中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

最佳團隊合作獎

040402

扭「轉」乾坤－以 3X3 盤面結構分析化簡轉珠遊戲並尋求最短步數

學校名稱：國立馬祖高級中學

作者：	指導老師：
高一　陳峻豪	鄭景文
高一　林祺銘	卜文強
高一　陳元愷	

關鍵詞：最短步數、轉珠遊戲、動態規劃

摘要

近年來流行的轉珠遊戲大同小異[1]，其玩法是可以從任一顆珠子來移動，所以能自由移動的方式相當多，找出最短移動路徑也相對的複雜。起初先從數字拼圖開始[2]研究起，若起手之珠子看成是空格的話，移動珠子等同於數字拼圖的數字移動至空格處，別於數字拼圖的固定位置擺放，轉珠遊戲以這個架構延伸變化，本篇試著先從 3X3 所有的盤面中找出最佳的移動方式，然後將所有 5X6 分割成若干個 3X3 中的盤面，而從每個部份的最佳路徑，找出整個 5X6 的最短步數，進而希望找出解出 m x m 路徑的規則。

壹、研究動機

2013 智慧型手機當道，也幾乎人手一台，各種 APP 遊戲爭奇鬥豔，其中一家遊戲公司曾經締造月營業額兩億元的紀錄[1]，也拿下最受歡迎的遊戲 APP 蟬聯幾周冠軍，開始變成所有遊戲爭相模仿之對象，我們統稱這類遊戲爲轉珠遊戲，顧名思義，遊戲戰鬥畫面是在有限的時間內，一個 5X6 的盤面中，有 5 種顏色的珠子，玩家任意挑一個珠子起手，藉由移動與相鄰珠子做位置交換，來達到使相同顏色之珠子三粒或三粒以上的排成一直線或橫線，排成一線後就可以消除，消除越多數目可以對敵人造成更多的傷害。這看似簡單的遊戲，卻隱含著極大的學問:有限的時間內，爲了達成最高連續消除數的最短步數爲何?是否存在唯一之最佳解呢?引發了我們的興趣。

貳、研究目的

找出最短步數可以達到消除最多珠子之路徑

參、研究設備及器材

電腦
智慧型手機
平板電腦

肆、研究過程或方法

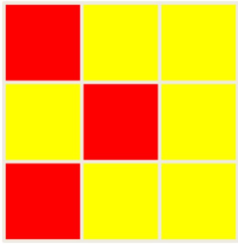
▲圖 1 遊戲畫面擷取圖

遊戲中，以轉珠遊戲爲主要戰鬥主軸，次要是卡片蒐集，卡片分成五大屬性陣營：光、暗、火、水、木，存在的屬性相剋，水剋火、火剋木、木剋水、光剋暗、暗剋光，不同卡片有不同能力，藉由自身卡片組合搭配其他玩家的隊長，來達到攻擊最大化的效果。戰鬥中，消除紅色珠，即是火屬性卡片發動攻擊，藍色珠則是水，綠色珠則是木，紫色珠則是暗，黃色珠是光，粉紅色是心，用來補血用，敵人有自己的發動攻擊的回合數，敵人發動攻擊前先擊倒對手當然是最好的，萬一沒辦法短時間擊倒，則需要考慮卡片能力，或是卡片等級，或是轉珠能力(想辦法消除心屬性補血)，所以再進入關卡前，應想好剋敵之策略在選擇最適合的隊員再上陣。

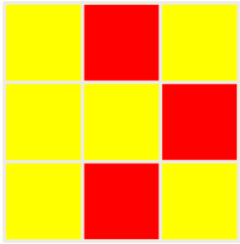
遊戲中由於三個同顏色珠子連成一線(直或橫)或三個以上連續不斷就可以消除，通常新手在玩的時候，在有限的時間內，最少有能力至少做到三同色珠排成一直線，但從何處當起手點下手，該怎麼走才能達到最多消除數，這其實是一門大學問，最直觀的就是我們把盤面所有可能之排列組合列出來，然後分析哪一條路徑最短，消除數又最多者，就是我們的最佳解。

