

中華民國第 54 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

第三名

040109

Pride of 3D:Renaissance on Scratches

—觀察並探討以塑膠片上之弧形刮痕建構 3D 全
像圖之可行性

學校名稱：高雄市立高雄高級中學

作者： 高二 胡寶鈺 高二 謝承翰 高二 謝仲鈞	指導老師： 曾柏文 盧政良
-----------------------------------	---------------------

關鍵詞：全像圖、反射定律、成像公式

摘要

本文主要在探討以刮痕組合而成的鏡面全像圖之運作機制以及其背後的物理意義，並且嘗試建立一理論數學模型以分析預測此立體影像。另外並探討實驗中的多種變因——入射光、反射光與平面的各種夾角，距離，及半徑——之間的關係。待做完不少的實驗之後，我們發現實驗結果竟與我們的理論模型相當的吻合，此外也說明了立體圖形成像之位置。除了以上討論的理論與實驗之契合，本文亦指出了此理論之適用範圍及限制。

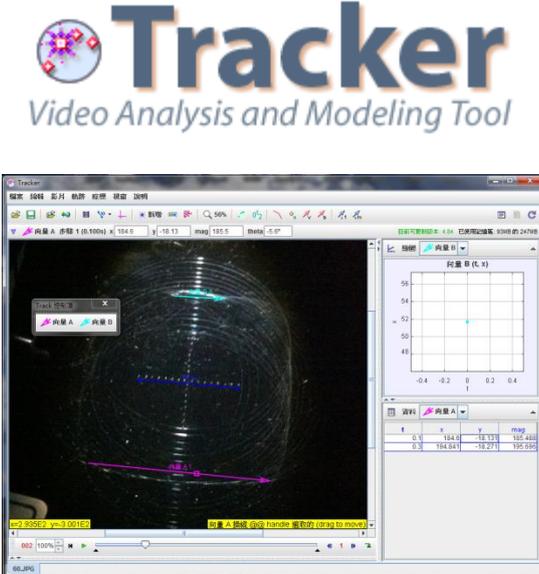
壹、 研究動機

某一次的上課，專題老師說著要給我們看看一個有趣的東西，便在網路上找到了一個叫做「Scratching hologram」的影片。影片中的人用圓規的尖銳端在塑膠片上畫出了弧形刮痕，並以特定的形式、依著中間的小圖、畫了很多條刮痕。把完成的塑膠片放在太陽光底下並移動腳步，我們可以看到刮痕上的光點形成了當初我們畫在中間的小圖，而且有種立體感覺。「居然可以在平面中看見立體！」這讓我們對這種特殊的影像模式起了好奇心，並開始對它展開了研究。

貳、 研究目的

- 一、探討鏡面全像圖的運作機制以及 3D 立體影像背後的物理意義
- 二、建立數學模型以理論來分析此全像圖系統
- 三、探討在改變不同變因時立體影像性質的變化
- 四、討論推導理論與實驗的相關性與適用範圍
- 五、3D 全像圖之製作與作品展示

參、 研究設備與器材

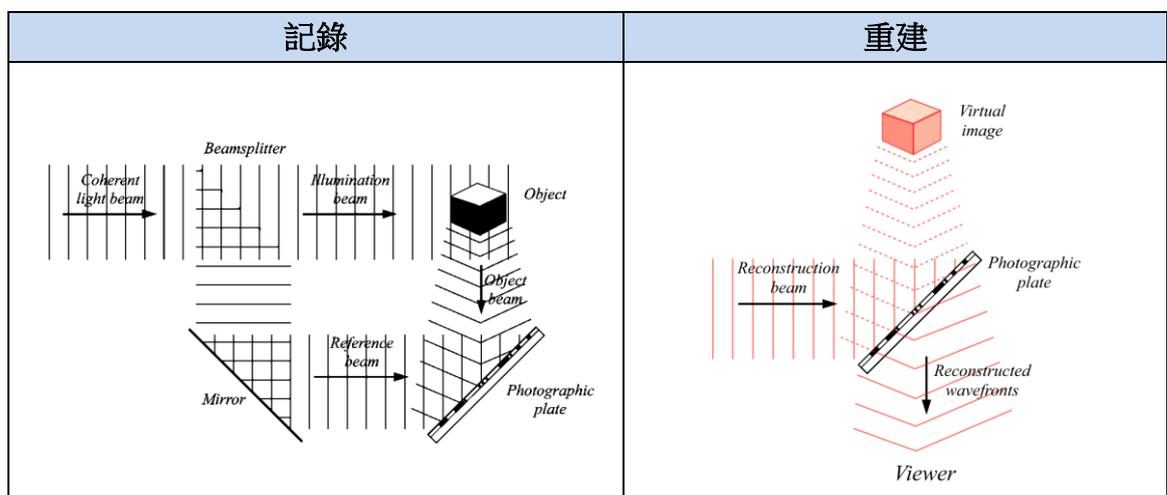
<p>黑色塑膠片</p>	<p>圓規</p>	<p>光源(手電筒)</p>
		
<p>相機</p>	<p>大型量角器(腳踏車框)</p>	<p>USB 顯微鏡</p>
		
<p>分析軟體 Tracker</p>	<p>數學工具 Wolfram alpha</p>	<p>製圖工具 Excel</p>
		

肆、 研究過程與方法

一、 全像圖概論

(一) 成像原理

全像術(holography)又稱全像投影，是一種記錄物體反射(透射)光波中全部信息，包括電磁波的**振幅、相位等**的照相技術，當心的入射光通過記錄膠片後可將該物體的影像完全重建。而若是從不同的方位和角度觀察照片，可以看到被拍攝的物體各種不同的角度，因此人們看到的像會產生**立體**的感覺。



以干涉原理為基礎的全像圖的技術是由英國匈牙利裔物理學家丹尼斯·蓋伯(Gábor Dénes)於西元 1947 年所發明，他在研究如何增強電子顯微鏡性能時偶然發現這項技術，之後就一直應用於電子顯微的領域中。



第一張光學全像圖是在 1962 年由蘇聯科學家尤里·丹尼蘇克(Yuri N. Denisyuk)拍攝的三角錐，同時，美國密西根大學雷達實驗室的研究生艾米特·利思(Emmett Leith)和尤里斯·烏帕尼克斯(Juris Upatnieks)也發明了同樣的技術。



(二) 全像術可以分成以下幾類：

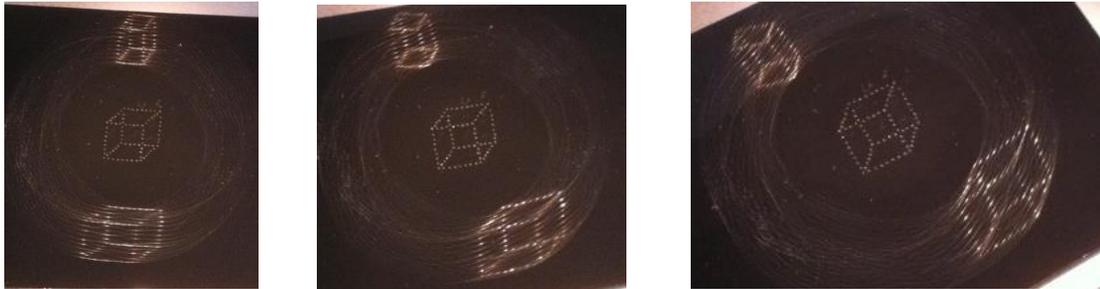
1. **透射全像圖**：將雷射通過全像底片照射，然後從另一個方向來觀察重建的圖像，現在已經廣泛的應用於信用卡安全防偽和產品包裝等領域。
2. **反射全像圖**：係將光源從和觀察者相同的方向照射底片，藉由反射來重建彩色的圖像，同樣是利用干涉原理產生立體的像。
3. **鏡面全像圖**：以刻劃在二維表面上的圖像來產生三維圖像技術，以控制反射光或折射光的方式來構造全像圖，值得一提的是有別於前面兩種全像術，鏡面全像圖並沒有使用記錄圖像訊息的底片，我們所看到的像其實是**幾何光學**的結果，與光的干涉無關。而此種全像圖也正是本研究中主要探討的一類全像術。



二、 研究過程

「鏡面全像圖」的名稱是由威廉•比提(William Beatty)於 1990 年代推廣用圓規製造刮痕與 3D 圖像時創造出的。本篇研究將使用比提的方法，用圓規在黑色塑膠片上刮出圓形的軌跡，做出"反射鏡面全像圖"，深入探討所看到之像的立體效果和其他性質。

以下是我們先以立方體為主圖案刮出的全像圖，可看出立體效果



在研讀過許多論文之後，可發現鏡面全像圖所程之像的確是以幾何光學來討論，且光路途中所標明之反射點皆位於刮痕內，另外論文亦指出刮痕的截面與用來製造刮痕的工具(刮針)形狀相同，而本次實驗中我們為了使討論方便，採用鈍端刮針，也就是尖端趨近曲率半徑極小的圓形。

