中華民國第54屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040403

「點」移默化

－探討不同個數的圓覆蓋正方形所需最小半徑

學校名稱：國立新竹女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 蘇柏瑜	曾婉婷
高二 蘇柔安	鐘培碩

關鍵詞：圓、正方形、最小半徑

摘要

本研究主要探討在一正方形土地內設置的商家數目與最佳擺放位置間的關聯。我們定正方形邊長為 1 並將其坐標化，假設客源均勻分布在正方形中。以點表示商店的位置，以該點為圓心畫出的圓表示此商店擁有的腹地，且設每一商店擁有相同的腹地大小。首先，以較少圓數(1~3)覆蓋此正方形求其最小半徑，並從圖形觀察得到「整齊放法」的概念。接著，證明當各列圓數越相近時所得半徑越小，經計算發現當圓數 n 值介於$(k-1)\times k$ 與 $k\times(k+1)$間時，以 k 列「整齊放法」所排出的圖形可得最小半徑，續以較多圓數(5~12)繪圖檢驗其正確性，且推廣證明「整齊放法」亦可用於任意圓數 n。最後比較多邊形放法與整齊放法所得半徑之大小。

壹、　研究動機

經濟的發達，使得四處遊玩再也不僅僅是一個夢想，我們能輕易地發現相似類型的商店總是充斥在街道上，例如:補習街、飲料街、電信街...等等。然而這些商店卻擁有各自廣大的客群，且彼此間的影響極小，我們進而提出商店設置位置和腹地大小之間是否有關聯性等問題，因此開啟了我們一連串的研究與探討。

貳、　研究目的

在給定邊長為 1 的正方形 $ABCD$ 內，欲置入 x_1、x_2……x_n 共 n 個點，以 x_1、x_2……x_n 為圓心，利用最小半徑 r 作相同大小的圓 C_1、C_2……C_n，滿足正方形 $ABCD \subset (C_1 \cup C_2 \cup \ldots\ldots \cup C_n)$，所以我們提出以下五點作為探討：

一、以較少的圓覆蓋正方形，試求圓心最佳位置及所得半徑

二、各列所應擺設圓數相關性之證明，並觀察圓數、列數與半徑大小間的關聯

三、以較多的圓覆蓋正方形，觀察發現整齊放法時有最小半徑

四、證明當圓的個數 $n = k\times(k—1)$時為放置行列數的轉捩點，且當列數為 k 時有最小半徑

五、多邊形放法與整齊放法所得半徑之比較

參、　研究設備及器材

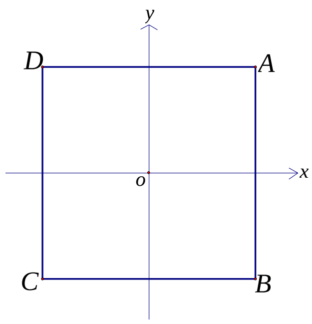
紙、筆、電腦、GSP 幾何畫板、GeoGebra、Mathematica、Microsoft Office Word、Microsoft Office Excel

肆、　研究過程或方法

一、以較少的圓覆蓋正方形，試求圓心最佳位置及所得半徑

(一)將正方形 $ABCD$ 坐標化，如下圖所示，

令 $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$B(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，$C(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，$D(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，如圖(一)：

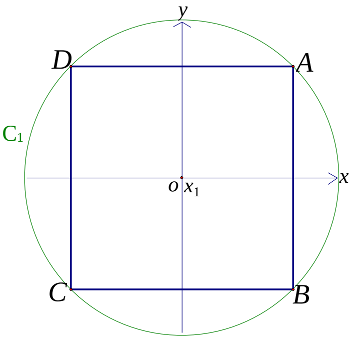


圖(一)

(二)當 n 為平方數

1. $n=1$ 時

欲使圓心 x_1 可涵蓋邊長為 1 的正方形 $ABCD$ 且圓半徑 r 為最小，則圓心 x_1 必位在 (0,0)，且 r 有最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，如圖(二)：

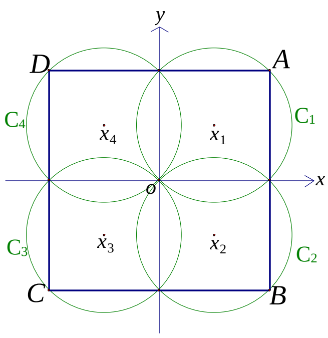


圖(二)

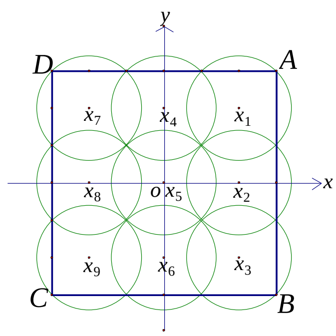
2. 推廣至 $n=k^2$ (k 為正整數)時

將正方形切割成 $k\times k$ 個正方形，仿 $n=1$ 時的作法，將圓心置於各正方形之中心，則可得 k^2 個「一點圖」，此時 $r=\frac{\sqrt{2}}{2k}$ 。

例：$k=2$ 時($n=4$)，如圖(三)：　　　　$k=3$ 時($n=9$)，如圖(四)：



圖(三)



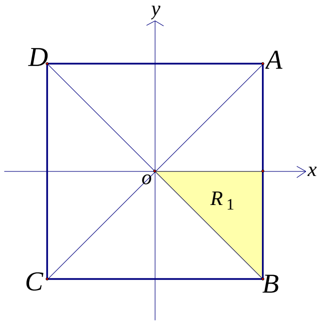
圖(四)

(三)圓數較少的情況

1. 當 $n=2$ 時，得 r 最小的 x_1、x_2 必在 x 軸、y 軸和直線 $x+y=0$ 之異側，且 x_1、x_2 對稱於原點。

【說明】

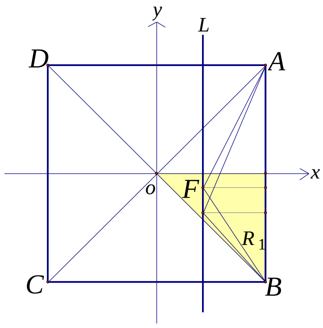
(1)作正方形之兩對角線，此時正方形被切割成八個全等之直角三角形，設 x_1 落在圖中黃色三角形 R_1 內(含邊界)　，如圖(五)：



圖(五)

(2)在此 R_1 內任意作一垂直 x 軸之直線 L：$x=h$，$\forall F(h,k)\in L\cap R_1$，

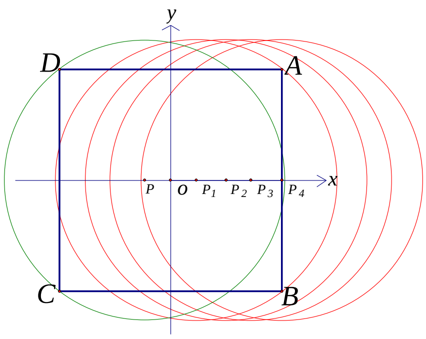
d(F, $\overline{AB}$)=$\frac{1}{2}-h$ 為定值，且此時所需的 $r=\sqrt{(\frac{1}{2}-h)^2+(\frac{1}{2}-k)^2}$，如圖(六)。當 k 愈小($|k|$愈大)時，r 會隨之變大，可得符合條件「有最小 r」的 x_1 必在 x 軸上，所以 $k=0$，$r=\sqrt{(\frac{1}{2}-h)^2+(\frac{1}{2})^2}$。同理可得 x_2 亦須落在 x 軸上。



圖(六)

(3) 對稱性之說明

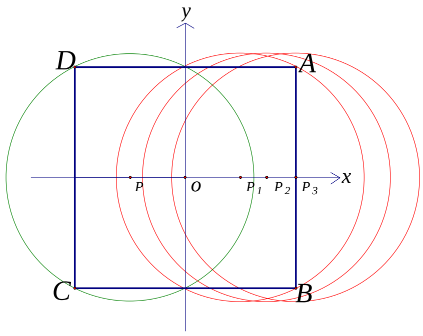
A. 若將一圓心 P 置於(x,0)處，其中 $\frac{-1}{4}<x<0$，此時最小半徑為 r，任意將半徑相等之圓的圓心置於 y 軸異側。當 P_1 與 P 對稱於 y 軸，兩圓之聯集可包含正方形 $ABCD$，將 P_1 向右平移如至 P_2、P_3、P_4，亦可包含正方形 $ABCD$，而重疊面積變小，如圖(七)：



圖(七)

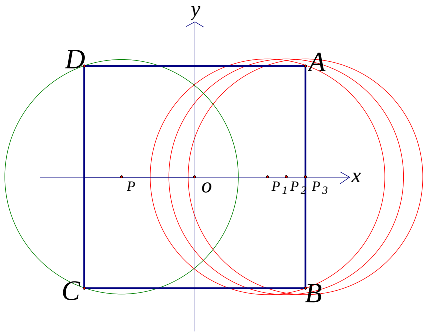
B. 若將一圓心 P 置於(x,0)處，其中 $x=\frac{-1}{4}$，此時最小半徑為 r，任意將半徑相等置於 y 軸異側。當 P_1 與 P 對稱於 y 軸時，兩圓之聯集可恰好包含正方形

$ABCD$，將 P_1 向右平移如至 P_2、P_3，卻無法完全包含正方形 $ABCD$，如圖(八)：



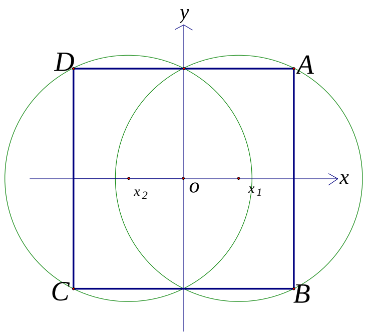
圖(八)

C. 若將一圓心 P 置於$(x,0)$處，其中 $\frac{-1}{2} < x < \frac{-1}{4}$，此時最小半徑為 r，任意將半徑相等置於 y 軸異側。當 P_1 與 P 對稱於 y 軸時，兩圓之聯集無法完全包含正方形 $ABCD$，將 P_1 向右平移如至 P_2、P_3，亦無法完全包含正方形 $ABCD$，如圖(九)：



圖(九)

(4)由(2)、(3)所得圖形如圖(十)，我們稱之為「兩點圖」。



圖(十)

2. 當 $n=3$ 時

(1)設三圓圓心為 x_1、x_2、x_3

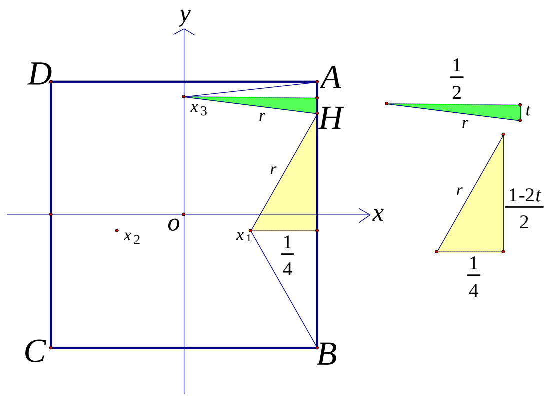
先在邊長為 1 的正方形內設置 x_1、x_2 兩點，若欲使 r 為最小值，則 x_1、x_2 各在直線 $x=\frac{1}{4}$ 和 $x=\frac{-1}{4}$ 上或直線 $y=\frac{1}{4}$ 和 $y=\frac{-1}{4}$ 上(如「兩點圖」)。設 x_1、x_2 各在直線 $x=\frac{1}{4}$ 和 $x=\frac{-1}{4}$ 上，現再設置第三點 x_3 於正方形內，使此三圓聯集有相同 r 且涵蓋正方形，因欲得最小 r，所以點 x_3 和 x_1、x_2 兩點位在 x 軸異側。設 x_3 在 x 軸之上，x_1、x_2 在 x 軸之下且要有最小值 r，所以正方形未被 C_1、C_2 兩圓

