

中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 數學科

040401

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

學校名稱：國立科學工業園區實驗高級中學

作者： 高二 彭浚宸 高二 蔡承運 高二 古庭瑜	指導老師： 鄭鉅翰
---	------------------

關鍵詞：折線、最大重疊面積

「疊」影重重——論摺紙之最大重疊面積

摘要

對於一張非線對稱的色紙，該怎麼摺使其重疊面積為最大呢？我們研究對於任意非等腰三角形的特定折法，並嘗試找出最佳折線。文中給出過頂點折線的重疊面積最大值、三邊平行線的重疊面積最大值、三邊垂線的重疊面積最大值。在過程中我們可發現：雖然無法明確找出最佳折線，但上述的特殊折法非常接近最佳折法，因此如果能給出已知三邊長度的三角形，我們即可逼近最佳折線的重疊面積。文末對於非對稱平行四邊形亦作如上分析，並期望能夠掌握三角形、四邊形到非對稱 n 邊形之最佳折線，對其特殊折法做更深入的剖析。

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

壹、研究動機

喜愛數學的人都知道，高中一定要去一次 TRML；參加過的人都知道，2004 年的題目特別棘手。我們的題目就是受 TRML-2004 年團體賽的第五題所啟發。原始題目如下：

設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = \frac{3}{2}$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，考慮所有通過 $\overline{BC}$ 上一點且垂直 $\overline{BC}$ 的所有直線，以此為折線將 $\triangle ABC$ 摺疊，則重疊部分的面積最大值為何？

在解決這個問題之後，我們好奇若要摺出最大面積，加上不同的限制，能不能找出摺疊三角形最大重疊面積的折線(最佳折線)？是否又能找出三角形之任意最佳折線、四邊形及 n 邊形之任意最佳折線？

貳、研究目的

- 一、找出三角形之摺出最大重疊面積的折線。
 - (一) 原始題目解法
 - (二) 垂直一邊的折線
 - (三) 平行一邊的折線
 - (四) 角平分線
 - (五) 過頂點的最佳折線
- 二、找出平行四邊形摺出最大重疊面積的折線。
 - (一) 最佳折線之特性
 - (二) 對角線為折線

參、研究設備及器材

計算紙、筆、GSP 繪圖軟體、GGB 繪圖軟體。

肆、研究過程或方法

一、名詞定義

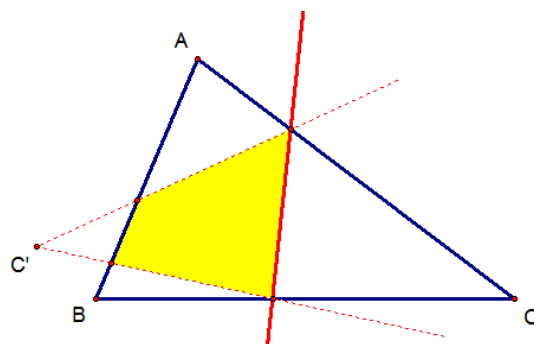


圖 (一)

「疊」影重重——論摺紙之最大重疊面積

1. 折線：在欲摺圖形所在的平面上作為鏡射軸之直線，如圖（一）中的紅色直線。
2. 對摺：針對折線將一半平面之圖形鏡射到另一半平面中，如圖（一）中將 C 點折到 C' 。
3. 重疊面積：此圖形對摺後圖形面互相交疊的面積，如圖（一）中黃色面積。隨著折線的平移、旋轉，黃色重疊面積大小隨之變動，報告中即欲求出一條折線使之對應的重疊面積為最大值。
4. 最佳折線(最佳解)：在所討論的範圍內，該情況可使得所求重疊面積有最大值。可細分為以下 7 種。

(1)特定最佳垂線：針對圖形之特定邊（如： $\overline{BC}$ 邊最佳垂線僅針對所有垂直於 $\overline{BC}$ 邊之垂線做討論）所作之垂線，沿此線對摺可摺出最大重疊面積，則此折線為特定最佳垂線。

(2)任意最佳垂線：針對圖形之所有邊所作之垂線，沿此線對摺可摺出最大重疊面積，則此折線為任意最佳垂線。

(3)特定最佳平行線：針對圖形之特定邊（如： $\overline{BC}$ 邊最佳平行線僅針對所有平行於 $\overline{BC}$ 邊之折線做討論）所作之平行線，沿此線對摺可摺出最大重疊面積，則此折線為特定最佳平行線。

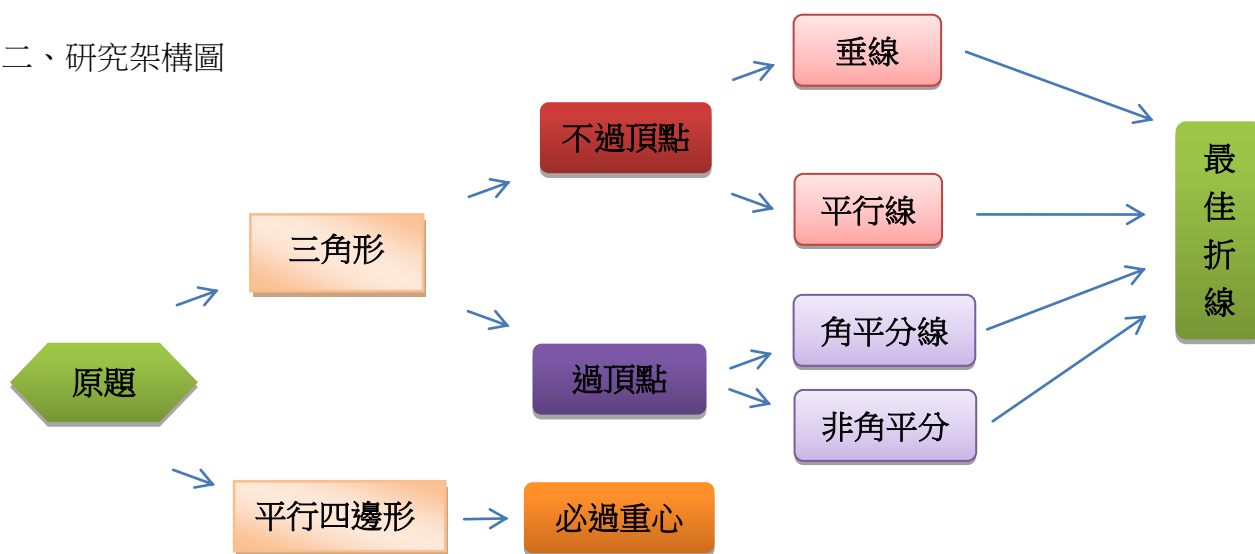
(4)任意最佳平行線：針對圖形之所有邊所作之平行線，沿此線對摺可摺出最大重疊面積，則此折線為任意最佳平行線。

(5)特定最佳過頂點折線：針對過圖形特定頂點之折線中，沿此線對摺可摺出最大重疊面積，則此折線為特定最佳過頂點折線。

(6)任意最佳過頂點折線：針對過圖形任一頂點之折線中，沿此線對摺可摺出最大重疊面積，則此折線為任意最佳過頂點折線。

(7)任意最佳折線：若存在一折線，使圖形對摺後的重疊面積比以其他折線來摺的重疊面積大，則此折線為任意最佳折線。

二、研究架構圖



圖（二）

架構圖如圖二所示。

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

三、原始命題解法

(一) 代數解法

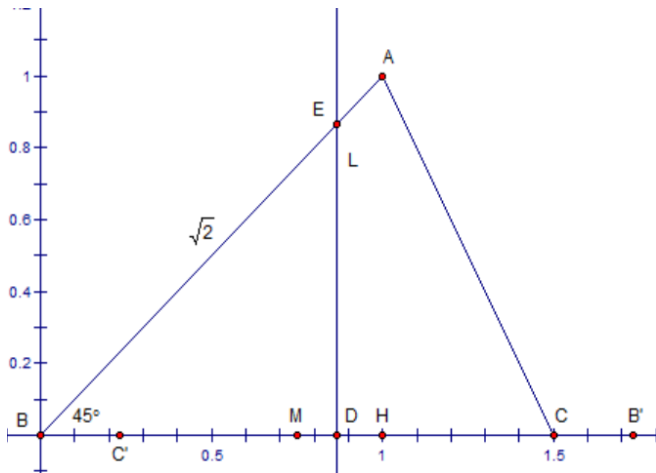


圖 (三)

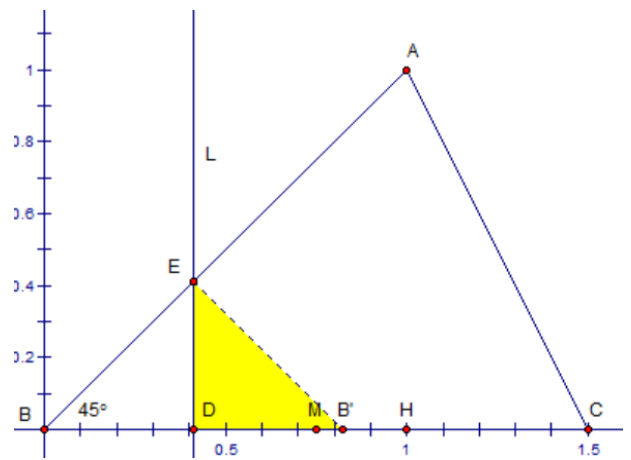


圖 (四)

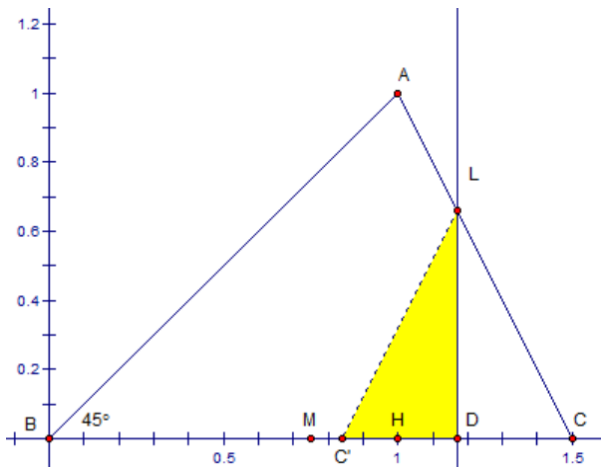


圖 (五)

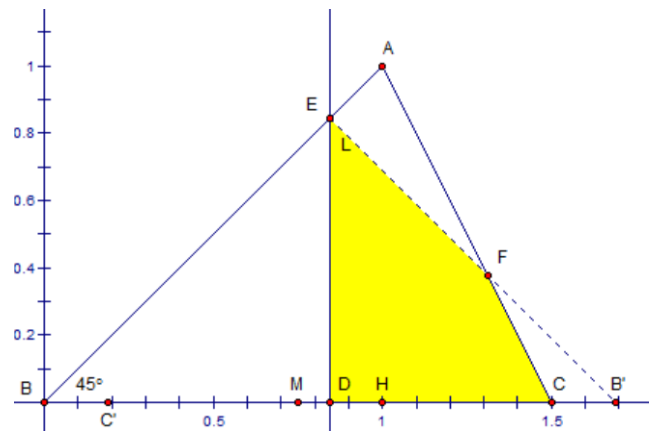


圖 (六)

