⑤考慮$\frac{3}{2}B_k{}^2-\frac{3}{2}B_k$的第$k+1$位數

④考慮$-\frac{3}{2}p$的個位數

$\Rightarrow \frac{51}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_k{}^2-\frac{3}{2}B_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]\equiv p\ (\text{mod } 10)$

$\Rightarrow 10\mid \frac{9}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_k{}^2-\frac{3}{2}B_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]$

注意$\frac{9}{2}p$的值為 9、8、7、6、0，故$\frac{9}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_k{}^2-\frac{3}{2}B_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]$的值需為 0 或 10

$k=1$時，$B_1=9$，$\frac{9}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_1{}^2-\frac{3}{2}B_1\text{的第2位數}\right]$=0 或 $\frac{9}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_1{}^2-\frac{3}{2}B_1\text{的第2位數}\right]$=10

$\Rightarrow p=\left[\frac{3}{2}B_1{}^2-\frac{3}{2}B_1\text{的第2位數}\right]=0$ 或 p 無個位數的整數解(捨棄)

$k=2$時，$B_2=09$，$\frac{9}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_2{}^2-\frac{3}{2}B_2\text{的第3位數}\right]$=0 或$\frac{9}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_2{}^2-\frac{3}{2}B_2\text{的第3位數}\right]$=10

$\therefore p$ 無個位數的整數解(捨棄) 或 p=2

$k=3$時，$B_3=209$，$\frac{9}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_3{}^2-\frac{3}{2}B_3\text{的第4位數}\right]$=0 或

$\frac{9}{2}p+\left[\frac{3}{2}B_3{}^2-\frac{3}{2}B_3\text{的第4位數}\right]$=10

$\therefore p$ 均無個位數的整數解。

4.小結：找出所有的中心三角形自守數

根據上述性質，可找到前 3 位的中心三角形自守數 B_k

但若直接考慮 B_5，即在 209 前一次填上 2 位數字，

可繼續得到 30209，故中心三角形自守數如圖 14 所示。

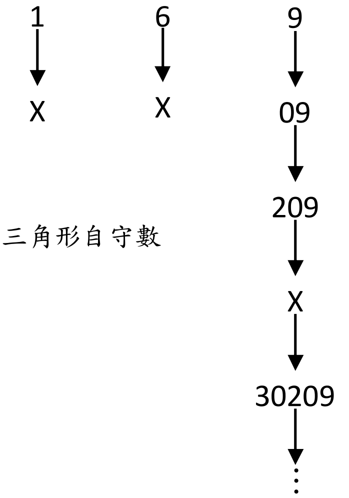


圖 14：中心三角形自守數

以下我們仿照同一套做法，找出中心四邊形自守數的出現規則。

(二)中心四邊形自守數

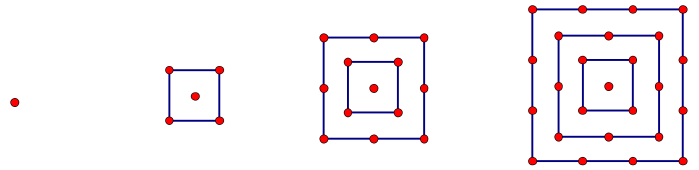


圖 15：中心四邊形堆疊

$s=4$ 時，k 位數的中心四邊形數為 $SC_4(n)=2n^2-2n+1$

k 位數的中心四邊形自守數所符合的關係式為 $(2n-1)(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}$

1.中心四邊形自守數的個位數字只有可能是 1、3。

類似前述檢驗個位數的方法，設 a_0 為 n 的個位數字代入關係式，

可知當 $a_0=1,3$ 時，$(2a_0-1)(a_0-1)$ 的個位數字才會是 0。

2.中心四邊形自守數的出現規則

設 k 位數的中心四邊形自守數為 A_k，

今欲造出 $k+1$ 位數的中心四邊形自守數 A_{k+1}，

令 $A_{k+1}=10^k p+A_k$，其中 p 為 $0\sim 9$ 的整數，則 A_k 具有下述性質。

性質：$\forall k\in \mathrm{N}$，

個位數為 1 者：p 需滿足 $10\,|\left[2A_k^{\ 2}-2A_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]+p$

個位數為 3 者：p 需滿足 $10\,|\left[2A_k^{\ 2}-2A_k\text{的第}k+1\text{位數}\right]-p$

證明手法類似，中心四邊形自守數如圖 16。

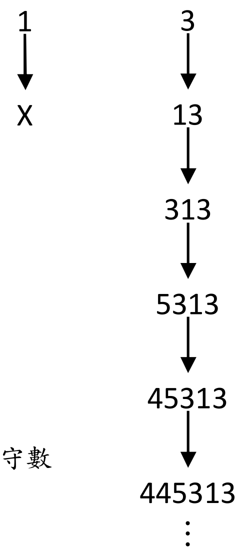


圖 16：中心四邊形自守數

(三)中心五邊形自守數

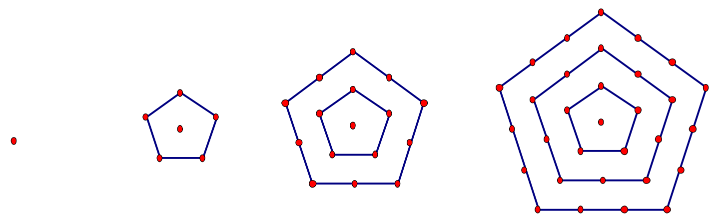


圖 17：中心五邊形堆疊

$s=5$ 時，k 位數的中心五邊形數為 $SC_5(n)=\frac{5}{2}n^2-\frac{5}{2}n+1$

k 位數的中心五邊形自守數所符合的關係式為 $(\frac{5}{2}n-1)(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}$

1.中心五邊形自守數的個位數字只有可能是 1、6。

類似前述檢驗個位數的方法，設 a_0 為 n 的個位數字代入關係式，

可知當 $a_0 = 1,6$ 時，$(\frac{5}{2}a_0 - 1)(a_0 - 1)$ 的個位數字才會是 0。

2.中心五邊形自守數的出現規則

設 k 位數的中心五邊形自守數為 A_k，今欲造出 $k+1$ 位數的中心五邊形自守數 A_{k+1}，

令 $A_{k+1} = 10^k p + A_k$，其中 p 為 $0 \sim 9$ 的整數，則 A_k 具有下述性質。

性質：$\forall k \in \mathrm{N}$，

個位數為 1 者：p 需滿足 $10 \mid \frac{3}{2}p + \left[\frac{5}{2}A_k^{\,2} - \frac{5}{2}A_k 的第 k+1 位數\right]$