於是我們先從三顆珠子之相對情況研究起(因爲最少 3 個連直線才能消除)，我們先於 3X3 之盤面來做探討，假設 3X3 的盤面內只有一種同色的三顆珠其餘皆是雜色珠，其排列組合的圖形結果有 $C_3^9 \times \frac{1}{4}$ =21 種(旋轉不算)，平移應列爲不同之兩圖形，如下圖所示，但我們發現

要完成圖 1(a)(b)連成一直線都只需要一步。如圖 2 所示。所以我們將所有鏡射、平移、旋轉，皆視爲同一種圖形，歸納如圖 2。

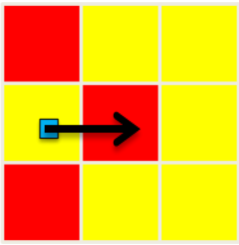


(a)

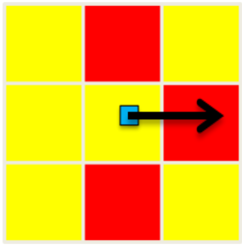


(b)

▲圖 2(a)向右平移一格變為(b)



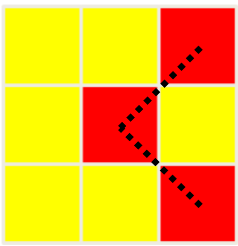
(a)



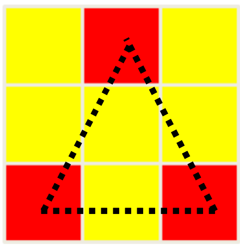
(b)

▲圖 3 藍點為起手點，向右移動一格交換後即完成。

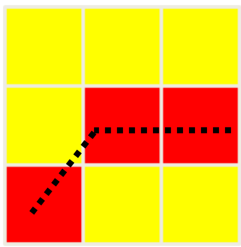
進一步 3X3 盤面中，鏡射、平移、旋轉視爲相同圖型外，把所有的型排出來，並將其命名，共有 10 種，如下圖所示：