所包含的區域必為圓 C_3 所涵蓋，所以點 x_3 在 y 軸上可得較小 r 值。

(2) 在邊長為 1 的正方形 $ABCD$ 放置 x_1、x_2、x_3 三點，點 x_3 在 x 軸之上且在 y 軸上，x_1、x_2 兩點在 x 軸之下且對稱於 y 軸。設 $\overline{Dx_3}=\overline{Ax_3}=\overline{Cx_2}=\overline{Bx_1}=r$，且圓 C_3 和圓 C_2 交 $\overline{AB}$ 於 H。因為 $\overline{Ax_3}=\overline{Hx_3}=r$，所以 ΔAx_3H 為等腰三角形。

設 $\overline{AH}=2t$，$\overline{BH}=1-2t$(如圖(十一))，則由 $\overline{Ax_3}^2=r^2=\overline{Bx_1}^2$

$$(\frac{1}{2})^2+t^2=(\frac{1}{4})^2+(\frac{1-2t}{2})^2 \Rightarrow (2)^2+(4t)^2=1^2+(2-4t)^2$$
$$\Rightarrow 4^2+16t^2=1^2+16t^2-16t+4^2$$
$$\Rightarrow 1-16t=0 \Rightarrow t=\frac{1}{16}$$

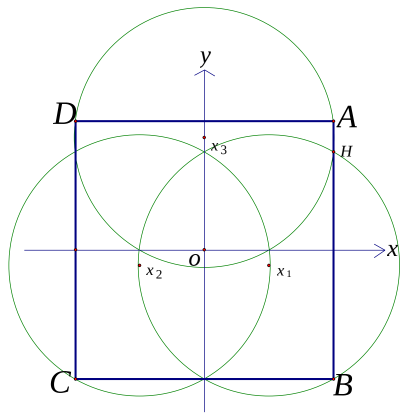


圖(十一)

所以 x_3 的 y 坐標$=\frac{1}{2}-t=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$，$x_3=(0,\frac{7}{16})$。

x_1 的 y 坐標$=$ x_2 的 y 坐標$=\frac{-1}{2}+\frac{1-2t}{2}=-t=\frac{1}{16}$，

$x_1(\frac{1}{4},\frac{-1}{16})$，$x_2(\frac{-1}{4},\frac{-1}{16})$ (如圖(十二))，$r=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+t^2}=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{16})^2}=\frac{\sqrt{65}}{16}$。



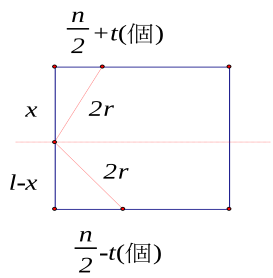
圖(十二)

(四) 結論

1. 當所放置圓數為完全平方數($k\times k$)時，可將其正方形視為由行列數皆為 k 的小正方形所組成，因此最小半徑皆為 $\dfrac{\sqrt{2}}{2k}$ 。
2. 我們發現當放點位置有對稱性時，可得較小半徑 r。

二、各列所應擺設圓數相關性之證明，並觀察圓數、列數與半徑大小間的關聯

(一) 現取正方形中相鄰的 2 列，其中 n 表示此二列中圓的總數，l 表示此二列所張出矩形的寬，如圖(十三)：



圖(十三)

$$\therefore x^2+\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2=(l-x)^2+\left(\frac{1}{\frac{n}{2}-t}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2=l^2-2lx+\left(\frac{1}{\frac{n}{2}-t}\right)^2$$

$$\Rightarrow x=\frac{l^2+\left(\frac{1}{\frac{n}{2}-t}\right)^2-\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2}{2l} \Rightarrow x=\frac{l}{2}+\frac{\left(\frac{1}{\frac{n}{2}-t}\right)^2-\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2}{2l}$$

$$\therefore 4r^2=x^2+\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2=\left[\frac{l}{2}+\frac{\left(\frac{1}{\frac{n}{2}-t}\right)^2-\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2}{2l}\right]^2+\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2$$

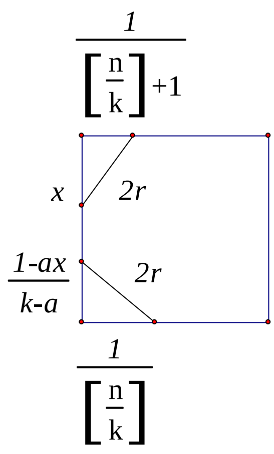
$$=\left(\frac{l}{2}\right)^2+2\times\frac{l}{2}\times\frac{\left(\frac{1}{\frac{n}{2}-t}\right)^2-\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2}{2l}+\left[\frac{\left(\frac{1}{\frac{n}{2}-t}\right)^2-\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2}{2l}\right]^2+\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2$$

$$=\left(\frac{l}{2}\right)^2+\frac{\left(\frac{1}{\frac{n}{2}-t}\right)^2-\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2}{2}+\left[\frac{\left(\frac{1}{\frac{n}{2}-t}\right)^2-\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2}{2l}\right]^2+\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2$$

$$=\left(\frac{l}{2}\right)^2+\frac{\left(\frac{1}{\frac{n}{2}-t}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2}{2}+\left[\frac{\left(\frac{1}{\frac{n}{2}-t}\right)^2-\left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2}{2l}\right]^2$$

∴當 t 越小時，r 就越小。

(二) 由此可知，在正方形內相鄰二列之圓數目越相近，所得之 r 值越小。因此，我們將正方形內各列之圓個數分為 $\left[\frac{n}{k}\right]$ 和 $\left[\frac{n}{k}\right]+1$ 兩類，其中 k 表示正方形內圓心擺放的列數，a 表示正方形中圓數為 $\left[\frac{n}{k}\right]+1$ 的列數，如圖(十四)：



圖(十四)

$$a\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)+(k-a)\left[\frac{n}{k}\right]=n \Rightarrow k\left[\frac{n}{k}\right]+a=n \Rightarrow a=n-k\left[\frac{n}{k}\right]$$

令 $\left[\frac{n}{k}\right]=A$ ∴ $a=n-kA$

$$x^2+\left(\frac{1}{A+1}\right)^2=\left(\frac{1-ax}{k-a}\right)^2+\left(\frac{1}{A}\right)^2$$

$$\Rightarrow A^2(A+1)^2(k-a)^2x^2+A^2(k-a)^2=A^2(A+1)^2(1-ax)^2+(A+1)^2(k-a)^2$$

$$\Rightarrow A^2(A+1)^2(k-a)^2x^2+A^2(k-a)^2$$

$$=A^2(A+1)^2-2aA^2(A+1)^2x+A^2a^2(A+1)^2x^2+(A+1)^2(k-a)^2$$

$$\Rightarrow k(k-2a)A^2(A+1)^2x^2+2aA^2(A+1)^2x-\left[(2A+1)(k-a)^2+A^2(A+1)^2\right]=0$$

1. 當 $k-2a>0$ 時，

$$x=\frac{-2aA^2(A+1)^2\pm\sqrt{4a^2A^4(A+1)^4+4k(k-2a)A^2(A+1)^2\left[(2A+1)(k-a)^2+A^2(A+1)^2\right]}}{2k(k-2a)A^2(A+1)^2},$$

$\because x$ 必大於 0

$\therefore x=\dfrac{-2aA^2(A+1)^2-\sqrt{4a^2A^4(A+1)^4+4k(k-2a)A^2(A+1)^2\left[(2A+1)(k-a)^2+A^2(A+1)^2\right]}}{2k(k-2a)A^2(A+1)^2}$ 不符。

2. 當 $k-2a<0$ 時，無實根。

3. 當 $k-2a=0$ 時，$x=\dfrac{(2A+1)(k-a)^2+A^2(A+1)^2}{2aA^2(A+1)^2}$ 。

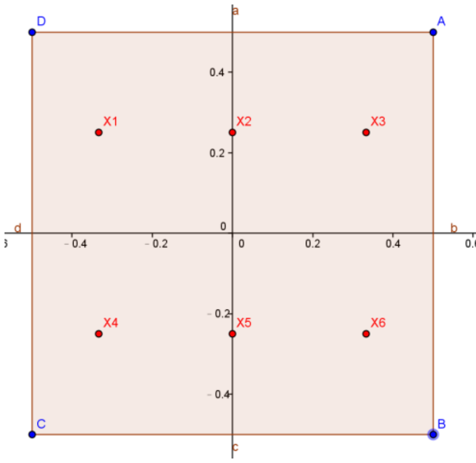
4. 依 1、2、3 不同狀況套入 $4r^2=x^2+\left(\dfrac{1}{A+1}\right)^2$，以 Excel 計算得 r 值(如附件一)。

我們發現當 $n=\dfrac{3}{2}k$ 時，所得 x 值會大於等於 1，但 n =3 時為例外(如附件一中的「」)。由圖(十)、圖(十二)可知，當相鄰兩列的圓越相近時，原本圓在邊上之交點會因此而超出正方形邊界，所以不符。(如附件一中的「」)

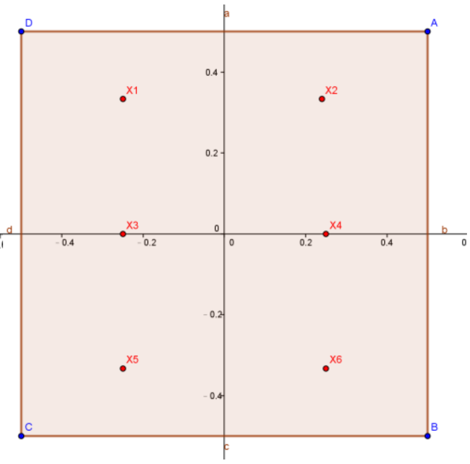
(三) 結論: 觀察表格數據，可知當(k—1)×k < n≤k×(k+1)時，列數為 k 的放法可得最小半徑 r，因此推論當 n =k×(k—1)時為列數(k—1)和 k 的轉捩點。

三、以較多的圓覆蓋正方形，觀察發現整齊放法時有最小半徑

(一) 觀察當 n = k×(k—1)時的圖，可將其視為 k 行(k—1)列抑或是(k—1)行 k 列，所以推測 n = k×(k—1)為放置行列數的轉捩點。例如:n =6 時，可看成(3+3)或(2+2+2) ，如圖(十五)-a 和圖(十五)-b：