個位數為 6 者：p 需滿足 $10 \mid -\frac{7}{2}p + \left[\frac{5}{2}A_k^{\,2} - \frac{5}{2}A_k 的第 k+1 位數\right]$

證明手法類似，中心五邊形自守數如圖 18。

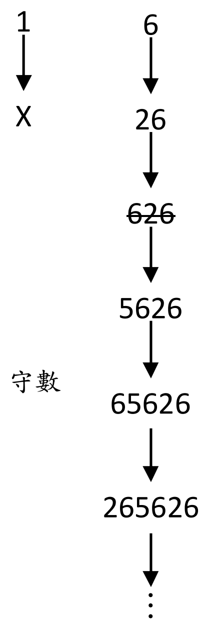


圖 18：中心五邊形自守數

(四) 中心六邊形自守數

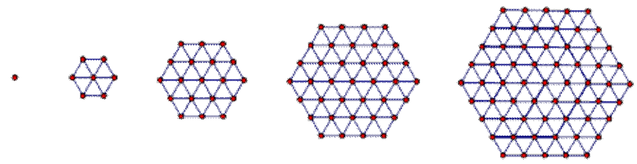


圖 19：中心六邊形堆疊

$s = 6$ 時，k 位數的中心六邊形數為 $SC_6(n) = 3n^2 - 3n + 1$

k 位數中心六邊形自守數需滿足 $(3n-1)(n-1) \equiv 0 \pmod{10^k}$

1.中心六邊形自守數的個位數字只有可能是 1、7。

類似前述檢驗個位數的方法，設 a_0 為 n 的個位數字代入關係式，

可知當 $a_0 = 1,7$ 時，$(3a_0 - 1)(a_0 - 1)$ 的個位數字才會是 0。

2.引理：關於 $(n-1)$ 與 $(3n-1)$ 的整除性質

$\forall k \in \mathrm{N}$，A. 5^k 不能同時整除 $n-1$ 及 $3n-1$；

B.若 $2^k \mid n-1$ 且 $2^k \mid 3n-1$，則 k 只能為 1；

C.當 $k \ge 2$ 時，若 n 的個位數是 1 或 7，並且 $2^k \mid (n-1)(3n-1)$，

則 $2^{k-1} \mid n-1$ 或 $2^{k-1} \mid 3n-1$ 恰有一個會成立。

說明：

A.假設 $\begin{cases} 5^k \mid n-1 \\ 5^k \mid 3n-1 \end{cases}$，因為 $5^k \mid n-1$，所以 $5^k \mid 3(n-1) \Rightarrow 5^k \mid 3n-3$。

兩式相減，可得 $5^k \mid 2$，

但 $k \ne 0$，故 $5^k \mid 2$ 不可能成立

由反證法得知 5^k 不能同時整除 $(n-1)$ 及 $(3n-1)$。

B.假設 $\begin{cases} 2^k \mid n-1 \\ 2^k \mid 3n-1 \end{cases}$，因為 $2^k \mid n-1$，所以 $2^k \mid 3(n-1) \Rightarrow 2^k \mid 3n-3$。

兩式相減，可得 $2^k \mid 2$，故 k 只能為 1。

C.因為 n 的個位數是 1 或 7，所以 $n-1$ 及 $3n-1$ 均為偶數。

若 $2^k \mid (n-1)(3n-1)$，根據上述 B.，要把 k 個 2 ，分給 $n-1$ 及 $3n-1$ 作為因數，
只能是下列兩種情況中的一種：
① $2^{k-1} \mid n-1$ 、 $2 \mid 3n-1$ ② $2^{k-1} \mid 3n-1$ 、 $2 \mid n-1$
故 $2^{k-1} \mid n-1$ 或 $2^{k-1} \mid 3n-1$ 恰有一個會成立。

3.每位數中至多會有 7 個中心六邊形自守數。

設 n 為 k 位數的中心六邊形自守數，則 $(n-1)(3n-1) \equiv 0 \pmod{10^k} \Rightarrow 10^k \mid (n-1)(3n-1)$
$\Rightarrow 2^k \times 5^k \mid (n-1)(3n-1)$
當 $k \ge 2$ 時，根據引理 A.與 C.，因為 $\forall k \in \mathrm{N}$ ， $5^k \mid n-1$ 及 $5^k \mid 3n-1$ 不能同時成立，
而且 $2^{k-1} \mid n-1$ 或 $2^{k-1} \mid 3n-1$ 也不能同時成立，
所以接下來我們分四種不會同時發生的情形進行討論：

若 $5^k \mid n-1$，可令 $n-1=5^k x \Rightarrow n=5^k x+1$，其中 $\frac{2^{k-1}}{5}-\frac{1}{5^k}<x<2^k-\frac{1}{5^k}$ ， $x \in \mathrm{N}$ 。

(1)若 $2^{k-1} \mid n-1$ ，即 $2^{k-1} \mid 5^k x$ ，故只能取 $x=2^{k-1}$ ，
$\Rightarrow n=5\times 10^{k-1}+1 \Rightarrow$ **(1)恰有一個解**

(2)若 $2^{k-1} \mid 3n-1$ ，即 $2^{k-1} \mid 3\times 5^k x+2$ ，根據關於整數的貝祖定理，
必有滿足此關係的最小正整數解 x_1 ，且下一個滿足此關係的正整數解 $x_2=x_1+2^{k-1}$
由於 $x<2^k$ ，因此若 $x_1<2^{k-1}$ ，則 $x_2=x_1+2^{k-1}<2^k \Rightarrow x_2$ 存在；
若 $x_1>2^{k-1}$ ，則 $x_2=x_1+2^{k-1}>2^k \Rightarrow x_2$ 不存在 $\Rightarrow$ **(2)至多兩個解**

若 $5^k \mid 3n-1$，可令 $3n-1=5^k y \Rightarrow n=\frac{5^k y+1}{3}$ ，其中 $\frac{3\times 10^{k-1}-1}{5^k}<y<\frac{3\times 10^k-1}{5^k}$ ， $y \in \mathrm{N}$ 。

