

中華民國第 54 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

高中組 物理科

第一名

最佳創意獎

040115

軌道下陷與車輛振動頻率偏移之探討

學校名稱：臺北市立建國高級中學

作者： 高二 吳承儒	指導老師： 陳泓志
---------------	--------------

關鍵詞：耦合、頻率偏移、沉陷

## 得獎感言

這次是我參加第三次的全國中小學科學展覽會，在整個漫長的研究中，要感謝天，感謝地，更要感謝的人是我的父母，在整段過程中支持我，使我能夠堅持下去，要感謝的人實在太多了。

其實我認為做科展已經成為生活中的一部分，在每個周末，做研究是唯一的一件事，時間總是在不知不覺中流淌。會因為出乎意料的結果雀躍，更因難看的數據抑或瓶頸而低沉。

以我的經驗觀之，做科展的過程中學到的事物是遠比上學、補習、參加特殊的學科競賽學得還要多上許多。可以因為科展，學到不是現階段能夠觸摸到的領域與知識，重要的是在過程裡使自己的眼界大開，從更寬廣的角度來看待自己的學習。當然，還是要以自動自發，自主的方式獲取，我們生在一個資訊如此毫無窒礙的時代裡，最不缺的就是知識。許多平常碰觸不到的，其實只要肯花點心思，都是信手拈來的。同時，也不能滿足於現狀，能夠做更好、更嚴謹，符合科學實驗精神，都在於肯不肯花更多的時間，在現狀看起來艱深的理論，可能半年後就習以為常，往回看看會發現沒有這麼難以逾越，學生時期是一個累積經驗的最佳時段。

子曰：「德不孤，必有鄰。」，我想要告訴所有做科展的同學們，你能夠在科展這條路上，堅持下去。

## 摘要

臺灣高速鐵路因地層下陷而有行車安全的疑慮，每年耗費數千萬來嚴密監測地層沉陷。

本沉陷的測量利用商務筆記型電腦中的加速度感測器，來記錄列車行進地層下陷處的電壓變化，透過 QCN Live 軟體轉換成加速度值，並分析高速鐵路經過地層下陷地點時的運動狀態，以耦合系統的物理模型並用 KBM 漸近法分析並描述得到資料與計算沉陷值。

透過全線測量，訊號的可靠性，高鐵苗栗麻園坑段反覆驗證，物理模型的適用和正確性，計算沉陷值，也在誤差的合理範圍內。

由此顯示，此沉陷的測量方法是可行的。尤其相對於傳統的人工測量方法，這個方法更有利於迅速地測量高速鐵路地層下陷，發現轉向架避震器的異常，防範事故於未然，更可節省大量的人力與物力。

## 壹、研究動機

從歷史經驗來看，只要火車發生事故，必定會造成極大的傷亡。而高速鐵路系統因其高速的行駛，比一般列車更容易因為小小的偏差而釀成事故。所以，確保高速列車行駛的穩定是很重要的一件事。

自 1964 年世界第一條商業營運的高速鐵路後，鐵路逐漸邁向高速化和高負載，並逐漸發展出以車輛設計輔助工具，研究車輛運行過程中的現象，如蛇行運動等為目的的車輛動力學。對於鐵路來說，較重要的環節有車輛舒適性、平穩性、耐久性和安全可靠，還有防脫軌、車輛減振等相關問題。

自 2007 年起，台灣高速鐵路苗栗山區路堤段的地層下陷使得軌道不平整，一直是備受關注的地區，而對於這種沉陷的測量並非是立即性的，而是高鐵人員在夜晚列車停止運轉時以經緯儀和水準儀進行人工傳統測量。既無法立即性測量且又受限於天候。

除了晚上測量的不便，台灣高速鐵路使用精密水準儀進行測量的誤差有許多的來源[1]。

而日前於國外網站 IRIS(Incorporated Research Institutions for Seismology)，看到一項研究計畫--The Quake Catcher Network: Bringing Seismology to Homes and Schools[2]。文中描述如何利用全球志願者的筆記型電腦，建構一個全球最大、最便宜的強動地震監測網。

Quake Catcher Network (簡稱 QCN) 是一個監測全球的地震網，是由美國一位博士生 Elizabeth Cochran 所發展。她發現當商用筆記型電腦不慎掉落時，電腦會自動將硬碟關閉，以免造成資料毀損。而商用筆記型電腦的這種功能，稱為 APS(Active Protection System)。原理是利用加速度感測器，來偵測突發狀況的加速度。一旦加速度值過大，便自動將硬碟關閉以防止硬碟壞軌，保護資料。

這個偵測加速度的功能，好比一個小型的地震儀。因此若能在地震發生時，收集全球筆記型電腦的加速度感測器資料，不就能建構出一個全球最大、最便宜的強動地震監測網。但是，要建立起一個這樣的監測網，需要撰寫程式、設計資料庫等龐大工程，所以她尋求史丹佛大學的協助，建構出 QCN。而為了幫助學生認識地震儀，Elizabeth Cochran 則設計出 QCN Live 這套軟體，做為教學使用的程式。目前這項研究計畫，已被美國國家科學基金會(NSF) 在全

世界極力推廣。

暑假與家人出遊，乘坐高鐵經過某些路段時，車身似乎有些劇烈震動。突發靈光一現，既然筆記型電腦可以偵測地震時的加速度變化，那麼理論上，應該也可以用來偵測高鐵經過地層下陷地區時，所產生的加速度變化，就可以計算出沉陷值。

再把計算出來的數據，與台灣高速鐵路的測量值拿來作比較，就能知道整個方法的精確度及可靠性。

初步的測量之後，以耦合系統作為物理模型，來描述當時的運動狀態，並以此得到沉陷值，且探討經過沉陷地區時運動狀態的物理意義，以及在實際情況時的影響。

## 貳、研究目的

探討高速鐵路的地層下陷與振動頻率之相關運動狀態之分析。

## 參、研究設備及器材

### 器材

#### 一、自製台車、木製軌道



圖一



圖二

#### 二、GPS 軌跡紀錄器和商用筆記型電腦



圖三



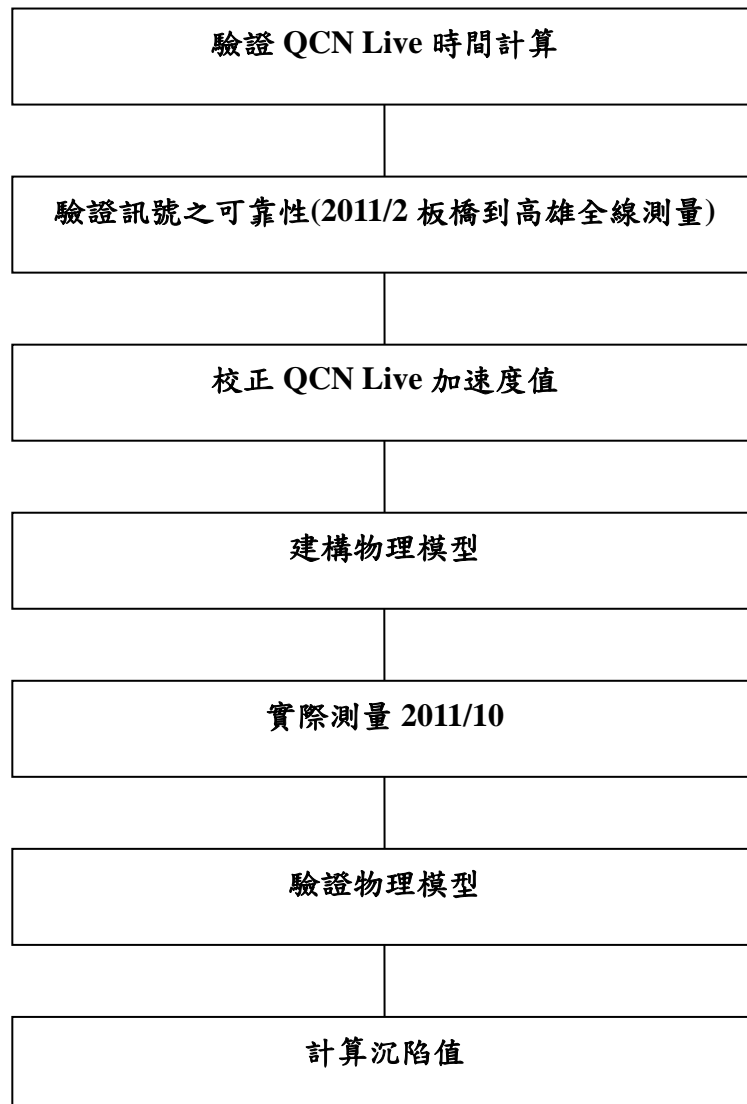
圖四

## 肆、研究過程及方法

### 測量平台

QCN Live 原始的開發平台是 ThinkPad，但是 ThinkPad 只有水平方向上 X、Y 軸的加速度感測器，所以一度考慮使用 Apple Mac book。卻發現當 Apple Mac book 處於靜止時，加速度感測器仍會偵測到加速度的數值變動，推測應該是該筆電所配備的壓阻式加速度感測器過於敏感，將電腦本身的震動也算進去。所以研究中使用 ThinkPad 筆記型電腦（內有電容式加速度感測器）做為測量平台。而為了達到測量垂直方向上的效果，把筆記型電腦垂直放置，並以台車輔助固定筆電（如圖六）。

### 一、研究過程





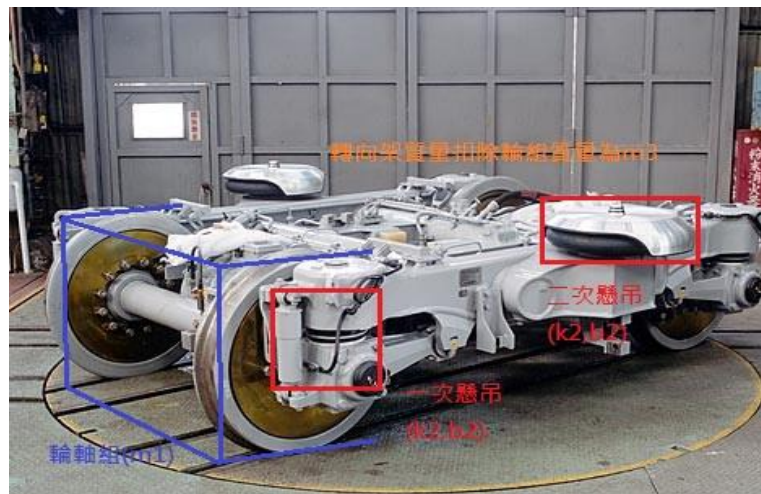
圖五、沉陷點 Google Earth 擷取圖 24°35'6.87"N 120°47'16.68"E



圖六、車內實驗裝置

## 二、物理模型

從高速鐵路的車輛結構可以知道一車輛系統可包括車體( $m_2$ )，轉向架輪組( $m_1$ )及轉向架構架( $m_3$ )，車體與構架間的二次懸吊(彈力常數 $k_2$ , 阻尼 $b_2$ )、轉向架輪組與構架間的一次懸吊(彈力常數 $k_1$ , 阻尼 $b_1$ )，以不同的軌道作分離，因此，空氣彈簧一個，且一次懸吊為並聯，如圖七。因為左右軌道為不均勻的沉陷，並有廣義座標在 $m_2$ 有 $x_2$ ，在 $m_1$ 有 $x_1$ ，在 $m_3$ 有 $x_3$ ，並定義向上為正。