在 $\triangle ABC$ 中，以 B 為原點 $(0,0)$ ， $\overrightarrow{BC}$ 為 $+X$ 軸，建立 *Descartes* 座標系。

設 $\overline{BC}$ 中點為 $M(\frac{3}{4}, 0)$ ， $A(1,1)$ 之垂足為 $H(1,0)$ ，在 $\overrightarrow{BC}$ 上取一動點 $D(d,0)$ ，作過 D 且垂直於之直線 L ，並以 L 為對稱軸，作 B 和 $C(\frac{3}{2}, 0)$ 的對稱點 $B'(2d,0)$ 、 C' ，如圖 (三)。

根據 D 在不同的位置，我們分成三種情況討論：

1. D 在 $\overline{BM}$ 上 (含 B 、 M)

如圖 (四)，可發現 B' 必在 $\overline{BC}$ 上，且當 $D=M$ 時有最大值

$$\therefore \text{最大重疊面積 } \triangle B'EM = \triangle BEM = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{32}$$

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

2. D 在 $\overline{HC}$ 上 (含 H 、 C)

如圖 (五)，可發現 C' 必在 $\overline{BC}$ 上，且當 $D=H$ 時有最大值

$$\therefore \text{最大重疊面積 } \Delta AHC' = \Delta AHC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$

3. D 在 $\overline{MH}$ 上 (不含 H 、 C)

如圖 (六)，此時 L 交 $\overline{AB}$ 於 $E(d, d)$ 點， $\overline{B'E}$ 交 $\overline{AC}$ 於 F 點

$$\begin{cases} \overline{B'E}: x+y=2d \\ \overline{AC}: y=-2x+3 \end{cases} \text{ 聯立解得 } F(3-2d, 4d-3)$$

$$\begin{aligned} \text{則重疊面積} = \text{四邊形 } DEFC &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} d & \frac{3}{2} & 3-2d & d & d \\ 0 & 0 & 4d-3 & d & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (6d - \frac{9}{2} + 3d - 2d^2 - 4d^2 + 3d - d^2) \\ &= \frac{-7}{2} d^2 + 6d - \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{-7}{2} (d - \frac{6}{7})^2 + \frac{9}{28} \end{aligned}$$

當 $d = \frac{6}{7}$ 時可得重疊面積最大值 $\frac{9}{28}$

綜合上述三點，重疊面積最大值為 $\frac{9}{28}$ 。

(二) 公式解法

詳見四、三角形部分 **定理 1**。

探討完原始題目後，欲分析摺疊出最大重疊面積之折線(最佳折線)，故根據原題由三角形之特定(任意)最佳垂線研究起，後推廣到平行一邊、過頂點等最佳折線。

四、三角形部分

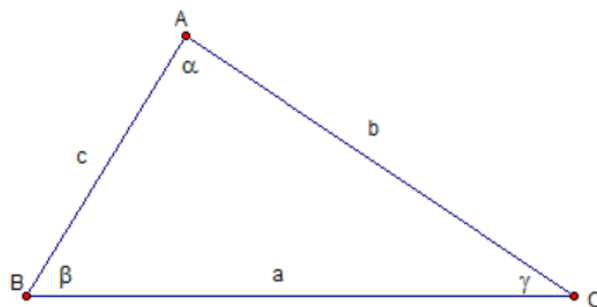


圖 (七)

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

在本文中，不失一般性，所有三角形皆符合圖（七）的公設，即

$\angle A = \alpha$ ， $\angle B = \beta$ ， $\angle C = \gamma$ 且 $\alpha > \beta > \gamma$ ； $\overline{AB} = c$ ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ 且 $a > b > c$ （等腰三角形為

對稱圖形，最大重疊面積即 $\frac{1}{2}\Delta ABC$ ，故文中不討論。）

這樣的限定可以避免重複討論相同的三角形，例如三角形 $(\alpha - \beta - \gamma)$ 中， $(90^\circ - 60^\circ - 30^\circ)$ 和 $(30^\circ - 90^\circ - 60^\circ)$ 和 $(90^\circ - 30^\circ - 60^\circ)$... 是一樣的，不須分別討論。

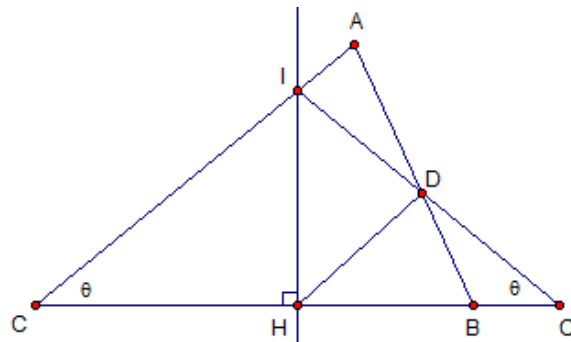
另外，因三邊長中 $a > b > c \Leftrightarrow 2R\sin\alpha > 2R\sin\beta > 2R\sin\gamma \Leftrightarrow \sin\alpha > \sin\beta > \sin\gamma$ 需注意的是，即使 $\sin$ 函數超過 90° 有遞減問題， $\sin\alpha > \sin\beta > \sin\gamma$ 仍成立，因為當 $\alpha \geq 90^\circ$ ，則 $\beta + \gamma \leq 90^\circ$ ($\sin(\beta + \gamma)$ 仍為遞增)，表示 $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \beta - \gamma) = \sin(\beta + \gamma) > \sin\beta > \sin\gamma$

以下討論特定最佳垂線、任意最佳平行線與任意最佳過頂點折線。

（一）特定最佳垂線

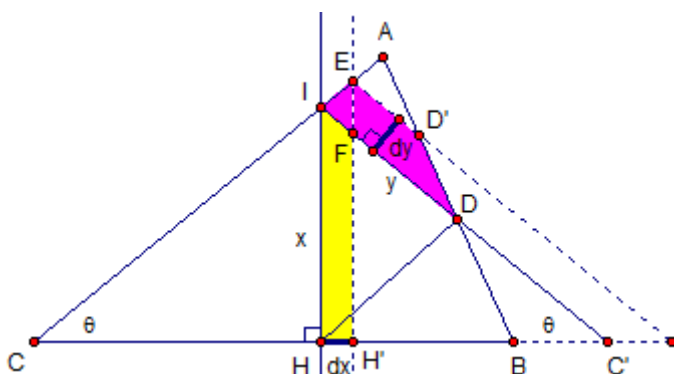
先引入一個我們利用 GSP 動態模擬發現的引理，再分析特定最佳垂線：

引理 1：如圖（八），若 $\overline{IH}$ 為垂直 $\overline{BC}$ 邊之特定最佳折線，則 $\overline{DH} \parallel \overline{AC}$



圖（八）

[證明]



圖（九）

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

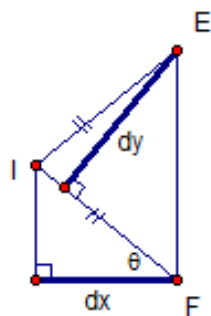


圖 (十)

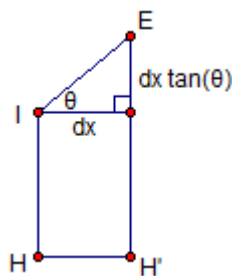


圖 (十一)

1° 先找極值產生條件：

1.如圖 (九)，設 H 是 $\overline{BC}$ 上動點，令 $\overline{IH} = x$ ， $\overline{ID} = y$ ， $\angle ICH = \angle IC'H = \theta$

若 $\overline{IH}$ 向右 dx ，則 $\overline{ID}$ 會向右上 dy ，所求之重疊面積從原本的四邊形 $IDBH$ 變為四邊形 $ED'BH'$ ，減少四邊形 $IEH'H$ 的面積和增加四邊形 $FED'D$ 的面積。

如圖(十一) $\angle IHH' = \angle IH'H = 90^\circ$ ，

$$\text{四邊形 } IFH'H \text{ 面積} = \frac{(x + x + dx \tan \theta)dx}{2} = \frac{2xdx + (dx)^2 \tan \theta}{2}$$

$\therefore dx$ 為極小變化量

$$\therefore (dx)^2 \rightarrow 0$$

$$\text{所以四邊形 } IEH'H \text{ 面積} = \frac{2xdx}{2} = xdx$$

同樣的方法化簡後可以得到四邊形 $FED'D$ 的面積 $= ydy$

考慮面積變化量：如果 H 往某個方向走，重疊面積變化量都 > 0 ，表示折線往該方向移動所得之重疊面積會一直變大，亦即折線越接近最佳垂線；但經過某個點之後，重疊面積變化量開始變負的，表示折線往該方向移動會越遠離最佳垂線。因此當折線通過該點，即當增加量等於減少量時，所得折線即為該邊之最佳垂線。

$$\Rightarrow xdx = ydy \dots\dots\dots (1)$$

2.如圖 (十)： $\overline{IF} = dx \sec \theta$

又 $\angle CEF = \angle CIH = 90^\circ - \theta$ ， $\angle EIF = \theta + \theta = 2\theta$

$$\Rightarrow \angle IFE = 90^\circ - \theta，\overline{IE} = \overline{IF} = dx \sec \theta$$

$$\Rightarrow dy = \overline{IE} \sin \angle EIF = (dx \sec \theta) \sin 2\theta$$

3. 將 $dy = (dx \sec \theta) \sin 2\theta$ 帶入(1)式

$$\Rightarrow xdx = y(dx \sec \theta) \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow x = y \sec \theta \sin 2\theta = 2y \sin \theta$$

$$\Rightarrow \overline{IH} = 2\overline{ID} \sin \theta$$

2° 證明 $\overline{DH} \parallel \overline{AC}$:

$$\begin{aligned}
 & |\overline{DH} \times \overline{AC}| \\
 &= |(\overline{DI} + \overline{IC} + \overline{CH}) \times \overline{AC}| \\
 &= |\overline{DI} \times \overline{AC} + \overline{IC} \times \overline{AC} + \overline{CH} \times \overline{AC}| \\
 &= |\overline{DI} \times \overline{AC} + \vec{0} + \overline{CH} \times \overline{AC}| \\
 &= |\overline{DI}| |\overline{AC}| \sin(\pi - 2\theta) - |\overline{CH}| |\overline{AC}| \sin\theta \\
 &= |\overline{DI}| |\overline{AC}| \sin 2\theta - |\overline{IH} \cot\theta| |\overline{AC}| \sin\theta \\
 &= |\overline{DI}| |\overline{AC}| \sin 2\theta - \left| (2 \overline{ID} \sin\theta) \cot\theta \right| |\overline{AC}| \sin\theta \\
 &= |\overline{DI}| |\overline{AC}| \sin 2\theta - |\overline{ID}| |\overline{AC}| \sin 2\theta = 0 \\
 &\text{又 } |\overline{DH}| \neq 0 \text{ 且 } |\overline{AC}| \neq 0, \text{ 故 } |\overline{DH}| \parallel |\overline{AC}|, \text{ 得證。}
 \end{aligned}$$