(3)若 $2^{k-1} \mid n-1$ ，即 $2^{k-1} \mid \frac{5^k y-2}{3}$ ，根據關於整數的貝祖定理，
必有滿足此關係的最小正整數解 y_1 ，且下一個滿足此關係的正整數解 $y_2=y_1+3\times 2^{k-1}$
由於 $y<\frac{3\times 10^k-1}{5^k}$ ，因此若 $y_1<3\times 2^{k-1}$ ，則 $y_2=y_1+3\times 2^{k-1}<\frac{3\times 10^k-1}{5^k} \Rightarrow y_2$ 存在；
若 $y_1>3\times 2^{k-1}$ ，則 $y_2=y_1+3\times 2^{k-1}>\frac{3\times 10^k-1}{5^k} \Rightarrow y_2$ 不存在；
$\Rightarrow$ **(3)至多兩個解**

(4)若 $2^{k-1} \mid 3n-1$ ，即 $2^{k-1} \mid 3(\frac{5^k y+1}{3})-1 \Rightarrow 2^{k-1} \mid 5^k y$
$\Rightarrow y=2^{k-1}$ 或 $y=4\times 2^{k-1}=2^{k+1}$ (因為當 $y=2\times 2^{k-1}$ 或 $y=3\times 2^{k-1}$ 時， n 不是正整數)
$\Rightarrow n=\frac{5\times 10^{k-1}+1}{3}$ 或 $n=\frac{2\times 10^k+1}{3} \Rightarrow$ **(4)恰有兩個解**

由(1)(2)(3)(4)，每位數中的中心六邊形自守數至多為 $1+2+2+2=7$ 個解。

4.當 $k \ge 2$ 時，k位數的中心六邊形自守數必有 $50_{k-2}1$ 、 $16_{k-2}7$ 、 $6_{k-1}7$ 。

在上述第 3.點的(1)(4)中，我們發現 k 位數($k \ge 2$)的中心六邊形自守數一定會有下列三個：

$n=5\times 10^{k-1}+1$ $n=\frac{5\times 10^{k-1}+1}{3}$ $n=\frac{2\times 10^k+1}{3}$

$\Rightarrow n=50_{k-2}1$ $\Rightarrow n=16_{k-2}7$ $\Rightarrow n=6_{k-1}7$

因此 k 位數($k \ge 2$)的中心六邊形自守數必有 $50_{k-2}1$ 、 $16_{k-2}7$ 及 $6_{k-1}7$ 三個。
特別地比對前半部份，我們可以發現 $50_{k-2}1$ 既是六邊形自守數，也是中心六邊形自守數。

5.個位數為 1 的中心六邊形自守數主幹及其分支

我們嘗試將個位數為 1 的中心六邊形自守數收集起來並研究其出現規則，發現它們形成一條獨立的主幹 $50_{k-2}1$，並且還有另一條可持續衍生發展的主幹，以及每位數主幹衍生出來的分支，而這個分支無法由既有的所有位數持續衍生發展。在個位數為 1 的情況下共計形成 3 條無窮數列，如圖 20。

類似於六邊形自守數的情況，在中心六邊形自守數中，我們也觀察到同位數的分支與主幹之間，最高位數字也存在著總是相差 5 的規律。

在不同的關係式下，為什麼會有類似的結果呢？下列將對於上述的現象加以說明，並據此推導出除了 $50_{k-2}1$ 以外，其餘兩條中心六邊形自守數數列。

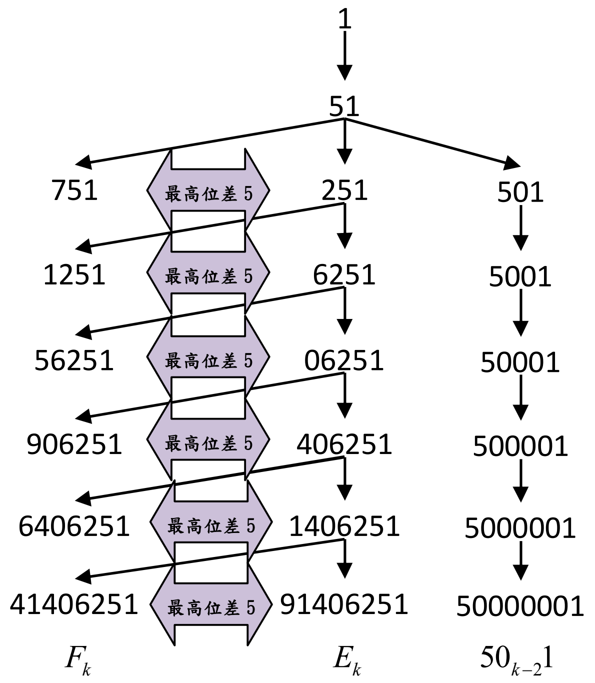


圖 20：個位數為 1 的中心六邊形自守數出現規律

設 E_k 表個位數為 1 的中心六邊形自守數主幹中，k 位數的中心六邊形自守數，

即 $E_1=1$ 、 $E_2=51$ 、 $E_3=251\cdots$

設 F_k 表個位數為 1 的中心六邊形自守數分支中，k 位數的中心六邊形自守數，

即 $E_1=F_1=1$ 、 $E_2=F_2=51$ 、 $F_3=751\cdots$

造出這系列中心六邊形自守數的方式如下列的性質庚、辛、壬。

> 性質庚：$\forall k\geq 2$ 、 $k\in\mathrm{N}$ ，設 p 為一個 $0\sim 9$ 之間的整數，若 $10^k p+E_k$ 為一個 $k+1$ 位數的中心六邊形自守數，則 p 必須滿足 $[3E_k^2-3E_k\text{的第}k+1\text{位數}]+2p\equiv 0 \pmod{10}$ 。

證明手法類似，個位數為 1 的中心六邊形自守數，如圖 20。

我們用一個例子來看這個性質：

當 $E_2=51$ 時， $3E_2^2-3E_2=7650$ ，同時 $[3E_2^2-3E_2\text{的第}2+1\text{位數}]=6$

若要使 $p51$ 為一個 3 位數的中心六邊形自守數，由性質庚知 p 必須滿足 $6+2p\equiv 0 \pmod{10}$ ，因此 $p=2$ 或 7 ，亦即 251 及 751 皆會是中心六邊形自守數。