圖七、轉向架示意圖(圖片來源：川崎重工業株式會社) 其中 $k_2$ 為空氣彈簧。

以此作為我們的模型，來描述經過沉陷區時的運動狀態。

模型得理論是以耦合的系統並加上 KBM 漸進法來處理非線性的部份。

由於二次懸吊為空氣彈簧，在經過沉陷區因作用時間極短，可以看成是絕熱反應，根據熱力學第一定律，且因是絕熱反應，有空氣彈簧在經過沉陷區的位能 $U_{k_2}$ ，對 $U_{k_2}$ 做泰勒級數展開：

$$\begin{aligned}
U_{k2} = & U_{k20} + \frac{\partial U_{k2}}{\partial(x_2 - x_3)} \Big|_{x_{20}-x_{30}} (x_2 - x_3) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_{k2}}{\partial(x_2 - x_3)^2} \Big|_{x_{20}-x_{30}} (x_2 - x_3)^2 \\
& + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U_{k2}}{\partial(x_2 - x_3)^3} \Big|_{x_{20}-x_{30}} (x_2 - x_3)^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 U_{k2}}{\partial(x_2 - x_3)^4} \Big|_{x_{20}-x_{30}} (x_2 - x_3)^4
\end{aligned} \tag{1-1}$$

$x_{20} - x_{30}$  為在平衡狀態時車廂質心與轉向架質心的距離。

將三次項以後與阻尼視為微擾項。

加入空氣彈簧非線性項與外力  $F_1$  (沉陷) 後的運動方程式 ( $\Omega$  為外力的頻率)：

$$\begin{aligned}
m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^3 &= b_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \\
m_3 \ddot{x}_3 - k_2(x_2 - x_3) + k_1(x_3 - x_1) - (x_2 - x_3)^2 - (x_2 - x_3)^3 &= b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - b_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) \\
m_1 \ddot{x}_1 - k_1(x_3 - x_1) &= b_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + F_1 \sin \Omega t
\end{aligned} \tag{1-2}$$

可求得上式的零級解之特徵矩陣：

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{m_1} & 0 & \frac{-k_1}{m_1} \\ 0 & \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} \\ \frac{-k_1}{m_3} & \frac{-k_2}{m_3} & \frac{k_1+k_2}{m_3} \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

該特徵矩陣的跡和行列式  $Tr, \Delta$  分別為：

$$Tr = Tr(\Lambda) = \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1+k_2}{m_3} \tag{1-5}$$

$$\det(\Lambda) = 0$$

解特徵方程：

$$\Lambda - \omega^2 I = 0$$

解出得特徵頻率為：

$$\omega_1^2 = \frac{Tr - \sqrt{\Delta}}{2}, \omega_2^2 = \frac{Tr + \sqrt{\Delta}}{2}, \omega_3^2 = 0 \tag{1-6}$$

$$\Delta = Tr^2 - \frac{4k_1 k_2 (m_1 + m_2 + m_3)}{m_1 m_2 m_3} \tag{1-7}$$

有該特徵方程的本徵模為：

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1-8}$$

為簡化耦合的廣義座標，透過簡正座標  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  變換後得到的運動方程式以 KBM 漸進法處理以得到一級近似解(以其中一個簡正座標  $\eta_1$  為例)， $\alpha_1, \alpha_2$  為非線性項的係數， $\beta_1$  為在  $\eta_1$  的阻尼：

$$\ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 = \mathcal{E}(\dot{\eta}_1, \Omega t) = -\alpha_1 \eta_1^2 - \alpha_2 \eta_1^3 - 2\beta_1 \dot{\eta}_1 + F_1 a_{11} \sin \Omega t \tag{1-9}$$

在非線性受迫振動中的共振，若滿足(1-8)式條件，就可產生共振。

$$\omega_1 \cong \frac{p}{q} \Omega \quad (1-10)$$

其中，p 和 q 為互質整數。

$D_1$  和  $\theta_1$  所滿足之一階近似聯立方程：

$$\left. \begin{aligned} \dot{D}_1 &= -\beta D_1 - \frac{F_1 a_{11}}{2 \frac{p}{q} \Omega} \sin \frac{q}{p} \theta_1, \\ \dot{\theta}_1 &= \frac{\varepsilon \Delta}{2 \frac{p}{q} \Omega} + \frac{3q\alpha_2 D_1^2}{8p\Omega} + \frac{F_1 a_{11}}{2 \frac{p}{q} \Omega D_1} \cos \frac{q}{p} \theta_1; \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

此聯立方程的一級近似解為：

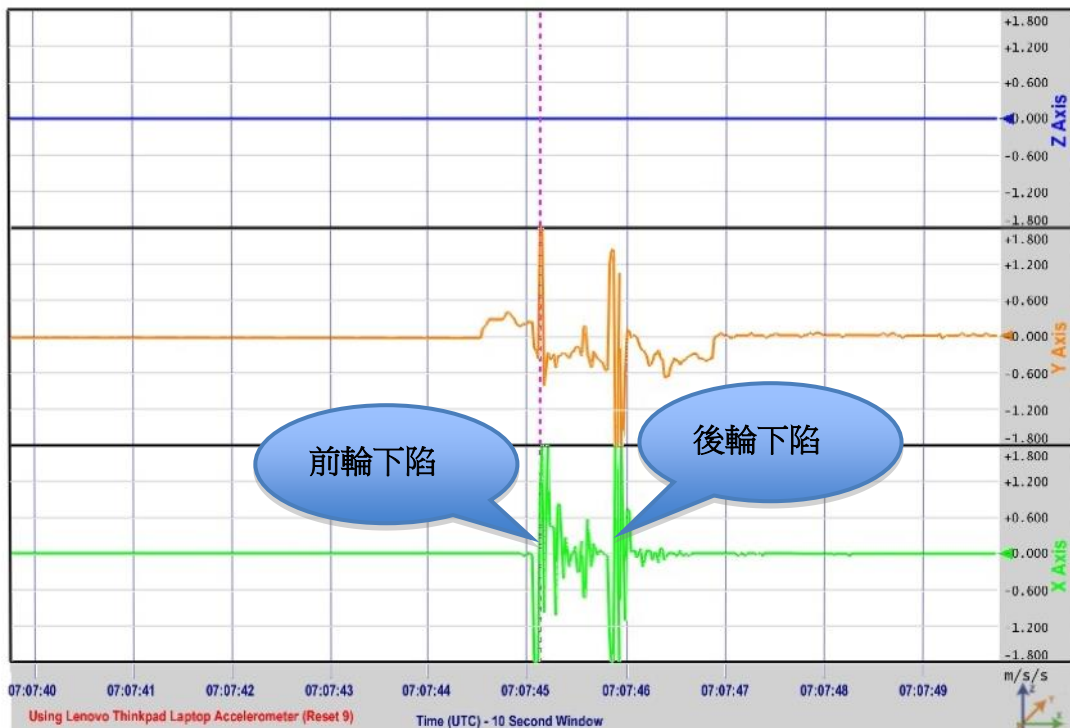
$$\eta_1 = D_1 \sin \left( \frac{p}{q} \Omega t + \theta_1 \right) \quad (1-12)$$

## 伍、研究結果

### 實驗結果

#### 一、驗證 QCN Live 時間計算

根據水平拋射，加速度求距離的公式： $h = -\frac{1}{2}gt^2$  (g 重力加速度、h 軌道落差高度) 可以由時間與加速度算出距離。在本實驗中，預設  $h = -1.8$  公分，所要計算的時間是由加速度值的原點至最低點之間的時間變量，實驗中 X、Y 軸皆保持水平。



圖八、以繩索拉動台車時，台車前後輪下陷時的 QCN Live 記錄



以繩子拉動台車後，可以在 QCN Live 記錄中明顯看到前後輪分別下落的加速度變化（如圖八）。此外 QCN Live 的好處是隨時可以將實驗結果「錄製」下來，並精確轉換成時間與加速度的 Excel CSV(逗點分隔值)檔，而且還能自行儲存到筆記型電腦當中。因此只要在拉動台車後，讀取下落的時間變量，並套入上述公式，即可算出下落的高度。

實驗結果如下表一，下落的時間變量約為 0.0624 秒，所以下落高度應約等於 1.9 公分，實驗結果證明 QCN Live 在時間的計算上並無錯誤。

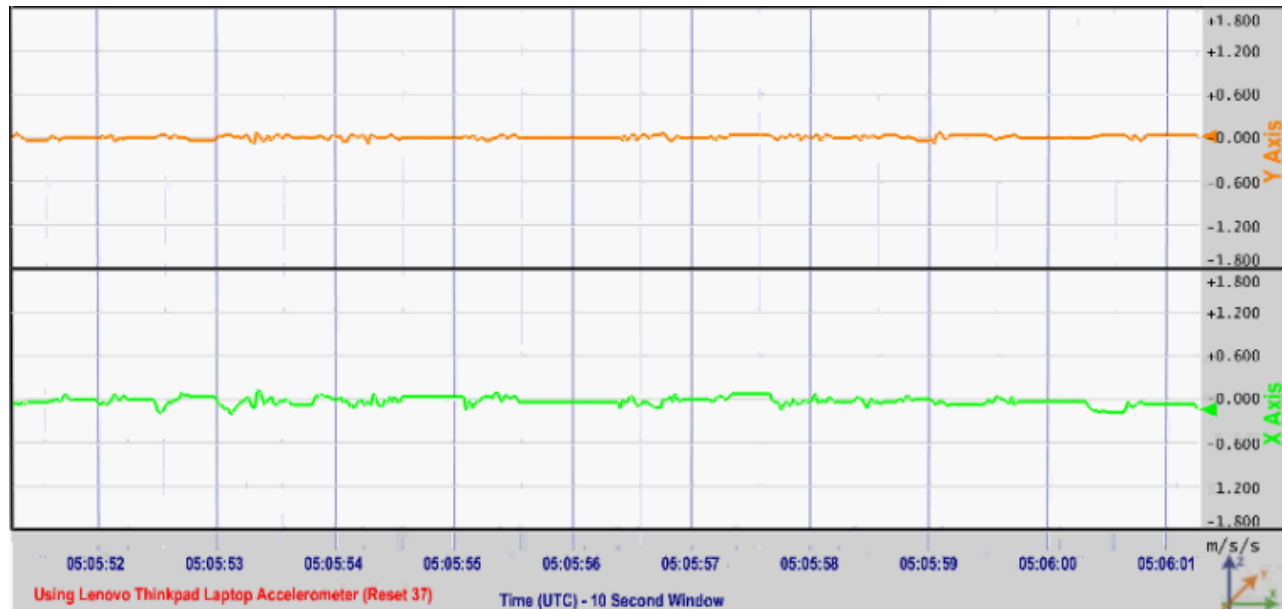
表一、台車前輪落下的時間記錄與換算的高度落差

實驗	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次
前輪在上層軌道正要落下的時間點 ( $t_1$ )	2.387	1.886	3.297	2.698
前輪懸空的時間點 ( $t_2$ )	2.402	1.918	3.338	2.730
前輪下陷到下層軌道的時間點 ( $t_3$ )	2.449	1.950	3.360	2.761
前輪下陷的時間變量 $\Delta t = t_3 - t_1$	0.062	0.063	0.063	0.063
從 $\Delta t$ 推算的下陷高度落差 (h)	-1.9cm	-1.9cm	-1.9 cm	-1.9cm