由引理 1 的平行性質可以簡化接下來垂直一邊之特定最佳垂線公式的討論，以及判定三角形最佳垂線所應選擇的邊，產生定理 1。

定理 1：

1° 如圖（十二），

- (i) $\overline{BC}$ 邊最佳垂線，重疊面積 $= \frac{2N_a - \tan\gamma}{4N_a - \tan\gamma} \Delta ABC$ ，其中 $N_a = \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin(\beta - \gamma)}$
- (ii) $\overline{AC}$ 邊最佳垂線，重疊面積 $= \frac{2N_b - \tan\gamma}{4N_b - \tan\gamma} \Delta ABC$ ，其中 $N_b = \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha - \gamma)}$
- (iii) $\overline{AB}$ 邊最佳垂線，重疊面積 $= \frac{2N_c - \tan\beta}{4N_c - \tan\beta} \Delta ABC$ ，其中 $N_c = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$

2° 任意最佳垂線必產生在 $\overline{BC}$ 或 $\overline{AB}$ 邊上：

- (i) 當 $\tan\alpha \tan\gamma > \tan^2\beta$ 時， $\overline{BC}$ 的最佳垂線為任意最佳垂線；
- (ii) 當 $\tan\alpha \tan\gamma < \tan^2\beta$ 時， $\overline{AB}$ 的最佳折線為任意最佳垂線；
- (iii) 當 $\tan\alpha \tan\gamma = \tan^2\beta$ ：兩者結果相等。

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

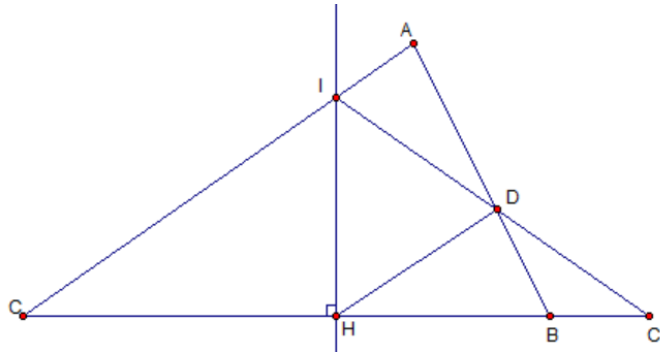


圖 (十二)

[證明]

1° 找出各邊最佳垂線及其重疊面積

如圖 (十二)，先計算(i) $\overline{BC}$ 邊之最佳垂線之面積，其餘同理可得：

由引理 1 知 $\overline{IH} = \overline{CI} \sin \theta = \overline{CI} \sin \gamma$ ，($\angle C = \gamma$)

在 $\triangle DC'C$ 中 $\angle DC'C = \gamma$ ， $\angle BDC' = \beta - \gamma$ ， $\angle DBC' = \pi - \beta$

令 $\overline{CH} = \overline{C'H} = x$ ，所求面積為 $f(x)$

在 $\triangle DBC'$ 中，由正弦定理知 $\frac{\overline{C'D}}{\sin \angle DBC'} = \frac{\overline{BC'}}{\sin \angle BDC'}$

$$\text{所以 } \overline{C'D} = \frac{\overline{BC'} \sin \angle DBC'}{\sin \angle BDC'} = \frac{(2x - a) \sin(\pi - \beta)}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{(2x - a) \sin \beta}{\sin(\beta - \gamma)}$$

$$\text{故 } S_{\triangle DBC'} = \frac{1}{2} \overline{C'D} \times \overline{BC'} \sin \gamma = \frac{(2x - a)^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin(\beta - \gamma)}$$

$$f(x) = S_{\triangle IHC'} - S_{\triangle DBC'} = \frac{x \times (x \tan \gamma)}{2} - \frac{(2x - a)^2 \left(\frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)} \right)}{2}$$

$$\text{令 } N_a = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)},$$

要找出 $f(x)$ 的極值，令 $f'(x) = 0$ ，

$$0 = f'(x) = x \tan \gamma - (-2aN_a + 4xN_a)$$

$$x = \frac{2aN_a}{4N_a - \tan \gamma}$$

故所求重疊面積 $= \triangle BDH + \triangle DHI = \triangle BDH + \triangle DHA = \triangle ABH$

$$\triangle ABH = \frac{(a - x)}{a} \triangle ABC = \frac{2N_a - \tan \gamma}{4N_a - \tan \gamma} \triangle ABC$$

$$\text{所以重疊面積} = \frac{2N_a - \tan \gamma}{4N_a - \tan \gamma} \triangle ABC, \text{ 其中 } N_a = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)}$$

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

(ii)、(iii)同理可證。

2° 證明 $\overline{AC}$ 邊最佳垂線不為任意最佳垂線

要證明 $\overline{AC}$ 邊的最佳垂線不為任意最佳垂線，只須證明另外二者之一必定比它大即可。

利用反證法，假設 $\overline{AC}$ 邊最佳垂線可產生任意最佳垂線，設 $\overline{AC}$ 之最佳垂線 $\geq \overline{AB}$ 之最佳垂線，
即

$$\begin{aligned} \frac{2N_b - \tan \gamma}{4N_b - \tan \gamma} &\geq \frac{2N_c - \tan \beta}{4N_c - \tan \beta} \\ \Leftrightarrow (2N_b - \tan \gamma)(4N_c - \tan \beta) - (2N_c - \tan \beta)(4N_b - \tan \gamma) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -2N_b \tan \beta - 4N_b \tan \gamma + 4N_b \tan \beta + 2N_c \tan \gamma &\geq 0 \\ \Leftrightarrow N_b \tan \beta &\geq N_c \tan \gamma \\ \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha - \gamma)} \tan \beta &\geq \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} \tan \gamma \\ \Leftrightarrow \cos \gamma (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) &\geq \cos \beta (\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma) \\ \Leftrightarrow \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sin(\gamma - \beta) &\geq 0 \end{aligned}$$

但已知 $\beta > \gamma$ (本文不討論等腰三角形)，即 $\sin(\gamma - \beta) < 0$ ，故 $\sin(\gamma - \beta) \geq 0$ 與已知矛盾，
假設錯誤

$$\therefore \frac{2N_b - \tan \gamma}{4N_b - \tan \gamma} < \frac{2N_c - \tan \beta}{4N_c - \tan \beta}, \text{ 即 } \overline{AC} \text{ 之最佳垂線必非任意最佳垂線。}$$

3° 比較 $\overline{BC}$ 或 $\overline{AB}$ 邊最佳垂線：

當 $\overline{BC}$ 最佳垂線 $\geq \overline{AB}$ 最佳垂線

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{2N_a - \tan \gamma}{4N_a - \tan \gamma} - \frac{2N_c - \tan \beta}{4N_c - \tan \beta} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (2N_a - \tan \gamma)(4N_c - \tan \beta) - (2N_c - \tan \beta)(4N_a - \tan \gamma) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -4N_c \tan \gamma - 2N_a \tan \beta + 4N_a \tan \beta + 2N_c \tan \gamma &\geq 0 \\ \Leftrightarrow N_a \tan \beta &\geq N_c \tan \gamma \\ \Leftrightarrow \tan \beta \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)} &\geq \tan \gamma \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

「疊」影重重——論摺紙之最大重疊面積

$$\Leftrightarrow \sin \beta \cos \gamma (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) > \sin \alpha \cos \beta (\sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma)$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos^2 \beta \sin \gamma - \sin^2 \beta \cos \gamma \cos \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha (1 - \sin^2 \beta) \sin \gamma - \sin^2 \beta \cos \gamma \cos \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \sin \gamma - \sin^2 \beta (\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 \beta (1 + \cot \alpha \cot \gamma) > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \beta (1 + \cot \alpha \cot \gamma) < 1 = \sin^2 \beta + \cos^2 \beta$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cot \alpha \cot \gamma) < 1 + \cot^2 \beta$$

$$\Leftrightarrow \cot \alpha \cot \gamma < \cot^2 \beta$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \beta < \tan \alpha \tan \gamma, \text{ 得證。}$$

由**定理 1**可求出 $\overline{CH}$ ，即找出（一）**特定最佳垂線**。另外補充一點，若討論「任意最佳垂線」則可能為 $\overline{BC}$ 或 $\overline{AB}$ 邊特定最佳垂線；但若範圍擴大到「任意最佳折線」時，我們在伍、討論（一）三角形之任意最佳折線中，比較垂線與平行線後發現：「 $\overline{AB}$ 邊之最佳垂線其重疊面積必小於 $\angle C$ 之角平分線之重疊面積」。因此若討論任意最佳折線，特定最佳垂線中只有 $\overline{BC}$ 邊最佳垂線可能為其解。

而有了這個定理後，我們好奇動機中提到的 TRML 題目

「設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = \frac{3}{2}$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，考慮所有通過 $\overline{BC}$ 上一點且垂直 $\overline{BC}$ 的所有直線，以此為折線將 $\triangle ABC$ 摺疊，則重疊部分的面積最大值為何？」是否可用**定理 1**解決？

(1) 原題解法答案： $\frac{9}{28}$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A > \angle C > \angle B$ 。故設 $\angle A = \alpha$ ， $\angle C = \beta$ ， $\angle B = \gamma$

由餘弦定理可得 $\overline{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，又由正弦定理可得 $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 、 $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 、 $\tan \beta = 2$

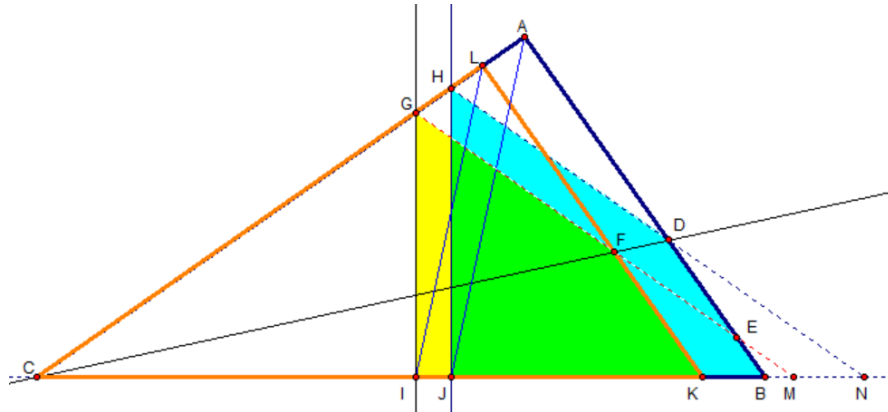
故公式中 $N_a = 2$ ， $\frac{2N_a - \tan \gamma}{4N_a - \tan \gamma} \triangle ABC = \frac{3}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{28}$

故**定理 1**可漂亮地解出原題。

另外，在討論最佳垂線時，我們做了圖（十三），並發現**定理 2**、**定理 3**之性質：

定理 2：如圖（十三）， $\overline{DF}$ 延伸線通過 $\overline{GH}$ 、 $\overline{IJ}$ 、 $\overline{KB}$ 的延伸線交點 C