由例子中可以發現，滿足 $[3E_k^2-3E_k\text{的第}k+1\text{位數}]+2p\equiv 0 \pmod{10}$ 的 p 值一定會有兩個解，而且這兩個 p 值相差固定為 5 ，我們將其簡記為 p 及 $p\pm 5$ (控制在 $0\sim 9$ 之間的整數)，因此 $k+1$ 位數的中心六邊形自守數就是 $10^k p+E_k$ 與 $10^k(p\pm 5)+E_k$ 。

> 性質辛：$\forall k\geq 2$ 、 $k\in\mathrm{N}$ ，若 $10^k p+E_k$ 及 $10^k(p\pm 5)+E_k$ 為 $k+1$ 位數的中心六邊形自守數，則
> $3[10^k p+E_k]^2-3[10^k p+E_k]$ 以及 $3[10^k(p\pm 5)+E_k]^2-3[10^k(p\pm 5)+E_k]$
> 這兩數的第 $k+2$ 位數必定為一奇一偶。

說明：

考慮這兩數的第 $k+2$ 位數及第 $k+1$ 位數：

(1) $3[10^k p+E_k]^2-3[10^k p+E_k]=3\times 10^{2k}p^2+6\times 10^k p\times E_k+3E_k^2-3\times 10^k p-3E_k$

它的第 $k+2$ 位數及第 $k+1$ 位數為

$[3p\text{之末二位數}]+[3E_k^2-3E_k\text{之第}k+2\text{位數及第}k+1\text{位數}]$

(2) $3[10^k(p\pm5)+E_k]^2-3[10^k(p\pm5)+E_k]=3\times10^{2k}(p\pm5)^2+6\times10^k(p\pm5)\times E_k+3E_k^2-3\times10^k(p\pm5)-3E_k$

它的第 $k+2$ 位數及第 $k+1$ 位數為

$[3p\pm15$的末二位數$]+[3E_k^2-3E_k$之第$k+2$位數及第$k+1$位數$]$

從 E_2 開始實際代入(1)(2)兩種情形(如圖 21)，發現對於任何的 k 值，這兩數的第 $k+2$ 位數及第 $k+1$ 位數不僅總是相差 15，而且第 $k+2$ 位數也總是相差 1。因此這兩數的第 $k+2$ 位數必為一奇一偶。

k	E_k	$10^k p+E_k$	$3(10^k p+E_k)^2-3(10^k p+E_k)$	$10^k(p\pm5)+E_k$	$3[10^k(p\pm5)+E_k]^2-3[10^k(p\pm5)+E_k]$
2	51	251	188250	751	1689750
3	251	6251	117206250	1251	4691250
4	6251	06251	117206250	56251	9492356250
5	06251	406251	495118406250	906251	2463869906250
6	406251	1406251	5932621406250	6406251	123120136406250
7	1406251	91406251	25065307891406250	41406251	5143432741406250
8	91406251	191406251	109909058191406250	691406251	1434127809691406250
9	191406251	1191406251	4258346561191406250	6191406251	115000534076191406250
10	1191406251	21191406251	1347227096621191406250	71191406251	1520464897177191406250
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

圖 21：$3[10^k p+E_k]^2-3[10^k p+E_k]$ 以及 $3[10^k(p\pm5)+E_k]^2-3[10^k(p\pm5)+E_k]$ 的第 $k+2$ 位數必定為一奇一偶。

性質壬：$\forall k\ge2$、$k\in\mathbb{N}$，若 $10^k p+E_k$ 及 $10^k(p\pm5)+E_k$ 為 $k+1$ 位數的中心六邊形自守數，則這兩數總是僅有一支能持續衍生更高位數的中心六邊形自守數。

說明：

根據性質庚，此時若要由 $10^k p+E_k$ 及 $10^k(p\pm5)+E_k$ 兩數出發，再衍生出 $k+2$ 位數的中心六邊形自守數，則必須找到 $0\sim9$ 之間的整數 q 及 r，使得：

$\{3[10^k p+E_k]^2-3[10^k p+E_k]$之第$k+2$位數$\}+2q\equiv0\pmod{10}$ --------------------ⓐ

$\{3[10^k(p\pm5)+E_k]^2-3[10^k(p\pm5)+E_k]$之第$k+2$位數$\}+2r\equiv0\pmod{10}$ ------------ⓑ

再根據性質辛，$3[10^k p+E_k]^2-3[10^k p+E_k]$ 以及 $3[10^k(p\pm5)+E_k]^2-3[10^k(p\pm5)+E_k]$ 這兩數的第 $k+2$ 位數必定為一奇一偶。故ⓐⓑ兩式只會有一個成立，而另一個不會成立，亦即 $10^k p+E_k$ 及 $10^k(p\pm5)+E_k$ 這兩數中，僅有一個能持續衍生更高位數的中心六邊形自守數(即成為 E_{k+1})，而另一個無法持續衍生(即成為 F_{k+1})。

故我們至此得到一個小結論：任何 k 位數中，個位數為 1 的中心六邊形自守數都會維持住只有三個，它們分別是主幹 E_k、分支 F_k，以及 $50_{k-2}1$。

6.個位數為 7 的中心六邊形自守數主幹及其分支

個位數為 7 的中心六邊形自守數，可由 67 開始，衍生出兩條獨立的主幹 $16_{k-2}7$ 與 $6_{k-1}7$。

並且還有另一條由 17 開始衍生的主幹，以及每位數主幹衍生出來的分支，而這個分支無法由既有的所有位數持續衍生發展。在個位數為 7 的情況下共計形成 4 條無窮數列。