註：實驗一 QCN Live 為版本 3.78 資料讀取頻率為 64Hz，實驗二之後為版本 5.83，讀取頻率 50Hz。

## 二、驗證訊號之可靠性

為驗證加速度感測器訊號之可靠性，測量台灣高鐵全線，自板橋至高雄。



圖九、加速度感測器未偵測到地層下陷



圖十、加速度感測器偵測到地層下陷

### 三、校正 QCN Live 加速度值

實驗中的加速度感測器實際上是垂直擺放的，所以理當測到  $1g$  的重力加速度，卻發現 QCN Live 所測量到的加速度值與理論的加速度值不一樣，是因為 QCN Live 的原設計者並沒有想到，會有人把筆記型電腦垂直擺放。所以，以此研究中使用的加速度感測器(ADXL320)之製造商的校正方法[3]，來校正所測量到的加速度值。校正方法如下：

設 QCN Live 所輸出的加速度值為  $A_{out}$ ，偏差值為  $A_{off}$ ，實際加速度為  $A_{actual}$ ，單位都是重力加速度，設 Gain 為加速度感測器的增益，單位是加速度。

$$\text{則 } A_{off} [g] = 0.5 \times (A_{+1g} + A_{-1g}) \quad \text{Gain} = 0.5 \times \left( \frac{A_{+1g} - A_{-1g}}{1g} \right) \quad A_{actual} [g] = \frac{A_{out} - A_{off}}{\text{Gain}}$$

實驗結果  $A_{off} = 0.48$      $\text{Gain} = 5.64$

$$\text{則本實驗加速度感測器所測量之實際加速度值應為： } A_{actual} [g] = \frac{A_{out} - 0.48}{5.64}$$

由於在校正時是使用重力加速度來校正，而地球上每個不同的地方重力加速度皆不相同，所以必須計算出校正實驗地點的重力加速度是多少，以降低實驗的誤差。

從中央氣象局的資料可以得知地球上每一點的重力加速度計算方法為：

$$\text{設 } \varphi \text{ 為緯度之弧度，則 } g = 978.03185(1 + 0.005278895 \sin^2 \varphi + 0.000023462 \sin^4 \varphi)(cm/s^2)$$

以校正實驗的實驗地點台北，北緯約 25 度做為本研究之重力加速度：

計算結果：北緯 25 度之重力加速度值約為：  $978.9547128(cm/s^2)$

## 四、實際測量台灣高鐵麻園坑口地層下陷(2011/10)

### (一)、分軌測量

每一次的測量會因為在列車左端、右端而異，南下、北上都如此，可以判定每條軌道地層下陷不一致，為求精準，將每條軌道分開記錄，北上兩條為一、二軌，南下兩條為三、四軌，如圖十一。

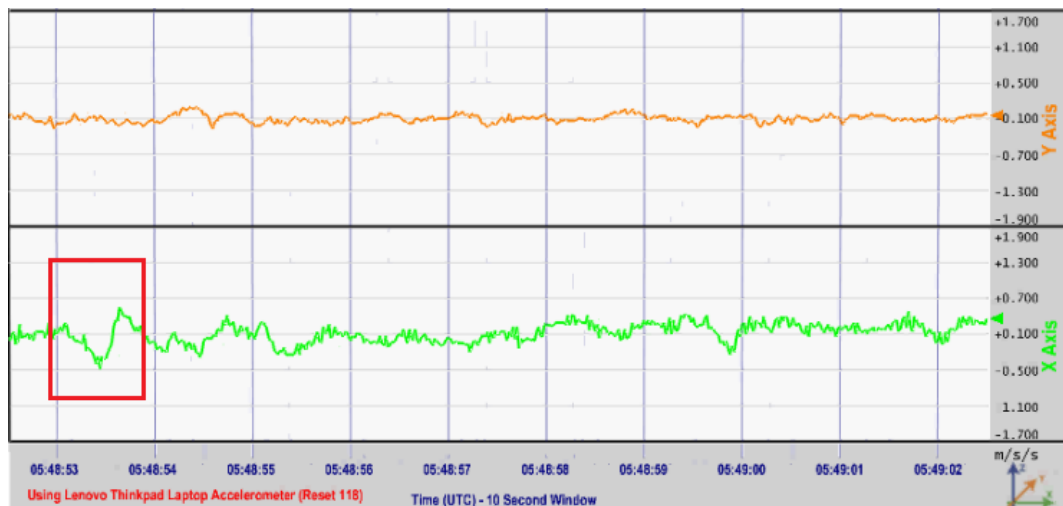


圖十一、軌道編號示意圖(作者親自拍攝)

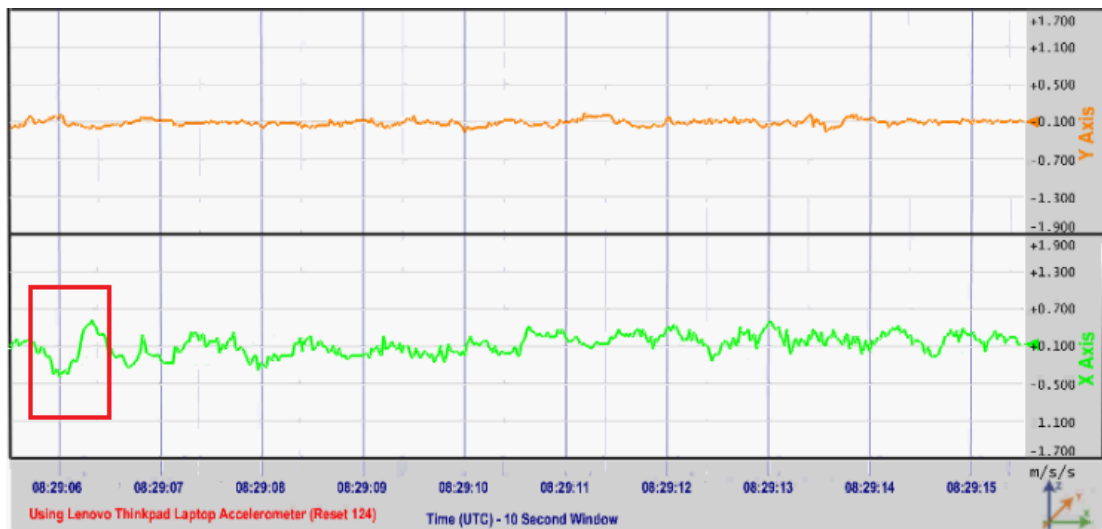
### (二)、選取資料計算範圍

從 QCN Live 原始資料中，選取到達地層下陷地時，加速度的一個完整波。

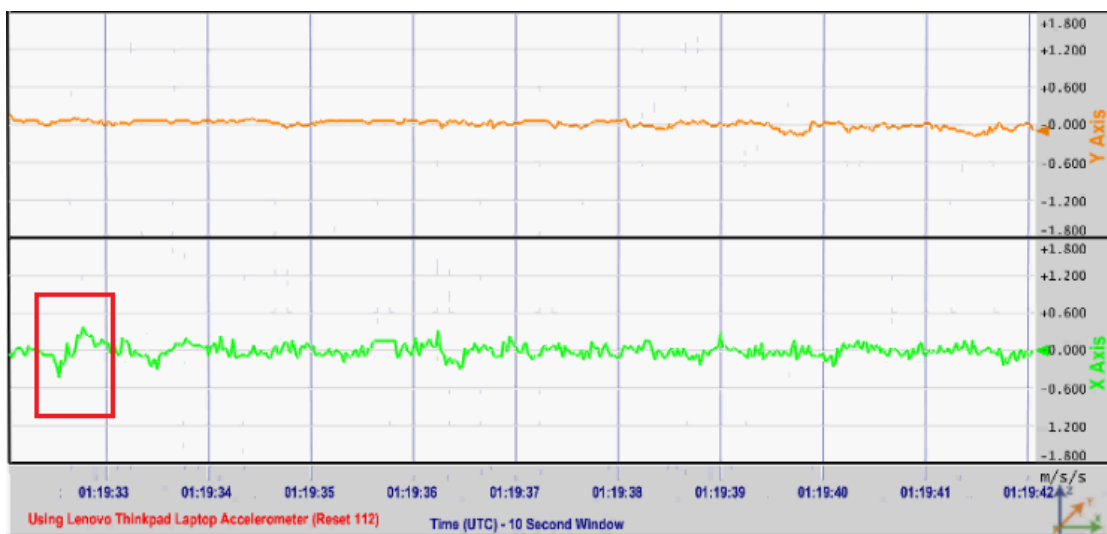
(下列為苗栗麻園坑口 TK109+386 路工段沉陷 1~4 軌 QCN Live 擷取圖)