圖(十五)-a



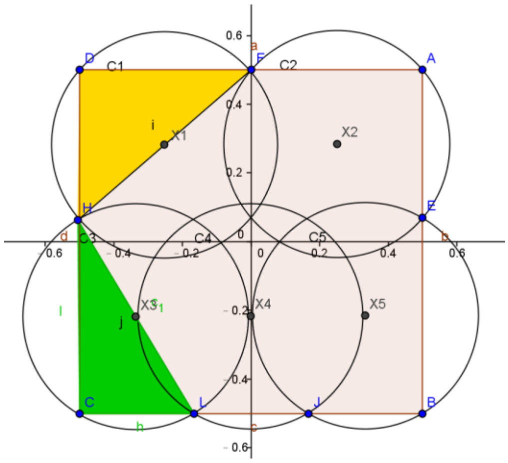
圖(十五)-b

(二) n =5

當 n 以 2+3 排列時(如圖(十六))，設正方形邊長為 1，放置 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5。圓 C_1 和圓 C_3 交正方形於 H，$\overline{DF}=\frac{1}{2}$，$\overline{CL}=\frac{1}{3}$，設 $\overline{DH}=x$，$\overline{CH}=1-x$，則

$$x^2+\frac{1}{4}=1-2x+x^2+\frac{1}{9} \Rightarrow 2x=\frac{31}{36} \Rightarrow x=\frac{31}{72}\text{，所以 } 2r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{961}{5184}}=\frac{\sqrt{2257}}{72}$$

$$\Rightarrow r=\frac{\sqrt{2257}}{144}\text{。}$$

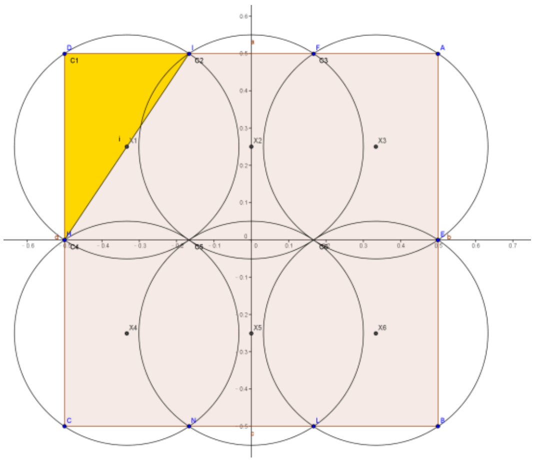


圖(十六)

(三) n =6

當 n 以 3+3 或 2+2+2 排列時(如圖(十七))，設正方形邊長為 1，放置 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6。圓 C_1 和圓 C_4 交正方形於 H， $\overline{DI}=\frac{1}{3}$，$\overline{DH}=\frac{1}{2}$，所以

$$2r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{6} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{13}}{12}\text{。}$$



圖(十七)

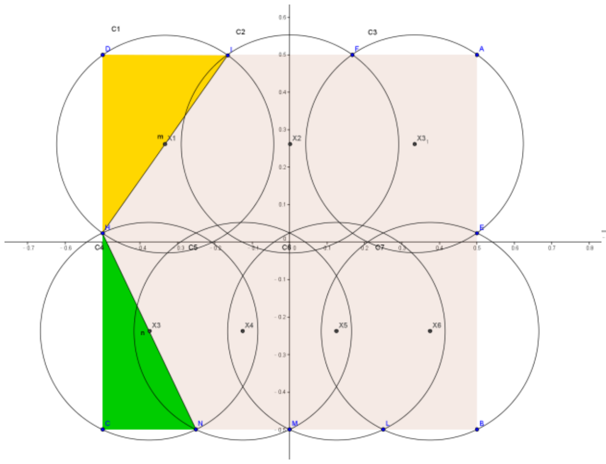
(四) n =7

1. 仿 n =5 和 n =6 的作法，圖(十八)-a 和圖(十八)-b 分別為當 n 以 3+4 和 2+3+2 的方式排列可得

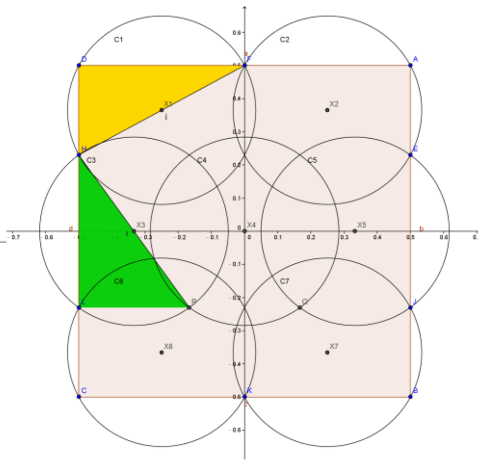
$$2r_1=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{18769}{82944}}=\frac{\sqrt{27985}}{288}\Rightarrow r_1=\frac{\sqrt{27985}}{576}\fallingdotseq 0.290429$$

$$2r_2=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{195-24\sqrt{51}}{324}}=\frac{\sqrt{69-6\sqrt{51}}}{9}\Rightarrow r_2=\frac{\sqrt{69-6\sqrt{51}}}{18}\fallingdotseq 0.284102\ \boxed{\text{且 } r_2<r_1}。$$

2. 結論：n =7 時，圓心應以 2+3+2 的方式放置所使用圓半徑較小。



圖(十八)-a



圖(十八)-b

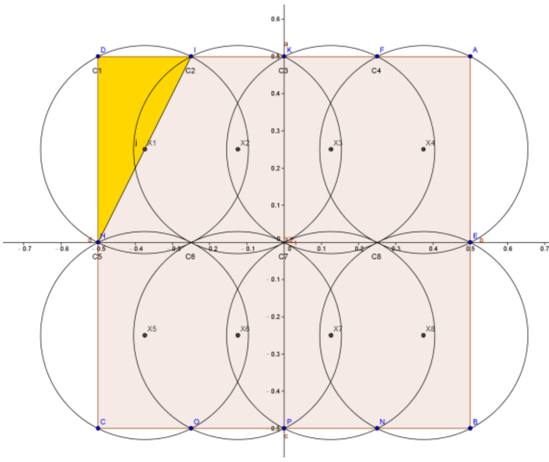
(五) n =8

1. 仿 n =5 和 n =6 的作法，圖(十九)-a 和圖(十九)-b 分別為當 n 以 4+4 和 3+2+3 的方式排列可得

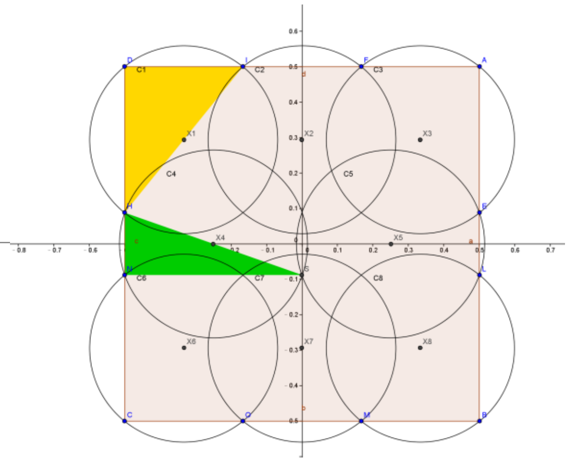
$$2r_1=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}\Rightarrow r_1=\frac{\sqrt{5}}{8}\fallingdotseq 0.279508$$

$$2r_2=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{165-24\sqrt{21}}{18}}=\frac{\sqrt{201-24\sqrt{21}}}{18}\Rightarrow r_2=\frac{\sqrt{201-24\sqrt{21}}}{36}\fallingdotseq 0.265009\ \boxed{\text{且 } r_2<r_1}。$$

2. 結論：n =8 時，圓心應以 3+2+3 的方式放置所使用圓半徑較小。



圖(十九)-a



圖(十九)-b

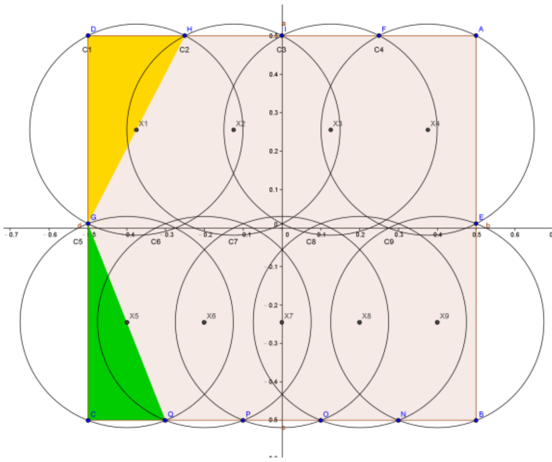
(六) n =9

1. 仿 n =5 和 n =6 的作法，圖(二十)-a 和圖(二十)-b 分別為當 n 以 4+5 和 3+3+3 的方式排列可得

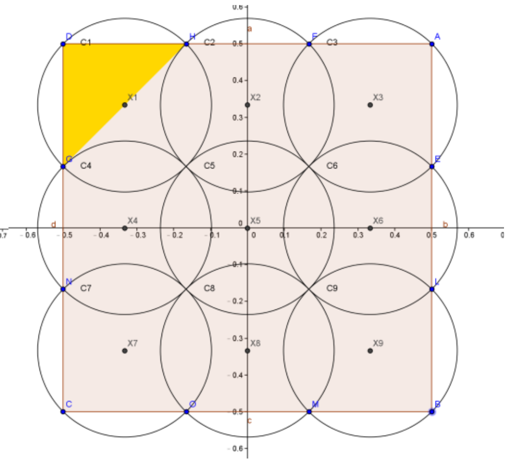
$$2r_1=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{152881}{640000}}=\frac{\sqrt{192881}}{800}\Rightarrow r_1=\frac{\sqrt{192881}}{1600}\fallingdotseq 0.274488$$

$$2r_2=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\Rightarrow r_2=\frac{\sqrt{2}}{6}\fallingdotseq 0.235702\ \boxed{\text{且 } r_2<r_1}\text{。}$$

2. 結論：n =9 時，圓心應以 3+3+3 的方式放置所使用圓半徑較小。



圖(二十)-a



圖(二十)-b

(七) n =10

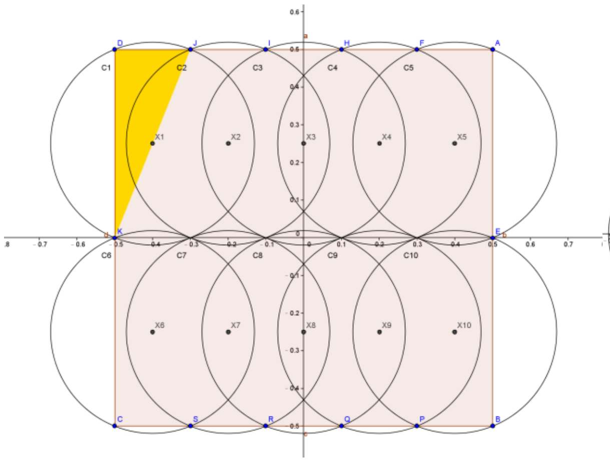
1. 仿 n =5 和 n =6 的作法，圖(二十一)-a 和圖(二十一)-b 分別為當 n 以 5+5 和 3+4+3 的方式排列可得

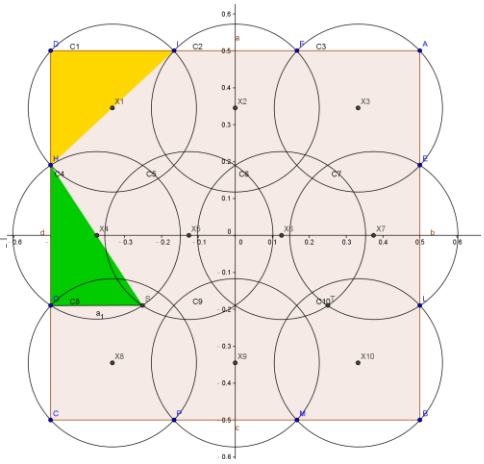
$$2r_1=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{29}}{10}\Rightarrow r_1=\frac{\sqrt{29}}{20}\fallingdotseq 0.269258$$

$$2r_2=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{741-48\sqrt{165}}{1296}}=\frac{\sqrt{885-48\sqrt{165}}}{36}\Rightarrow r_2=\frac{\sqrt{885-4\sqrt{165}}}{72}\fallingdotseq 0.227552$$