觀察圖 22 右半部中，G_k 數列及 H_k 數列的產生方式：

設 G_k 表個位數為 7 的中心六邊形自守數主幹中，k 位數的中心六邊形自守數，

即 $G_1=7$、$G_2=17$、$G_3=417\cdots$

設 H_k 表個位數為 7 的中心六邊形自守數分支中，k 位數的中心六邊形自守數，

即 $G_1=H_1=7$、$G_2=H_2=17$、$H_3=917\cdots$

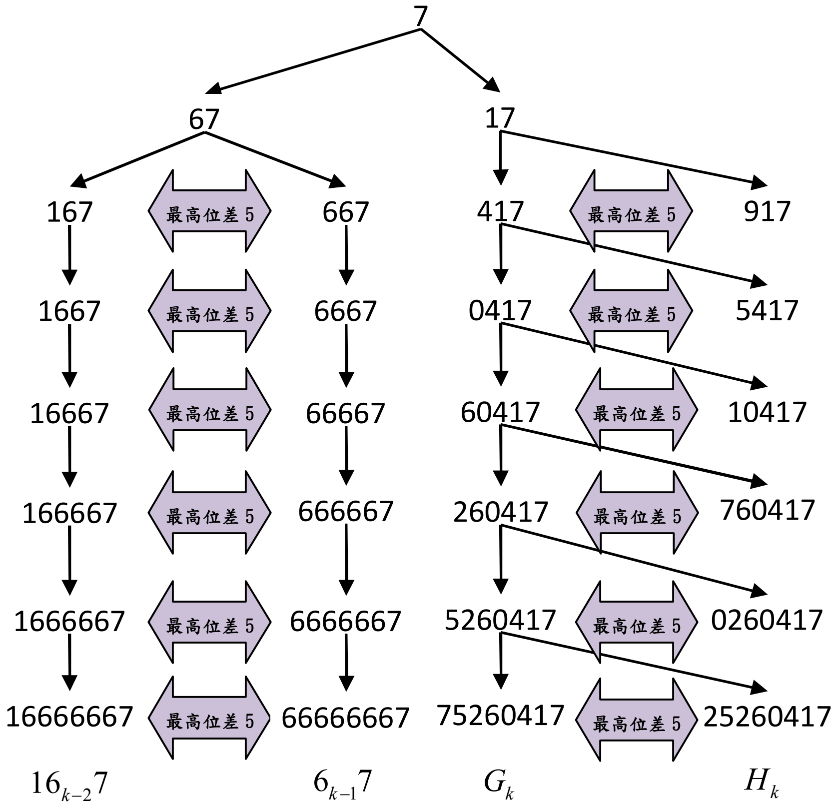


圖 22：個位數為 7 的中心六邊形自守數出現規律

造出這系列中心六邊形自守數的方式如下列的性質癸、子、丑。

> 性質癸：$\forall k \ge 2$、$k \in \mathrm{N}$，設 p 為一個 $0 \sim 9$ 之間的整數，若 $10^k p + G_k$ 為一個 $k+1$ 位數的中心六邊形自守數，則 p 必須滿足 $[3G_k^2 - 3G_k\text{的第}k+1\text{位數}] - 2p \equiv 0 \pmod{10}$。

證明手法類似，個位數為 7 的中心六邊形自守數如圖 22。

> 性質子：$\forall k \ge 2$、$k \in \mathrm{N}$，若 $10^k p + G_k$ 及 $10^k(p \pm 5) + G_k$ 為 $k+1$ 位數的中心六邊形自守數，則
> $3[10^k p + G_k]^2 - 3[10^k p + G_k]$ 以及 $3[10^k(p \pm 5) + G_k]^2 - 3[10^k(p \pm 5) + G_k]$
> 這兩數的第 $k+2$ 位數必定為一奇一偶。

說明：

考慮這兩數的第 $k+2$ 位數及第 $k+1$ 位數：

(1) $3[10^k p + G_k]^2 - 3[10^k p + G_k] = 3 \times 10^{2k} p^2 + 6 \times 10^k p \times G_k + 3G_k^2 - 3 \times 10^k p - 3G_k$

它的第 $k+2$ 位數及第 $k+1$ 位數為

$[2p\text{之末二位數}] - [3p\text{之末二位數}] + [3G_k^2 - 3G_k\text{之第}k+2\text{及第}k+1\text{位數}]$

$= [3G_k^2 - 3G_k\text{之第}k+2\text{及第}k+1\text{位數}] - p$

(2) $3[10^k(p \pm 5) + G_k]^2 - 3[10^k(p \pm 5) + G_k] = 3 \times 10^{2k}(p \pm 5)^2 + 6 \times 10^k(p \pm 5) \times G_k + 3G_k^2 - 3 \times 10^k(p \pm 5) - 3G_k$

它的第 $k+2$ 位數及第 $k+1$ 位數為

$[2(p \pm 5)\text{之末二位數}] - [3(p \pm 5)\text{之末二位數}] + [3G_k^2 - 3G_k\text{之第}k+2\text{及第}k+1\text{位數}]$

$= [3G_k^2 - 3G_k\text{之第}k+2\text{及第}k+1\text{位數}] - p \mp 5$

由(1)(2)，因為 $k+1$ 位需要當 $p \le 5$ 時取 $p-5$、當 $p \ge 5$ 時取 $p+5$，所以 $k+2$ 位一定會進或退位，使得這兩數的第 $k+2$ 位數必為一奇一偶。我們從 G_2 開始實際代入(1)(2)兩種情形觀察：

k	G_k	$10^k p+G_k$	$3(10^k p+G_k)^2-3(10^k p+G_k)$	$10^k(p\pm5)+G_k$	$3[10^k(p\pm5)+G_k]^2-3[10^k(p\pm5)+G_k]$
2	17	417	520416	917	2519916
3	417	0417	520416	5417	88015416
4	0417	60417	10950460416	10417	325510416
5	60417	260417	203450260416	760417	1734699760416
6	260417	5260417	83015945260416	0260417	203450260416
7	5260417	75260417	16992390875260416	25260417	1914265925260416
8	75260417	475260417	677617390475260416	975260417	2853398639975260416
9	475260417	5475260417	89935429885475260416	0475260417	677617390475260416
10	5475260417	45475260417	6203997929845475260416	95475260417	27346576054795475260416
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

圖 23：$3[10^k p+G_k]^2-3[10^k p+G_k]$ 以及 $3[10^k(p\pm5)+G_k]^2-3[10^k(p\pm5)+G_k]$ 的第 $k+2$ 位數必定為一奇一偶。

性質丑：$\forall k\geq 2$、$k\in\mathbb{N}$，若 $10^k p+G_k$ 及 $10^k(p\pm5)+G_k$ 為 $k+1$ 位數的中心六邊形自守數，則這兩數總是僅有一支能持續衍生更高位數的中心六邊形自守數。