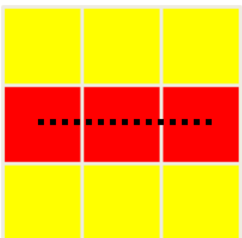
(a) ㄑ型



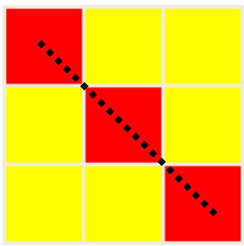
(b) 三角型



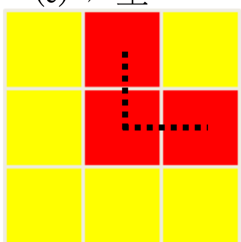
(c) ㄏ型



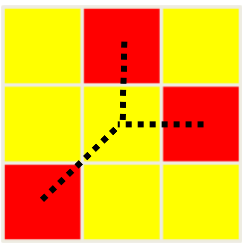
(d) 一型



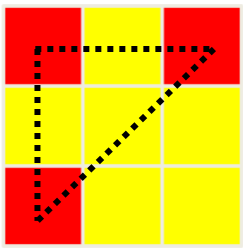
(e) 斜型



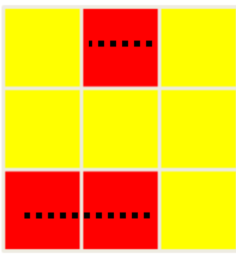
(f) L 型



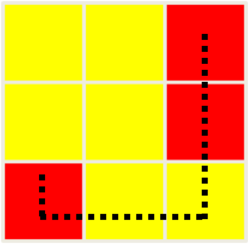
(g) Y 型



(h) 直角型



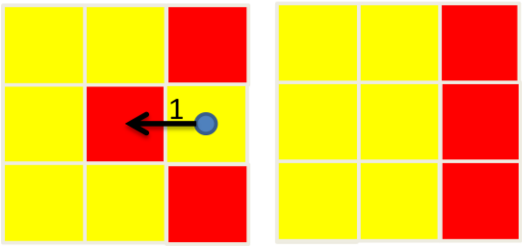
(i) 二型



(j)　J 型

▲圖 4　3X3 格子內之所有可能的 10 種型

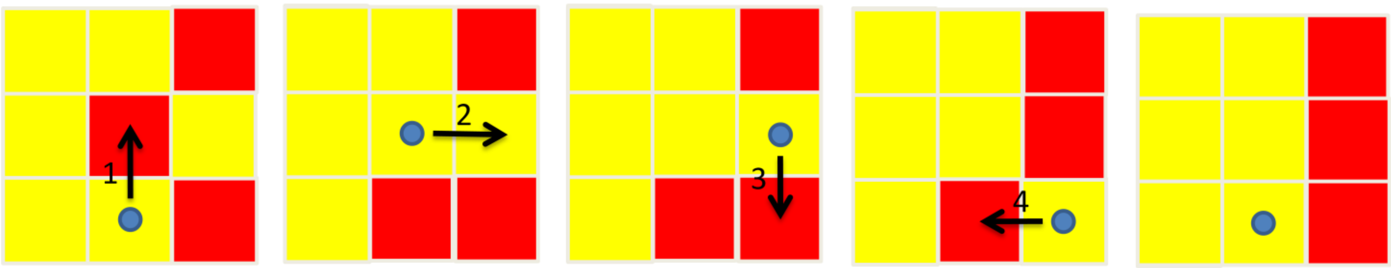
我們研究每一種型其最小完成步數，並標示如圖，以ㄑ型爲例:



(a)　　　　　　　　　　　(b)

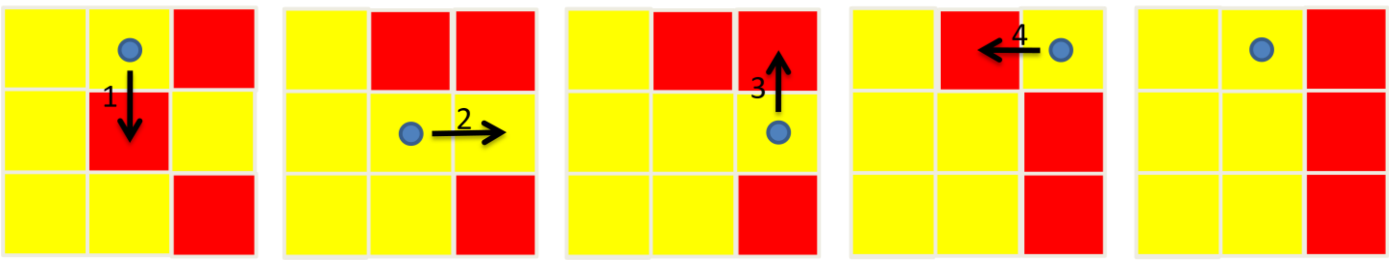
▲圖 5(a)中圓圈爲起手點，向左移動 1 步，(b)爲完成之圖型

ㄑ型不只一種解法:如圖所示



(a)　　　　　　(b)　　　　　　(c)　　　　　　(d)　　　　　　(e)

▲圖 6 不同起手點之流程圖



(a)　　　　　　(b)　　　　　　(c)　　　　　　(d)　　　　　　(e)