$\boxed{\text{且 } r_2<r_1}$。

2. 結論：n =10 時，圓心應以 3+4+3 的方式放置所使用圓半徑較小。


圖(二十一)-a


圖(二十一)-b

(八) n =11

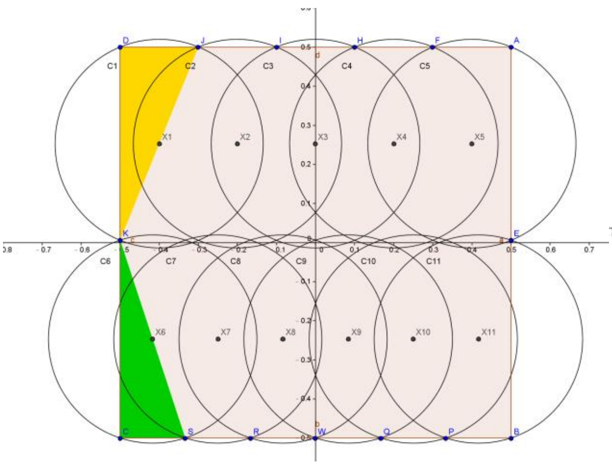
1. 仿 n =5 和 n =6 的作法，圖(二十二)-a 和圖(二十二)-b 分別為當 n 以 5+6 和 4+3+4 的方式排列可得

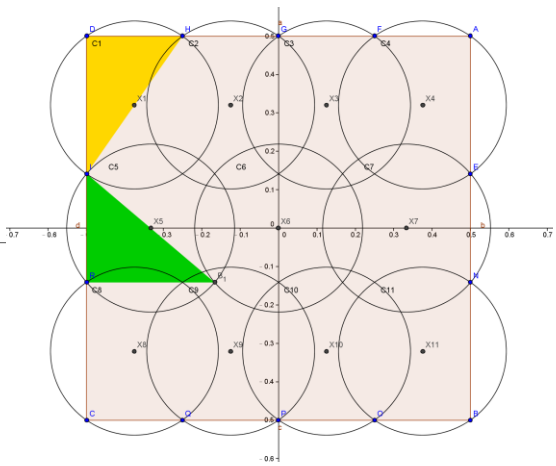
$$2r_1=\sqrt{\frac{790321}{3240000}+\frac{1}{25}}=\frac{\sqrt{919921}}{1800}\Rightarrow r_1=\frac{\sqrt{919921}}{3600}\fallingdotseq 0.26642$$

$$2r_2=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{2796-96\sqrt{492}}{5184}}=\frac{\sqrt{3120-96\sqrt{492}}}{72}$$

$$\Rightarrow r_2=\frac{\sqrt{3120-96\sqrt{492}}}{144}\fallingdotseq 0.2185699\ \boxed{\text{且 } r_2<r_1}$$ 。

2. 結論：n=11 時，圓心應以 4+3+4 的方式放置所使用圓半徑較小。

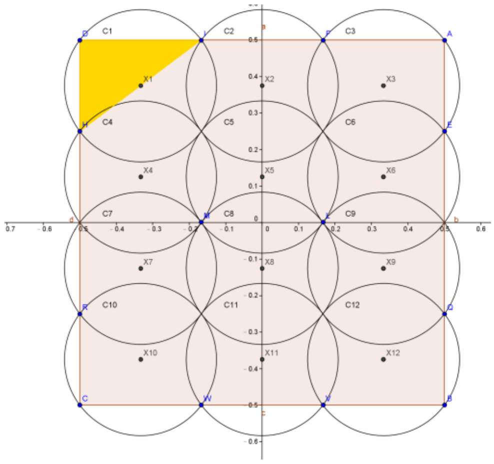

圖(二十二)-a


(圖二十二)-b

(九) n =12

仿 n =5 和 n =6 的作法，圖(二十三)為當 n 以 3+3+3+3 或 4+4+4 的方式排列可得

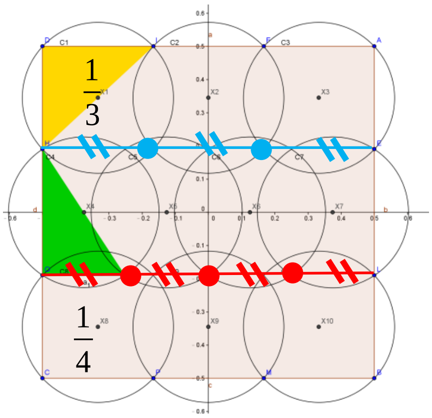
$$2r=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}=\frac{5}{12}\Rightarrow r=\frac{5}{24}$$ 。



圖(二十三)

(十) 由上圖，我們將具有以下條件的放法稱為「整齊放法」:

1. 圓心連線在同一水平線上稱為一列。
2. 過同一列圓的交點作正方形邊的平行線若某列有 k 個圓，則此平行線每個圓截出的線段長為 $\frac{1}{k}$。例如 n =10 時(如圖(二十四))，第一列的三個圓各覆蓋了 $\frac{1}{3}$ 的長，而第二列的四個圓各覆蓋 $\frac{1}{4}$ 的長。



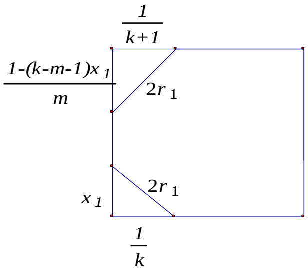
圖(二十四)

(十一) 結論：將 n 表示為 $k\times(k-1)+m$，$1\leq m<2k$，則以 k 列的排法較 $k-1$ 列所得的半徑小。

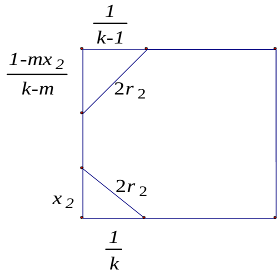
四、證明當圓的個數 $n=k\times(k-1)$時為放置行列數的轉捩點，且當列數為 k 時有最小半徑

設 $n=k\times(k-1)+m$，將 m 分成五個部份說明：

(一) $1\le m\le k-2$ (如圖(二十五)-a 和圖(二十五)-b)



圖(二十五)-a



圖(二十五)-b

1. 由 $4r_1^2=x_1^2+(\frac{1}{k})^2=(\frac{1}{k+1})^2+[\frac{1-(k-m-1)x_1}{m}]^2$ 解得

$$x_1=\frac{-k^2-k^3+k^4+k^5-k^2m-2k^3m-k^4m\pm\sqrt{k^2m^2+2k^3m^2-k^4m^2+7k^6m^2+6k^7m^2+k^8m^2+2k^2m^3+6k^3m^3+2k^4m^3-6k^5m^3-4k^6m^3}}{k^2-2k^4+k^6+2k^2m+2k^3m-2k^4m-2k^5m}$$

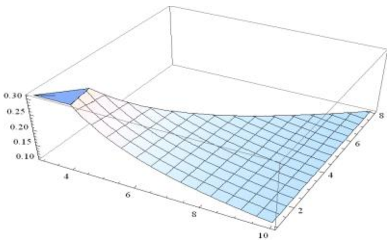
令函數

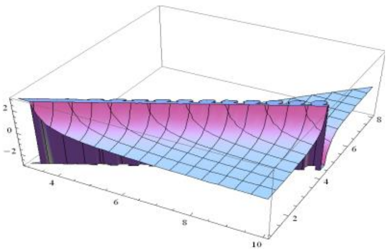
$$f_-(k,m)=\frac{-k^2-k^3+k^4+k^5-k^2m-2k^3m-k^4m-\sqrt{k^2m^2+2k^3m^2-k^4m^2+7k^6m^2+6k^7m^2+k^8m^2+2k^2m^3+6k^3m^3+2k^4m^3-6k^5m^3-4k^6m^3}}{k^2-2k^4+k^6+2k^2m+2k^3m-2k^4m-2k^5m}$$

函數

$$f_+(k,m)=\frac{-k^2-k^3+k^4+k^5-k^2m-2k^3m-k^4m+\sqrt{k^2m^2+2k^3m^2-k^4m^2+7k^6m^2+6k^7m^2+k^8m^2+2k^2m^3+6k^3m^3+2k^4m^3-6k^5m^3-4k^6m^3}}{k^2-2k^4+k^6+2k^2m+2k^3m-2k^4m-2k^5m}$$

分別作其圖形如圖(二十六)-a 和圖(二十六)-b：


圖(二十六)-a


圖(二十六)-b

由圖形觀察出

當 $x_1=\frac{-k^2-k^3+k^4+k^5-k^2m-2k^3m-k^4m+\sqrt{k^2m^2+2k^3m^2-k^4m^2+7k^6m^2+6k^7m^2+k^8m^2+2k^2m^3+6k^3m^3+2k^4m^3-6k^5m^3-4k^6m^3}}{k^2-2k^4+k^6+2k^2m+2k^3m-2k^4m-2k^5m}$，

x_1 的值為負，不合，故應取

$x_1=\frac{-k^2-k^3+k^4+k^5-k^2m-2k^3m-k^4m-\sqrt{k^2m^2+2k^3m^2-k^4m^2+7k^6m^2+6k^7m^2+k^8m^2+2k^2m^3+6k^3m^3+2k^4m^3-6k^5m^3-4k^6m^3}}{k^2-2k^4+k^6+2k^2m+2k^3m-2k^4m-2k^5m}$。

2. 由 $4r_2^2=x_2^2+(\frac{1}{k})^2=(\frac{1}{k-1})^2+(\frac{1-mx_2}{k-m})^2$ 解得

$$x_2=\frac{-2k^2m+4k^3m-2k^4m\pm\sqrt{(2k^2m-4k^3m+2k^4m)^2-4(k^4-2k^5+k^6-2k^3m+4k^4m-2k^5m)(-k^4-2km+4k^2m+m^2-2km^2)}}{2k^4-4k^5+2k^6-4k^3m+8k^4m-4k^5m}$$

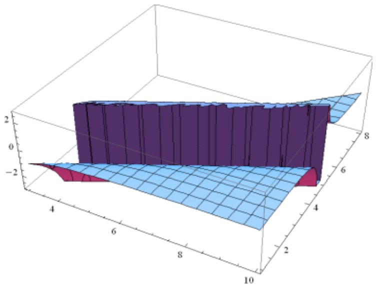
令函數

$$f_-(k,m)=\frac{-2k^2m+4k^3m-2k^4m-\sqrt{(2k^2m-4k^3m+2k^4m)^2-4(k^4-2k^5+k^6-2k^3m+4k^4m-2k^5m)(-k^4-2km+4k^2m+m^2-2km^2)}}{2k^4-4k^5+2k^6-4k^3m+8k^4m-4k^5m}$$