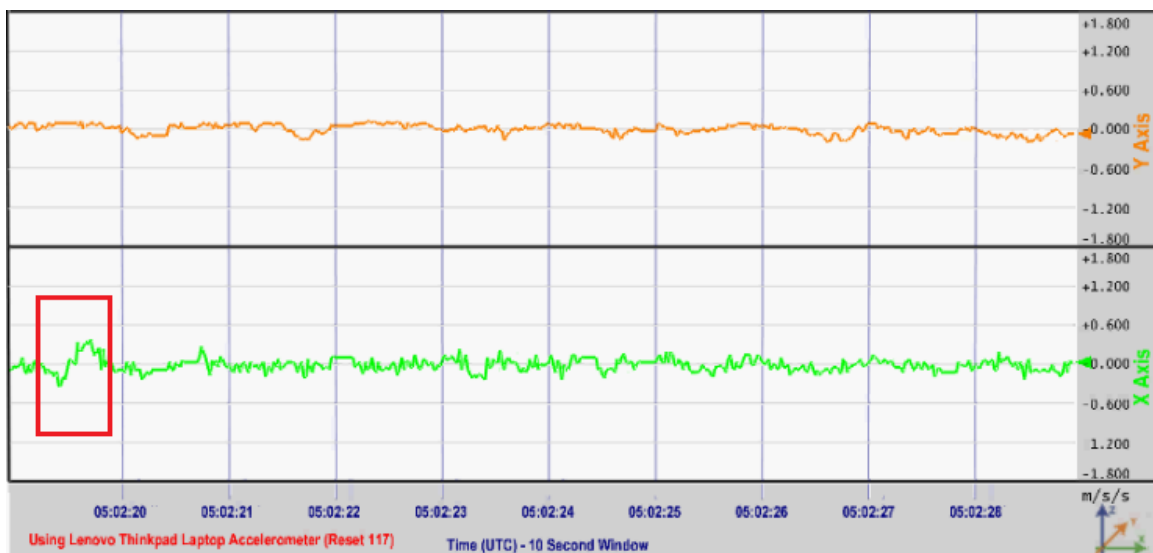
圖十二、一號軌



圖十三、二號軌

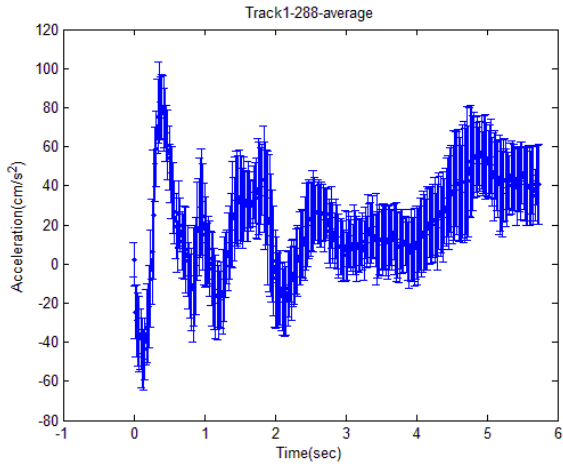


圖十四、三號軌

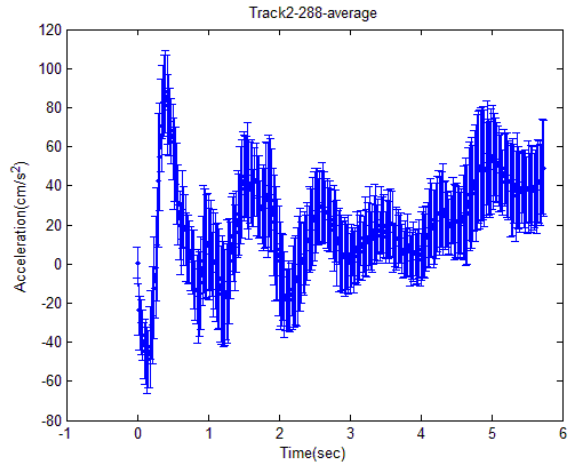


圖十五、四號軌

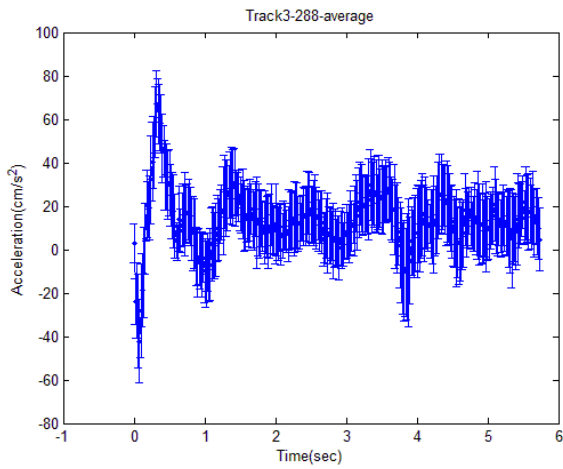
### (三)、測量結果



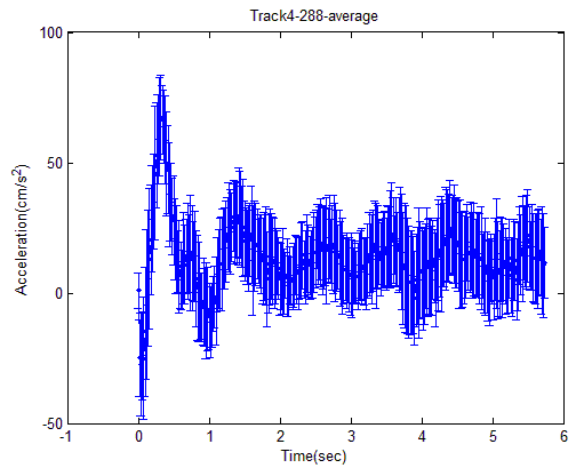
圖十六之一、一號軌 288 格平均值和標準差



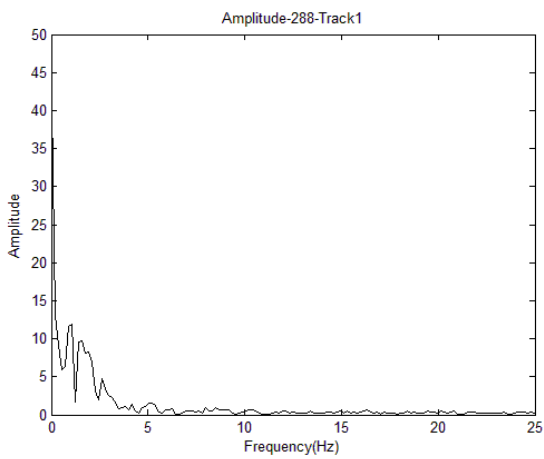
圖十六之二、二號軌 288 格平均值和標準差



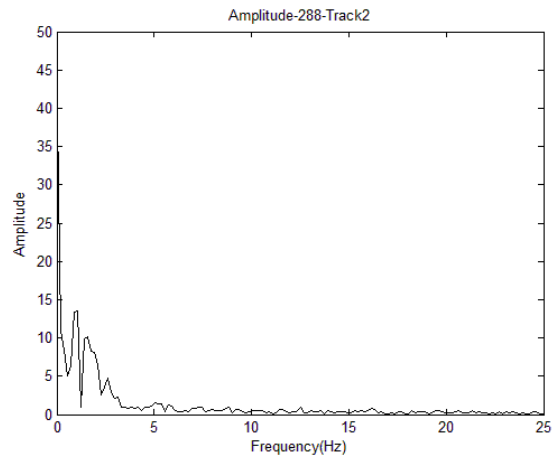
圖十六之三、三號軌 288 格平均值和標準差



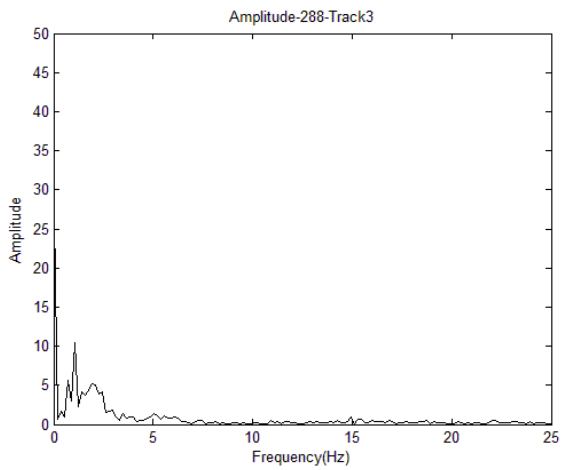
圖十六之四、四號軌 288 格平均值和標準差



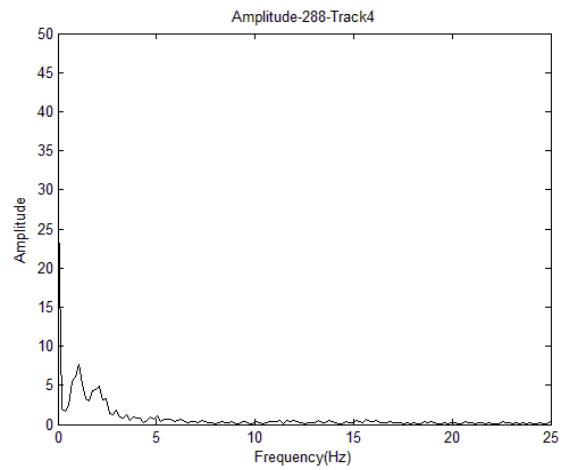
圖十七之一、一號軌 288 格平均值頻譜



圖十七之二、二號軌 288 格平均值頻譜

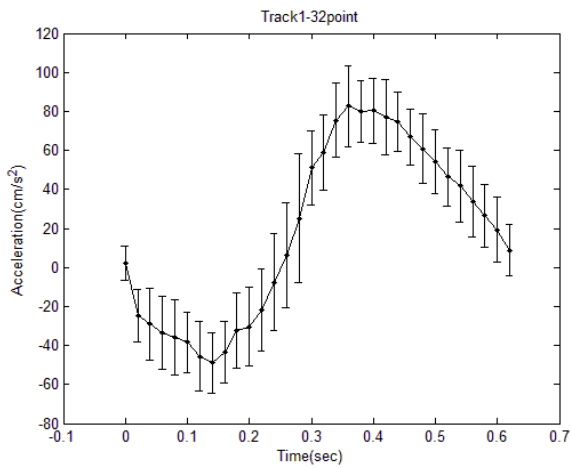


圖十七之三、三號軌 288 格平均值頻譜

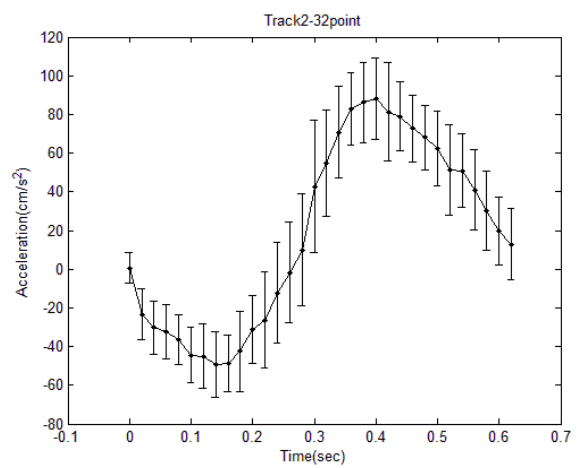


圖十七之四、四號軌 288 格平均值頻譜

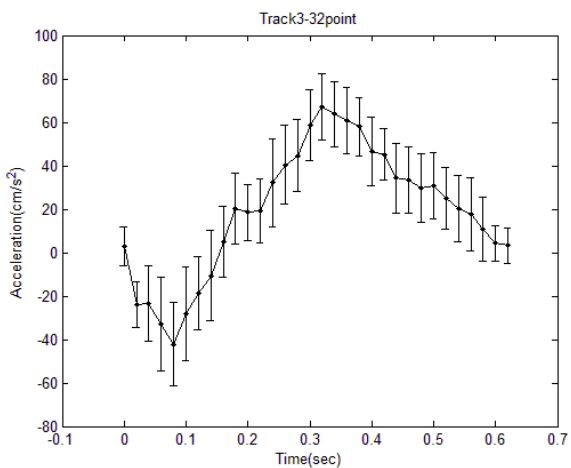
### 1.經過沉陷區之 32 格數據



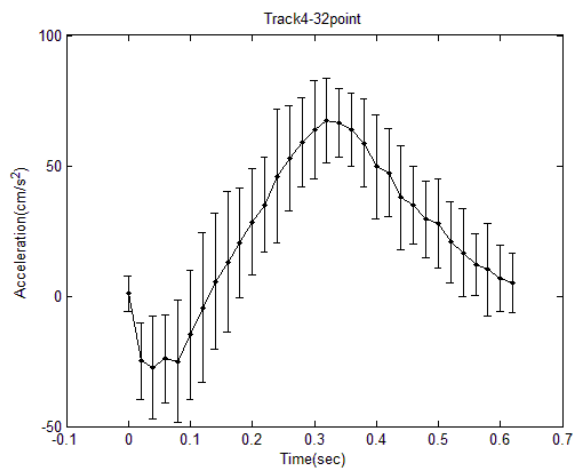
圖十八之一、一號軌平均值及標準差



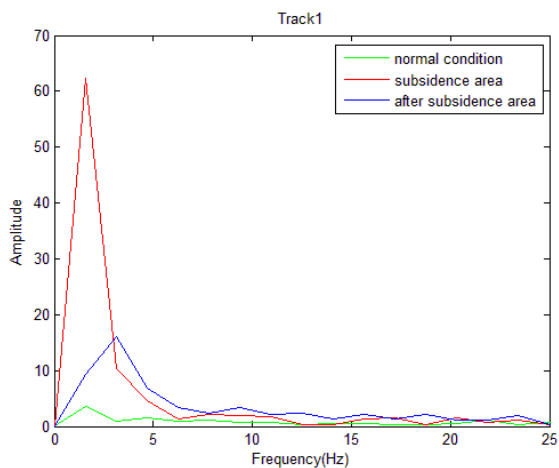
圖十八之二、二號軌平均值及標準差



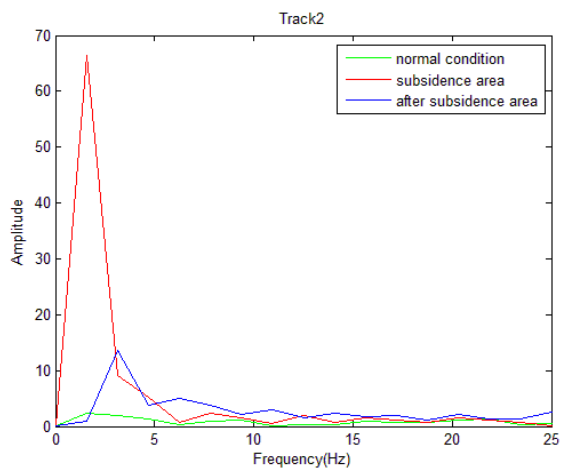
圖十八之三、三號軌平均值及標準差



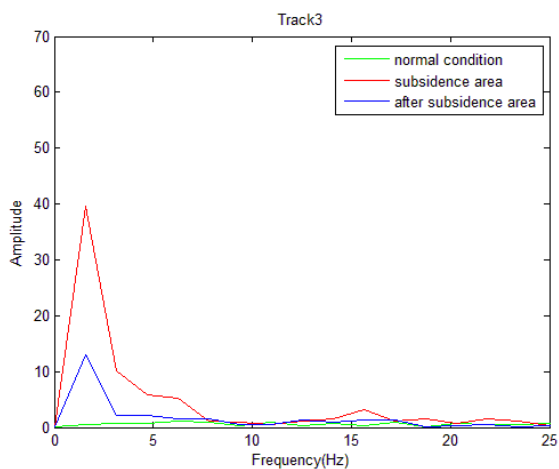
圖十八之四、四號軌平均值及標準差



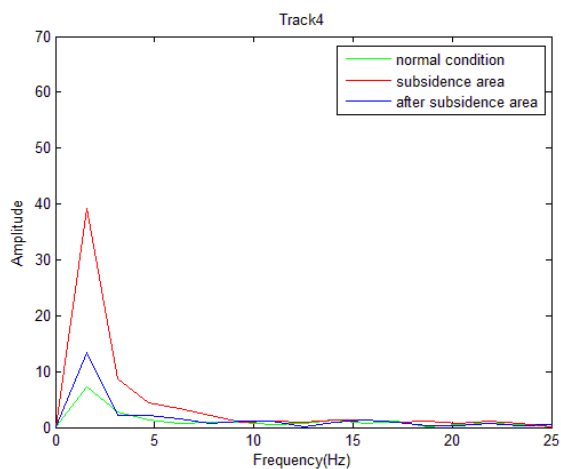
圖十九之一、一號軌沉陷區前後和沉陷區頻譜



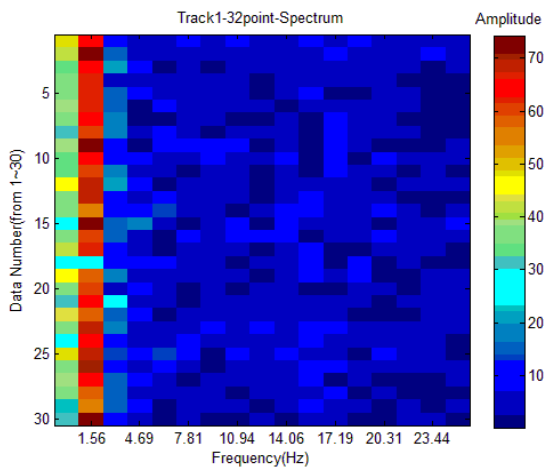
圖十九之二、二號軌沉陷區前後和沉陷區頻譜



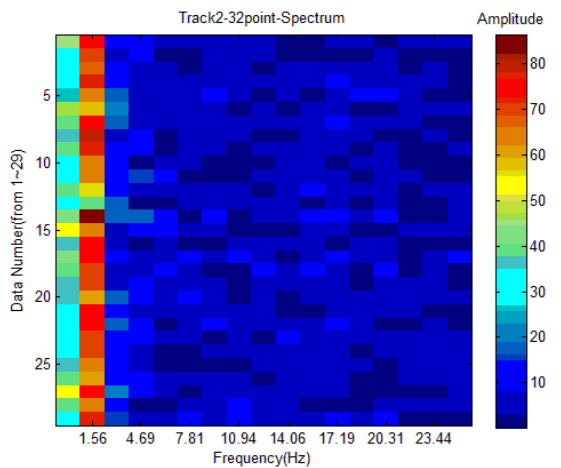