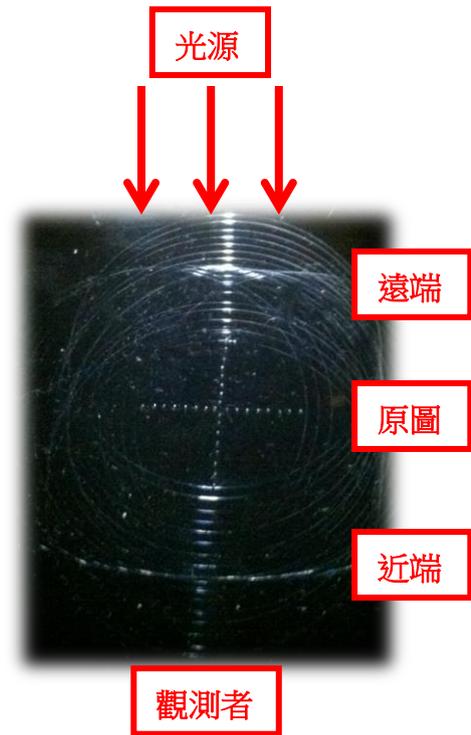
為了確認刮痕截面是否與刮針截面之半圓一致，以及刮痕表面是否足夠光滑以達到反射效果，我們使用 USB 顯微鏡拍攝刮痕作為先導實驗：

【先導實驗】

理論的範例截面模型	USB 顯微鏡擷取照片
圓形刮針	平滑刮痕

(一)接下來我們以二分之一圓周的截面為基礎進行討論，逐步引入**反射定律**和**成像公式**等概念，推導出一系列的**數學模型**來解釋觀察者所看到的像在不同條件下的變化。

(二)為了往後分析方便，選定統一的「**基底圖片**」為**十字型**，如右圖，並定義「**近端**」成像與「**遠端**」成像。



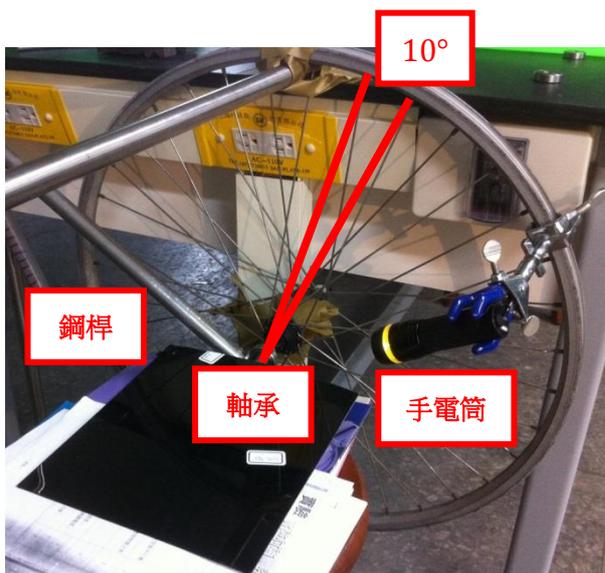
(三)對於各變因所進行的實驗基本上皆採取相同的模式：

1. 繪製欲觀測之圖形，並用圓規在黑色塑膠片上畫出圓形刻痕
2. 選取手電筒為光源(平行光)
3. 依實驗之各項條件架設好光源、塑膠片、觀測者(相機)
4. 維持適當亮度，照相或錄影
5. 利用後續討論之幾何模型分析相片，比較理論值與實際值

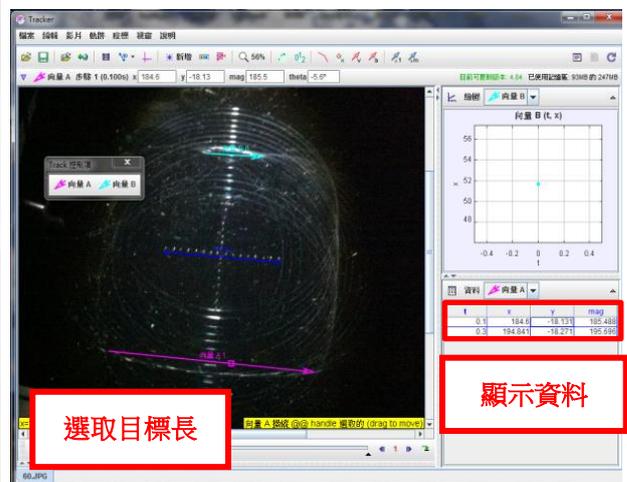
(四)控制角度的方法

將手電筒固定在輪框上，再將軸承鎖入輪胎的中心，將鋼桿一端黏上相機，另一端固定在軸承上。因為腳踏車共有 36 根幅條，每兩根之間的夾角就是 **10 度**，所以進行實驗時只需將鋼桿和手電筒調整至目標角度固定後，即可拍照取得結果，如【圖一】。

(五)我們使用 **Tracker 軟體**來分析相片，如【圖二】



【圖一】



【圖二】

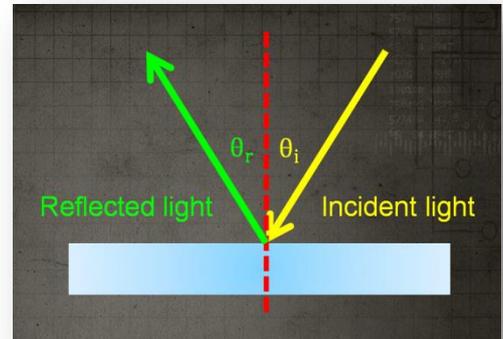
三、 理論推導

(一) 反射定律

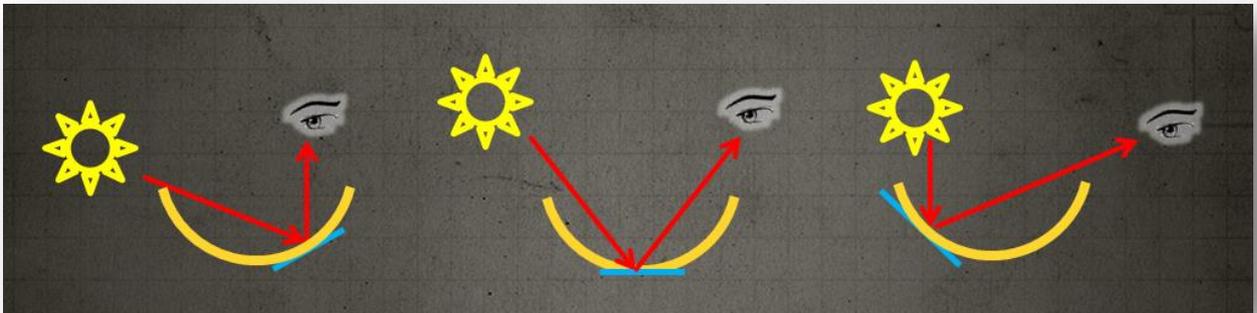
光在入射至不同物質時會產生反射與折射，而反射時遵守反射定律，如【圖三】：

1. 反射線、入射線和法線共平面
2. 反射線和入射線分居法線兩側，且**反射角等於入射角**。

即便對於塑膠片所在之平面而言入射角不一定等於反射角，但是光自刮痕反射射出必遵守反射定律，所以反射點在刮痕裡的分布會被入射角與反射角決定，如【圖四】



【圖三】



【圖四】

(二) 成像公式

1. 物距、像距和焦距之間的關係可表為 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$
2. 本實驗以平行光作為光源，故可將物距 p 視為無限大。而當曲面鏡近似於球面鏡(如刮痕)時， $q = f = \frac{r}{2}$

(三) 光路圖

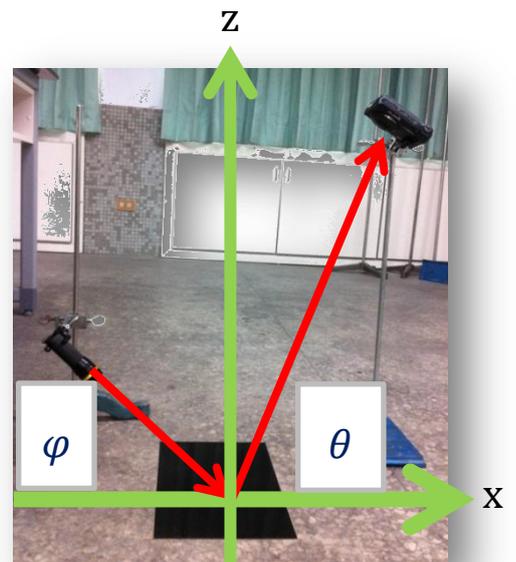
1. 定義角度

如右【圖五】

反射光與水平面之夾角為 θ

入射光與水平面之夾角為 φ

光源-反射面-觀測者所在之平面為 $x-z$ 平面

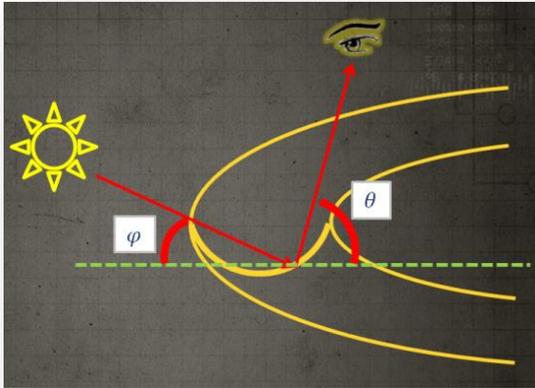


【圖五】

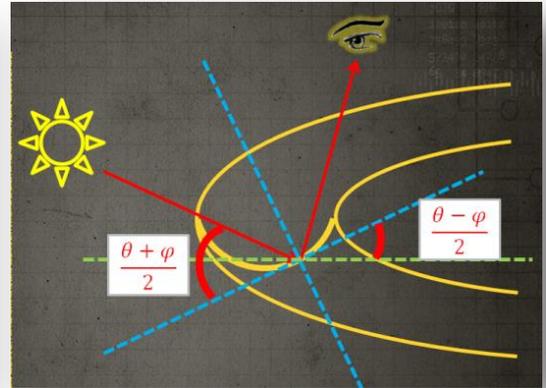
2. 向量分解

因為光反射時**遵守反射定律**，故反射點係由入射光和反射光來決定，換言之，**由 θ, φ 決定**。首先考慮遠端所成之像，不失一般性，假設 $\theta > \varphi$ 。