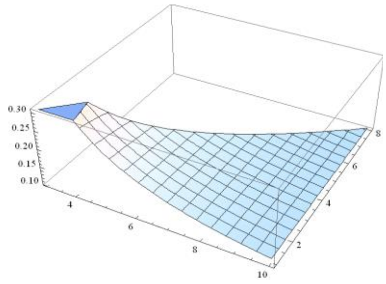
函數

$$f_+(k,m)=\frac{-2k^2m+4k^3m-2k^4m+\sqrt{(2k^2m-4k^3m+2k^4m)^2-4(k^4-2k^5+k^6-2k^3m+4k^4m-2k^5m)(-k^4-2km+4k^2m+m^2-2km^2)}}{2k^4-4k^5+2k^6-4k^3m+8k^4m-4k^5m}$$

分別作其圖形如圖(二十七)-a 和圖(二十七)-b：



圖(二十七)-a



圖(二十七)-b

由圖形觀察出

當 $x_2=\frac{-2k^2m+4k^3m-2k^4m-\sqrt{(2k^2m-4k^3m+2k^4m)^2-4(k^4-2k^5+k^6-2k^3m+4k^4m-2k^5m)(-k^4-2km+4k^2m+m^2-2km^2)}}{2k^4-4k^5+2k^6-4k^3m+8k^4m-4k^5m}$，

x_2 的值為負，不合，故應取

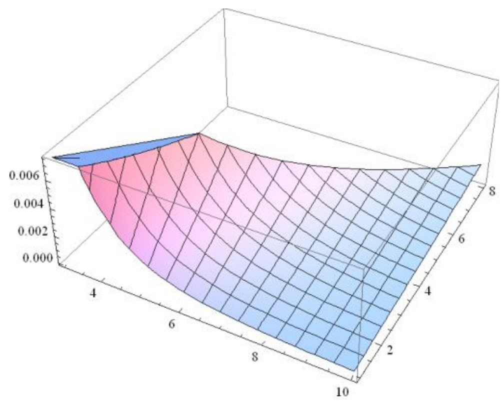
$x_2=\frac{-2k^2m+4k^3m-2k^4m+\sqrt{(2k^2m-4k^3m+2k^4m)^2-4(k^4-2k^5+k^6-2k^3m+4k^4m-2k^5m)(-k^4-2km+4k^2m+m^2-2km^2)}}{2k^4-4k^5+2k^6-4k^3m+8k^4m-4k^5m}$。

3. $4{r_1}^2-4{r_2}^2=[{x_1}^2+(\frac{1}{k})^2]-[{x_2}^2+(\frac{1}{k})^2]={x_1}^2-{x_2}^2$

$$=\frac{-k^2-k^3+k^4+k^5-k^2m-2k^3m-k^4m-\sqrt{k^2m^2+2k^3m^2-k^4m^2+7k^6m^2+6k^7m^2+k^8m^2+2k^2m^3+6k^3m^3+2k^4m^3-6k^5m^3-4k^6m^3}}{k^2-2k^4+k^6+2k^2m+2k^3m-2k^4m-2k^5m}$$

$$-\frac{-2k^2m+4k^3m-2k^4m+\sqrt{(2k^2m-4k^3m+2k^4m)^2-4(k^4-2k^5+k^6-2k^3m+4k^4m-2k^5m)(-k^4-2km+4k^2m+m^2-2km^2)}}{2k^4-4k^5+2k^6-4k^3m+8k^4m-4k^5m}$$

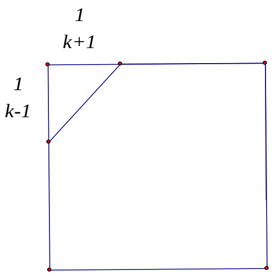
令函數 $f(k,m)=4{r_1}^2-4{r_2}^2$，其圖形如圖(二十八)：

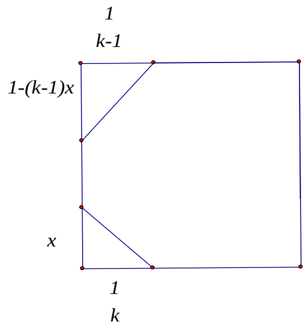


圖(二十八)

由圖形可觀察出在討論範圍 $3\le k\le 10$ 時，$4{r_1}^2-4{r_2}^2>0$ 恆成立，即 $r_1>r_2$。

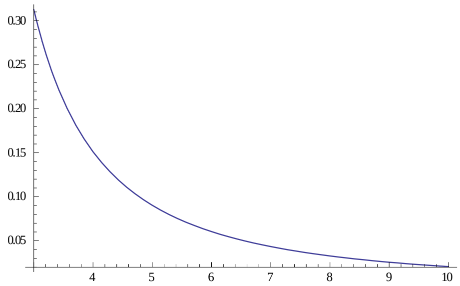
(二) m=k－1 (如圖(二十九)-a 和圖(二十九)-b)





圖(二十九) -a 圖(二十九)-b

1. $4r_1^2=(\frac{1}{k-1})^2+(\frac{1}{k+1})^2$ ，令函數 $f(k)=4r_1^2$，其圖形如圖(三十)：



圖(三十)

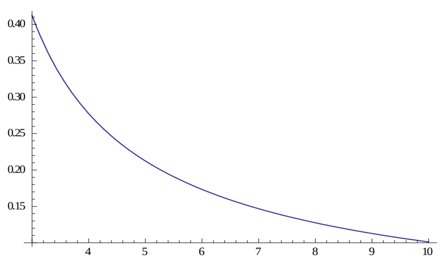
2. $4r_2^2=(\frac{1}{k})^2+x^2=(\frac{1}{k-1})^2+[1-(k-1)x]^2$ 解得

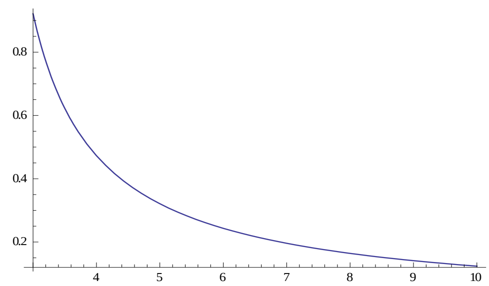
$$x=\frac{-k^2+3k^3-3k^4+k^5\pm\sqrt{-2k^3+10k^4-18k^5+15k^6-6k^7+k^8}}{-2k^3+5k^4-4k^5+k^6}$$

令函數 $f_-(k,m)$= $\frac{-k^2+3k^3-3k^4+k^5-\sqrt{-2k^3+10k^4-18k^5+15k^6-6k^7+k^8}}{-2k^3+5k^4-4k^5+k^6}$

函數 $f_+(k,m)$= $\frac{-k^2+3k^3-3k^4+k^5+\sqrt{-2k^3+10k^4-18k^5+15k^6-6k^7+k^8}}{-2k^3+5k^4-4k^5+k^6}$

分別作其圖形如圖(三十一)-a 和圖(三十一)-b：





圖(三十一)-a 圖(三十一)-*b*

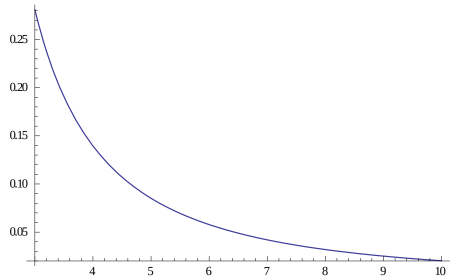
由圖形觀察出若 $x=\frac{-k^2+3k^3-3k^4+k^5+\sqrt{-2k^3+10k^4-18k^5+15k^6-6k^7+k^8}}{-2k^3+5k^4-4k^5+k^6}$ ，

在 k =3 時 x 的值會大於 0.5，不合，

故取 $x=\dfrac{-k^2+3k^3-3k^4+k^5-\sqrt{-2k^3+10k^4-18k^5+15k^6-6k^7+k^8}}{-2k^3+5k^4-4k^5+k^6}$

$\therefore 4r_2^{\,2}=(\dfrac{1}{k})^2+\dfrac{-k^2+3k^3-3k^4+k^5-\sqrt{-2k^3+10k^4-18k^5+15k^6-6k^7+k^8}}{-2k^3+5k^4-4k^5+k^6}$

令函數 $f(k)=4r_2^{\,2}$，其圖形如圖(三十二)：

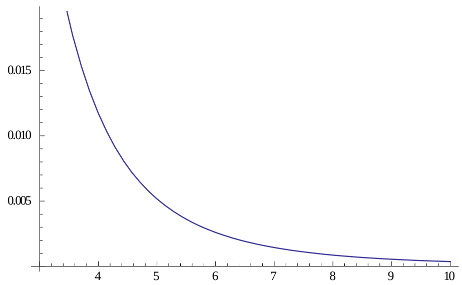


圖(三十二)

3. $4r_1^{\,2}-4r_2^{\,2}=[(\dfrac{1}{k-1})^2+(\dfrac{1}{k+1})^2]-[(\dfrac{1}{k})^2+x^2]$

$=[(\dfrac{1}{k-1})^2+(\dfrac{1}{k+1})^2]-(\dfrac{1}{k})^2-(\dfrac{-k^2+3k^3-3k^4+k^5-\sqrt{-2k^3+10k^4-18k^5+15k^6-6k^7+k^8}}{-2k^3+5k^4-4k^5+k^6})^2$

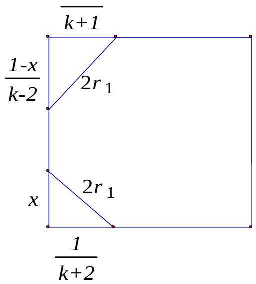
令函數 $f(k)=4r_1^{\,2}-4r_2^{\,2}$，其圖形如圖(三十三)：



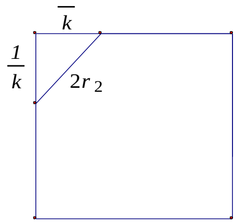
圖(三十三)

由圖形可觀察出在討論範圍 $3\le k\le 10$ 時，$4r_1^{\,2}-4r_2^{\,2}>0$ 恆成立，即 $r_1>r_2$。

(三) $m=k$(如圖(三十四)-a 和圖(三十四)-b)



圖(三十四)-a



圖(三十四)-*b*

1. $4r_1^{\ 2}=(\dfrac{1}{k+2})^2+x^2=(\dfrac{1}{k+1})^2+(\dfrac{1-x}{k-2})^2$ 解得

$$x=\frac{-4-12k-13k^2-6k^3-k^4\pm\sqrt{208+512k+424k^2+224k^3+149k^4-48k^5-151k^6-50k^7+17k^8+10k^9+k^{10}}}{12+20k-5k^2-22k^3-8k^4+2k^5+k^6}$$

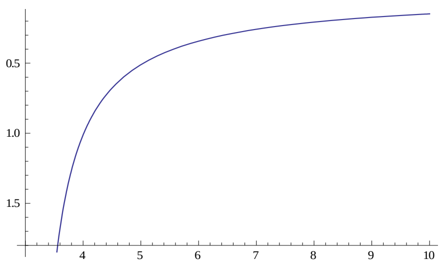
令函數

$$f_-(k,m)=\frac{-4-12k-13k^2-6k^3-k^4-\sqrt{208+512k+424k^2+224k^3+149k^4-48k^5-151k^6-50k^7+17k^8+10k^9+k^{10}}}{12+20k-5k^2-22k^3-8k^4+2k^5+k^6}$$