圖十九之二、三號軌沉陷區前後和沉陷區頻譜



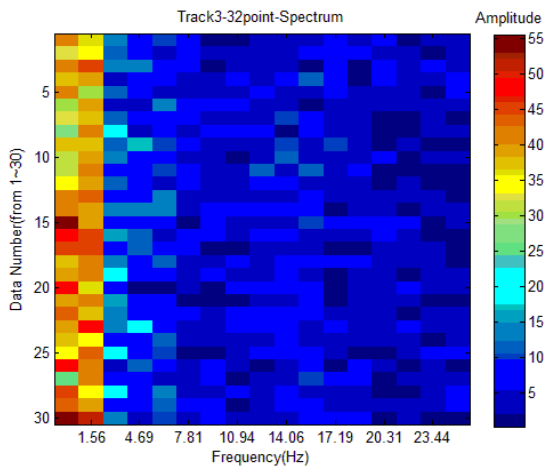
圖十九之二、四號軌沉陷區前後和沉陷區頻譜



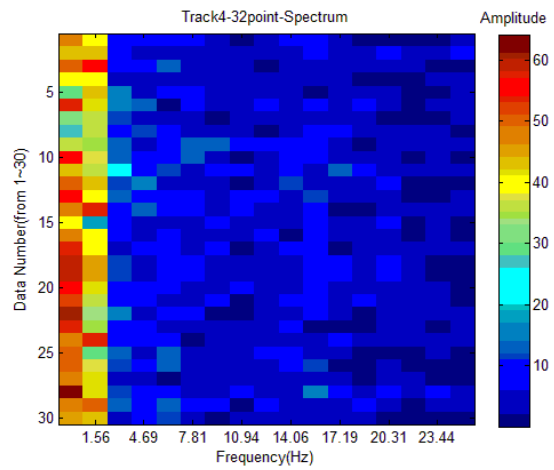
圖二十之一、一號軌沉陷區各筆資料頻譜圖



圖二十之二、二號軌沉陷區各筆資料頻譜圖

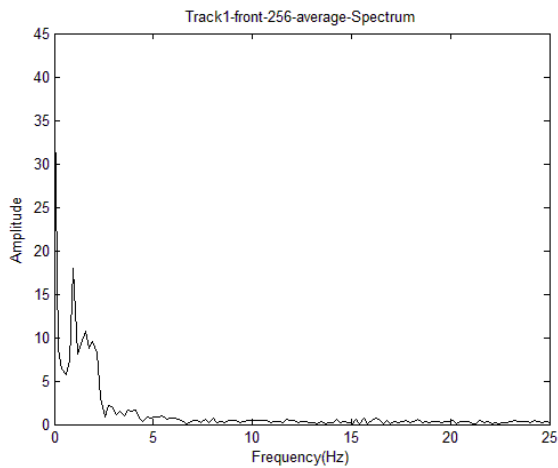


圖二十之三、三號軌沉陷區各筆資料頻譜圖

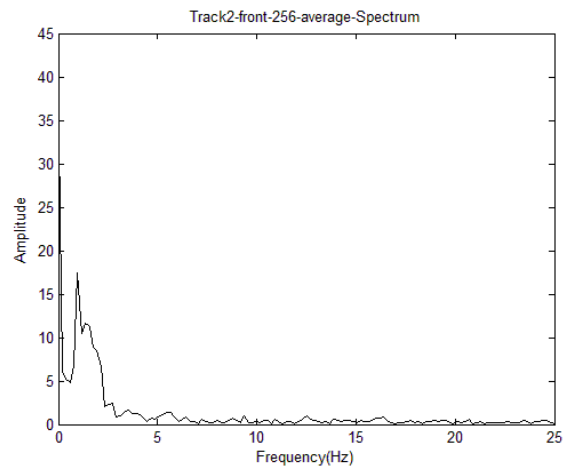


圖二十之四、四號軌沉陷區各筆資料頻譜圖

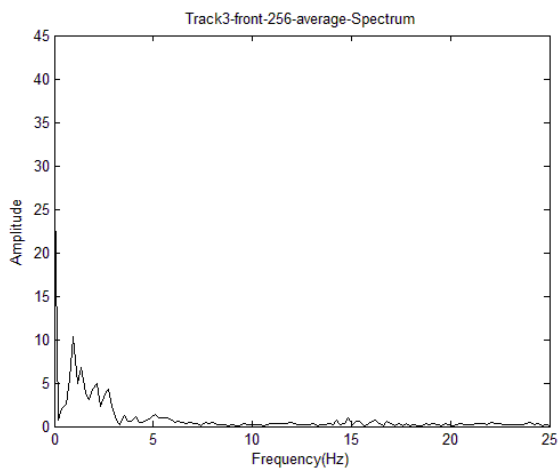
## 2.經過沉陷區之 256 格數據



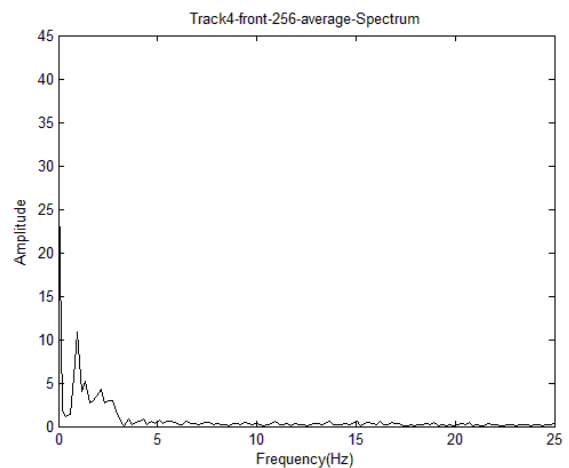
圖二十一之一、一號軌經過沉陷區 256 格數據的頻譜



圖二十一之二、二號軌經過沉陷區 256 格數據的頻譜

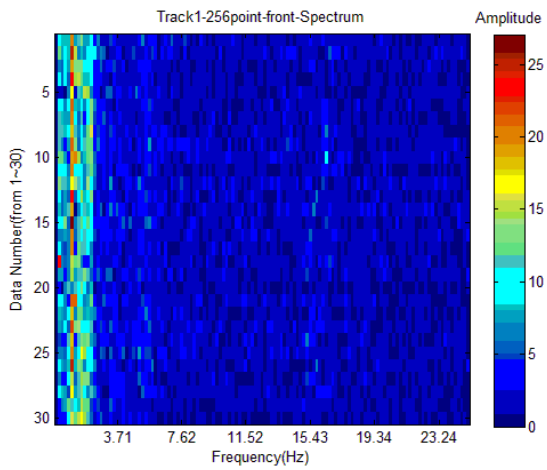


圖二十一之三、三號軌經過沉陷區 256 格數據的頻譜

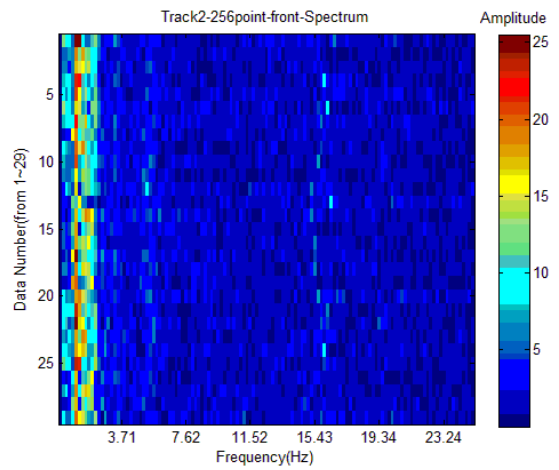


圖二十一之四、四號軌經過沉陷區 256 格數據的頻譜

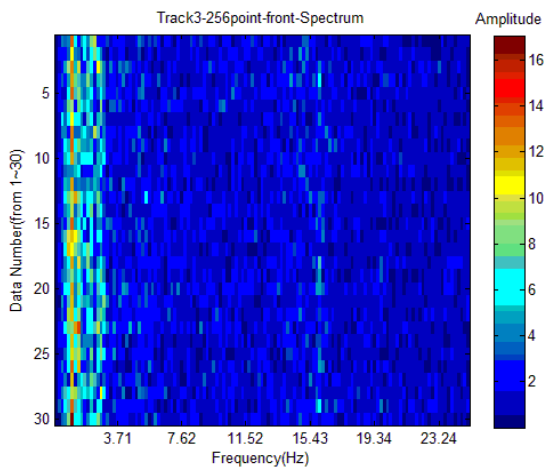




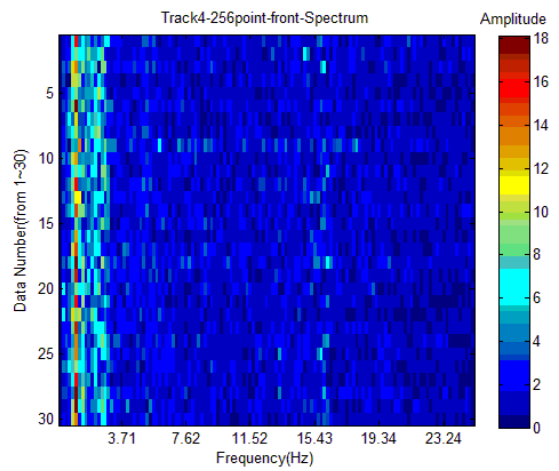
圖二十二之一、一號軌經沉陷區 256 格各筆資料頻譜



圖二十二之二、二號軌經沉陷區 256 格各筆資料頻譜

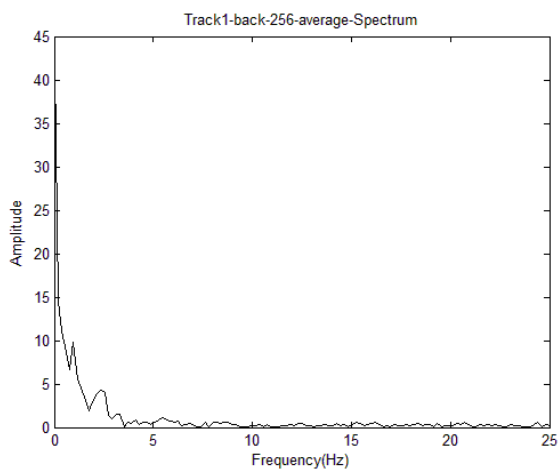


圖二十二之三、三號軌經沉陷區 256 格各筆資料頻譜

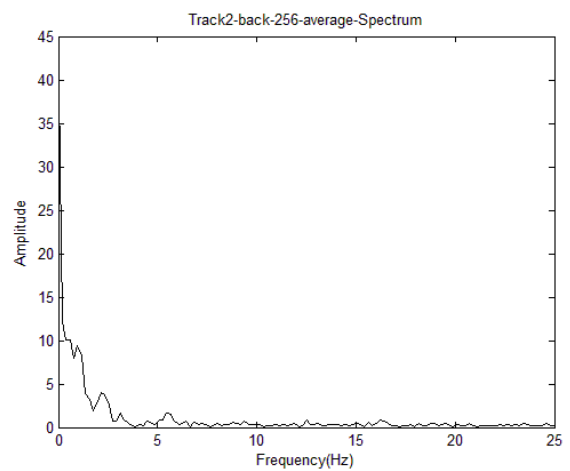


圖二十二之四、四號軌經沉陷區 256 格各筆資料頻譜

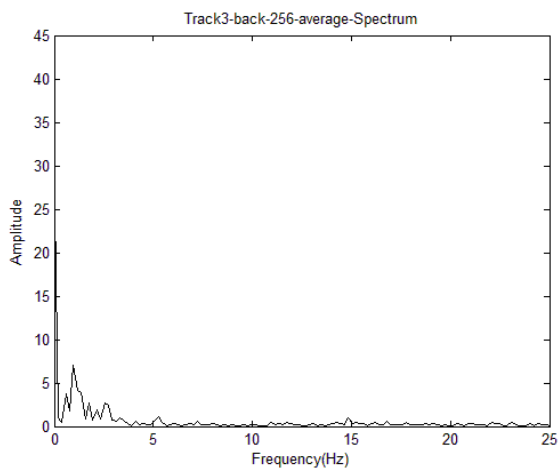
### 3.經過沉陷區後之 256 格數據



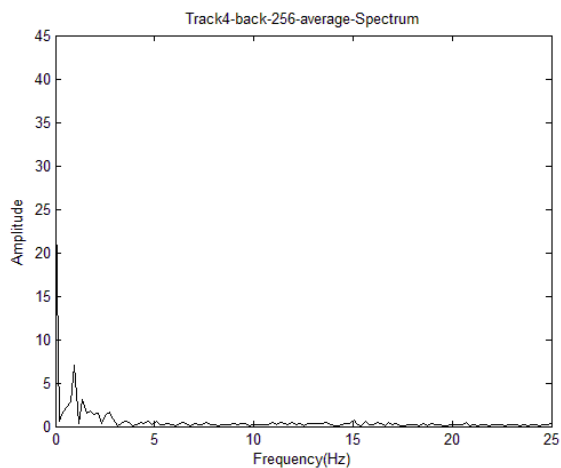
圖二十三之一、一號軌經沉陷區後 256 格平均值頻譜



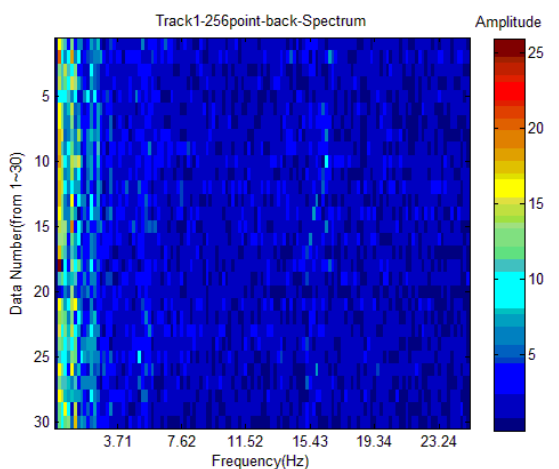
圖二十三之二、二號軌經沉陷區後 256 格平均值頻譜



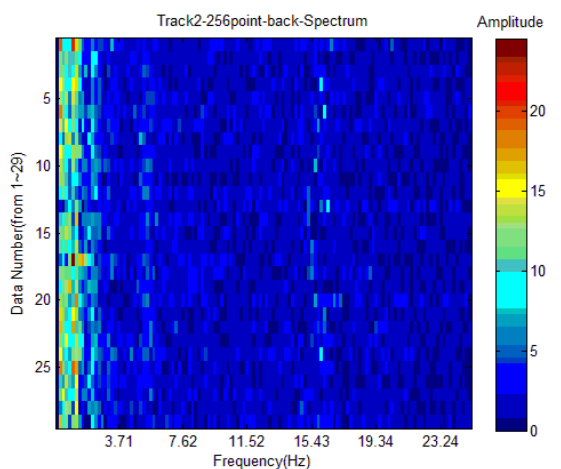
圖二十三之三、三號軌經沉陷區後 256 格平均值頻譜



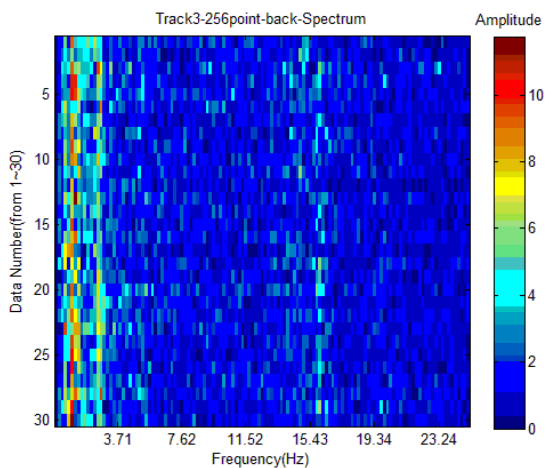