▲圖 7 不同起手點之流程圖

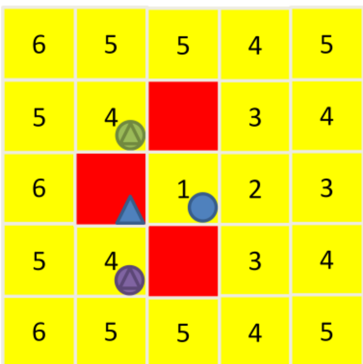
我們嘗試不同的起手點歸納，最短路徑之步數，整理如圖 8

6	5	5	4	5
5	4		3	4
6		1	2	3
5	4		3	4
6	5	5	4	5

▲圖 8 ，ㄑ型之最短步數分析圖

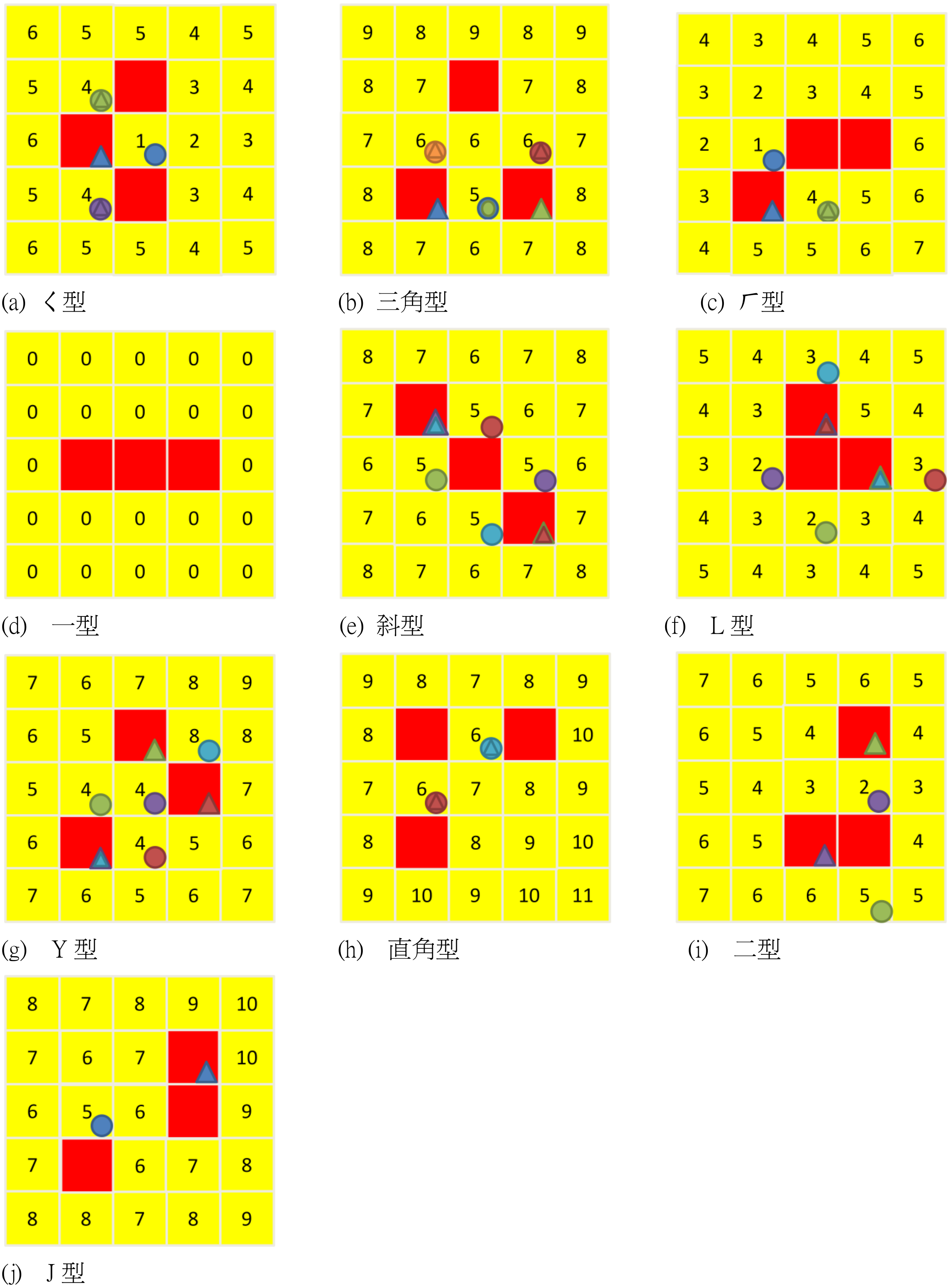
若將其看成一矩陣 $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ，可以看出 a_{22} 與 a_{21} 以及 a_{31} 爲連續整數之等差數列，

我們視爲一種相依情形，例如:如果以 a_{31} 當起手點的話，要走最短路徑，必然一定過經過 a_{21} 再到達 a_{22} ，或是經過 a_{41} 再到達 a_{42} ，然後再花 4 步完成此圖型，依此類推 a_{33} 與 a_{34} 以及 a_{44} 也是一種相依情況， a_{22} 與 a_{42} 、 a_{33} 並無相依，所以我們稱這 3 點都是該圖型的起點。然後我們深入仔細分析，以這 3 點作起手點當作移動的起點，移動方向不盡相同，完成圖形後，對應之終點也不盡相同，所以我們更進一步將其所有起點與終點標示出來。如圖 9 所示，稱起點爲完成該圖形之入口，終點爲完成該圖形之出口。