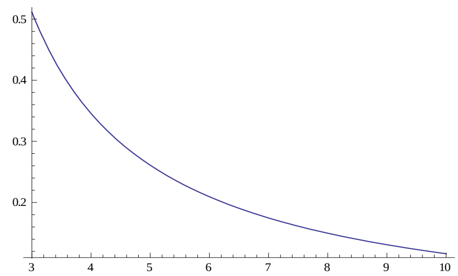
函數

$$f_+(k,m)=\frac{-4-12k-13k^2-6k^3-k^4+\sqrt{208+512k+424k^2+224k^3+149k^4-48k^5-151k^6-50k^7+17k^8+10k^9+k^{10}}}{12+20k-5k^2-22k^3-8k^4+2k^5+k^6}$$

分別作其圖形如圖(三十五)-a 和圖(三十五)-b：



圖(三十五)-a



圖(三十五)-b

由圖形觀察出

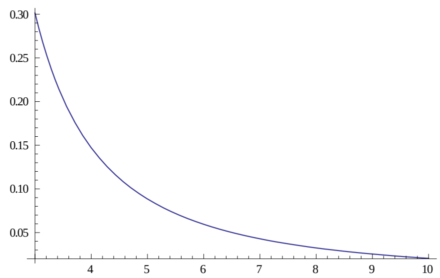
當 $x=\dfrac{-4-12k-13k^2-6k^3-k^4-\sqrt{208+512k+424k^2+224k^3+149k^4-48k^5-151k^6-50k^7+17k^8+10k^9+k^{10}}}{12+20k-5k^2-22k^3-8k^4+2k^5+k^6}$，

x 的值為負，不合，故取

$$x=\frac{-4-12k-13k^2-6k^3-k^4+\sqrt{208+512k+424k^2+224k^3+149k^4-48k^5-151k^6-50k^7+17k^8+10k^9+k^{10}}}{12+20k-5k^2-22k^3-8k^4+2k^5+k^6}$$

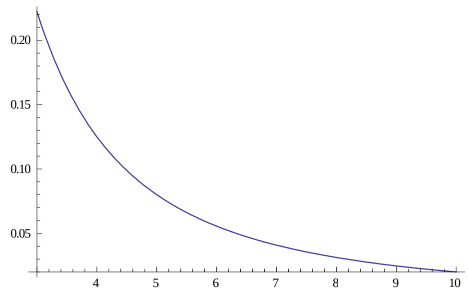
$$\therefore 4r_1^{\ 2}=(\frac{1}{k+2})^2+(\frac{-4-12k-13k^2-6k^3-k^4+\sqrt{208+512k+424k^2+224k^3+149k^4-48k^5-151k^6-50k^7+17k^8+10k^9+k^{10}}}{12+20k-5k^2-22k^3-8k^4+2k^5+k^6})^2$$

令函數 $f(k)=4r_1^{\ 2}$，其圖形如圖(三十六)：



圖(三十六)

2. $4r_2^{\ 2}=(\dfrac{1}{k})^2+(\dfrac{1}{k})^2$，令函數 $f(k)=4r_2^{\ 2}$，其圖形如圖(三十七)：

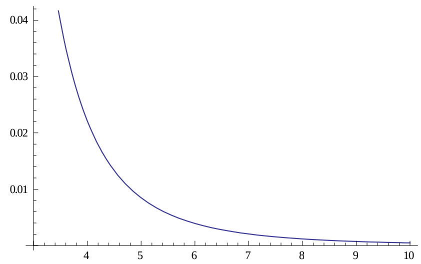


圖(三十七)

3. $4r_1^{\ 2}-4r_2^{\ 2}=[(\frac{1}{k+2})^2+x^2]-[(\frac{1}{k})^2+(\frac{1}{k})^2]$

$$=(\frac{1}{k+2})^2+(\frac{-4-12k-13k^2-6k^3-k^4+\sqrt{208+512k+424k^2+224k^3+149k^4-48k^5-151k^6-50k^7+17k^8+10k^9+k^{10}}}{12+20k-5k^2-22k^3-8k^4+2k^5+k^6})^2-\frac{2}{k^2}$$

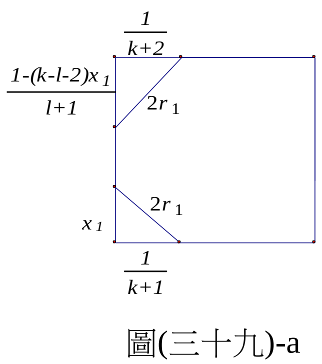
令函數 $f(k)=4r_1^{\ 2}-4r_2^{\ 2}$，其圖形如圖(三十八)：



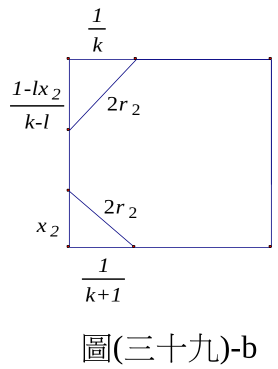
圖(三十八)

由圖形可觀察出在討論範圍 $3\leq k\leq 10$ 時，$4r_1^{\ 2}-4r_2^{\ 2}>0$ 恆成立，即 $r_1>r_2$。

(四) $k+1\leq m\leq 2k$，令 $m=k+l$，$1\leq l\leq k-2$(如圖(三十九)-a 和圖(三十九)-b)



圖(三十九)-a



圖(三十九)-b

1. $4r_1^{\ 2}=x_1^2+(\frac{1}{k+1})^2=(\frac{1}{k+2})^2+[\frac{1-(k-l-2)x_1}{l+1}]^2$ 解得 $x_1=\frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^{\ 2}-4a_1c_1}}{2a_1}$

其中

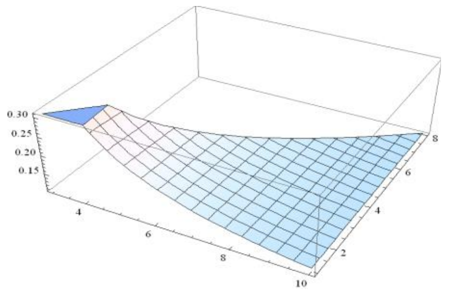
$a_1=12+20k-5k^2-22k^3-8k^4+2k^5+k^6+8l+16kl+2k^2l-14k^3l-10k^4l-2k^5l$

$b_1=16+40k+28k^2-2k^3-8k^4-2k^5+8l+24kl+26k^2l+12k^3l+2k^4l$

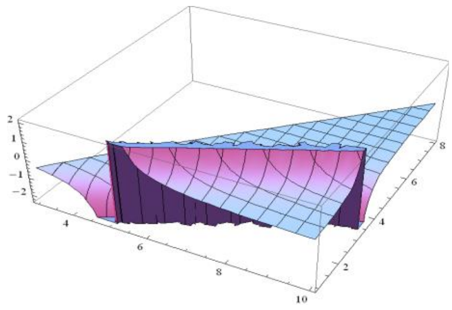
$c_1=1+10k+13k^2+6k^3+k^4-6l-4kl-3l^2-2kl^2$

令函數 $f_{-}(k,m)=\dfrac{-b_1-\sqrt{b_1^{\ 2}-4a_1c_1}}{2a_1}$，函數 $f_{+}(k,m)=\dfrac{-b_1+\sqrt{b_1^{\ 2}-4a_1c_1}}{2a_1}$

分別作其圖形如圖(四十)-a 和圖(四十)-b：



圖(四十)-a



圖(四十)-b

由圖形觀察出當 $x_1=\dfrac{-b_1+\sqrt{b_1^{\ 2}-4a_1c_1}}{2a_1}$，$x_1$ 的值有負，不合，

故取 $x_1=\dfrac{-b_1-\sqrt{b_1^{\ 2}-4a_1c_1}}{2a_1}$。

2. $4r_2^{\ 2}=x_2^{\ 2}+(\dfrac{1}{k+1})^2=(\dfrac{1}{k})^2+(\dfrac{1-lx_2}{k-l})^2$　解得　$x_2=\dfrac{-b_2\pm\sqrt{b_2^{\ 2}-4a_2c_2}}{2a_2}$

其中

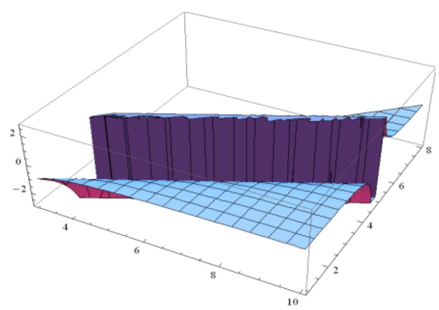
$a_2=k^4+2k^5+k^6-2k^3l-4k^4l-2k^5l$

$b_2=2k^2l+4k^3l+2k^4l$

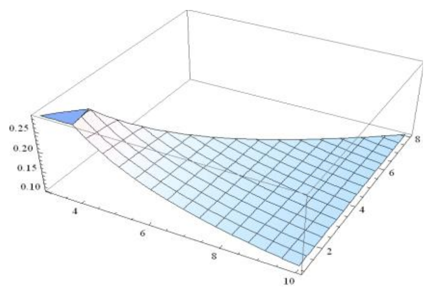
$c_2=-2k^2-4k^3-k^4+2kl+4k^2l-l^2-2kl^2$

令函數 $f_{-}(k,m)=\dfrac{-b_2-\sqrt{b_2^{\ 2}-4a_2c_2}}{2a_2}$，函數 $f_{+}(k,m)=\dfrac{-b_2+\sqrt{b_2^{\ 2}-4a_2c_2}}{2a_2}$

分別作其圖形如圖(四十一)-a 和圖(四十一)-b：



圖(四十一)-a



圖(四十一)-b

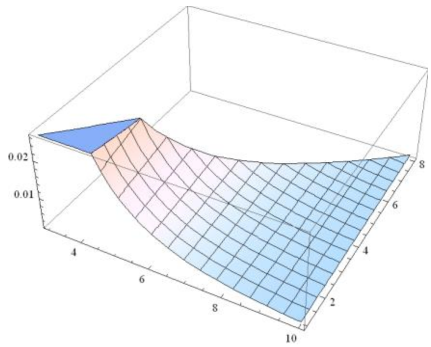
由圖形觀察出當 $x_2=\dfrac{-b_2-\sqrt{b_2^{\,2}-4a_2c_2}}{2a_2}$，$x_2$的值有負，不合，

故取 $x_2=\dfrac{-b_2+\sqrt{b_2^{\,2}-4a_2c_2}}{2a_2}$ 。

3. $4r_1^{\,2}-4r_2^{\,2}=[x_1^{\,2}+(\dfrac{1}{k+1})^2]-[x_2^{\,2}+(\dfrac{1}{k+1})^2]=x_1^{\,2}-x_2^{\,2}$

$=(\dfrac{-b_1-\sqrt{b_1^{\,2}-4a_1c_1}}{2a_1})^2-(\dfrac{-b_2+\sqrt{b_2^{\,2}-4a_2c_2}}{2a_2})^2$

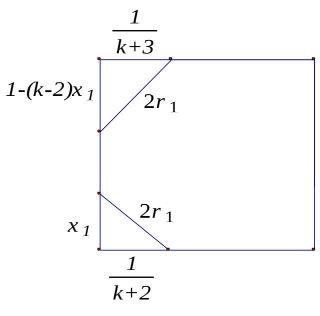
令函數 $f(k,l)=4r_1^{\,2}-4r_2^{\,2}$，其圖形如圖(四十二)：