圖二十三之四、四號軌經沉陷區後 256 格平均值頻譜



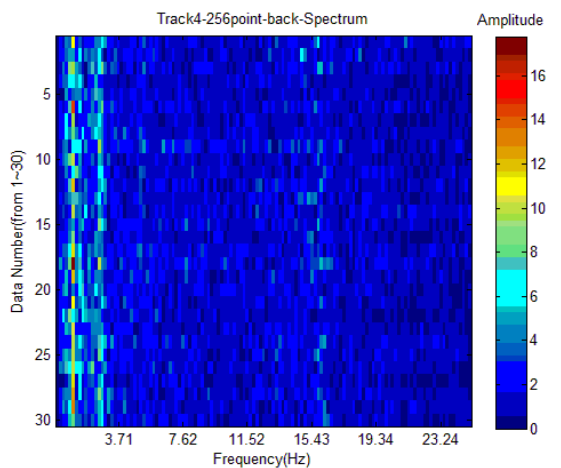
圖二十四之一、一號軌經沉陷區後 256 格各筆資料頻譜



圖二十四之二、二號軌經沉陷區後 256 格各筆資料頻譜



圖二十四之三、三號軌經沉陷區後 256 格各筆資料頻譜



圖二十四之四、四號軌經沉陷區後 256 格各筆資料頻譜

表二-1、沉陷區前三十二格 demean 各軌平均值頻譜圖的振幅資料

頻率(Hz)	一號軌	二號軌	三號軌	四號軌
0/平均值：	0.00	0.00	0.00	0.00
1.56	3.51	2.31	0.51	7.16
3.13	0.89	1.97	0.73	2.73
4.69	1.48	1.33	0.74	1.24
6.25	0.89	0.24	1.14	0.63
7.81	1.06	1.00	0.94	1.01
9.38	0.79	1.09	0.34	0.89
10.94	0.70	0.18	0.90	0.59
12.50	0.40	0.30	0.32	0.76
14.06	0.51	0.31	0.76	1.37
15.63	0.50	0.85	0.29	0.65
17.19	0.36	0.76	0.89	1.19
18.75	0.40	0.66	0.10	0.18
20.31	0.59	1.07	0.69	0.46
21.88	1.11	1.24	0.61	0.81
23.44	0.40	0.35	0.52	0.44
25.00	0.65	0.48	0.66	0.20

表二-2、沉陷區三十二格 demean 各軌平均值頻譜圖的振幅資料

頻率(Hz)	一號軌	二號軌	三號軌	四號軌
0/平均值：	0.00	0.00	0.00	0.00
1.56	62.38	66.42	39.68	39.16
3.13	10.31	9.05	10.23	8.69
4.69	4.56	5.31	5.81	4.44
6.25	1.25	0.69	5.20	3.30
7.81	2.15	2.30	1.08	2.10
9.38	1.95	1.53	0.84	0.91
10.94	1.75	0.48	0.61	1.09
12.50	0.34	1.94	1.06	0.84
14.06	0.37	0.78	1.46	1.25
15.63	1.38	1.59	3.22	1.39
17.19	1.51	1.05	1.09	1.84
18.75	0.26	0.71	1.55	1.09
20.31	1.51	1.58	1.61	0.73
21.88	0.81	1.11	0.63	1.05
23.44	1.09	0.67	1.47	0.72
25.00	0.24	0.08	0.27	0.12