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積



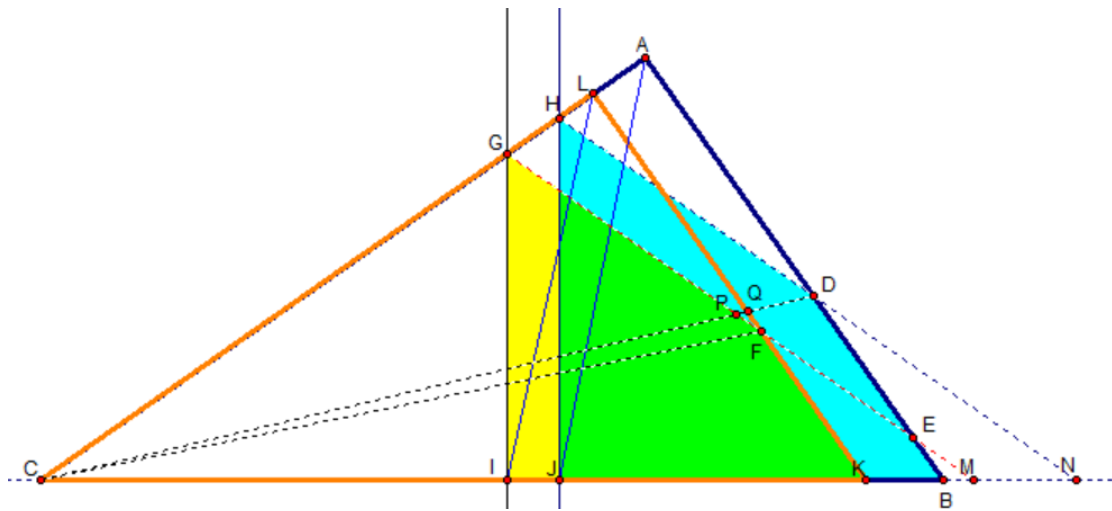
圖（十三）

如圖（十三），在 $\triangle ABC$ 中對 $\overline{CB}$ 做垂線 $\overline{HJ}$ 並以之為折線摺疊，重疊部分為四邊形 $HDBJ$ ；

另在 $\overline{AC}$ 上取二點 L 、 G ，在 $\overline{BC}$ 上取二點 K 、 I ，使 $\overline{LK}$ 平行 $\overline{AB}$ ， $\overline{LI}$ 平行 $\overline{AJ}$ ， $\overline{GI}$ 平行 $\overline{HJ}$ ，

並以 $\overline{GI}$ 為折線將 $\triangle LKC$ 對摺，重疊部分為四邊形 $GFKI$ ，其中 F 為 $\overline{GM}$ 與 $\overline{LK}$ 之交點。

[證明]



圖（十四）

以圖（十三）做圖如圖（十四），設 $\overline{CF}$ 、 $\overline{CD}$ 夾銳角，延伸 $\overline{MF}$ 交 $\overline{CD}$ 於 P ，延伸 $\overline{KF}$ 交 $\overline{CD}$ 於 Q 。

根據平行線截比例線段性質知 $\frac{\overline{CK}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{CJ}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CN}}$

$$\because \overline{LK} \parallel \overline{AB}, \frac{\overline{CK}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CD}}, \frac{\overline{CM}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CD}}$$

$$\therefore \frac{\overline{CQ}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CD}}$$

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

又 P 、 Q 在 C 的同側，

故 $\overline{PQ} = 0$ ，即 P 、 Q 重合且 $\overline{MF}$ 延伸線、 $\overline{KF}$ 延伸線、 $\overline{CD}$ 延伸線三者交於 P

但 $\overline{MF}$ 延伸線和 $\overline{KF}$ 延伸線交於 F (已知)，且 $\overline{MF}$ 不平行 $\overline{KF}$ ，

故 P 、 Q 、 F 重合且 F 在 $\overline{CD}$ 上，即 C 、 F 、 D 三點共線，得證。

為了證明**定理 3**，我們還需要一個引理：

引理 2：笛沙格逆定理—若兩個三角形對應邊的交點共線，則它們對應頂點的連線共點。

[證明]

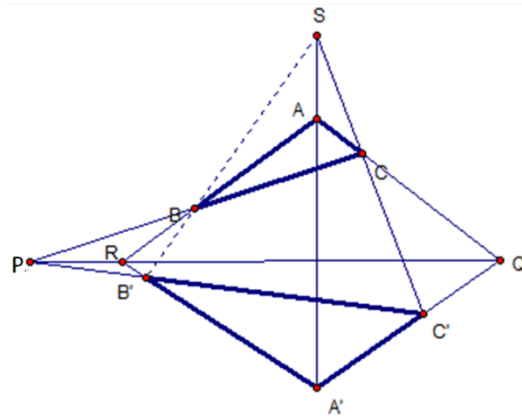


圖 (十五)

如圖 (十五)， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 對應邊交點 P 、 Q 、 R 共線，且 $\overrightarrow{BB'}$ 直線、 $\overrightarrow{CC'}$ 直線交於 S 。

在直線 $\overrightarrow{SC'}$ 所截之 $\triangle CC'Q$ 中，由 *Menelaus* 定理知 $\frac{\overline{QC'}}{\overline{C'A'}} \times \frac{\overline{A'S}}{\overline{SA}} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{CQ}} = 1$

同理，由直線 $\overrightarrow{PC'}$ 所截之 $\triangle A'QR$ ： $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'Q}} \times \frac{\overline{QP}}{\overline{PR}} \times \frac{\overline{RB'}}{\overline{B'A'}} = 1$

而由直線 $\overrightarrow{PC}$ 所截之 $\triangle AQR$ ： $\frac{\overline{AB}}{\overline{BR}} \times \frac{\overline{RP}}{\overline{PQ}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{CA}} = 1$

以上三式相乘： $\frac{\overline{RB'}}{\overline{B'A'}} \times \frac{\overline{A'S}}{\overline{SA}} \times \frac{\overline{AB}}{\overline{BR}} = 1$

由 *Menelaus* 逆定理知 S 、 A 、 A' 三點共線，即 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 交於一點 S ，得證。

接著證明**定理 3**：

定理 3：如上文圖 (十四)，四邊形 $HDBJ$ ~四邊形 $GFKI$

[證明]

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

1° 欲將四邊形 $HDBJ$ 切成 $\triangle HDJ$ 與 $\triangle DBJ$ ，四邊形 $GFKI$ 切成 $\triangle GFI$ 與 $\triangle FKI$ ，故先證對角線平行：

由圖（十四）知，在 $\triangle ACD$ 中 $\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CA}}$ ，又在 $\triangle ACJ$ 中 $\frac{\overline{CL}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{CJ}}$

故 $\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{CJ}} \Leftrightarrow \overline{FI} \parallel \overline{DJ}$

2° 由**定理 2**知，圖（十四）中 $\overline{DF}$ 延伸線通過 $\overline{GH}$ 、 $\overline{IJ}$ 、 $\overline{KB}$ 的延伸線交點 C ，

則由**引理 2**知 $\triangle GIF \sim \triangle HJD$ ，同理知 $\triangle FIK \sim \triangle DJB$

3° 證四邊形 $HDBJ$ 與四邊形 $GFKI$ 邊長成比例：

在 $\triangle HDC$ 中， $\frac{\overline{GF}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{HC}}$ ；且 $\triangle HJC$ 中 $\frac{\overline{GC}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{GI}}{\overline{HJ}}$ 。又 $\triangle ABC$ 中 $\frac{\overline{GC}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FK}}{\overline{DB}}$ ，

且 $\frac{\overline{JB}}{\overline{IK}} = \frac{\overline{AJ}}{\overline{LI}} = \frac{\overline{JC}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{GC}}$ ($\because \triangle AJB \sim \triangle LIK$)

$\therefore \frac{\overline{GC}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{GI}}{\overline{HJ}} = \frac{\overline{FK}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{IK}}{\overline{JB}}$ ，即四邊形 $HDBJ$ 與四邊形 $GFKI$ 邊長成比例。

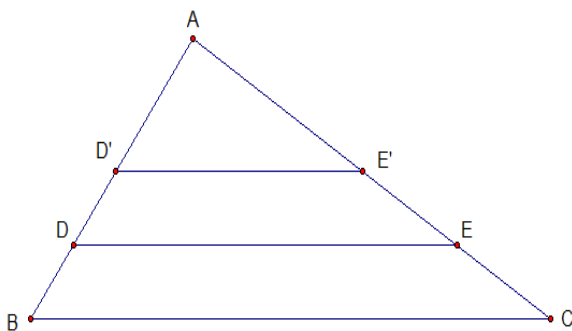
4° 由四邊形各邊長兩兩成比例、三角形兩兩相似且未翻轉知四邊形 $HDBJ \sim$ 四邊形 $GFKI$ ，得證。

（二）任意最佳平行線

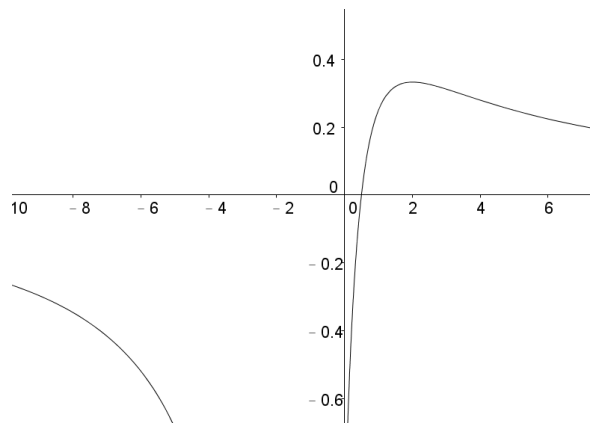
討論完最佳垂線之後，接下來同樣針對邊，討論平行於一邊的折線。同樣的，我們先利用 GSP 動態模擬找出三角形的特定邊之最佳平行線，發現他們皆過此三角形的重心，且特定邊之最佳平行線即任意最佳平行線，即**定理 4**：

定理 4：求三角形之特定最佳平行線，則此線必過重心，且最大重疊面積為 $\frac{1}{3} \triangle ABC$

[證明]



圖（十六）



圖（十七）

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

1° 如圖（十六），在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{D'D} = \overline{DB}$ ， $\overline{E'E} = \overline{EC}$ 。

2° 令 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = r$ ，則以 $\overleftrightarrow{DE}$ 為折線之重疊面積

$$= \text{四邊形 } DD'E'E = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{AD'}^2}{\overline{AB}^2} \triangle ABC = \frac{r^2 - (r-1)^2}{(r+1)^2} \triangle ABC = \frac{2r-1}{(r+1)^2} \triangle ABC$$

$$3^\circ \text{ 令 } f(r) = \frac{2r-1}{(r+1)^2}$$

$\therefore \triangle ABC$ 固定 $\therefore$ 只要找 $f(r)$ 的最大值即可：

令 $f'(r)=0$ ，

$$0 = f'(r) = \frac{2(r+1)^2 - (2r+2)(2r-1)}{(r+1)^4}$$

顯然 $(r+1)^4 \neq 0$ 即 $r \neq -1$

$$\therefore 2(r+1)^2 - (2r+2)(2r-1) = 0, -2r^2 + 2r + 4 = 0$$

$r = 2$ or -1 (-1 不合)