說明：

類似性質壬，若要由 $10^k p+G_k$ 及 $10^k(p\pm5)+G_k$ 衍生出 $k+2$ 位數的中心六邊形自守數，則必須找到 $0\sim9$ 之間的整數 q 及 r，使得：

$\{3[10^k p+G_k]^2-3[10^k p+G_k]\text{之第}k+2\text{位數}\}-2q\equiv0\pmod{10}$ -------------------ⓐ

$\{3[10^k(p\pm5)+G_k]^2-3[10^k(p\pm5)+G_k]\text{之第}k+2\text{位數}\}-2r\equiv0\pmod{10}$ -----------ⓑ

由性質子可知，$3[10^k p+G_k]^2-3[10^k p+G_k]$ 及 $3[10^k(p\pm5)+G_k]^2-3[10^k(p\pm5)+G_k]$ 的第 $k+2$ 位數也是一奇一偶，故ⓐⓑ只會有一個成立，即 $10^k p+G_k$ 及 $10^k(p\pm5)+G_k$ 僅有一個能持續衍生更高位數的中心六邊形自守數(即成為 G_{k+1})，而另一個無法持續衍生(即成為 H_{k+1})。

故我們至此得到一個小結論：任何 k 位數中，個位數為 7 的中心六邊形自守數都會維持住四個，它們分別是主幹 G_k、分支 H_k，以及 $16_{k-2}7$、$6_{k-1}7$。

7.小結：找出所有的中心六邊形自守數

根據性質庚~丑，我們可以依下列的程序寫出所有的中心六邊形自守數(如下頁圖 24)：

(1)個位數為 1 的部份先列出 $50_{k-2}1$；個位數為 7 的部份先列出 $16_{k-2}7$ 及 $6_{k-1}7$；

(2)利用 $[3E_k^2-3E_k\text{的第}k+1\text{位數}]+2p\equiv0\pmod{10}$，造出個位數為 1 的 k 位數中心六邊形自守數(p 有兩解)；

(3)根據性質壬選出個位數為 1 的主幹 E_k 及分支 F_k；

(4)利用 $[3G_k^2-3G_k\text{的第}k+1\text{位數}]-2p\equiv0\pmod{10}$，造出個位數為 7 的 k 位數中心六邊形自守數(p 有兩解)；

(5)根據性質丑選出個位數為 7 的主幹 G_k 及分支 H_k。

由(1)至(5)共造出了 7 條相異的中心六邊形自守數無窮數列；而且我們也曾經證明，每位數至多存在 7 個六邊形自守數。**至此，我們能夠完全確定，自然數系中的所有中心六邊形自守數，就是本文所造出的 7 條數列，而不會有任何遺漏**，它們分別是：

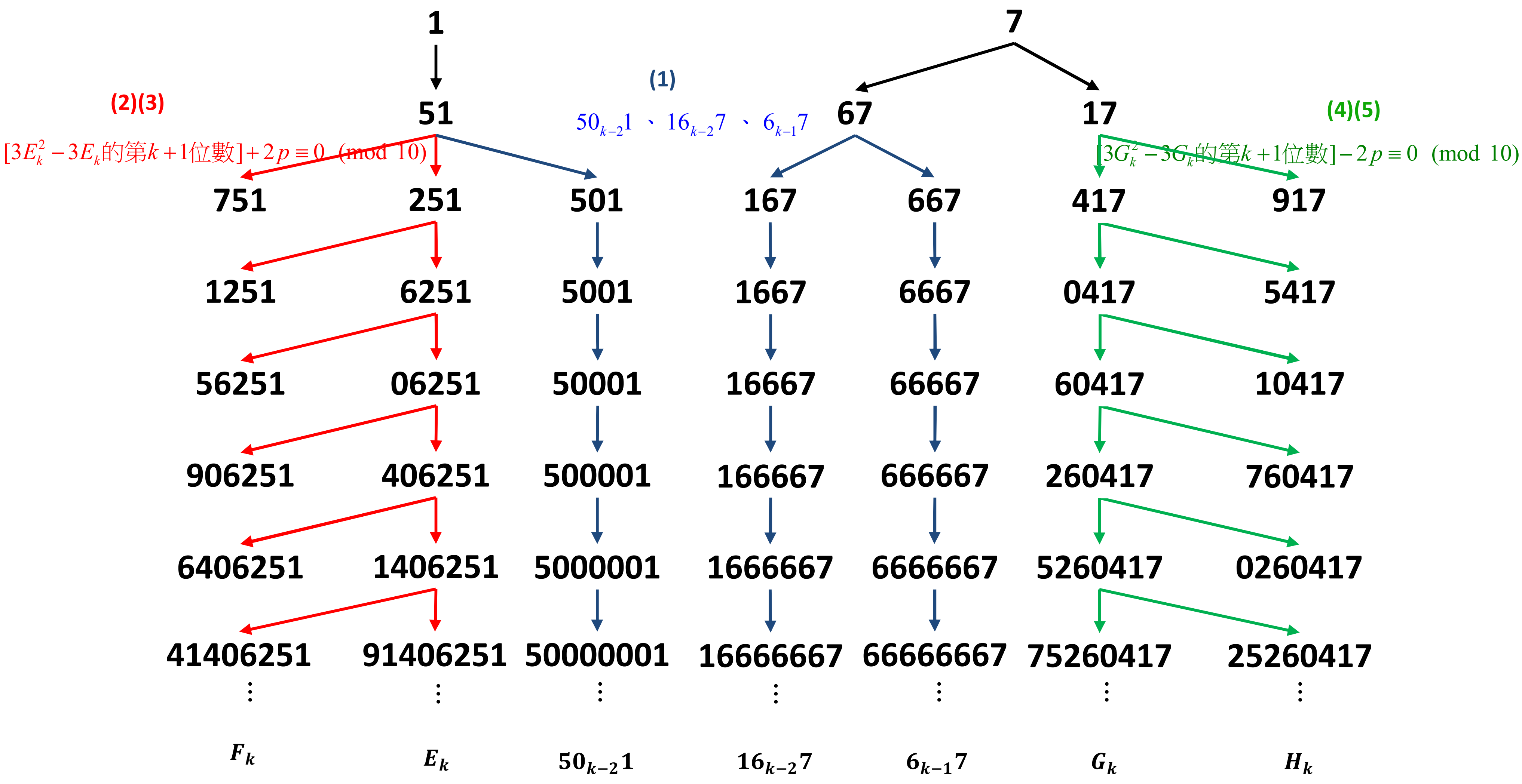
E_k：個位數為 1，持續衍生發展的主幹　F_k：個位數為 1，由主幹衍生出的分支