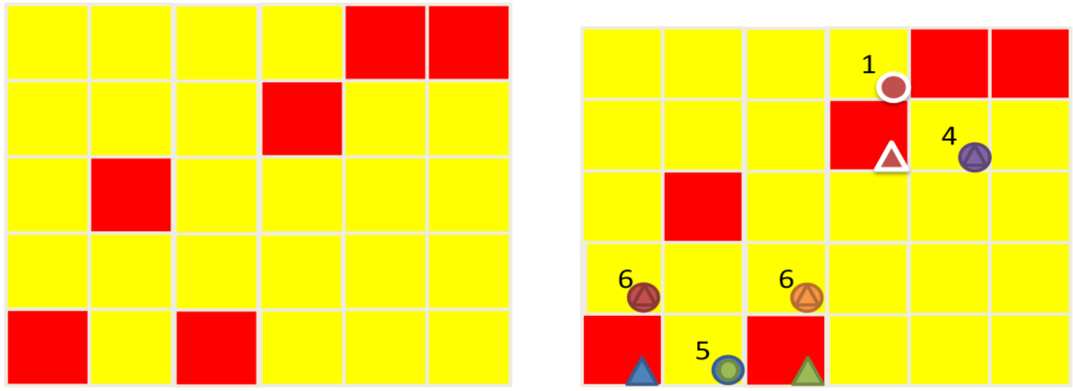
▲圖 9，ㄑ型最短步數以及出入口圖(○:表示入口 △:表示出口)

我們分析這 10 種圖形最短路徑圖，將其標示出來，並把所有入口、出口標示。



▲圖 10　3X3 最短步數以及起點終點圖(○:表示入口　△:表示出口)

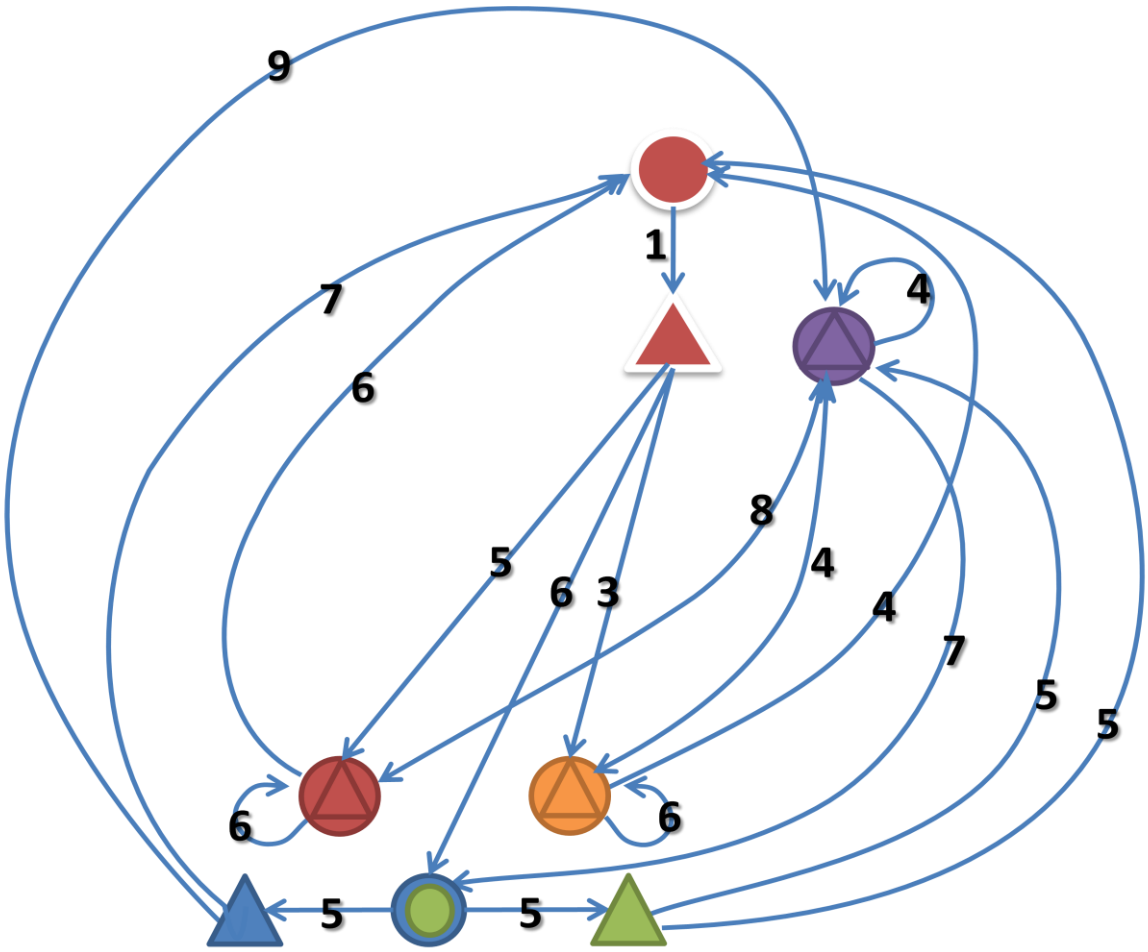
我們模擬一個盤面，假設我們目標就是要找個這兩個圖型之最短路徑，如圖 11(a)，查圖 10，將兩個圖形之所有起點終點，以及需要的步數標上，如圖 11(b)