另外考慮到 $f'(r)=0$ 可能為極大或極小值產生點，故繪出 $f(r)$ 函數圖形如圖（十七）。

由圖知 $r = 2$ 非極小值產生點，亦即此時產生面積極大值，且此線過重心；

在特定最佳平行線成立時，其重疊面積 $= f(2) = \frac{2 \times 2 - 1}{(2+1)^2} \triangle ABC = \frac{1}{3} \triangle ABC$ ，得證。

因為三邊之特定最佳平行線其重疊面積皆相同，故特定最佳平行線即為任意最佳平行線。

根據**定理 4**，作圖可找出（二）任意最佳平行線。

（三）任意最佳過頂點折線

針對邊討論完任意最佳垂線、平行線後，接著分析任意最佳過頂點折線。我們先討論角平分線之三種情形，再證明任意最佳過頂點折線必為角平分線：

定理 5：角平分線中，最佳折線必產生在最大角 α 或最小角 γ ，

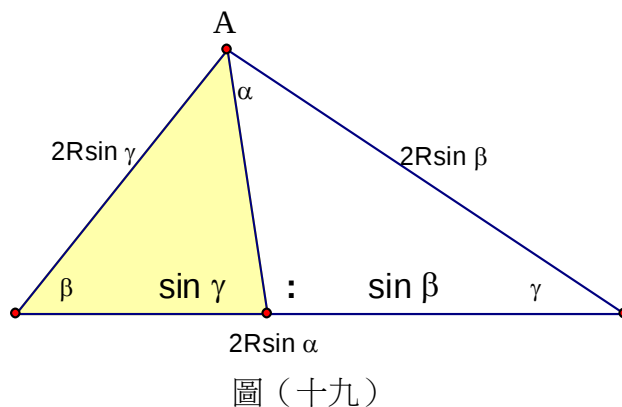
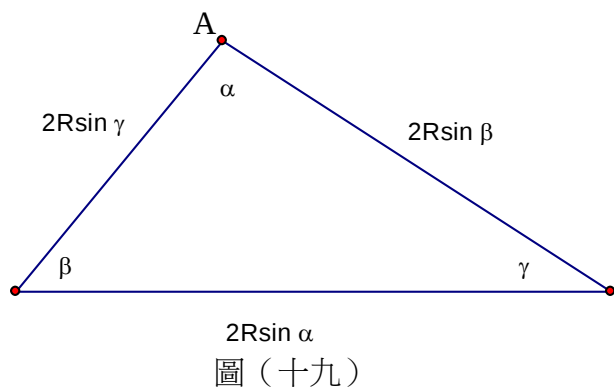
(i) 當 $\sin \gamma \sin \alpha > \sin^2 \beta$ ， α 的角平分線為最佳折線；

(ii) 當 $\sin \gamma \sin \alpha < \sin^2 \beta$ ， γ 的角平分線為最佳折線；

(iii) 當 $\sin \gamma \sin \alpha = \sin^2 \beta$ ：兩者結果相等。

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

[證明]



1° 先證明角平分線之最佳折線必產生在最大或最小角：

考慮一三角形，設面積為 Δ ，如圖 (十九) 所示。

由正弦定理知三角形三邊長比例為 $\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$ ($\sin \alpha \geq \sin \beta \geq \sin \gamma$)，則：

1. 如圖 (十九)，以 α 之角平分線為折線時，

$$\text{最大重疊面積(黃色區域)} = \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma + \sin \beta} \Delta \quad (\text{即 } \frac{c}{c+b} \Delta)$$

2. 同理知以 β 之角平分線為折線時，亦可得重疊面積 = $\frac{\sin \gamma}{\sin \gamma + \sin \alpha} \Delta$ (即 $\frac{c}{c+a} \Delta$)

3. 以 γ 之角平分線為折線時，亦可得重疊面積 = $\frac{\sin \beta}{\sin \beta + \sin \alpha} \Delta$ (即 $\frac{b}{b+a} \Delta$)

$\because \sin \alpha > \sin \beta \therefore \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma + \sin \beta} \Delta > \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma + \sin \alpha} \Delta$ ，最佳折線必產生在最大角 α 或最小角 γ ，而不需討論 β 之角平分線。

註：亦可以用邊長比 a, b, c 表示。

2° 接著討論 α 或 γ 之角平分線何者為最佳角平分線折線：

首先考慮(i)當 α 之角平分線為最佳解之情形，即 $\frac{\sin \gamma}{\sin \gamma + \sin \beta} \Delta > \frac{\sin \beta}{\sin \beta + \sin \alpha} \Delta$

$$\Leftrightarrow \sin \gamma (\sin \beta + \sin \alpha) > \sin \beta (\sin \beta + \sin \gamma),$$

可得當 $\sin \gamma \sin \alpha > \sin^2 \beta$ 時， α 之角平分線為最佳折線，得證。

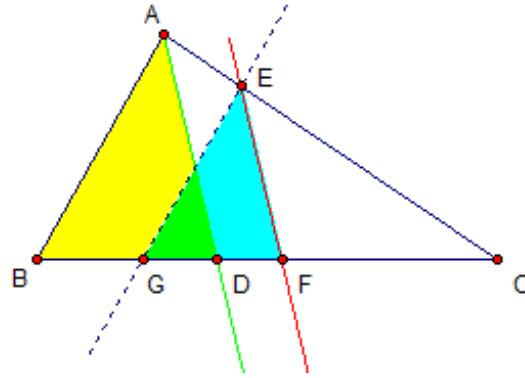
(ii)、(iii) 同理可證。

分析完角平分線所應取的角後，討論任意最佳過頂點折線。最初我們推測角平分線會是任意最佳過頂點折線，亦為任意最佳折線，故先證明對於同樣斜率之折線，其最佳解為角平分線：

定理 6：考慮所有與角平分線平行或重合之折線，角平分線有最大重疊面積。

[證明]

「疊」影重重——論摺紙之最大重疊面積



圖（二十）

1° 如圖（二十），考慮 $\angle A$ ，在三角形 $\triangle ABC$ 中作 $\angle A$ 之角平分線 $\overline{AD}$ ，交 $\overline{BC}$ 於 D 。以此為折線可得重疊面積 $\triangle ABD$ 。

2° 將 $\overline{AD}$ 向右平移 Δx 得 $\overline{EF}$ (向左移明顯較小，不考慮)，交 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 於 E 、 F ，如圖所示。以此為折線可得重疊面積 $\triangle EFG$ 。

3° 可發現 $\triangle ABC \sim \triangle EGC (\because \angle C = \angle C, \angle GEC = \angle BAC)$ ，如此可視 $\overline{EF}$ 為 $\triangle EGC$ 中 $\angle GEC$ 之

角平分線，因此有 $\triangle EFG = \frac{\overline{FE}^2}{\overline{DA}^2} \triangle ABD = \frac{\overline{CE}^2}{\overline{CA}^2} \triangle ABD = \frac{\overline{CF}^2}{\overline{CD}^2} \triangle ABD \leq \triangle ABD$ ；也就是說

以 $\overline{EF}$ 為折線所得重疊面積 $\leq$ 以 $\overline{AD}$ 為折線所得重疊面積。

4° $\angle B$ 、 $\angle C$ 同理可證，

故平行於角平分線之折線，其重疊面積最大時即為角平分線，得證。

而在證明角平分線是最佳過頂點折線前先引進一個引理：

引理 3：如圖（二十一），在 $\triangle ABC$ 中作角平分線 $\overline{BD}$ ，則 $\overline{BD}^2 = \overline{AB} \times \overline{BC} - \overline{AD} \times \overline{DC}$

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

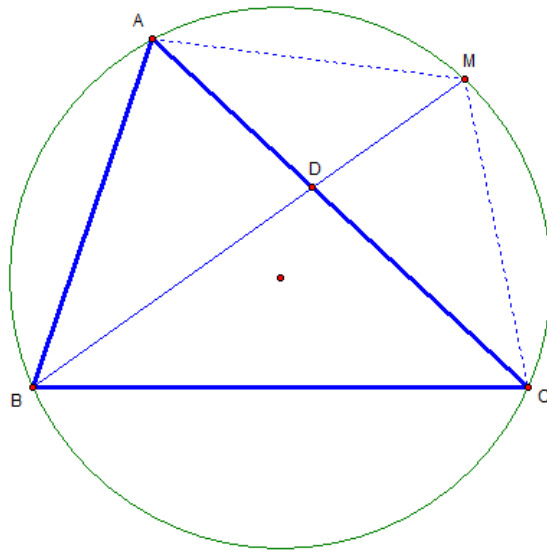


圖 (二十一)

[證明]

如圖 (十八)，設 $\overrightarrow{BD}$ 與 $\triangle ABC$ 外接圓相交於點 $M (M \neq B)$

又 $\angle MAC = \angle MBC = \angle MBA$ 且 $\angle ACB = \angle AMB$

$\Leftrightarrow \triangle AMB \sim \triangle DCB$ 且 $\triangle AMD \sim \triangle BCD$

因此 $\frac{\overline{BD} + \overline{DM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$, $\overline{BD} \times \overline{DM} = \overline{AD} \times \overline{DC}$

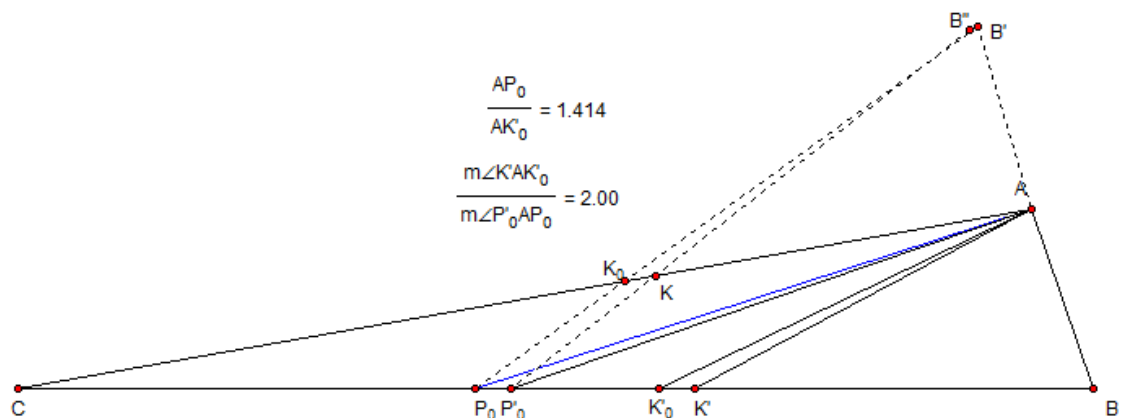
即 $\overline{BD}^2 = \overline{AB} \times \overline{BC} - \overline{BD} \times \overline{DM} = \overline{AB} \times \overline{BC} - \overline{AD} \times \overline{DC}$

(顯然有 $\overline{BD}^2 < \overline{AB} \times \overline{BC}$)，得證。

有了這個引理後，接著找出任意最佳過頂點折線：

定理 7：通過頂點 A 的折線中，當 $\overline{PA} = \sqrt{2}\overline{AK'}$ 時，重疊面積會有最大值。(頂點 B 、 C 同理)