G_k：個位數為 7，持續衍生發展的主幹　H_k：個位數為 7，由主幹衍生出的分支

$50_{k-2}1$：首位為 5 個位為 1，持續增加中間 0 的個數　$6_{k-1}7$：個位為 7，持續增加 6 的個數

$16_{k-2}7$：首位為 1 個位為 7，持續增加中間 6 的個數

圖 24：中心六邊形自守數的完整尋找法



三、s邊形自守數與中心s邊形自守數的出現特性

(一) s邊形自守數

1.尋找過程中的出現規則整理

(1)每位數皆有相同的上限個數；
(利用樹狀圖分類、整除性、貝祖定理…等找出每位至多幾個，任何極高位數也必須受限)
(2)高位數自守數依附著低位數自守數衍生出現；
(要求末尾 0 的數量增加，這是必然的結果)。
(3)常成對出現，可以據此加快或檢驗尋找。
(利用同餘的運算可證明)

2. s邊形自守數集合之間的包含關係

觀察三角形自守數、四邊形自守數、五邊形自守數與六邊形自守數數列，我們發現有重複出現的數字：

1.三角形自守數與五邊形自守數是相同的集合。
2.三角形自守數與五邊形自守數是四邊形自守數中，個位數為 5 的那條數列之子集合。
3.四邊形自守數是六邊形自守數的其中兩條數列。
由上述 3 點，可合理推定這些多邊形自守數集合之間有包含關係。
說明：

s 邊形自守數的關係式為 $\dfrac{s-2}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$，

將 $s=3,4,5,6$ 代入，可分別得到：

$s=3$ ： $\dfrac{1}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$

$s=4$ ： $(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$

$s=5$ ： $\dfrac{3}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$

$s=6$ ： $2(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$，

若有一正整數 n 滿足 $\dfrac{1}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$，則此 n 必滿足 $(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$，也會滿足 $2(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$，可知不同條件下的 n 所形成的集合，確實會有包含關係，這是我們個別尋求不同 s 條件下，圖形大相逕庭，卻有著始料未及的精妙關係。

令 $t=\dfrac{s-2}{2}$，多邊形自守數的關係式為 $t(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$。$\forall s\in \mathrm{N}$，會得到 t 不是正整數就是分母為 2，故三角形自守數集合($t=\dfrac{1}{2}$)為所有多邊形自守數集合的子集合。

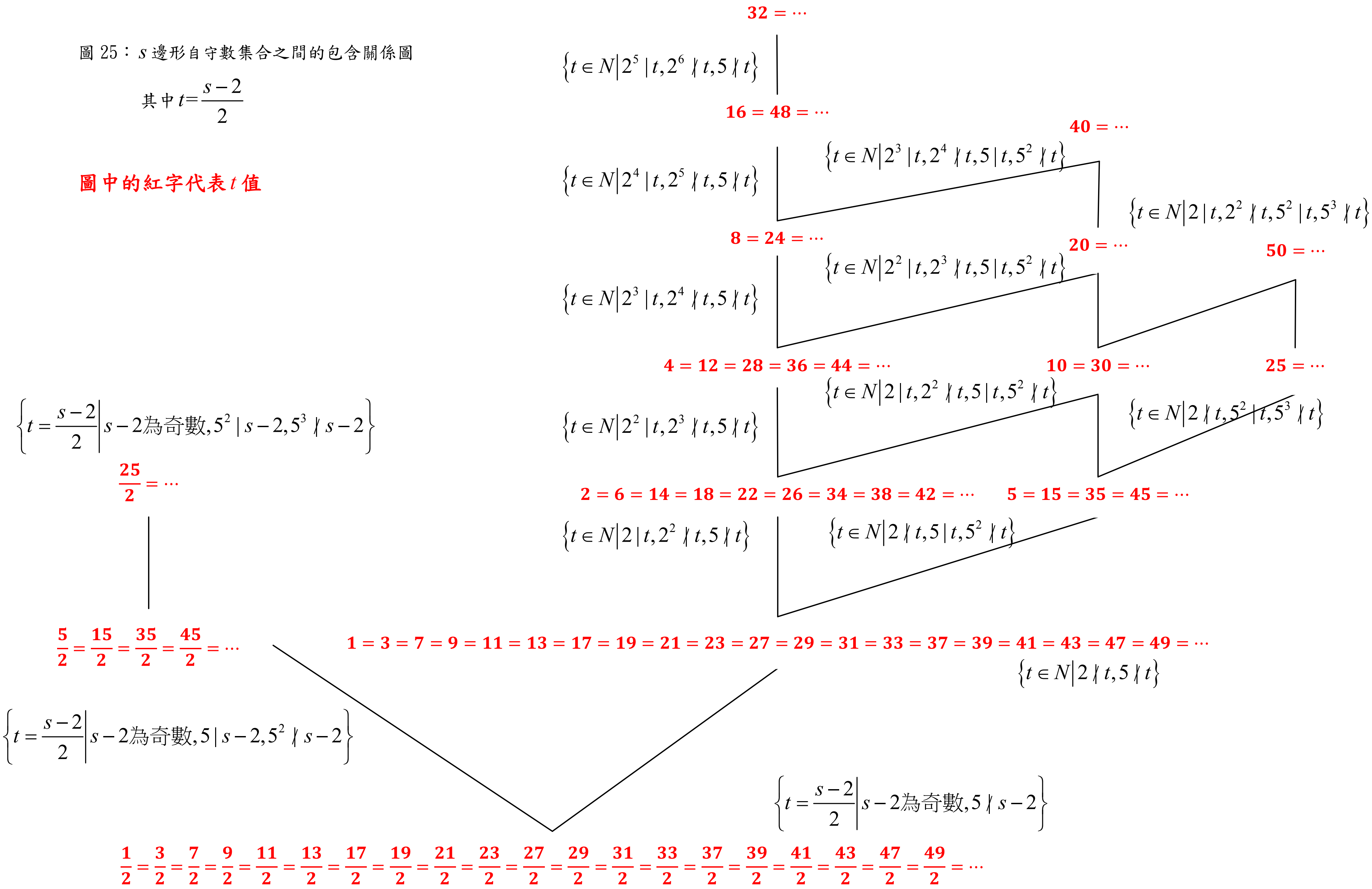
明顯地，t 的值控制了自守數集合的大小。$t(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$ 意味著當 t 的因數具有越多個 2 或越多個 5 時，就更有可能多出一個 0，這將使得 n 的條件更寬鬆，如此一來滿足關係式的 n 就會變得更多，並且包含較少 2 或 5 的 t 值。