表二-3、經過沉陷區後三十二格 demean 各軌平均值頻譜圖的振幅資料

頻率(Hz)	一號軌	二號軌	三號軌	四號軌
0/平均值：	0.00	0.00	0.00	0.00
1.56	9.37	0.93	12.91	13.32
3.13	16.04	13.58	2.23	2.18
4.69	6.90	3.71	2.06	2.16
6.25	3.34	5.01	1.49	1.54
7.81	2.26	3.77	1.63	0.72
9.38	3.47	2.15	0.45	1.15
10.94	2.17	2.95	0.45	1.17
12.50	2.37	1.58	1.40	0.05
14.06	1.40	2.41	0.90	1.00
15.63	2.07	1.67	1.38	1.26
17.19	1.37	1.90	1.38	0.95
18.75	2.14	1.05	0.09	0.34
20.31	1.18	2.19	0.37	0.25
21.88	1.11	1.27	0.59	0.79
23.44	1.89	1.36	0.12	0.38
25.00	0.29	2.65	0.27	0.47

表三-1、經過沉陷區前三十二格 demean 各軌平均值頻譜圖的相位資料

頻率(Hz)	一號軌	二號軌	三號軌	四號軌
0/平均值：	0.00	0.00	0.00	0.00
1.56	3.14	0.00	0.00	0.00
3.13	-0.05	-1.71	-2.25	-1.71
4.69	-2.67	-2.20	2.52	-2.20
6.25	-0.45	-0.87	2.49	-0.87
7.81	-1.14	-1.06	-2.13	-1.06
9.38	-2.61	-1.61	-2.01	-1.61
10.94	-1.87	2.73	-2.92	2.73
12.50	2.19	0.20	-0.30	0.20
14.06	0.07	1.58	1.20	1.58
15.63	0.42	-0.86	2.95	-0.86
17.19	-0.84	-1.26	1.41	-1.26
18.75	-0.35	-2.14	1.62	-2.14
20.31	-1.81	0.98	-0.13	0.98
21.88	-1.85	0.01	-2.86	0.01
23.44	1.30	0.61	2.54	0.61
25.00	1.09	-1.20	2.85	-1.20

表三-2、沉陷區三十二格 demean 各軌平均值頻譜圖的相位資料

頻率(Hz)	一號軌	二號軌	三號軌	四號軌
0/平均值：	0.00	3.14	3.14	0.00
1.56	2.08	2.00	2.64	2.83
3.13	-0.36	-0.61	1.00	1.08
4.69	2.19	1.98	1.59	1.68
6.25	0.58	-1.95	-0.22	0.70
7.81	2.23	1.85	-0.95	0.74
9.38	1.11	0.67	0.95	1.00
10.94	0.48	0.31	0.70	1.41
12.50	0.00	0.92	-0.65	0.90
14.06	-0.15	1.01	2.34	0.81
15.63	1.67	1.04	1.09	0.78
17.19	-0.17	-1.24	0.34	0.13
18.75	1.92	2.31	0.63	0.40
20.31	0.02	-0.37	0.26	0.03
21.88	0.84	2.01	-0.42	-0.52
23.44	-0.32	0.74	0.35	0.97
25.00	0.00	0.00	3.14	3.14

表三-3、經過沉陷區後三十二格 demean 各軌平均值頻譜圖的相位資料

頻率(Hz)	一號軌	二號軌	三號軌	四號軌
0/平均值：	0.00	3.14	3.14	0.00
1.56	-2.72	-1.82	-0.44	-0.15
3.13	-0.62	-1.02	2.66	2.21
4.69	-1.80	-1.90	2.15	2.59
6.25	0.19	-0.33	0.76	0.95
7.81	-1.12	-1.04	2.27	2.52
9.38	-0.46	-0.66	2.08	1.95
10.94	-0.58	-1.04	-3.01	2.23
12.50	-0.79	-0.27	1.46	1.67
14.06	-0.73	-0.73	1.53	0.64
15.63	-0.59	-0.70	-2.14	2.60
17.19	-1.33	0.19	0.80	1.99
18.75	-0.16	0.98	-0.52	-0.08
20.31	-0.60	-0.51	0.38	2.64
21.88	0.26	0.10	1.30	-3.08
23.44	0.00	-0.17	0.87	-1.97
25.00	0.00	3.14	3.14	0.00

#### (四)、計算沉陷值

從原模型來看，沉陷只作用在  $x_1$ ，但透過耦合理論，也可以在  $x_2$  觀測到相似的現象。對  $\ddot{x}_2$  作傅立葉級數展開，即對測量值作傅立葉分析，可得表三-2。

$$\ddot{x}_2 = -\sum_{l=1}^n A_l \sin \omega_l t$$

於是有：

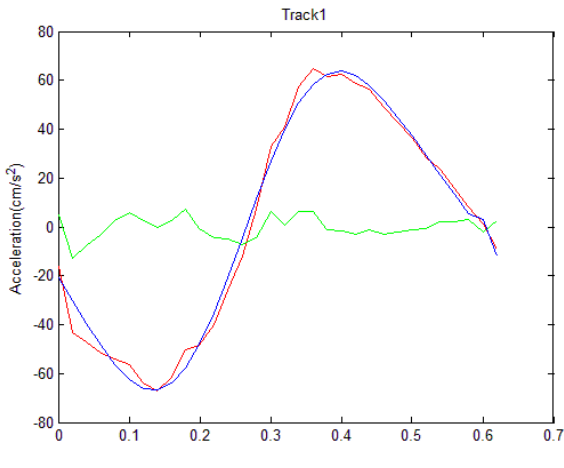
$$-\sum_{l=1}^n A_l \sin \omega_l t = -a_{21} D_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \theta_1) - a_{22} D_2 \omega_2^2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) + a_{21} \omega_1 [\dot{D}_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - D_1 \dot{\theta}_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1)] + a_{22} \omega_2 [\dot{D}_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) - D_2 \dot{\theta}_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)]$$

因此， $\omega_1$  為傅立葉級數展開後第一項的角頻率， $\omega_2$  為第二項的角頻率。

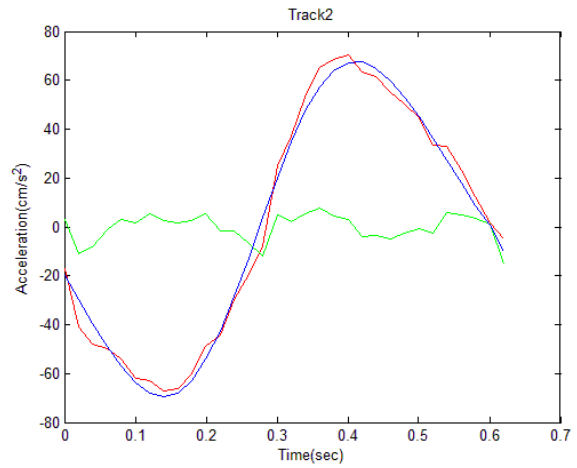
可得下列四張圖(紅線為原始資料，藍線為：

$$-a_{21} D_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \theta_1) - a_{22} D_2 \omega_2^2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)$$

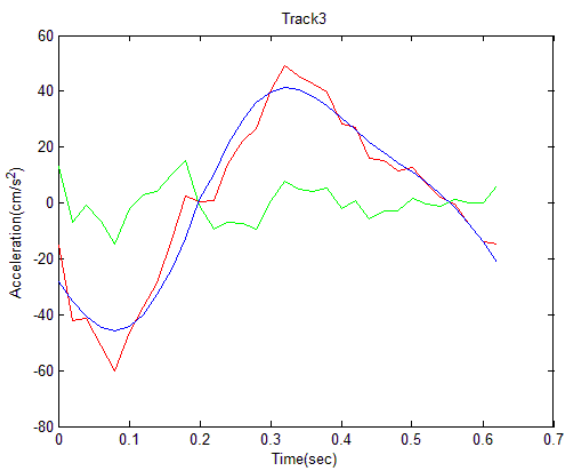
，綠線為紅線減藍線)：



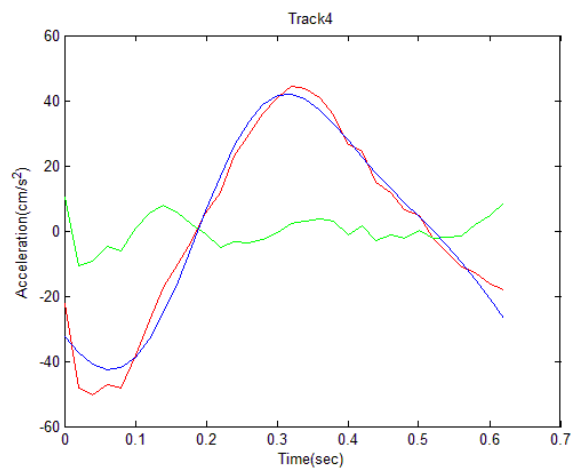
圖二十五之一、一號軌



圖二十五之二、二號軌



圖二十五之三、三號軌



圖二十五之四、四號軌

根據上圖，有：

$$-\sum_{l=1}^n A_l \sin \omega_l t \cong -a_{21} D_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \theta_1) - a_{22} D_2 \omega_2^2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)$$

於是，可求得  $x_2$  振幅為傅立葉級數展開第一項和第二項振幅各除以該角頻率之平方。  
 現在我們所測量到的為  $\ddot{x}_2$ ，先以  $\ddot{x}_2$  振幅值來近似沉陷值，  
 表四中顯示了  $x_2$  的振幅值與高鐵人工測量沉陷值的誤差百分比。

表四、各軌估算的沉陷值

	一號軌	二號軌	三號軌	四號軌
沉陷值(cm)	$0.65 \pm 0.04$	$0.69 \pm 0.02$	$0.41 \pm 0.01$	$0.41 \pm 0.07$
估算值與高鐵誤差百分比%	1.56%	1.45%	-18.53	-18.97%

但實際上， $x_1$  的振幅值才是最代表沉陷值，它與  $x_2$  之間差了一個因子  $a_{11}/a_{21}$ ，即：

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{k_1(k_2 - m_2\omega_1^2)}{k_2(k_1 - m_1\omega_1^2)}$$

目前， $k_2, m_1, m_3$  皆為未知

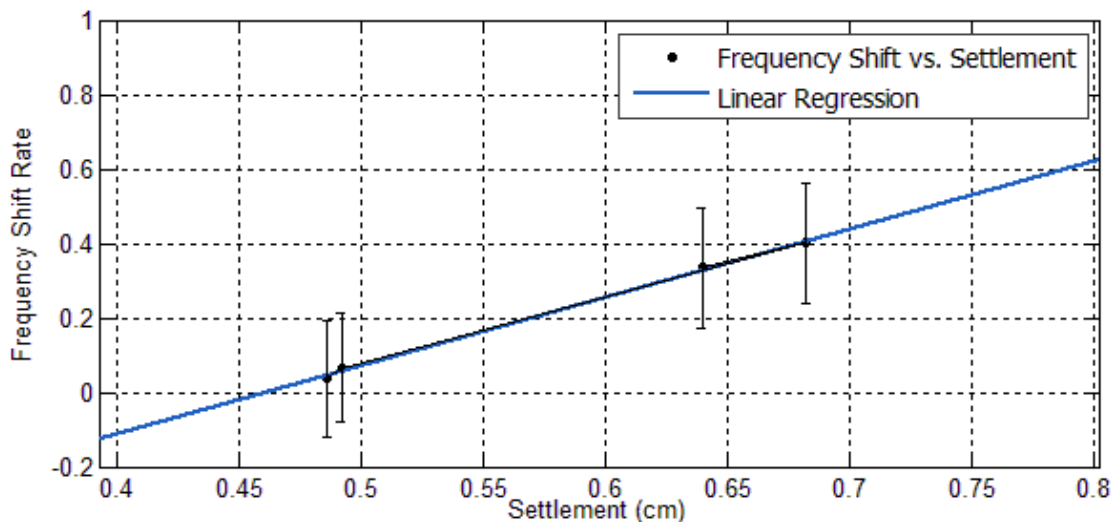
而從表四一號軌和二號軌的資料可知，在一號軌和二號軌時  $a_{11}/a_{21} \cong 1$