[證明]



「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

1° 要證明最大角或最小角之角平分線為任意最佳過頂點折線，只須說明對頂點 A 而言，通過 A 的最佳折線的最大重疊面積 $\leq$ 角平分線所摺出來的重疊面積。(頂點 B 、 C 同理可推得)

由**定理 7** 知，對頂點 A 而言，設 P 在 P_0 時有最大值(通過 A 的最佳折線為 $\overline{P_0A}$)，則 $\overline{P_0A} = \sqrt{2\overline{AK'}}$

2° 欲比較 $S_{\triangle APK'}$ 與 $S_{\triangle CDA}$ ，故再證 $\overline{AC} > \overline{CK'} > \overline{AK'}$

1. 由於 $\frac{\overline{P_0A}}{\sin \angle AK'P_0} = \frac{\overline{AK'}}{\sin \angle AP_0K'}$ ，且 $\overline{P_0A} = \sqrt{2\overline{AK'}}$

$$\therefore \sin \angle AP_0K' = \frac{\sin \angle AK'P_0}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \angle AP_0K' \leq 45^\circ$$

$$\text{又 } \angle P_0AK' = \angle P_0AK \leq \angle AP_0K' (\because \text{外角定理}) \leq 45^\circ$$

$$\therefore \angle AK'C \geq 90^\circ$$

故 $\triangle AK'C$ 中 $\overline{AC}$ 是最大邊

2. 看 $\triangle AK'C$

由**引理 3** 知 $\overline{AC} \times \overline{AK'} > \overline{AP_0}^2 = 2\overline{AK'}^2$

$$\therefore \overline{AC} > 2\overline{AK'}$$

$$\text{又 } \overline{AK'} + \overline{CK'} > \overline{AC}$$

$$\therefore \overline{CK'} > \overline{AK'}$$

綜合以上得 $\overline{AC} > \overline{CK'} > \overline{AK'}$

3° 如圖(二十三)，在 $\triangle ACK'$ 中，令 $\angle ACK'$ 之角平分線交 $\overline{AK'}$ 於 D ，交 $\overline{AB}$ 於 E

1. 在 $\triangle ACK'$ 中 $\overline{AP}$ 和 $\overline{CD}$ 是角平分線，所以有 $\frac{\overline{PK'}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AK'}}{\overline{AC}}$ ， $\frac{\overline{AD}}{\overline{DK'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CK'}}$

$$\therefore S_{\triangle APK'} = \frac{\overline{PK'}}{\overline{CK'}} S_{\triangle ACK'} = \frac{\overline{AK'}}{\overline{AK'} + \overline{AC}} S_{\triangle ACK'}, \quad S_{\triangle CDA} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AK'}} S_{\triangle ACK'} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC} + \overline{CK'}} S_{\triangle ACK'}$$

$$\text{又 } \overline{AC} > \overline{CK'} > \overline{AK'}$$

$$\text{顯然有 } \overline{AC}^2 > \overline{AK'}^2$$

$$\overline{AC}^2 + \overline{AK'} \times \overline{AC} > \overline{AK'}^2 + \overline{AK'} \times \overline{AC}$$

$$\overline{AC}(\overline{AK'} + \overline{AC}) > \overline{AK'}(\overline{AK'} + \overline{AC})$$

$$\frac{\overline{AC}}{(\overline{AK'} + \overline{AC})} > \frac{\overline{AK'}}{(\overline{AK'} + \overline{AC})}$$

$$\therefore S_{\triangle APK'} = \frac{\overline{AK'}}{(\overline{AK'} + \overline{AC})} S_{\triangle ACK'} < \frac{\overline{AC}}{(\overline{AC} + \overline{CK'})} S_{\triangle ACK'} = S_{\triangle CDA} < S_{\triangle CEA}$$

同理有 $S_{\triangle APK'} < S_{\triangle CDA} < S_{\triangle CEB}$

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

2. 以下分兩種情況討論：

(i) $\sin \gamma \sin \alpha < \sin^2 \beta$ ：此時 γ 之角平分線為角平分線中的最佳解，故角平分線有最大重疊面積顯然成立

(ii) $\sin \gamma \sin \alpha > \sin^2 \beta$ ：此時取 α 之角平分線為角平分線的最佳解，但
 γ 的角平分線重疊面積 $= \Delta CEA > S_{\Delta AP'C}$ ， $(\because \Delta CEB > \Delta CEA)$

故 α 的角平分線重疊面積 $> \gamma$ 的角平分線重疊面積 $= \Delta CEA > S_{\Delta AP'C}$

亦即對所有過頂點之折線中，最大角或最小角之角平分線是任意最佳過頂點折線，得證。

就此，我們證明（三）任意最佳過頂點折線為角平分線。

（四）小結

總結三、三角形之結論，我們已討論完特定最佳垂線、任意最佳平行線與任意最佳過頂點折線；但因任意最佳折線可能的變數為「折線與邊的交點」及「夾角」而不易討論，故推測任意最佳折線之重疊面積只能逼近而無法精確求出。

另外我們亦比較三角形特定最佳垂線與特定最佳過頂點折線如伍、討論，並在此分析任意最佳垂線與任意最佳平行線：

由**定理 1**知，任意最佳垂線必產生在 $\overline{BC}$ 或 $\overline{AB}$ 邊上，且 $\overline{BC}$ 邊之特定最佳折線所得重疊面積為 $\frac{2N_a - \tan \gamma}{4N_a - \tan \gamma} \Delta ABC$ ， $N_a = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)}$ ；又由**定理 4**知任意最佳平行線產生之重疊面積為 $\frac{1}{3} \Delta ABC$ 。故比較任意最佳垂線與任意最佳平行線如**定理 9**：

定理 9：任意最佳平行線必不為任意最佳折線

[證明]

欲證明「 $\overline{BC}$ 邊特定最佳垂線所得重疊面積 $>$ 任意最佳平行線所得重疊面積」

$$\Leftrightarrow \frac{2N_a - \tan \gamma}{4N_a - \tan \gamma} > \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 6N_a - 3\tan \gamma - 4N_a + \tan \gamma > 0$$

$$\Leftrightarrow N_a > \tan \gamma$$

$$\Leftrightarrow \sin \beta \sin \gamma > \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \times \sin(\beta - \gamma)$$

$$\Leftrightarrow \sin \beta \cos \gamma > \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma$$

且因上述不等式皆等價，又知 $\alpha > \beta \therefore \beta < 90^\circ$ ， $\cos \beta \sin \gamma > 0$

$\therefore$ 「 $\overline{BC}$ 邊特定最佳垂線所得重疊面積 $>$ 任意最佳平行線所得重疊面積」恆成立，得證。

「疊」影重重——論摺紙之最大重疊面積

由動機之原題延伸討論完三角形後，我們好奇在四邊形是否能找出類似規律，如特定最佳平行線是否必過重心；故在**五、平行四邊形**中，繼續討論四邊形之非線對稱圖形裡有特殊性質的平行四邊形。

五、平行四邊形：

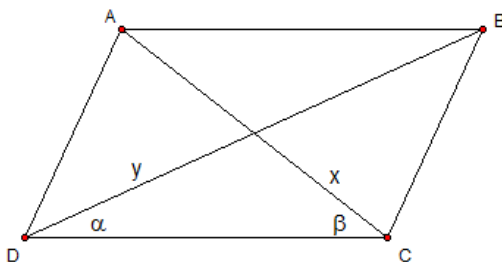
在**四、三角形**部分裡，我們歸納出「任意最佳折線可能為特定最佳垂線或最佳過頂點折線」這個結論，且報告中不討論的線對稱圖形亦符合此結論：例如在正三角形與等腰三角形中，任意最佳折線為中垂線且過頂點，符合「任意最佳折線可能為特定最佳垂線或最佳過頂點折線」。

由此我們得到一個經驗，即使報告中因為線對稱圖形之任意最佳折線為對稱軸，故不討論線對稱圖形，但線對稱圖形對稱軸之性質卻是找出任意最佳折線的關鍵。有了這個經驗後我們在討論四邊形時，由線對稱圖形——正方形之對稱軸為「邊的中垂線或對角線，並過重心」、菱形之對稱軸為「邊的對角線，並過重心」取交集得知，欲討論**五、平行四邊形**應由過重心之折線（包含對角線）開始討論。

在此先證明一個引理，更易在討論對角線時，分析對角線產生之兩夾角。

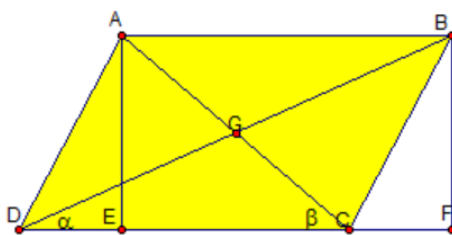
引理 4：如圖（二十四）所示，考慮一平行四邊形 $ABCD$ ($\angle ADC$ 為銳角)，則 $\beta > \alpha$ ，且

$$y = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} x。$$



圖（二十四）

[證明]



圖（二十五）

1° 如圖（二十五）：

對於平行四邊形 $ABCD$ ，作 $\overline{AE} \perp \overline{CD}$ 於 E ，作 $\overline{CD}$ 延長線 $\overline{DF}$ ，且 $\overline{BF} \perp \overline{DF}$ 於 F

則知 $\overline{AE} = \overline{BF}$ ， $\overline{FD} > \overline{CE}$ ， $\therefore \overline{AC} < \overline{BD}$

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

$$\overline{CG} = \frac{1}{2}\overline{AC}, \overline{GD} = \frac{1}{2}\overline{BD}, \overline{CG} < \overline{GD}。$$

故在 $\triangle CDE$ 中由大角對大邊知 $\beta > \alpha$ 。

2°再看圖（二十四），知 $\triangle BFC$ 中， $\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{y}{\sin \beta}$ ，所以 $y = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}x$ ，得證。

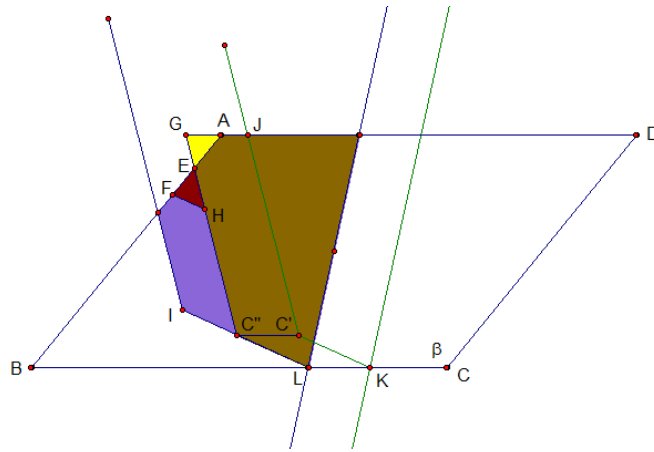
有了這個引理，加上**定理 10**，便可討論平行四邊形之最佳折線：

定理 10：平行四邊形之最佳折線必過重心

[證明]