將入射光與反射光沿反射點之切線與法線重新定義角度，如【圖六】【圖七】



【圖六】

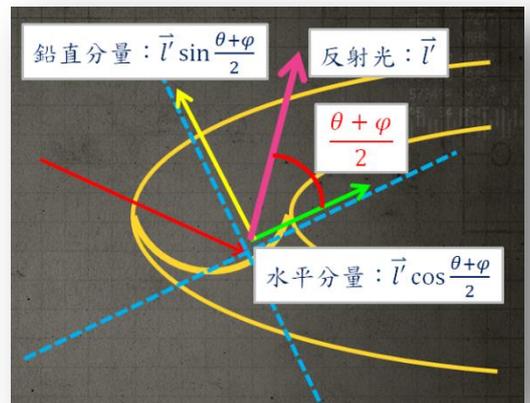


【圖七】

由上圖可知，入射光、反射光與反射面切線的夾角均為 $\frac{\theta+\varphi}{2}$ ，且新水平面與原水平面夾角為 $\frac{\theta-\varphi}{2}$ 。將反射光沿新坐標系作

向量分解，得到鉛直分量 $= \vec{l}' \sin \frac{\theta+\varphi}{2}$ ，

水平分量 $= \vec{l}' \cos \frac{\theta+\varphi}{2}$ ，如【圖八】

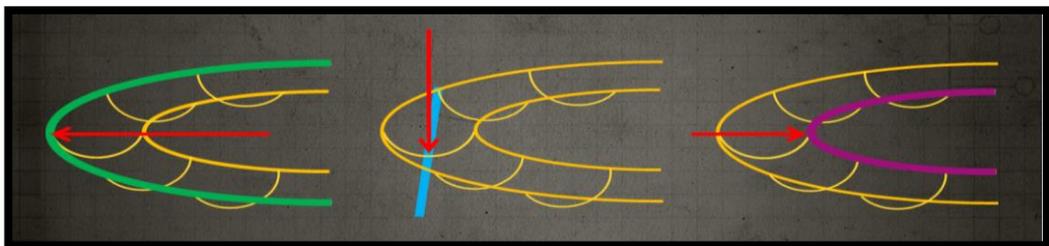


【圖八】

3. 成像過程

由成像公式可知，光垂直於反射面的分量照射於曲面鏡時會因為發散或匯聚的效果而成像，且在反射範圍很小、並近似反射面為球面鏡時，像距可表為 $q = \frac{r}{2}$

但其實所謂的曲率半徑 r 是會隨著反射點而改變的，如【圖九】



【圖九】以三個不同反射點為例，**綠色：凹面鏡**，**藍色：平面鏡**，**紫色：凸面鏡**。不同反射方向的確會有不同的曲率半徑。

為了求得真正的**等效曲率半徑** r_{eq} ，我們以原始刮痕的半徑為基礎建構一個函數，

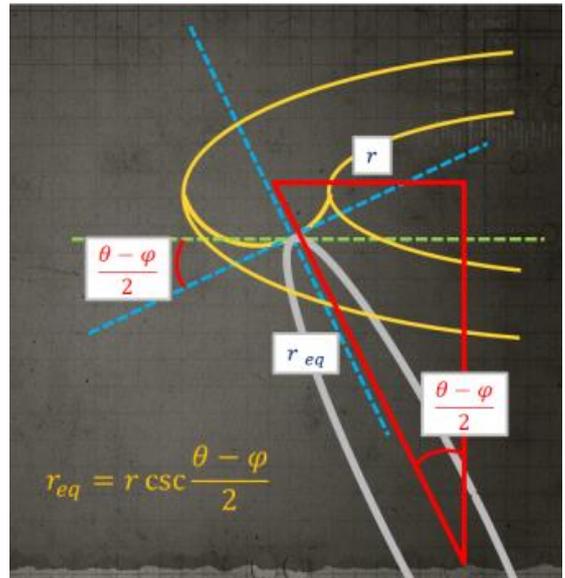
使得函數值在反射點偏移角度 $\frac{\theta-\varphi}{2} = 0$

時趨近**無限大**， $\frac{\theta-\varphi}{2} = \pm 90^\circ$ 時為 ± 1 。

而從【圖十】中亦可得知，等效曲率半徑 r_{eq} 和原本刮痕的半徑 r 形成一個直角三角形，經過角度代換後，**等效**

曲率半徑： $r_{eq} = r \csc \frac{\theta-\varphi}{2}$

符合先前對函數值所作之預測。



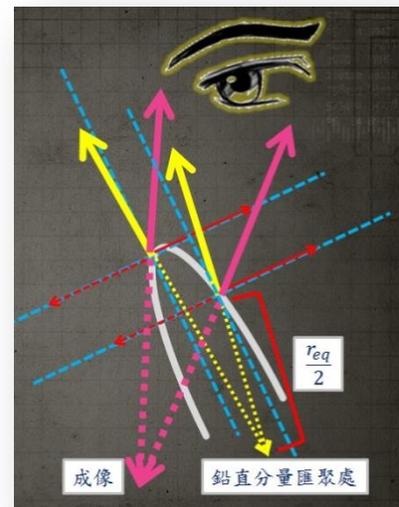
【圖十】

4. 計算像高

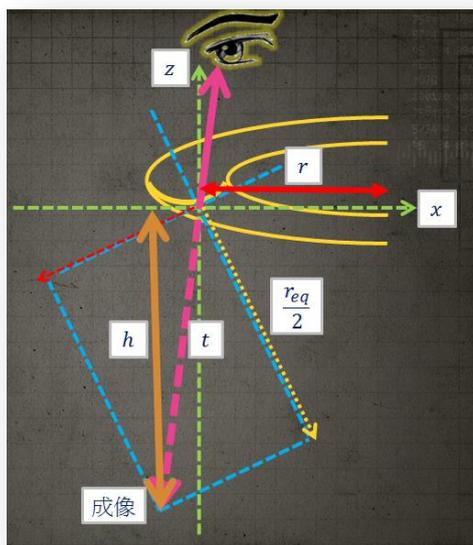
利用成像公式可得光之**鉛直分量**(或延伸

線)匯聚於 $\frac{r_{eq}}{2}$ 處，但真正的成像位置則位於

【圖十一】中紫色線條(真正光走的路線)之延伸線匯聚之處。



【圖十一】



【圖十二】

如【圖十二】，定義：

像高為**成像點到原水平面的距離**

橘色：像高 h

紫色：反射光延伸線 t

黃色：鉛直分量長度 $\frac{r_{eq}}{2}$

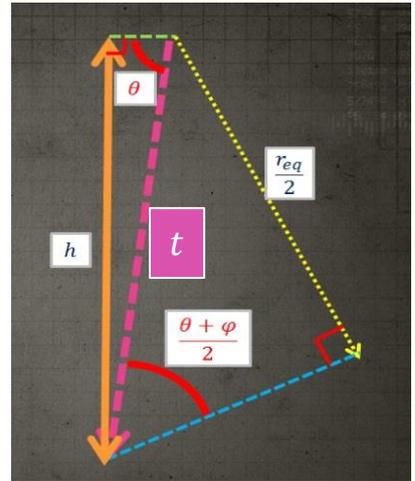
公式推導，如【圖十三】：

$$h = t \sin \theta$$

將 t 以 r_{eq} 表示 $h = r_{eq} \csc \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \theta$

將 r_{eq} 以 r 表示 $h = r \csc \frac{\theta - \varphi}{2} \csc \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \theta$

積化合差得 $h = r \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta}$ - 【式一】



【圖十三】

5. 其他情況

以上討論的情形為 $\theta > \varphi$ 、位於遠端的像，而其他狀況下的像高亦可用此公式來表示：

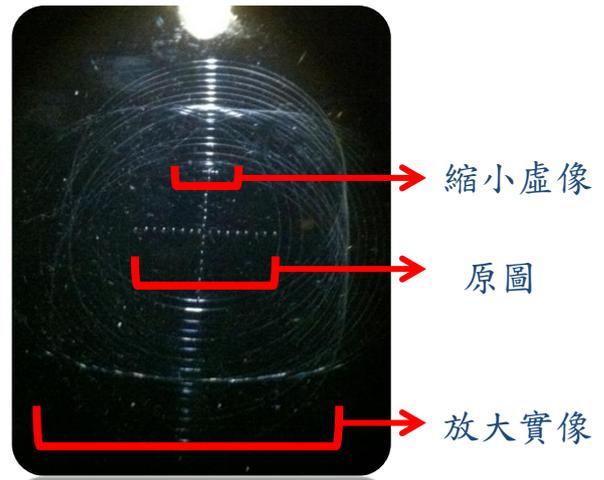
	遠端	近端
$\theta > \varphi$	<p>虛像，$h < 0$</p>	<p>實像，$h > 0$</p>
$\theta < \varphi$	<p>實像，$h > 0$</p>	<p>虛像，$h < 0$</p>