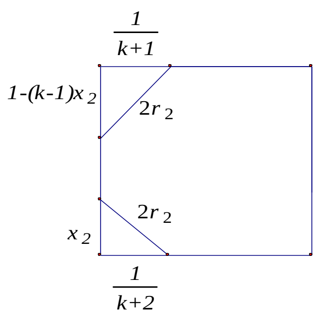
圖(四十二)

由圖形可觀察出在討論範圍 $3\le k\le 10$ 時，$4r_1^{\,2}-4r_2^{\,2}>0$ 恆成立，即 $r_1>r_2$。

(五) $m=2k-1$(如圖(四十三)-a 和圖(四十三)-b)



圖(四十三)-a



圖(四十三)-b

1. $4r_1^{\,2}=x_1^{\,2}+(\dfrac{1}{k+2})^2=(\dfrac{1}{k+3})^2+[1-(k-2)x_1]^2$ 解得

$$x_1=\frac{-72-84k-14k^2+17k^3+8k^4+k^5\pm\sqrt{1836+4716k+5871k^2+4684k^3+2525k^4+890k^5+191k^6+22k^7+k^8}}{108+36k-93k^2-58k^3+6k^5+k^6}$$

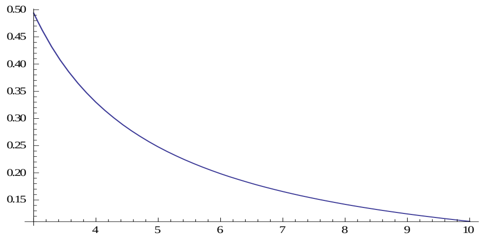
令函數

$$f_{-}(k,m)=\frac{-72-84k-14k^2+17k^3+8k^4+k^5-\sqrt{1836+4716k+5871k^2+4684k^3+2525k^4+890k^5+191k^6+22k^7+k^8}}{108+36k-93k^2-58k^3+6k^5+k^6}$$

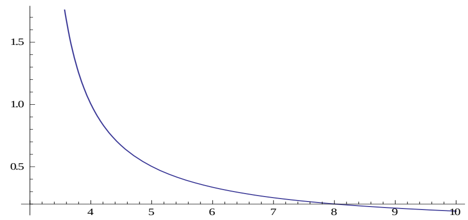
函數

$$f_{+}(k,m)=\frac{-72-84k-14k^2+17k^3+8k^4+k^5+\sqrt{1836+4716k+5871k^2+4684k^3+2525k^4+890k^5+191k^6+22k^7+k^8}}{108+36k-93k^2-58k^3+6k^5+k^6}$$

分別作其圖形如圖(四十四)-a 和圖(四十四)-b：



圖(四十四)-a



圖(四十四)-b

由圖形觀察出

當 $x_1=\frac{-72-84k-14k^2+17k^3+8k^4+k^5+\sqrt{1836+4716k+5871k^2+4684k^3+2525k^4+890k^5+191k^6+22k^7+k^8}}{108+36k-93k^2-58k^3+6k^5+k^6}$，

x_1 的值有負，不合，故取

$$x_1=\frac{-72-84k-14k^2+17k^3+8k^4+k^5-\sqrt{1836+4716k+5871k^2+4684k^3+2525k^4+890k^5+191k^6+22k^7+k^8}}{108+36k-93k^2-58k^3+6k^5+k^6}$$

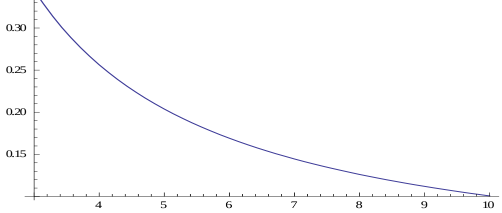
2. $4r_2^2=x_2^2+(\frac{1}{k+2})^2=(\frac{1}{k+1})^2+[1-(k-1)x_2]^2$ 解得

$$x_2=\frac{-4-8k-k^2+7k^3+5k^4+k^5\pm\sqrt{16+120k+324k^2+442k^3+346k^4+166k^5+51k^6+10k^7+k^8}}{-8k-20k^2-14k^3+k^4+4k^5+k^6}$$

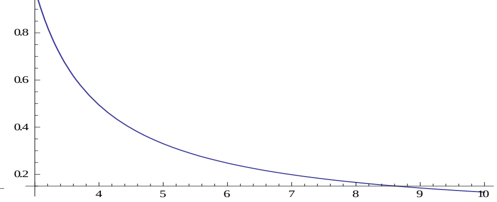
令函數 $f_{-}(k,m)=\frac{-4-8k-k^2+7k^3+5k^4+k^5-\sqrt{16+120k+324k^2+442k^3+346k^4+166k^5+51k^6+10k^7+k^8}}{-8k-20k^2-14k^3+k^4+4k^5+k^6}$

函數 $f_{+}(k,m)=\frac{-4-8k-k^2+7k^3+5k^4+k^5+\sqrt{16+120k+324k^2+442k^3+346k^4+166k^5+51k^6+10k^7+k^8}}{-8k-20k^2-14k^3+k^4+4k^5+k^6}$

分別作其圖形如圖(四十五)-a 和圖(四十五)-b：



圖(四十五)-a



圖(四十五)-b

由圖形觀察出

若 $x_2=\dfrac{-4-8k-k^2+7k^3+5k^4+k^5+\sqrt{16+120k+324k^2+442k^3+346k^4+166k^5+51k^6+10k^7+k^8}}{-8k-20k^2-14k^3+k^4+4k^5+k^6}$ ，

在 k=3 時 x_2 的值會大於 0.5，不合，故取

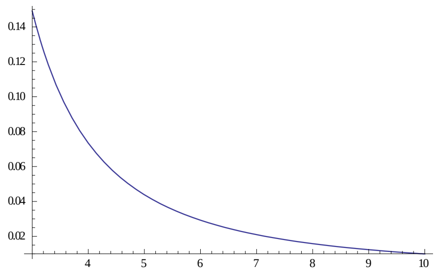
$x_2=\dfrac{-4-8k-k^2+7k^3+5k^4+k^5-\sqrt{16+120k+324k^2+442k^3+346k^4+166k^5+51k^6+10k^7+k^8}}{-8k-20k^2-14k^3+k^4+4k^5+k^6}$

3. $4r_1^{\,2}-4r_2^{\,2}=[\,x_1^{\,2}+(\dfrac{1}{k+2})^2]-[x_2^{\,2}+(\dfrac{1}{k+2})^2]=x_1^{\,2}-x_2^{\,2}$

$=(\dfrac{-72-84k-14k^2+17k^3+8k^4+k^5-\sqrt{1836+4716k+5871k^2+4684k^3+2525k^4+890k^5+191k^6+22k^7+k^8}}{108+36k-93k^2-58k^3+6k^5+k^6})^2$

$-(\dfrac{-4-8k-k^2+7k^3+5k^4+k^5\pm\sqrt{16+120k+324k^2+442k^3+346k^4+166k^5+51k^6+10k^7+k^8}}{-8k-20k^2-14k^3+k^4+4k^5+k^6})^2$

令函數 $f(k)=4r_1^{\,2}-4r_2^{\,2}$，其圖形如圖(四十六)：



圖(四十六)

由圖形可觀察出在討論範圍 $3\le k\le 10$ 時，$4r_1^{\,2}-4r_2^{\,2}>0$ 恆成立，即 $r_1>r_2$。

(六) 結論：以整齊排法放點所作之圓可得最小半徑，且當 $(k-1)\times k\le n<k\times(k+1)$ 時，以 k 列所排出的點可得最小半徑 r。

五、多邊形放法與整齊放法所得半徑之比較

(一) 探討多邊形的排法與整齊放法間的比較(以五邊形為例)

1. 正五邊形放法

設正方形 $ABCD$ 邊長為 1，圓半徑為 r_1，連接 $\overline{OA}$ (如圖(四十七) -a)。經繪圖得知，圓心以正五邊形放法排列所得之最小半徑為 $r_1 \fallingdotseq 0.37$。

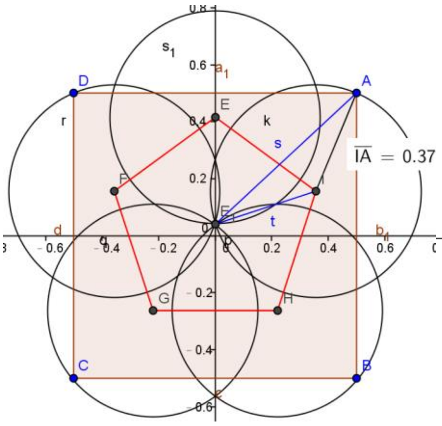
2. 五邊形放法

將正五邊形中最上面的 E 點往 x 軸移動，我們將其放法稱為「五邊形放法」。經繪圖得知，當五邊形圖形中 E 點越往 x 軸移動時，可得更小半徑 $r_2 \fallingdotseq 0.34$(如圖(四十七) –b)，而其多邊形放法所形成的圖形越趨近整齊放法。

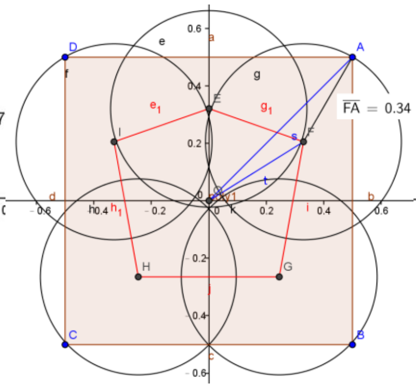
3. 整齊放法

由 p.9 得知，當 n=5 使用整齊放法時，可得 r≒0.3299159(如圖(四十七) –c)。

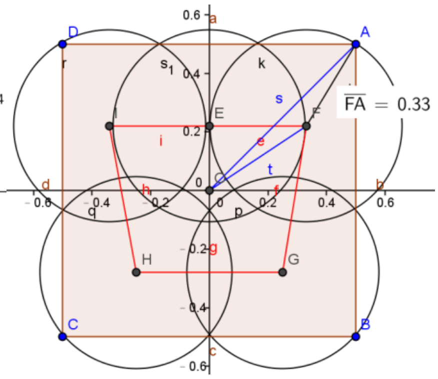
∴我們比較 r_1、r_2 和 r，其中以整齊放法的排列方式為最小。



圖(四十七) -a



圖(四十七) –b



圖(四十七) –c

(二) 推廣

在放五邊形時，我們觀察到在將上面的頂點往下移動的過程中，半徑有變小的趨勢，直到上面三點共線時半徑最小，此即整齊排法。

由五邊形放法的結果發現：以多邊形放法排列，若其排列方法之圖形越趨近於整齊放法，所得的半徑會越小。因此，我們可知以整齊排數放點可得最小半徑 r。

伍、 討論與結果

根據以上研究，我們可以得出下列幾點結論：

一、 由 n=1 時我們可以推論當 $n=k^2$ 時可以當作是 k^2 個邊長為 $\frac{1}{k}$ 的小正方形，因此圓半徑皆為 $\frac{\sqrt{2}}{2k}$ 。

二、 由較小圓數的圖形我們可以發現其放法具有對稱性，且藉由較多圓數的圖形驗證，無論多少圓個數的整齊排列放法皆具有對稱性。

三、 由 $4r^2 = x^2 + \left(\frac{1}{\frac{n}{2}+t}\right)^2 = (l-x)^2 + \left(\frac{1}{\frac{n}{2}-t}\right)^2$ 可發現當 t 越小時，r 越小。由此可知，當各列圓的個數較相近時，方可得較小半徑。