對於一條折線（圖二十三、圖二十四中綠色直線），摺疊後的圖形有兩種情況，分別討論如下：

(i) 摺疊後 $\overline{CD}$ 與鄰邊重疊



圖（二十六）

作一條未過重心之綠色折線，所得之面積相當於：棕色區域+黃色區域；並將折線平移為過重心之藍色折線，重疊面積：棕色面積+紅色面積+藍色面積，如圖（二十六）。

其中， C' 為 C 點對綠色折線之對稱點， C'' 為 C' 平移後之點。只須證明一條未過重心之折線之重疊面積（即平移面積）必小於過重心之折線之重疊面積，即紅色面積+藍色面積>黃色面積。

在 $\overline{AB}$ 上找一點 F 使 $\overline{FH} = \overline{AG}$ 且 $\overline{FH} \parallel \overline{IC''}$

又知 $\angle JC'K = \beta = \angle GC''L$ ， $\angle GC''I = 180 - \beta = \angle GHF$ ，且 $\angle GAE = 180 - \beta$

$\therefore AG = FH$ ， $\angle AEG = \angle HEF$ ， $\angle GAE = \angle GHF$ ，

$\therefore \triangle GAE \cong \triangle FHE$ (AAS全等)

即黃色面積=紅色面積，所以紅色面積+藍色面積>黃色面積，得證。

(ii) 摺疊後 $\overline{CD}$ 與對邊重疊

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

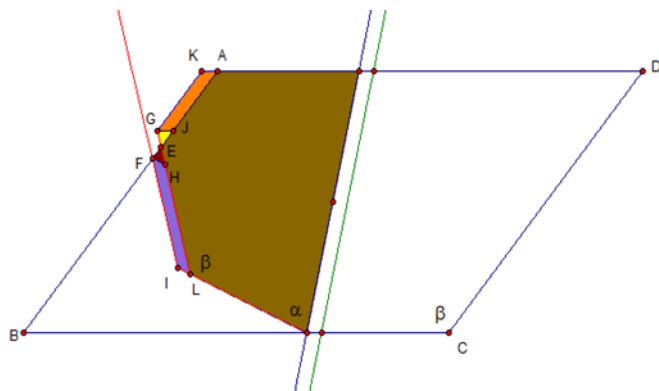


圖 (二十七)

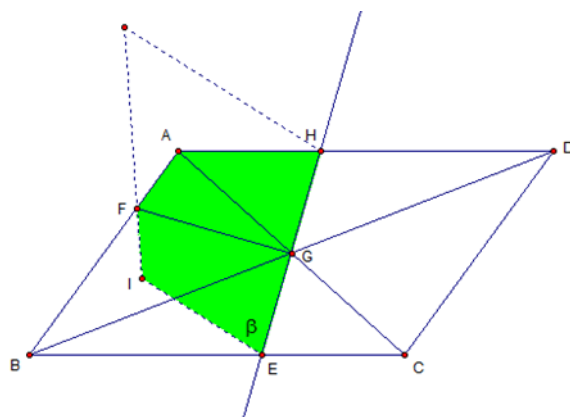


圖 (二十八)

作一條未過重心之綠色折線，所得之面積相當於：橘色面積+黃色面積+棕色面積；
將折線平移為過重心之藍色折線，重疊面積：紅色面積+藍色面積+棕色面積，如圖(二十七)。

只須證明一條未過重心之折線之重疊面積（即平移面積）必小於過重心之折線之重疊面積，即證明黃色面積+橘色面積<紅色面積+藍色面積。

1° 先切割出如圖(二十七)之三角形($\overline{GJ} \parallel \overline{AK}, \overline{FH} \parallel \overline{IL}$)，

則 $\angle BAD = \beta$, $\angle KAB = 180 - \beta = \angle GJE$, $\angle ILH = 180 - \beta = \angle FHE = \angle GJE$

且 $\angle FEH = \angle GEJ$, $\overline{GJ} = \overline{FH}$

$\therefore \triangle FEH \cong \triangle GEJ$ (AAS全等) 即黃色面積=紅色面積，故只須證明藍色面積>橘色面積。

又已知兩平行四邊形等高 ($\angle LHF = \angle AJG$, $\overline{FH} = \overline{GJ}$)，故欲比較藍色面積、橘色面積，即比較 $\overline{FI}$ 、 $\overline{AJ}$ 即可。

2° 看圖(二十八)，比較 $\overline{FI}$ 、 $\overline{AJ}$ ：

已知 $\angle FGE = \angle FGH = 90^\circ$ ($\because$ 對稱點連線垂直對稱軸)

在 $\triangle AGH$ 、 $\triangle CGE$ 中， $\angle AHG = \angle GEC$, $\overline{AG} = \overline{GC}$ (G點為重心)， $\angle AGH = \angle CGE$ ，

$\therefore \triangle AGH \cong \triangle CGE$ (AAS全等)

又知 $\triangle CGE \cong \triangle IGE \therefore \triangle AGH \cong \triangle IGE$, $\overline{AG} = \overline{IG}$

且 $\angle AGF = 90^\circ - \angle AGH = 90^\circ - \angle IGE = \angle IGF$, $\overline{FG} = \overline{IG}$ ，故 $\triangle AGF \cong \triangle IGF$, $\overline{AF} = \overline{FI}$

3° 再看圖(二十七)：

知 $\overline{FI} = \overline{AF} > \overline{AJ}$

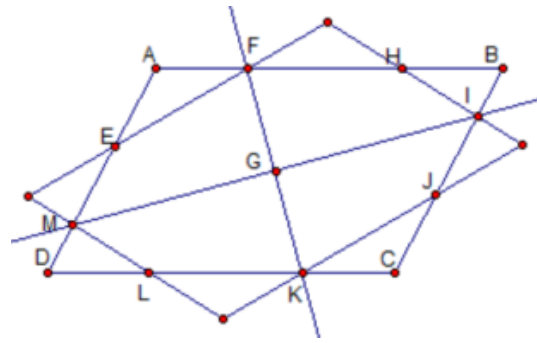
故紫色面積>橘色面積，得證。

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

得到**定理 10**後，再證明**引理 5**便能簡化過重心折線之討論。

引理 5：過重心之折線和與其垂直且過重心之折線，兩者所折出之重疊面積相同

[證明]



圖（二十九）

如圖（二十九），可發現將平行四邊形 $ABCD$ 以 $\overleftrightarrow{MI}$ 為鏡射軸，鏡射後之平行四邊形同等於平行四邊形 $ABCD$ 以 $\overleftrightarrow{FK}$ 為鏡射軸來鏡射。

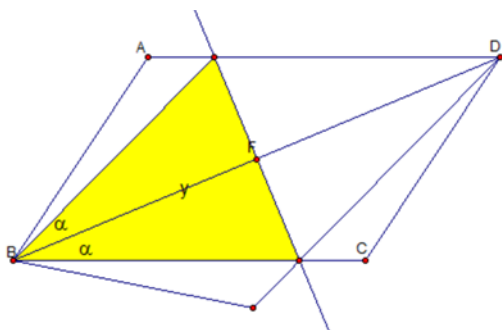
因此四邊形 $EFGM \cong$ 四邊形 $HFGI \cong$ 四邊形 $LKGM \cong$ 四邊形 $JKGI$

故以 $\overleftrightarrow{MI}$ 為折線和以 $\overleftrightarrow{FK}$ 為折線所折出之面積相同，得證。

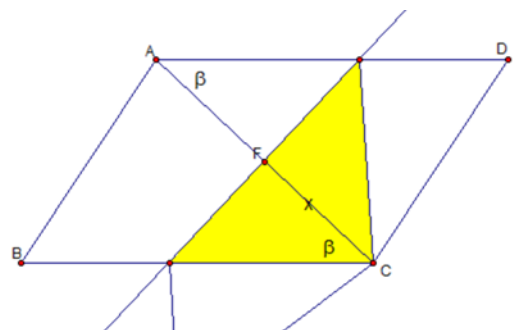
在三角形部分我們知道可以由線對稱圖形推測可能的最佳折線，故分析正方形與菱形後我們推測平行四邊形之最佳折線為對角線且過重心。由**定理 10**我們已經證明出平行四邊形之最佳折線必過重心，因此再由**定理 11**分析對角線，並排除鈍角對角線之折法。

定理 11：以銳角對角線作折線所折出之面積大於鈍角對角線之折法

[證明]



圖（三十）



圖（三十一）

由**引理 4**知 $y = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} x$ ，並在圖（三十）中作過 F （重心）且垂直 $\overline{BD}$ 之直線；

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

在圖（三十一）中作過 F 且垂直 $\overline{AC}$ 之直線：

1° 如圖（三十），由**引理 5** 知，以銳角對角線作折線之重疊面積同義於黃色區域 S_1

2° 如圖（三十一），由**引理 5** 知，以鈍角對角線作折線之重疊面積同義於黃色區域 S_2

⇒ 欲證圖（三十）所得之重疊面積 > 圖（三十一）之重疊面積：

∵ S_1 、 S_2 高相同，故兩三角形面積比即底邊比，

$$S_1 : S_2 = \frac{y}{\cos \alpha} : \frac{x}{\cos \beta} = \frac{x \sin \beta}{\sin \alpha \cos \alpha} : \frac{x}{\cos \beta} = \sin \beta \cos \beta : \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\beta : \sin 2\alpha$$

又由**引理 4** 知 $\beta > \alpha$ ，且 2β 、 2α 顯然 $< 90^\circ$ ，故 $\sin 2\beta > \sin 2\alpha$ ， $S_1 > S_2$ ，

即知圖（三十）所得之重疊面積 > 圖（三十一）之重疊面積，得證。

在分析對角線時，我們發現平行四邊形的最佳折線必過重心卻不一定為對角線，推翻原本的猜想。新的猜想為：平行四邊形之過重心最佳折線不唯一（與三角形類似，需討論多種情況），並發現最佳折線無特殊性質，詳見**伍、討論**。

伍、討論

（一）三角形之任意最佳折線

目前的繪圖結果皆顯示三角形之任意最佳折線為特定最佳垂線或特定最佳過頂點折線，且已由**定理 6** 知，在所有與角平分線平行或重合之折線中角平分線有最大重疊面積。

另外若比較垂線和角平分線所得之重疊面積，則有「 $\overline{AB}$ 邊之最佳垂線其重疊面積必小於 $\angle C$ 之角平分線之重疊面積」此漂亮性質；因此若討論任意最佳折線，特定最佳垂線中只有 $\overline{BC}$ 邊最佳垂線可能為其解：

已知 $\alpha > \beta > \gamma$ ， $N_c = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ ，利用反證法假設

「 $\overline{AB}$ 邊之最佳垂線其重疊面積 $\geq \angle C$ 之角平分線之重疊面積」

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{2N_c - \tan \beta}{4N_c - \tan \beta} \geq \frac{\sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + 2\sin \alpha \cos \beta} \geq \frac{\sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} \\ &\Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta)(\sin \alpha + \sin \beta - \sin \beta) \geq \sin \beta(2\sin \alpha \cos \beta) \\ &\Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) \geq \sin 2\beta \\ &\Leftrightarrow \sin \gamma \geq \sin 2\beta \end{aligned}$$