以成像公式推導出來的像高 $h = r \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta}$ 在這四種情況中依然適用。

(四) 從照片求得像高**實際值**

1. 定義**放大率**

首先定義 R 為觀測者到反射點的距離，而在實驗中我們令 $R \gg r$ 使得近端和遠端的像之 θ 與 φ 近似一樣。而從【圖十四】中可看出，在同樣條件下近端和遠端各有不同的放大率，若定義放大率= k ，則：
虛像 $k < 1$ ，實像 $k > 1$ 。



【圖十四】

2. 由放大率求像高

由於先前所述之成像皆為**單一刮痕**上的情形，而我們在實驗中真正觀察的是十數個圓形刮痕所構成的**十字形圖案**，所以匯聚後產生橫向的縮放效果是正常的，也因為如此我們才能用以下的**三角形法**求出像高的實驗值。

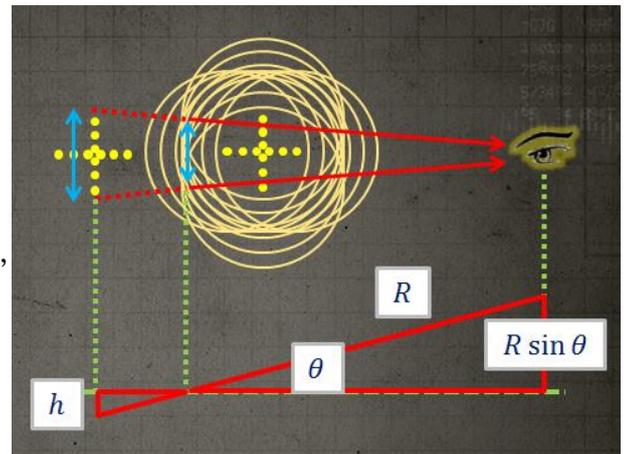
(1) 虛像

如【圖十五】

我們看到的虛像位於塑膠片下方，且規格應與原圖案相同(因為它是反射點的集合)，但是其實我們看到的"像"位在反射點與眼睛的連線上，所以虛像會**縮小**。

$$1 : k = (h + R \sin \theta) : R \sin \theta$$

$$\text{放大率} : k = \frac{R \sin \theta}{R \sin \theta + h}$$



【圖十五】

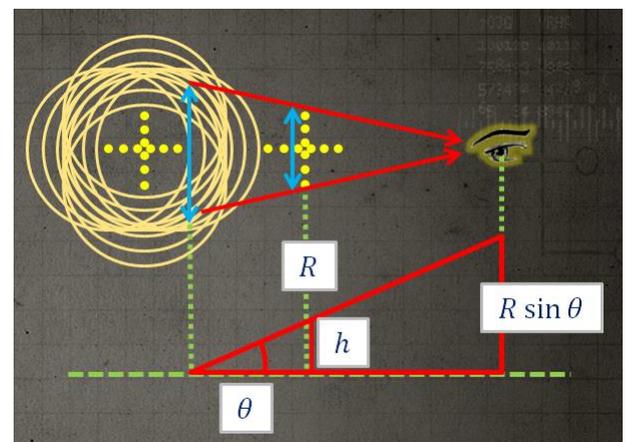
(2) 實像

如【圖十六】

與虛像雷同，我們所看到放大的像是因為實像所在的位置**較靠近**觀測者，導致反射點範圍擴大，所以實像會**放大**。

$$k : 1 = R \sin \theta : (R \sin \theta - h)$$

$$\text{放大率} : k = \frac{R \sin \theta}{R \sin \theta - h}$$



【圖十六】

由於像高 h 的正負受其性質影響，故虛像的像高應代負值：

$$\text{放大率：} k = \frac{R \sin \theta}{R \sin \theta - h} \quad - \text{【式二】}$$

$$\text{像高：} h = R \sin \theta \left(\frac{k-1}{k} \right)$$

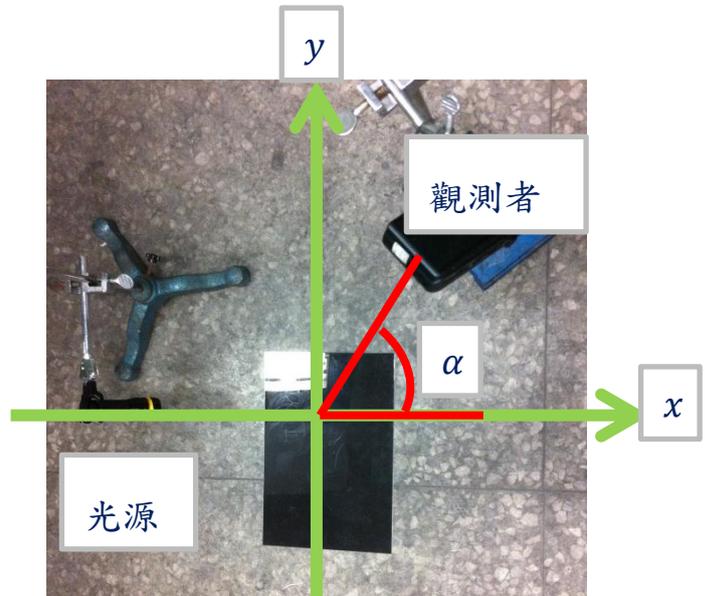
即可由照片中的放大率求得像高的實驗值。

(五) 成像位置

1. 定義角度

在同一組 θ 與 φ 中，若在 $x-y$ 平面 (平行塑膠片的平面) 上做偏轉，則定義在該平面上的旋轉角度為 α ，如【圖十七】。

同時我們所看到像也會因為新增了 α 而產生偏轉，在此我們定義像的偏轉角度為 β 。



【圖十七】

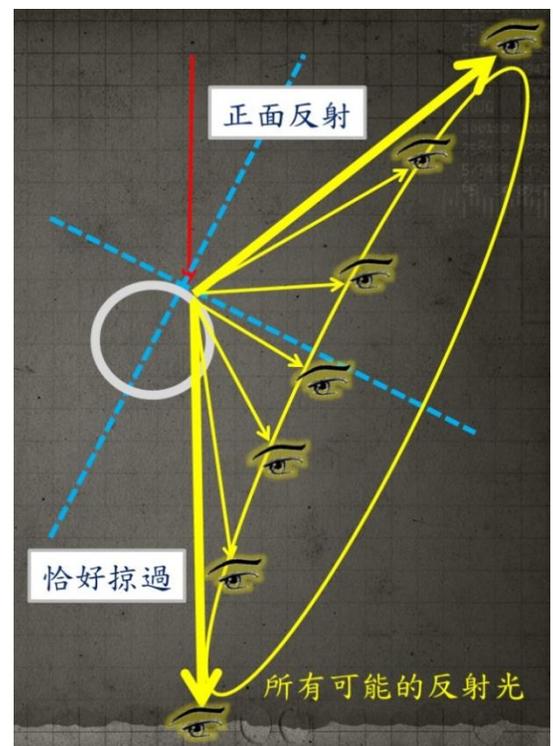
2. 反射路徑

由於入射光為單一方向的平行光，所以如果反射位置發生改變，就代表光線並非"正面"射入刮痕，在這種情況下若要探討光的路徑，我們可以將所有可能的反射光之方向向量標示出來，如【圖十八】 (考慮光在 $x-y$ 平面上的投影)

反射光必遵守反射定率，特別地：

- 正面反射時：投影至 $x-y$ 平面上的入射角等於反射角。
- 恰好掠過時：等於沒有碰到反射面，光線直進， $x-y$ 平面上光徑不變。

而其他所有可能反射光的方向向量之軌跡則可構成一個圓，當然，本實驗中採用的塑膠片非透明，故此"圓"的下半部反射光無效。

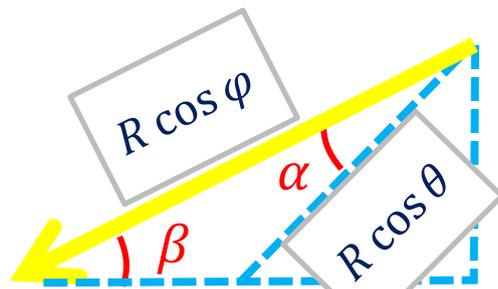


【圖十八】

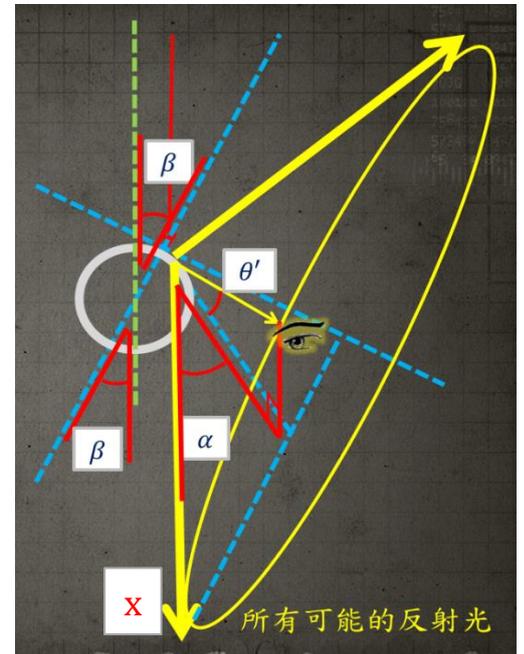
3. 計算成像位置

選定圓上的一個位置，由於現在所討論的入射光僅取其水平分量，故令其反射光和水平面的夾角為 θ' ，偏轉角度為 α ，像的偏轉角度為 β ，如【圖十九】。

觀察 x 軸和反射光的水平分量所形成的三角形 (見【圖二十】)，x 軸代表的是"恰好掠過"刮痕時反射光之水平分量 $R \cos \varphi$ ，而反射光在水平面上的投影為 $R \cos \theta' = R \cos \theta$ 。