(a) (b)

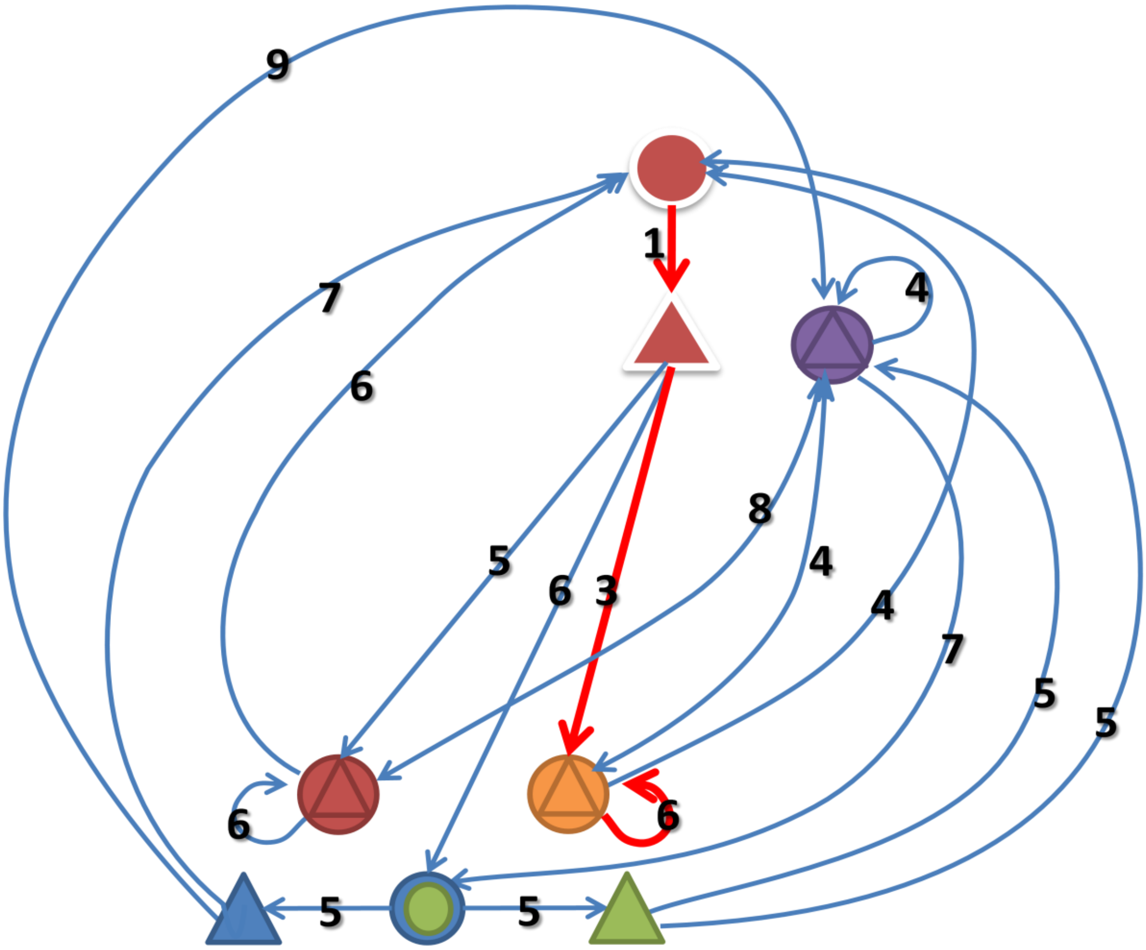
▲圖 11 (a)模擬之盤面 (b)查其圖型之對應起終點

左下方三角型以及右上方ㄏ型，各自擁有兩組出入口，完成一個路徑一定是三角型的出口接到ㄏ型的入口，或者是ㄏ型的出口接到三角型的入口，我們可以將其畫成一個簡圖，如圖 12



▲圖 12 三角型與ㄏ型之出入口分析路徑圖

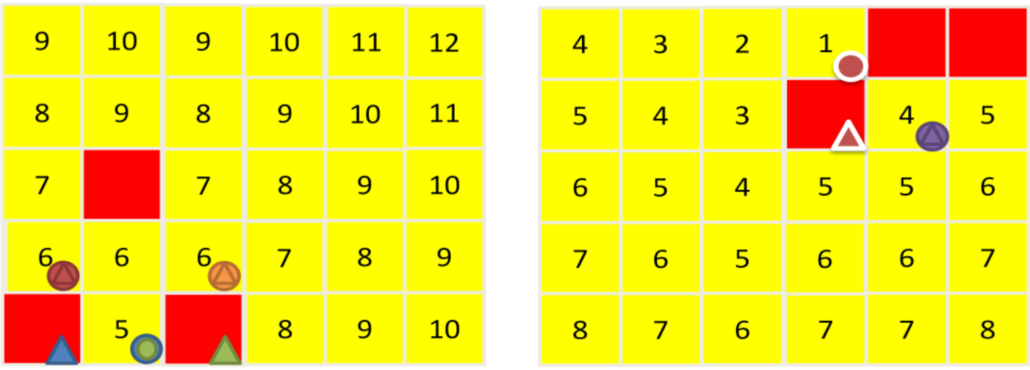
此圖形只要完成從 ○→△→○→△找尋一條總和最小，即爲我們的最佳路徑，我們找到最短路徑步數爲 10，圖 13 標示。



▲圖 13 三角型與ㄏ型之最短路徑示意圖

伍、研究結果

如圖 13 為例，圖論方式的表達方法一目了然，但是萬一圖形數量多，而每種圖形其起點終點數量也不只一個，如圖 13 左下角的三角型有四組出入口，右上角ㄏ型則有兩組出入口，又三角型與ㄏ型可以交換，看要以哪個型的入口當最開始之起手點，故總共有 4x2x2=16 條路徑，都要繪製成路徑圖會太複雜而且繁鎖，所以我們換方式分析，將其對應的步數分析圖延展至 5X6，同樣地，我們將右上角的ㄏ型步數分析圖也拓展成 5X6。



▲圖 15，圖 13 之起點終點步數之分析圖

若將其看成兩矩陣，三角型步數分析圖表示為 $a_{(i,j)} \in \begin{bmatrix} 9 & 10 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 9 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 0 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ ，

$1 \le i \le 5$ ，$1 \le j \le 6$

ㄏ型步數分析圖表示為 $b_{(i,j)} \in \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 5 & 6 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ ，$1 \le i \le 5$ ，$1 \le j \le 6$ ，

其中 0 代表圖形所在之處，我們輪流討論三角型以及ㄏ型起手之最短步數。

一、以三角型起手，起手一定是找該圖形之入口，分別爲a_{41}、a_{52}、a_{52}、a_{43} ，經過該對應的步數 6,5,5,6，就可完成該圖型，完成後，所對應的出口分別爲a_{41}、a_{51}、a_{53}、a_{43} ，再拿這幾個位置對應至另一圖形之步數分析矩陣，即可馬上查出完成另一種圖形所需之最短步數，a_{41}、a_{51}、a_{53}、a_{43}對應至b_{41}、b_{51}、b_{53}、b_{43}分別爲：7,8,6,5，將其加起來得到 13,12,11,11。