四、 由於 $4r^2 = x^2 + \left(\frac{1}{\left[\frac{n}{k}\right]+1}\right)^2 = \left(\frac{1-ax}{k-a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\left[\frac{n}{k}\right]}\right)^2$，所以當$(k—1)\times k<n\leq k\times(k+1)$時，列數為 k 的放法可得最小半徑 r，而我們將此種擺放方式稱為「整齊放法」。

五、 若將 n 表示為 $k\times(k-1)+m$，其中 $1\leq m<2k$，則以 k 列的排法較以 $k-1$ 列的排法所得的半徑小，因此得知當 $n= k\times(k—1)$時為列數 $k-1$ 和 k 的轉捩點。

六、 分析整齊排法是否可得最小半徑：由於三點圖之三圓心位置連線可視為一三角形所形成的多邊形放法，抑或是以二排排列方式的整齊放法。因此，我們嘗試以正多邊形頂點為圓心位置放置於正方形上，以求此法的最小半徑。由繪圖得知，當多邊形中最上方的點越像 x 軸靠近時，所得的半徑越小，而其圖形趨近於整齊放法。由此可知，以「整齊放法」擺放，可得我們所需的最小半徑。

陸、 延伸應用

一、 除了上述的實驗結果外，我們亦可將其應用至生活中的實際例子：

(一) 夜市中的商家擺放方式

(二) 在一固定區域內，設置路燈使其區域內皆可得到照明

(三) 欲使一地區皆可接收到訊號，則基地台應設置之位置

二、 將原定之正方形推廣至矩形

將長寬比調整成 1：l，以仿 p.6 中的討論，計算可得其最佳擺法及半徑。

柒、 未來展望

一、 由於我們探討的皆為以點為圓心所繪出之圓的聯集是否有覆蓋此正方形，因此我們可以進一步推廣至基地台問題。區域內各點與圓心的距離會影響其訊號的程度，由 0 到 1 表示其訊號強弱，其中 0 表示無訊號，1 則表示該點訊號良好，而重疊之部分加成計算，求其最佳解。

二、 我們觀察發現當 n 值越大，$\sqrt{n}\times r(n)$的值越接近 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，也就是正方形的對角線長度的一半，因此我們可藉此大致預估其 $r(n)$值，但欲求方法可將算式中的 k 與 a 皆替換為 n 的關係式，並求其 $r(n)$與 n 之相關函數。盼藉此函數，我們只須透過所需圓數(n)即可得知其相對應的最小半徑(r)。(見附件二)

捌、 參考資料

一、Mark S. Daskin, What You Should Know About Location Modeling. Published online 28 March 2008 in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com)

二、Mark S. Daskin, Facility Location in Supply Chain Design. December 2003

三、顏文麒。圓源緣園—探討多邊形與頂點圓覆蓋關係 (民 101)

四、許志農、黃森山等。普通高級中學 數學 第三冊。新北市：龍騰文化（民 100）

附件一

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.7071068	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	0.559017	0.559017	X	X	X	X	X	X	X	X
3	0.5270463	0.5038911	0.5270463	X	X	X	X	X	X	X
4	0.5153882	0.3535534	0.5010793	0.5153882	X	X	X	X	X	X
5	0.509902	0.3299159	X	0.50049	0.509902	X	X	X	X	X
6	0.5068969	0.3004626	0.3004626	0.559017	0.5002777	0.5068969	X	X	X	X
7	0.5050763	0.2904291	0.2841026	X	0.5181371	0.5001784	0.5050763	X	X	X
8	0.5038911	0.2795085	0.2650096	0.2795085	X	0.5092948	0.5001241	0.5038911	X	X
9	0.503077	0.2744889	0.2357023	0.2680464	X	0.6925321	0.5057193	0.5000913	0.503077	X
10	0.5024938	0.2692582	0.2275527	0.2560985	0.2692582	X	0.559017	0.5038911	0.5000699	0.5024938
11	0.5020619	0.2664236	0.2185699	X	0.2609508	X	X	0.5320155	0.5028244	0.5000553
12	0.5017331	0.2635231	0.2083333	0.2083333	0.253126	0.2635231	X	0.8500919	0.5205971	0.5021458
13	0.5014771	0.2617759	0.2039338	0.2018366	0.2523242	0.2572868	X	X	0.6051342	0.5145013
14	0.5012739	0.2600039	0.1992945	0.1947233	X	0.2518638	0.2600039	X	X	0.559017
15	0.5011099	0.2588544	0.1943651	0.1866721	0.1943651	0.2508666	0.2551748	X	X	1.0186541
16	0.5009756	0.2576941	0.1917749	0.1767767	0.1891776	X	0.2512277	0.2576941	X	X
17	0.5008643	0.2568988	0.1891025	0.1730057	0.1836004	X	0.2504628	0.2538553	X	X
18	0.500771	0.2560985	0.186339	0.1690091	0.1774816	0.186339	0.3004626	0.2508666	0.2560985	X
19	0.500692	0.255526	0.1847019	0.1647295	0.1705221	0.1821542	X	0.2502896	0.2529792	X
20	0.5006246	0.254951	0.1830323	0.1600781	0.1600781	0.1777582	X	0.2614101	0.250643	0.254951
21	0.500566	0.254525	0.181327	0.157758	0.156872	0.173133	0.181327	X	0.250198	0.252369
22	0.5005163	0.2540986	0.1802334	0.155353	0.1534759	0.1684215	0.177907	X	0.2560985	0.2504956
23	0.5004724	0.253774	0.1791243	0.152849	0.1498377	X	0.1743991	X	X	0.2501449
24	0.5004338	0.2534484	0.1780001	0.1502313	0.1458727	0.1502313	0.170863	0.1780001	X	0.253906
25	0.5003998	0.2531951	0.1772346	0.1487237	0.1414214	0.1475058	0.1676125	0.1751651	X	0.2788901
26	0.5003697	0.2529413	0.176462	0.1471796	0.139367	0.1446315	X	0.1723242	X	X
27	0.5003428	0.2527399	0.1756821	0.1455958	0.1372303	0.1415687	X	0.169571	0.1756821	X
28	0.5003188	0.2525381	0.1751268	0.1439689	0.134998	0.138253	0.1439689	0.1672444	0.1733021	X
29	0.5002972	0.2523754	0.1745679	0.1429416	0.1326528	0.1345609	0.1416422	0.1678735	0.1709668	X
30	0.5002777	0.2522124	0.1740051	0.1418974	0.1301708	0.1301708	0.1392057	X	0.1687805	0.1740051

＊註:由於某些值的 $k-2a<0$，造成所得 x 值為虛數，使得其 r 值亦為虛數，因此表中以「x」表示其為虛數值。

附件二

n	$r(n)$	$\sqrt{n}\times r(n)$	n	$r(n)$	$\sqrt{n}\times r(n)$	n	$r(n)$	$\sqrt{n}\times r(n)$	n	$r(n)$	$\sqrt{n}\times r(n)$
1	0.70711	0.707106781	271	0.043	0.707827278	501	0.03161	0.707556166	801	0.02499	0.707390801
2	0.55902	0.790569415	272	0.04291	0.707756397	502	0.03158	0.707544894	802	0.02498	0.707393067
3	0.50389	0.872765003	273	0.04284	0.707828674	503	0.03155	0.707529275	803	0.02496	0.707393693
4	0.35355	0.707106781	274	0.04277	0.707887869	504	0.03151	0.707509281	804	0.02495	0.707392671
5	0.32992	0.737714449	275	0.04269	0.707933855	505	0.03148	0.707484885	805	0.02493	0.707389996
6	0.30046	0.735980072	276	0.04261	0.707966501	506	0.03145	0.707456056	806	0.02492	0.707385663
7	0.2841	0.751664831	277	0.04254	0.707985671	507	0.03142	0.707485183	807	0.0249	0.707379663
8	0.26501	0.749560296	278	0.04246	0.707991223	508	0.03139	0.707510443	808	0.02489	0.707371992
9	0.2357	0.707106781	279	0.04239	0.707983011	509	0.03136	0.707531816	809	0.02487	0.707362641
10	0.22755	0.719584977	280	0.04231	0.70796088	510	0.03133	0.707549279	810	0.02485	0.707351606
11	0.21857	0.724914417	281	0.04223	0.707924672	511	0.0313	0.707562811	811	0.02484	0.707338879
12	0.20833	0.721687836	282	0.04215	0.707874221	512	0.03127	0.707572391	812	0.02482	0.707324453
13	0.20184	0.72773224	283	0.04207	0.707809354	513	0.03124	0.707577996	813	0.02481	0.707338971
14	0.19472	0.728587733	284	0.042	0.707729891	514	0.03121	0.707579603	814	0.02479	0.707351967
15	0.18667	0.722977865	285	0.04192	0.707635644	515	0.03118	0.707577189	815	0.02478	0.707363435
16	0.17678	0.707106781	286	0.04184	0.707526418	516	0.03115	0.70757073	816	0.02476	0.70737337
17	0.17301	0.713320906	287	0.04176	0.70740201	517	0.03112	0.707560201	817	0.02475	0.707381767
18	0.16901	0.717044716	288	0.04168	0.707262205	518	0.03109	0.707545578	818	0.02473	0.70738862
19	0.16473	0.718039348	289	0.04159	0.707106781	519	0.03106	0.707526835	819	0.02472	0.707393925
20	0.16008	0.715891053	290	0.04153	0.707230304	520	0.03103	0.707503946	820	0.0247	0.707397675
21	0.15687	0.718878322	291	0.04147	0.7073431	521	0.031	0.707476884	821	0.02469	0.707399866
22	0.15348	0.719865925	292	0.0414	0.707445087	522	0.03096	0.707445622	822	0.02467	0.70740049
23	0.14984	0.71859639	293	0.04133	0.707536178	523	0.03093	0.707410133	823	0.02466	0.707399543
24	0.14587	0.714627582	294	0.04127	0.707616287	524	0.0309	0.707370388	824	0.02464	0.707397019
25	0.14142	0.707106781	295	0.0412	0.707685322	525	0.03087	0.707326358	825	0.02463	0.707392912
26	0.13937	0.710635025	296	0.04114	0.707743188	526	0.03084	0.707278013	826	0.02461	0.707387216
27	0.13723	0.713069406	297	0.04107	0.707789788	527	0.03081	0.707225322	827	0.0246	0.707379925
28	0.135	0.714342372	298	0.041	0.707825021	528	0.03078	0.707168256	828	0.02458	0.707371033
29	0.13265	0.714357392	299	0.04094	0.707848781	529	0.03074	0.707106781	829	0.02457	0.707360533
30	0.13017	0.712974988	300	0.04087	0.707860961	530	0.03072	0.707158609	830	0.02455	0.70734842

【評語】040403

本作品以 n 個等圓來覆蓋正方形時,研究其所需半徑最小為何及如何排列,是相當有趣的題目,而且得到許多不錯的成果。然而,本作品僅考慮規則性的排放方式,直覺上這樣的排放方式可得最小的圓半徑,事實上需要證明;作者們可能意識到此點,曾試圖說明這樣的規則排序方式為最佳,卻也只是特例而已。另外,有很多地方以觀察表格數據或觀察圖形來求得其所要的結果,事實上這些都是需要嚴格證明的,總而言之,本作品還不錯,但應該可以更好。