【圖二十】



【圖十九】

由正弦定理可求得 β : $\frac{\sin \beta}{R \cos \theta} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}{R \cos \varphi}$

$$\sin \beta = \sin(\alpha + \beta) \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} = \frac{\sin(\alpha - \theta + \beta) + \sin(\alpha + \theta + \beta)}{2 \cos \varphi}$$

$$\text{積化合差得: } \sin \beta = \frac{2 \cos \theta \cos \varphi \sin(\alpha + \beta)}{\cos 2\varphi + 1}$$

$$\text{將結果代入數學工具求解得: } \beta = \cos^{-1} \left(\pm \frac{\cos \alpha \left(\frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \right) - 1}{\sqrt{\left(\frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \right)^2 + 1 - 2 \cos \alpha \left(\frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \right)}} \right)$$

偏轉角度 β 可表為 θ, φ, α 的函數。

4. 理論模型

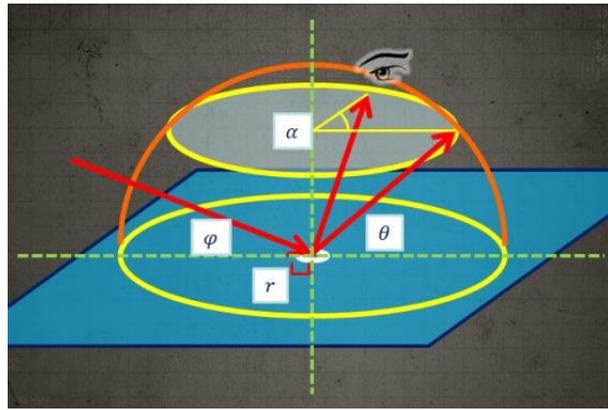
最終建構出 3D 圖形的兩個特徵：像高(h)與像的位置(β)可寫成下列四個變項 ($r, \theta, \varphi, \alpha$) 的函數：

$$\text{模型: } h = r \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta} \quad \beta = \cos^{-1} \left(\pm \frac{\cos \alpha \left(\frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \right) - 1}{\sqrt{\left(\frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \right)^2 + 1 - 2 \cos \alpha \left(\frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \right)}} \right) \quad \text{【式三】}$$

四、 操縱變因

根據推導式，如【圖二十一】：

- (一) 刮痕半徑 r
- (二) 觀測者與平面角度 θ
- (三) 光源與平面角度 φ
- (四) 觀測者偏轉角度 α



【圖二十一】

五、 應變變因

- (一) 像高 h
- (二) 像偏轉角度 β

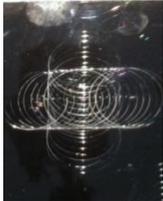
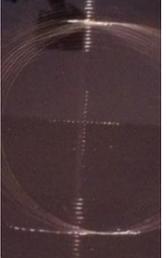
伍、 研究結果

一、 實驗一：刮痕半徑 r

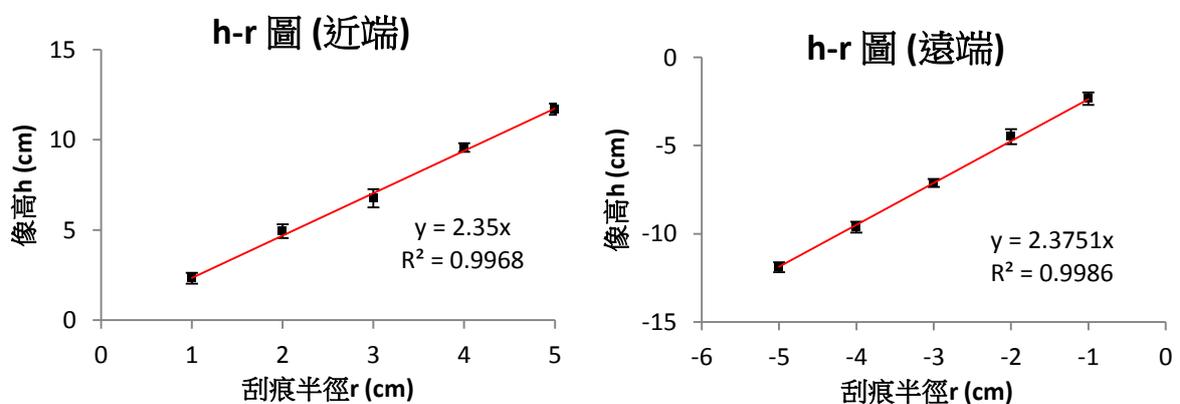
操縱變因： $r = 1 \sim 5 \text{cm}$

保持不變變因： $\theta = 60^\circ, \varphi = 30^\circ, \alpha = 0^\circ$

實驗結果：

r (cm)	1	2	3	4	5
結果					
近端像高 (cm)	2.32	4.93	6.76	9.58	11.69
遠端像高 (cm)	-2.34	-4.49	-7.12	-9.51	-11.85

以上呈現像高之數據是將用 tracker 分析相片所得之放大率帶【式一】後求出的結果，將像高 h 對刮痕半徑 r 作圖：



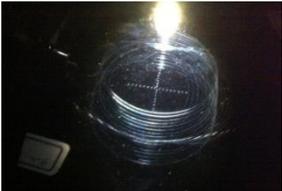
從這兩張圖我們可以看出 h 和 r 之間存在線性關係，且在近端與遠端的結果有正相關與副相關之別，而更多數據地解釋將在討論的部分呈現。

二、 實驗二：反射光與水平面夾角 θ

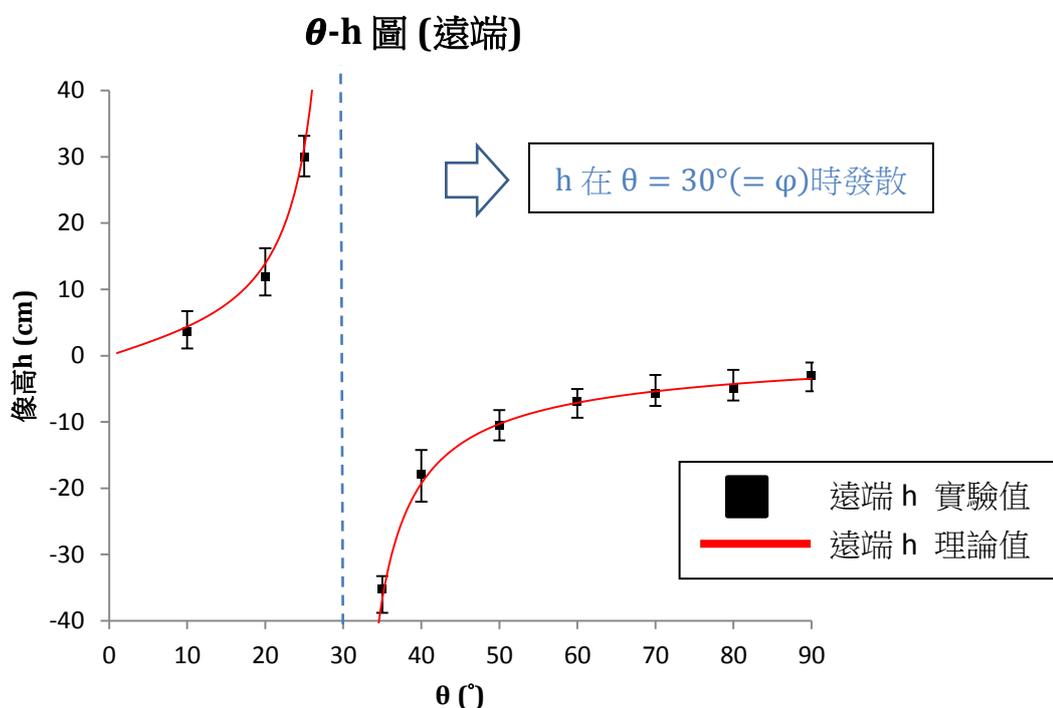
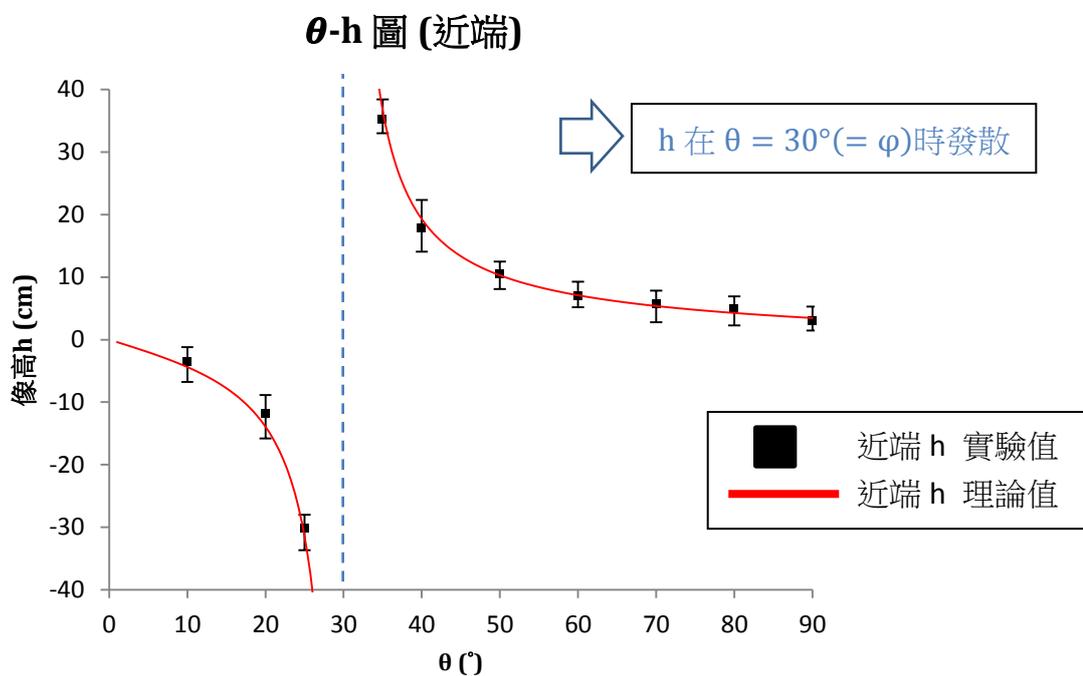
操縱變因： $\theta = 10^\circ \sim 90^\circ$