我們可以適當地將 t 值做分類，圖 25 中的紅字代表 t 值(可以自行換回不同的 s 邊形)，畫出集合的包含關係圖，由 $t=\dfrac{1}{2}$ 分開成兩大部份，越在下方的 t 值集合越小、越在上方的 t 值集合越大，寫在相同位置的不同 t 值則具有相同的自守數集合。

圖 25：s邊形自守數集合之間的包含關係圖

其中 $t=\dfrac{s-2}{2}$

圖中的紅字代表 t 值



(二)中心 s 邊形自守數

1.尋找過程中的出現規則與 s 邊形自守數相同

(1)每位數皆有相同的上限個數；
(2)高位數自守數依附著低位數自守數衍生出現；
(3)常成對出現，可以據此加快或檢驗尋找。

2.中心 s 邊形自守數集合之間的包含關係

k 位數的中心 s 邊形自守數所符合的關係式為 $(\frac{s}{2}n-1)(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}$。在 $s=3,4,5,6$ 的尋找過程中，除了 1 以外，是否有不同 s 所形成的集合有包含關係或 1 以外的交集呢？

$$s=3:\ (\frac{3}{2}n-1)(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}$$
$$s=4:\ (2n-1)(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}$$
$$s=5:\ (\frac{5}{2}n-1)(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}$$
$$\ldots$$
$$(\frac{s}{2}n-1)(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}$$

注意關係式的公因式是 $n-1$、非公因式是 $\frac{s}{2}n-1$。

乍看之下沒有交集，但若相異 s_1 與 s_2 同時滿足：

$$\begin{cases}(\frac{s_1}{2}n-1)(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}\\(\frac{s_2}{2}n-1)(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}\end{cases}$$

相減可得 $(\frac{s_1-s_2}{2})n(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}$

適當選取 s_1 與 s_2，可以發現中心 s_1 邊形自守數與中心 s_2 邊形自守數之間的交集 n。

範例：給定 $s_1=1004$、$s_2=4$，檢驗 $n=313$

(1) $(\frac{1004}{2}\cdot 313-1)(313-1)\equiv 0 \pmod{10^3}$，故 313 是中心 1004 邊形自守數；

(2) $(\frac{4}{2}\cdot 313-1)(313-1)\equiv 0 \pmod{10^3}$，故 313 是中心 4 邊形自守數；

由(1)(2)，313 是這兩個自守數集合的 1 以外的交集之一。

柒、研究結論

一、s邊形自守數

(一)s邊形自守數所符合的關係式為$\frac{s-2}{2}(n^2-n)\equiv 0 \pmod{10^k}$。

(二)呈現$s=3,4,5,6$的s邊形自守數集合之p的造法。

(三)四邊形自守數集合即為平方自守數集合。

(四)透過「每位至多 6 個」及「找出每位相異 6 個」，完整呈現所有六邊形自守數。

二、中心s邊形自守數

(一)中心s邊形自守數所符合的關係式為$(\frac{s}{2}n-1)(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}$。

(二)呈現$s=3,4,5,6$的中心s邊形自守數集合之p的造法。

(三)透過「每位至多 7 個」及「找出每位相異 7 個」，完整呈現所有中心六邊形自守數。

三、s邊形自守數與中心s邊形自守數的出現特性

1.尋找過程中發現的規律：

(1)每位數皆有相同的上限個數；

(2)高位數自守數依附著低位數自守數衍生出現；

(3)常成對出現，可以據此加快或檢驗尋找。

2.包含關係：

(1)三角形($s=3$)自守數集合及所有$\left\{t=\frac{s-2}{2}\middle|s-2為奇數,5\nmid s-2\right\}$者，是最小的$s$邊形自守數集合。

(2)令$t=\frac{s-2}{2}$，根據t值含有多少個 2 或 5，可決定s邊形自守數集合的包含關係。

(3)中心s邊形自守數集合之間沒有包含關係。

(4)利用$(\frac{s_1-s_2}{2})n(n-1)\equiv 0 \pmod{10^k}$檢驗，適當選取$s_1$與$s_2$時，可發現中心$s_1$邊形自守數與中心$s_2$邊形自守數之間的交集$n$。

捌、參考文獻

1. Cliff A. Pickover(2003)。**數字的異想世界**(蔡承志、楊台勇譯)。臺北市：商周出版。(原著出版年：2001)。

2. 許志農等(民 102)。**龍騰高級中學數學課本第二冊**。龍騰文化事業股份有限公司。

3. 彭冠銓等：國立臺中第一高級中學(民 92)。**透視自守數**。中華民國第四十四屆中小學科學展覽會高中組數學科作品。

【評語】040404

作者研究多邊形自守數(automorphic numbers)，第 n 個多邊形數的尾數必須恰為 n。由於任一多邊形自守數的公式是一個 n 的多項式(領導係數跟多邊形的邊數有關)，其公式已廣為人知，因此本作品重要的工作就是分析這個多項式減去 n 之後，是否可以被 10^k 整除(k 代表該數的位數)。作者以多邊形數個位數所需滿足的條件去篩選並作為主幹去分類，並在六邊形自守數上做比較詳細的探討，並得出一個可以找出六邊形自守數的演算法。作者接著探討 s 邊形中心自守數的找法，研究手法跟上述手法類似。整體而言，本件作品最大的優點在於完整度很高，數學的工作不少，也提出新的找自守數演算法。但是作者一開始宣稱多邊形即中心多邊形自守數是鮮少有人研究的課題，事實並非如此。這是一個已廣為被研究的主題，不只多年來的科展已經有不少作品做類似且更深入的多邊形數主題，且國外也有許多相關的研究，建議作者多多查閱相關文獻，才能理解最新的進展。