二、以ㄏ型起手，起手一定是找該圖形之入口，分別爲b_{14}、b_{25} ，經過該對應的步數 1,4，完成後，所對應的出口分別爲b_{24}、b_{25} ，再拿這幾個位置對應至另一圖形的矩陣，即可馬上查出完成另一種圖形所需之最短步數，b_{24}、b_{25}對應至a_{24}、a_{25}分別爲:9,10，將其加起來得到 10,14。

三、利用最短步數之矩陣化簡了原本要找出 16 種路徑後再分析，現在只需研究 6 個起點即可知道最短步數爲何。

陸、討論

一、起手點一定要抓圖形之入口起手才會有最短步數嗎?

二、從哪個圖型下手，才比較有機會能快速找到最短步數?

證明：

(一)若 $p \times q$ 盤面上經 3×3 分析切割後有 n 種型，假設起手點非 n 種型內之入口，則存在一個起手點 $a_{(i,j)}$，使得 $a_{(i,j)}$ 至 n_1 型的最近入口之最短步數為 r_1，n_1 型完成後的花費步數為 t_1，至最近的 n_2 型之最短步數為 r_2，n_2 型完成後的花費步數為 t_2，則其步數總和為 $S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n$。

若起手點為 n 型之入口，則總步數為 $S_2 = r_2 + r_3 + \cdots + r_n + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n$

$S_2 < S_1$，故要找最短步數，一定是拿其中某型之入口當起手點。

(二)若 $p \times q$ 盤面上經 3×3 分析切割後有 n 種型，從左而右依序為 n_1、n_2、n_3、...、n 若我們挑非兩側靠邊的型 n_k $(1 < k < n)$ 的入口當起手點，則 n_k 完成後，可選擇向左、或向右繼續完成剩下圖型，若選擇向左側完成剩餘圖形，假設起手點之左側，型與型之間總共的距離為 r_{left}，

完成型總共需要花的總步數為 t_{left}，左邊完成後要再經過 $\geq r_{left}$ 之步數至原本起手點的右側再完成其它圖型，設起手點之右側，型與型之間總共的距離為 r_{right}，總共需要花的總步數為 t_{right}，

則總步數為最佳情況為 $S_3 = \ r_{left} + t_{left} + r_{left} + r_{right} + t_{right}$

若直接選擇最靠近兩邊之型入口當起手，假設選擇最左邊靠邊之型入口當起手點，則向右完成所有圖型只需要 $S_4 = r_{left} + t_{left} + r_{right} + t_{right}$，

$S_3 > S_4$，故要找最短步數，一定是拿最靠邊兩側型之入口當起手點。

柒、結論

我們利用動態規劃來分析經過 3X3 簡化後的盤面，通過把原問題分解爲相對簡單的子問題的方式求解複雜問題的方法。大致上，若要解一個隨機的盤面，我們需要解其許多不同部分（即不同的型），再將每個型所對應之最短步數矩陣列出，找其和最少即可，由於最短步數矩陣內元素其數字有連續性，根據這個連續的相依情形也可以間接推得其路徑。

若存在一個 $p \times q$ 的盤面 $p,q \in N$ ，內含 n 種圖形，其起終點數有 $k_1\ k_2\ k_3 \cdots k_n$ 組，若用樹狀圖分析，則存在 $k! \times k_1 \times k_2 \times k_3 \times .... \times k_n$ 條路徑，再將路徑內所有步數總和後取最少爲最短步數，若使用我們的矩陣分析法，則可以化簡成 $k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_n$ 種，再從兩側優先選擇做起手點，又可以再化簡，最後再將其取總和取較少即可。

捌、參考資料及其他

[1]神魔之塔　http://www.towerofsaviors.com/
[2]數字拼圖　http://oddest.nc.hcc.edu.tw/math161.htm
[3]動態規畫　http://www.csie.ntnu.edu.tw/~u91029/AlgorithmDesign2.html

【評語】040402

這是一個以遊戲為主題的科展作品，探討如何使用最少步驟將同色珠子排成一線。作品非常生活化，相當有趣，但是內容僅止於切割後可以形成 3x3 盤面的特殊情形，如果可以解決兩種顏色珠子混在一起，能排成同色一直線再消去得最少步驟，內容就會增色許多。