保持不變變因： $r = 3\text{cm}, \varphi = 30^\circ, \alpha = 0^\circ$

實驗結果：

θ ($^\circ$)	10	20	30
結果			
近端像高 (cm)	-3.66	-11.86	--
遠端像高 (cm)	3.57	11.78	--
θ ($^\circ$)	40	50	60
結果			
近端像高 (cm)	17.82	10.46	6.99
遠端像高 (cm)	-18.01	-10.59	-6.96
θ ($^\circ$)	70	80	90
結果			
近端像高 (cm)	5.72	4.83	3.12
遠端像高 (cm)	-5.65	-4.95	-3.04

上表顯示之像高為把實驗照中的放大率帶入【式一】後求出的值，將此像高 h 對 θ 做圖，同時分為近端與遠端來討論，並和【式二】中模擬出來的值做比較，另外，為了確定結果的趨勢，我們額外做了兩個數據點，分別為 $\theta = 25^\circ$, $\theta = 35^\circ$ 。



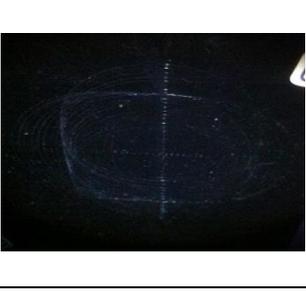
由上圖可看出 h 在 $\theta = \varphi$ 時發散，且近端像高的值約等於遠端像高的相反數，而這些現象均可由理論證明之，我們將在討論中詳述。

三、 實驗三：入射光與水平面夾角 φ

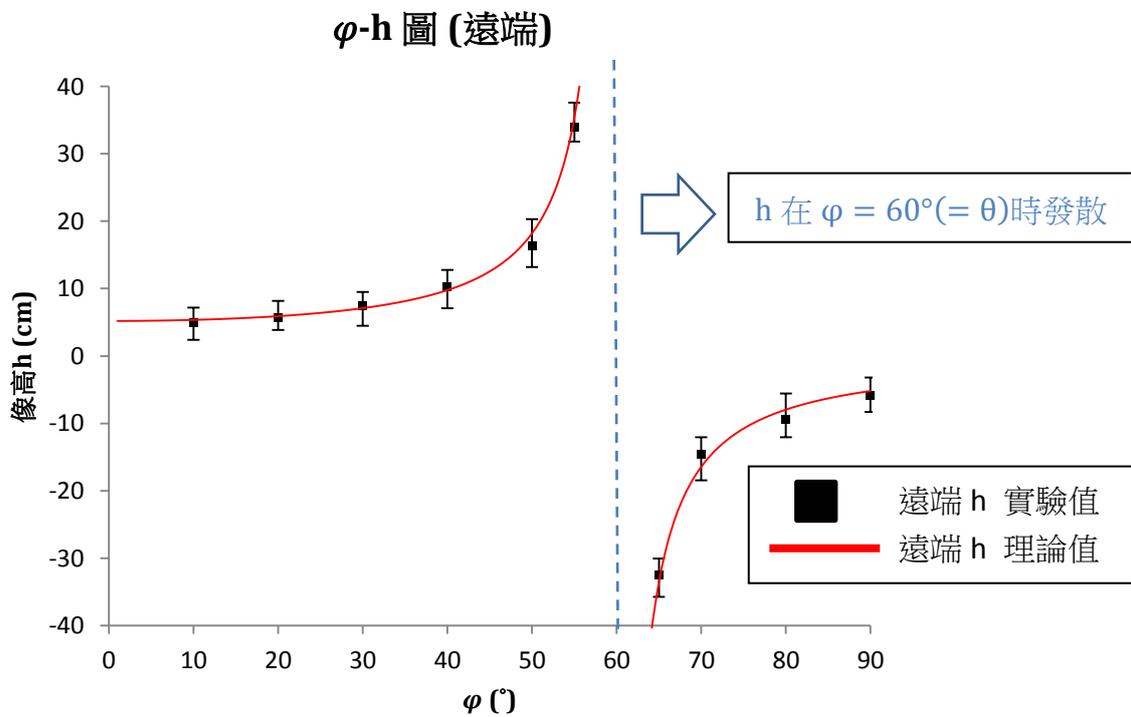
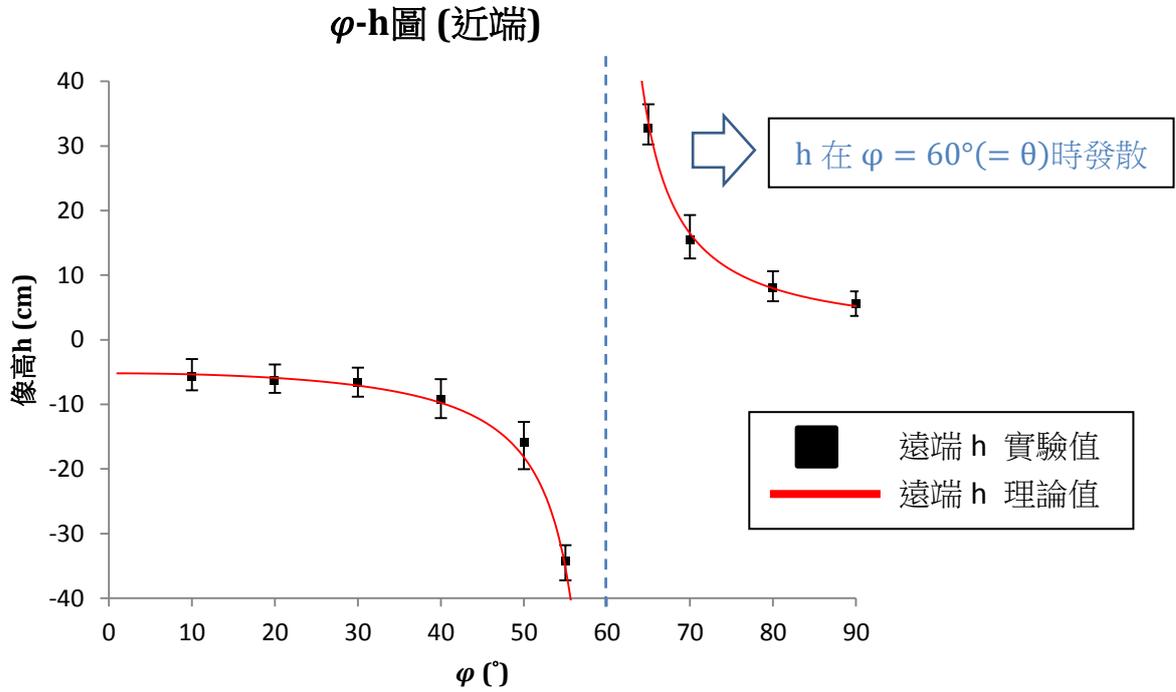
操縱變因： $\varphi = 10^\circ \sim 90^\circ$