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

分析 γ 和 2β 的大小，可得兩種情況：

1. $2\beta > 90^\circ > \gamma$

若要符合假設，則 $\gamma > 180^\circ - 2\beta$

$$\Leftrightarrow \gamma + 2\beta + \alpha > 180^\circ + \alpha$$

$$\Leftrightarrow 180^\circ + \beta > 180^\circ + \alpha$$

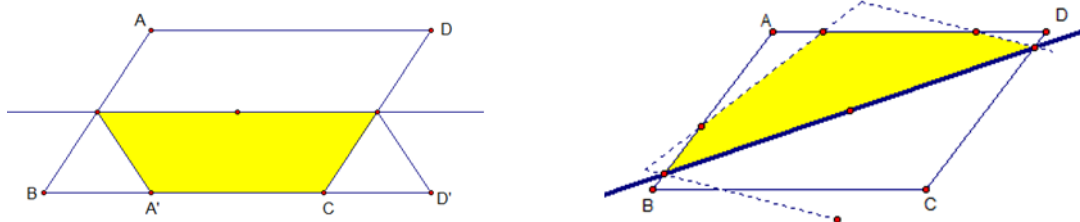
$$\Leftrightarrow \beta > \alpha \text{ (與公設矛盾)}$$

2. $90^\circ > 2\beta > \gamma$

若要符合 $\sin \gamma \geq \sin 2\beta$ ，表示 $\gamma > 2\beta$ （與公設矛盾）

因此假設不成立，亦即 $\sin(\alpha + \beta) \leq \sin 2\beta$ ，從而得證。

（二）平行四邊形之任意最佳折線



圖（三十二） 圖（三十三）

以 GSP 模擬發現平行四邊形之任意最佳折線可能為如圖（三十二）平行一邊，或如圖（三十三）之無特殊性質折線，而對角線則不是最大；另外，若將圖（三十二）中折線逆時鐘旋轉至圖（三十三）的情況，則所得重疊面積會先減少再增大，即圖（三十二）與圖（三十三）兩情況皆可能出現重疊面積最大值。

對此我們的解釋是，最初在借鏡線對稱圖形時，取正方形之對稱軸「邊的中垂線或對角線，並過重心」、菱形之對稱軸「邊的對角線，並過重心」之交集，卻未探討長方形之對稱軸「邊的中垂線，並過重心」；若加入長方形，修正後的交集為過重心折線，符合**定理 10**；而對角線不為平行四邊形之最佳折線，也是很自然的結論。

而在平行四邊形過重心折線的討論中，我們推測最佳折線選取應與夾角、邊長比有關，並發現當平行四邊形 $\frac{\text{長邊}}{\text{短邊}}$ 越接近 1（亦即越接近菱形），則任意最佳折線越偏向圖（三十三）。

陸、研究結果及結論

一、對於一個給定的三角形 $\triangle ABC$ ，其中 $\overline{BC} > \overline{CA} > \overline{AB}$ ，

$\angle A = \alpha$ ， $\angle B = \beta$ ， $\angle C = \gamma$ ($\alpha > \beta > \gamma$)，其面積為 Δ

（一）垂直一邊的折線

1. 當 $\tan \alpha \tan \gamma > \tan^2 \beta$ 時， $\overline{BC}$ 的最佳垂直折線為最佳解，

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

$$\text{其重疊面積} = \frac{2N_a - \tan \gamma}{4N_a - \tan \gamma} \Delta, \text{ 其中 } N_a = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)}$$

2. 當 $\tan \alpha \tan \gamma < \tan^2 \beta$ 時， $\overline{AB}$ 的最佳垂直折線為最佳解；

$$\text{其重疊面積} = \frac{2N_c - \tan \beta}{4N_c - \tan \beta} \Delta, \text{ 其中 } N_c = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

3. 當 $\tan \alpha \tan \gamma = \tan^2 \beta$ ： $\overline{BC}$ 的最佳垂直折線或 $\overline{AB}$ 的最佳垂直折線皆為最佳解。

(二) 平行一邊的最佳折線必過重心，其重疊面積 $= \frac{1}{3} \Delta ABC$

(三) 過一頂點的角平分線

1. 當 $\sin \gamma \sin \alpha > \sin^2 \beta$ (即 $ac > b^2$)，角 A 的角平分線為最佳折線，

$$\text{其重疊面積} = \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma + \sin \beta} \Delta \text{ (即 } \frac{c}{c+b} \Delta \text{)}$$

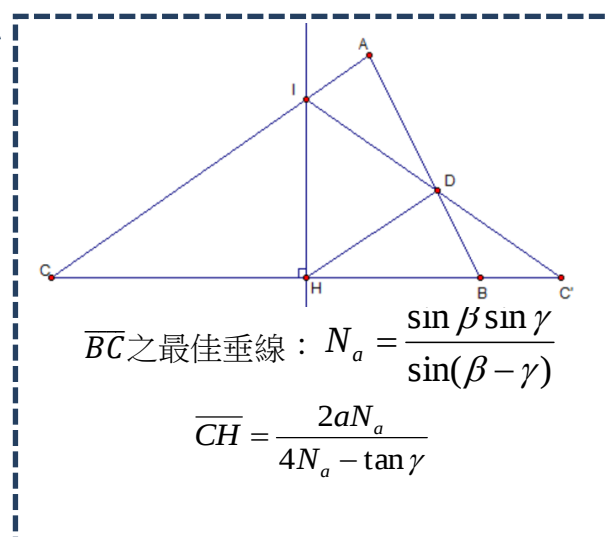
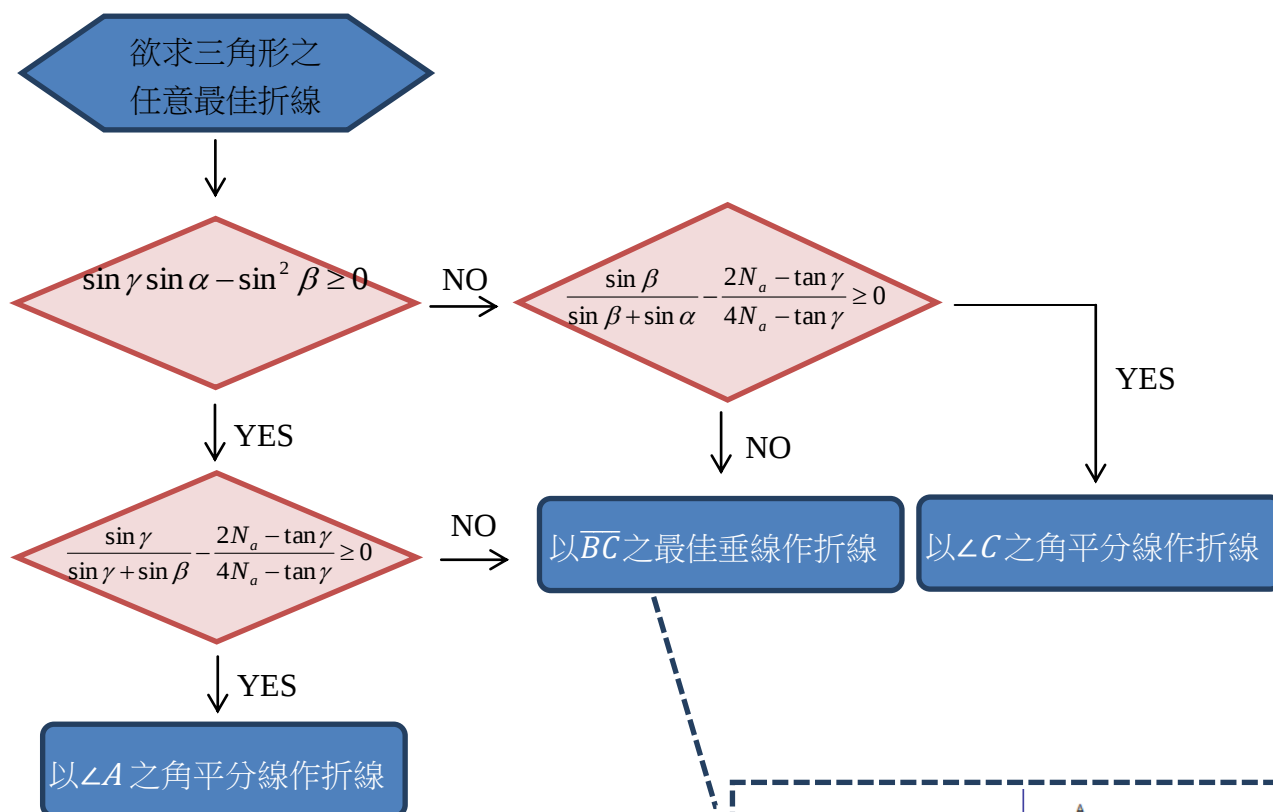
2. 當 $\sin \gamma \sin \alpha < \sin^2 \beta$ (即 $ac < b^2$)，角 C 的角平分線為最佳折線，

$$\text{其重疊面積} = \frac{\sin \beta}{\sin \beta + \sin \alpha} \Delta \text{ (即 } \frac{c}{c+a} \Delta \text{)}$$

3. 當 $\sin \gamma \sin \alpha = \sin^2 \beta$ ：角 A 或角 C 的角平分線結果相同，皆為最佳折線。

(四) 對整個三角形而言，過頂點的最佳折線，必為角 A 或角 C 的角平分線。

(五) 判斷三角形任意最佳折線之流程圖：



二、平行四邊形

- (一) 平行四邊形之任意最佳折線必過重心
- (二) 過重心之折線和與其垂直且過重心之折線，兩者所摺出之重疊面積相同
- (三) 以銳角對角線作折線所折出之面積大於鈍角對角線之折法
- (四) $\frac{\text{長邊}}{\text{短邊}}$ 越接近 1，則任意最佳折線越接近對角線。

「疊」影重重—論摺紙之最大重疊面積

柒、未來展望

- 一、證明三角形之任意最佳折線必為特定最佳垂線或特定最佳過頂點折線。
- 二、找出平行四邊形最佳折線之性質，給出其重疊面積公式。
- 三、推廣到 n 邊形之任意最佳折線。

捌、參考資料及其他

- 一、趙文敏（1988 年 10 月）。Desargues 平面。幾何學概論（234-254 頁）。台北市：九章。
- 二、林福來（2014 年 2 月）。三角函數。高中數學第三冊。台南市：南一版。
- 三、B • B • 波拉索洛夫（1988 年 4 月）。三角形中的某些關係。平面幾何問題集及其解答（319-331 頁）。東北長春市：東北師範大學出版社。

【評語】 040401

考慮一個三角形沿某一折線摺疊後，重疊部分的最大面積是意思的問題，報告原本採用垂線、平行線、分角線逐一討論，逼近最佳折線的方式，在邏輯上不能保證其正確性。若改用口試時，考慮某一頂點摺疊後，落在彼此三角形分割的區域，才能看出最佳折線會是最佳垂線或角平分線。朝此方向思考，四邊形甚至多邊形的情形是有可能做出來的。另外利用一次微分為零求極值的方法，必須判斷該點的一次導函數有增減變化或是二階導數非零，才能確定是極值。