即：

$$k_2 = \frac{m_2}{m_1} k_1$$

也就是說在一號軌和二號軌，因為沉陷的關係，二次懸吊的空氣彈簧已經被壓縮到接近極限了，同理，三號軌和四號軌則是因為沉陷值較小因此壓縮較沒一、二號軌多，以  $\ddot{x}_2$  近似相對較不準。

### (五)、沉陷值與頻率偏移量的探討



圖二十六、上圖為沉陷值與頻率偏移量之線性回歸，線性方程為  $y = 0.1854x + 0.2108$ ，

$$R^2 = 0.9972, RMSE = 0.01194$$

上圖顯示了沉陷值與高鐵在沉陷區發生的頻率偏移現象(圖十九之一~四)的關係，從上圖橫軸的截距可以得知代表在多少沉陷值時頻率不會有偏移的現象。

高鐵的車輛振動頻率會產生偏移乃是因為二次懸吊的空氣彈簧在沉陷區被壓縮程度不同所造成的，在沉陷值較低且在空氣彈簧所能緩和的範圍內，振動會被吸收部分，因此沉陷值

的計算誤差會較大，如三、四軌，空氣彈簧的頻率會偏移但不明顯。但是像一、二軌沉陷值較大時而導致的二次懸吊空氣彈簧近乎失效，沒有吸收太多的振動所以沉陷值的計算會較準確，但會因空氣彈簧失效而產生明顯的頻率偏移現象。

## 陸、討論

一、苗栗麻園坑道高鐵里程 TK109+386 沉陷地軌道有轉彎，沉陷在 Y 軸會有分量，所以在做計算前，須把 Z 軸、Y 軸向量合成，合成前與合成後最高的誤差 1.5%，但是大部分都在 1% 內。

二、當振動達到穩定狀態時(p,q 為互質整數)： $\dot{D}_1 = 0$  且  $\dot{\theta} = 0$ ，以  $\eta_1$  為例振幅特性為：

$$D_1^2 \left[ \left( \frac{3q\alpha_2 D_1^2}{8p\Omega} + \frac{q\varepsilon\Delta}{2p} \right)^2 + \beta_1^2 \Omega^2 \right] = \left( \frac{qF_1 a_{11}}{p} \right)^2$$

並可解出：

$$\Delta\Omega = \left( \frac{3q\alpha_2}{8p\Omega} D_1^2 \pm \sqrt{\left( \frac{qF_1 a_{11}}{2p\Omega D_1} \right)^2 - \beta_1^2} \right)$$

三、從圖二十四可以看到，可以看出在 15Hz 的頻率有固定出現比它附近頻率略高的振幅，推測可能是圖二十七中沉陷範圍(紅框)的一小山洞造成，因 15Hz 換算周期約 0.066 秒，在高鐵時速 300km/h 換算約為 5 公尺，與那小山洞的寬度接近。

### 差異沉陷現地勘查



圖二十七、苗栗麻園坑道現地照



圖二十八、鐵軌下方墊片

苗栗麻園坑道高鐵里程 TK109+386 並非橋梁段，而是土堤，在高鐵鐵軌下方，明顯有用以改善沉陷的墊片，如圖二十八紅框處。





圖二十九、苗栗麻園坑的高鐵



圖三十、苗栗麻園坑

四、由 KBM 非線性振動理論中，只要驅動力的角頻率與振動的角頻率約略成簡單的互質整數關係，即會產生共振，不一定角頻率要相等，在本研究中，外力與兩個簡正座標的振動頻率會形成質數比，因此有可能產生共振現象。

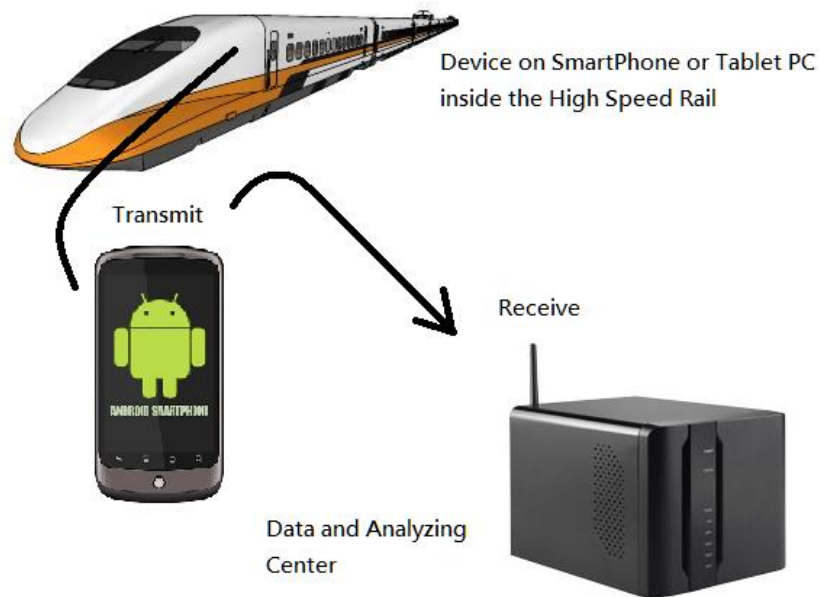
## 柒、結論

總結所測得的結果，估算 2011 年 10 月台灣高鐵在苗栗麻園坑道的地層下陷值最嚴重為 0.69 公分，長度約 56 公尺，與台灣高鐵 2011 年 8 月所測量誤差最高 0.08 公分，但是高鐵只要 2 公分就一定會出軌。並在 2012 年 4 月 10 日與臺灣高速鐵路公司的交流中，雙方以各自的儀器測量麻園坑口的加速度值，台灣高鐵測量全振幅四捨五入後為 0.15g，以 QCN 和筆記型電腦測量的半振幅四捨五入後是 0.08g，換算成全振幅是 0.16g。

高鐵對於平常測量列車穩定性，只根據加速度判別，雖有的完善評估標準，但是他們並未想到可以藉由量到的加速度來計算沉陷值，而是以極勞累、耗時且高成本的傳統人工測量方法，更受限於白天的商業運轉。

相對於臺灣高鐵的人工夜間測量，本沉陷測量方法運用加速度感測器來測量，更具安全可靠及立即性，並且已成功申請到中國(專利號：ZL 2012 2 0149439.7)與台灣(第 M435471 號)的專利。

因此，若在高鐵駕駛室內，設置一內含加速度感測器的記錄裝置，如智慧型手機，在每班車進行測量，此測量方法可在測量後五分鐘內馬上算出沉陷值，配合台灣高速鐵路將在車廂內增設無線網路，測量到的加速度值，能立即透過網路傳回行控中心、資料中心進行計算，如圖三十一，若發現測量到的地層下陷值足以構成威脅，則立即採取因應措施以提高行車安全。同時，也可做長期的觀測，觀察高速鐵路的地層下陷值是否持續惡化，以做好預防的工作，避免造成危險，也能節省大部分的測量與監測費用。



圖三十一、高速鐵路頻率偏移率監測工具示意圖

另外，監測各列列車不同節車廂之轉向架加速度的差異性，此測量裝置也可用於偵測轉向架之穩定性。以德國高速鐵路事故為例，成因是車輪因金屬疲勞導致損壞，技師檢查未發現，另事故 2 個月前工作人員就有反應有不正常的晃動，而在德國慕尼黑機車維修廠，工程師僅以手電筒檢查缺口，無法偵測出細微裂縫與缺口。加上駕駛未得知車輪毀壞，仍以超過時速 200 公里行駛，方釀成此事故。所以，高速鐵路可在每列列車各節車廂轉向架上設置一加速度感測器，偵測轉向架之異常，由駕駛室統一接收各節車廂之訊號，再傳回列車行控中心，成為整列列車之監控系統，適時降速或停駛。

在力學的研究中，共振會使振幅產生變化，這是一個非常需要注意的事情。而高鐵在經過不穩定地區時，加速度的大小異於一般地區，如果這個現象是因為在某些特定的條件(不穩定地區的長度、當時的車速、避震器的振盪頻率和因不穩定地區的長度與車速產生的一個頻率)發生所產生的共振，使得加速度的振幅產生變化，而因為振幅的過度變化會使得高速鐵路列車行駛的危險性升高，那就要避免共振的情形發生。

將在沉陷地區測得的實驗數據在 KBM 非線性振動理論得到的結果可以知道，在任意的不穩定地區長度  $L$ ，當車速  $v = \omega_0 L / 2\pi$  時，不穩定地區與車速產生的頻率與簡正座標頻率相同，有可能會發生主共振，當長度  $L$  為固定值時，若車速為主共振車速的一半時，則可能會產生超諧共振。

一般普遍認為，高速鐵路的行車安全只與沉陷值有關，但本研究發現行車安全除了與沉陷值有關外，更與沉陷的範圍以及當下的車速有關，有可能實際的位移會因當下車速產生共振而放大，所以，如果在已經有沉陷較嚴重的地區，共振現象就有可能成為壓垮駱駝的最後一根稻草，吾人不可不慎。

另外，從圖二十四之資料呈現方式，可以從中發現一些尋常頻譜分析無法看到的現象(如

討論第三點)，處理並分析後可以用來發現如地基異常或小範圍的異常沉陷，而這是無法從加速度或是一般的頻譜分析能夠看出來的，如討論三的現象在圖二十三的平均值頻譜中根本無法判斷。

因台灣高速鐵路系統與其他國家之高速鐵路相似，所以這種測量方法也適用於其他國家的高速鐵路，例如日本的新幹線、法國的 TGV 及中國高速鐵路等。

## 捌、參考資料及文獻

### 相關文獻

- [1] 吳東軒 2006 精密水準測量誤差分析：轉點沉陷效應之探討 國立成功大學測量及空間資訊學系碩士論文
- [2] Quake Catcher Network Live : <http://qcn.stanford.edu/>
- [3] Using an Accelerometer for Inclination Sensing :  
[http://www.analog.com/static/imported-files/application\\_notes/AN-1057.pdf](http://www.analog.com/static/imported-files/application_notes/AN-1057.pdf)

### 相關書籍

1. 徐家鸞 (1986) 經典力學 台北市：正中書局
2. Landau L.D. & Lifschitz (1976) *E.M.- Vol. 1 - Mechanics 3rd edition* Translated from Russian by J. B.SKYES and J.S. BELL Pergamon Press

## 【評語】 040115

作者以筆電加速系統測量地層下陷，經由模型分析，可精確量出小於 1 公分的高度變化。研究題材頗具創意，方法嚴謹，結果具實用性，為本屆科展最出色作品之一。計算結果與實驗數據之比較，如果有更多組數據比較將更具說服力。