保持不變變因： $r = 3\text{cm}, \theta = 60^\circ, \alpha = 0^\circ$

實驗結果：

φ ($^\circ$)	10	20	30
結果			
近端像高 (cm)	5.24	5.96	7.19
遠端像高 (cm)	-5.37	-6.03	-7.02
φ ($^\circ$)	40	50	60
結果			
近端像高 (cm)	10.05	16.25	--
遠端像高 (cm)	-9.88	-16.04	--
φ ($^\circ$)	70	80	90
結果			
近端像高 (cm)	-14.97	-9.12	-5.72
遠端像高 (cm)	15.18	8.95	5.58

上表中的像高一樣是把照片中的放大率帶入【式一】求出的值，將此像高 h 對 φ 做圖，並和【式二】模擬出來的值做比較，同樣的，為了確定結果是否符合理論，我們再次多做了兩個數據點，分別為 $\varphi = 55^\circ, \varphi = 65^\circ$ 。



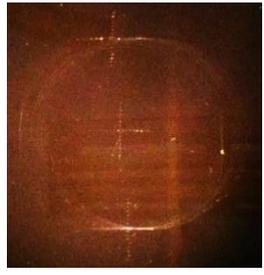
由上圖可看出 h 同樣在 $\theta = \varphi$ 時發散，且近端像高的值一樣等於負的遠端像高，而且圖表顯示實驗值與理論值相當符合，關於此現象更多的資訊一樣將在討論中詳述。

四、 實驗四：觀測者在 x-y 平面上的偏轉角度 α

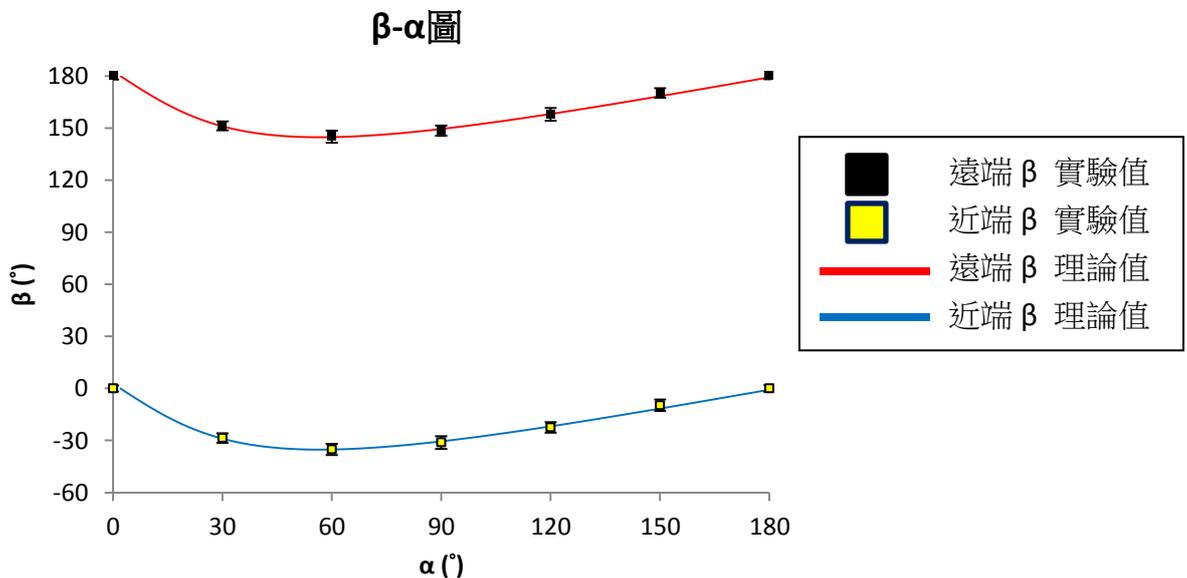
(一) 情況一： $\theta > \varphi$

操縱變因： $\alpha = 0 \sim 180^\circ$

保持不變變因： $r = 3\text{cm}, \theta = 60^\circ, \varphi = 30^\circ$

α ($^\circ$)	0	30	60	90	
結果					
β ($^\circ$) 近端	0.00	-28.62	-35.13	-31.18	
β ($^\circ$) 遠端	180.00	151.30	145.08	148.51	
α ($^\circ$)	120		150		180
結果					
β ($^\circ$) 近端	-22.46		-9.74		0.00
β ($^\circ$) 遠端	157.92		170.18		180.00

將結果所得之近端、遠端像所位移之 β 與觀測者所偏轉之角度 α 作圖，並放上【式三】所模擬出的結果與實驗值比較：



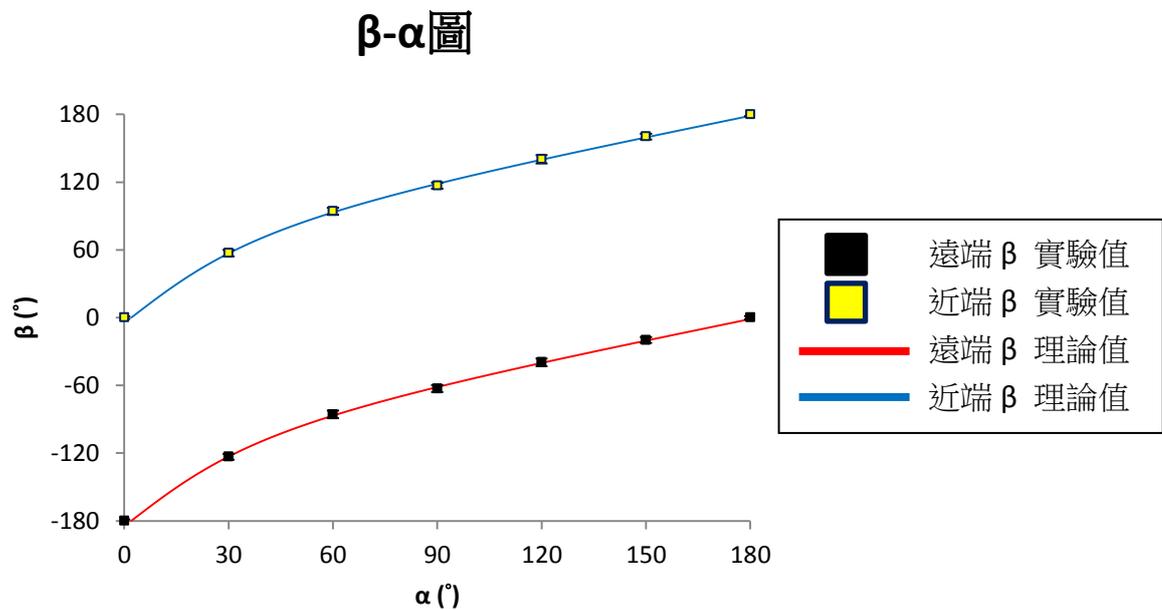
(二) 情況二： $\theta < \varphi$

操縱變因： $\alpha = 0 \sim 180^\circ$

保持不變變因： $r = 3\text{cm}, \theta = 30^\circ, \varphi = 60^\circ$

α ($^\circ$)	0	30	60	90	
結果					
β ($^\circ$) 近端	0.00	57.12	94.22	116.95	
β ($^\circ$) 遠端	-180.00	-123.25	-85.71	-62.80	
α ($^\circ$)	120		150		180
結果					
β ($^\circ$) 近端	140.26		160.38		180.00
β ($^\circ$) 遠端	-39.53		-19.85		0.00

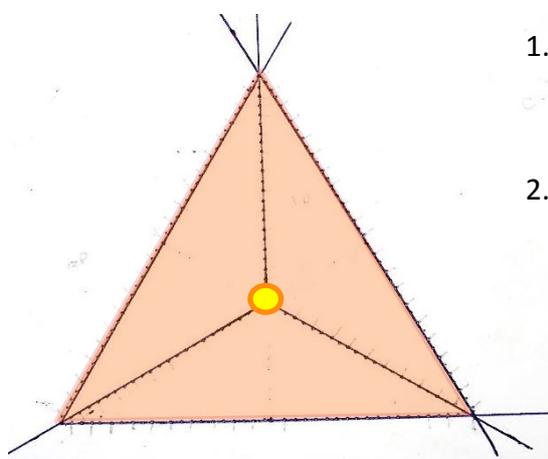
再一次將結果所得之近端、遠端像所位移之 β 與觀測者所偏轉之角度 α 作圖，放上帶入不同 θ, φ 值的【式三】所模擬出的結果與實驗值比較：



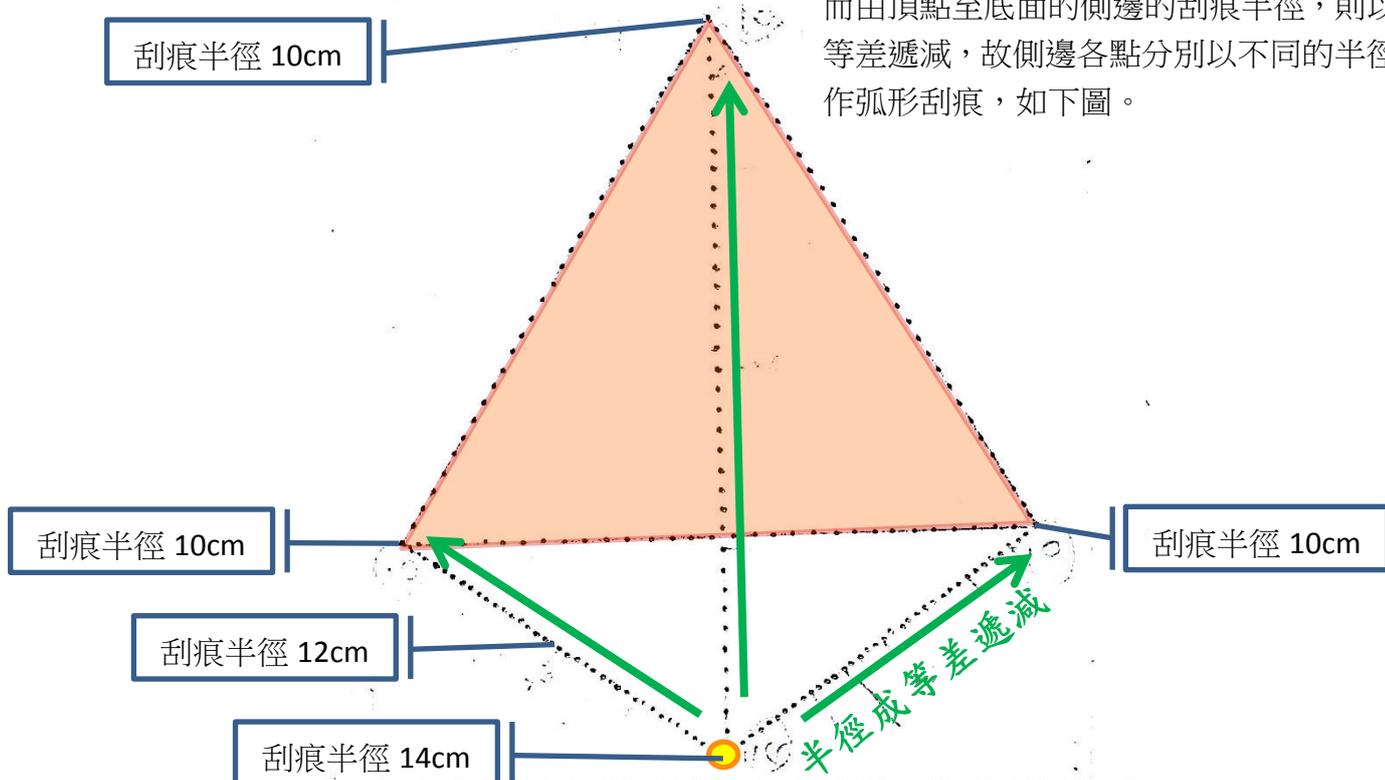
在上述兩種不同的情況中可以看到一個十分有趣的現象，當 $\theta > \varphi$ 時，當觀測者偏轉半圈到對面時，會發現像跟著偏轉到一個角度時便轉回去，也就是 β 存在極值，而若是 $\theta < \varphi$ 則情況大不相同，立體成像會隨著觀測者一起移動而不會折返，雖然 β 和 α 不成線性關係，但是當觀測者最後移動 180° 時像也恰好跑到對面，同時我們把實驗值和理論模擬出來的結果比較也相當符合，而為什麼不同的 θ, φ 會造成不同的效果，我們將再討論的部分給予解釋。

五、 實驗五：平面圖與立體圖之轉換與比較

在經過先前對於全像圖所成之像的探討後，由【式一】可知像高與刮痕半徑成正比，即便如此，以上實驗所用的十字形圖像也僅限於「有像高的平面圖型」，為了使立體效果更加明顯，我們嘗試在同一張全像圖中改變半徑造成深淺的差異，來增加 3D 效果，以下為實驗方法：



1. 如左圖，圖形為一正四面體之俯視圖。紅色三角形為正四面體底面，而黃點為正四面體之最高頂點。
2. 經公式轉換後，我們得到如下圖形。再以各點為圓心，分別依各點不同半徑作弧形刮痕(半徑數值如下)，得下頁表格照片。



【圖片說明】

紅色三角形為底面，刮痕半徑皆為 10cm；而由頂點至底面的側邊的刮痕半徑，則以等差遞減，故側邊各點分別以不同的半徑作弧形刮痕，如下圖。

另外這樣的全像圖在人移動的時候，也就是 α 不為零，將更能看出深淺的差異，理由在於不同半徑的刮痕在改變水平角度的時候所對應到的 β 會有所不同，其修正項如下：

$$\alpha' = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \frac{\Delta r}{R}} \right)$$

其中， Δr 為與標準刮痕的半徑差， R 為觀測者到塑膠片的距離，也就是說對於不同半徑的刮痕，其成像位置移動的方程式的參數 α 不一樣，才會造成像的轉動。

另外，我們將座標、角度等初始條件帶入軟體中畫出 3D 模擬圖與真實情況比較，結果如下：

α	0°	20°	40°	60°
實際照片				
理論圖				

為了重複確認電腦模擬的方式是否準確，我們算出 3D 圖像公式的反函數，並將光點圖形代回求出原始的針尖位置，結果如下：

全像圖結果	詳細資料		模擬圖	真實草稿
	R (cm)	30		
	θ (°)	30		
	φ (°)	90		
	α (°)	0		
	R (cm)	30		
	θ (°)	30		
	φ (°)	90		
	α (°)	30		

換句話說，今後只要利用這個反函數，就可以先建構出我們想要看到的圖形，在換算成一開始的圓規位置，這樣一來不只驗證了公式的正確性，更提供了更簡便的全像圖繪製方法。

陸、 討論

一、 像的物理意義

(一) 確定像的來源

在理論推導的時候我們以成像公式和等效面鏡來解釋這個全像圖系統，而為了確定此種解釋方法的正確性，我們以平行的刮痕來確認有無 3D 的效果。

如右圖，可發現平行刮痕的確沒有立體圖像的產生，故可確定像的來源的確是刮痕匯聚與發散光線的效果。



(二) 確定像的性質

由於虛像位的成像點位於塑膠片的下方，且不方便驗證像的性質，所以我們轉而從實像下手，確定到底光線是否會聚而產生實像。

我們採用較為特殊的屏幕法，因為普通的屏幕一來會遮住光源，二來會因為塑膠片非刮痕的部分反射其他方向的光而較難分辨是否為成像點，所以我們以相機朝反射點逼近，發現“像”在鏡頭裡的分布不斷擴大且變亮，代表光線的確有匯聚，如下圖。



另外從推導式也可以直接解釋為什麼在一圈刮痕之中會有兩個像，由於在分析時我們將刮痕的圓心視為原點，所以所謂的“近端”與“遠端”其實代表了不同正負號的 r ，

此時再帶回 $h = r \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta}$ ，即可發現在同一情況下 h 有 2 個解，分別為一正一負，

說明了兩個像的成因。

二、 刮痕半徑對像高的影響

根據推導式： $h = r \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta} \propto r$

像高應與半徑成正比，而實驗中 h 與 r 的關係約為： $h = 2.36r$

而斜率理論值為 $\frac{\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ - \cos 60^\circ} = 2.366$ ，由此可知實驗與理論相符。

三、 θ, φ 對像高的影響

(一) 現象解釋

由推導式 $h = r \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta}$ 可知，當 $r, \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta}$ 同號時， $h > 0$ 為實像；當 $r, \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta}$ 異號時， $h < 0$ 為虛像。若單只討論近端或遠端其中一個區域，顯而易見地，實像和虛像的分野便是從 $\cos \varphi < \cos \theta$ 演變為 $\cos \varphi > \cos \theta$ 的時候，也就是 φ 的值"跨過" θ 的值的時候，實、虛像易位。

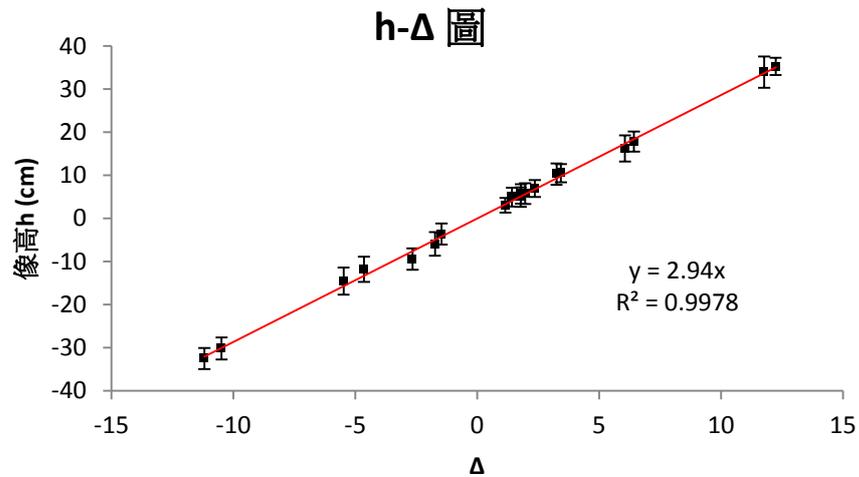
而在臨界點 $\varphi = \theta$ 時，像高的左右極限分別趨近 $\pm\infty$ ，看到的圖形將會是所有的刮痕一起發亮，無法定義像高。

(二) 結果分析

先前實驗二與實驗三中的圖表均直接拿像高對 θ, φ 作圖，此時若令 $\frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta} = \Delta$

則推導式可寫為： $h = r \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta} = r \cdot \Delta \propto \Delta$

此時將實驗二、實驗三中的數據重新整理，把像高 h 對 Δ 作圖

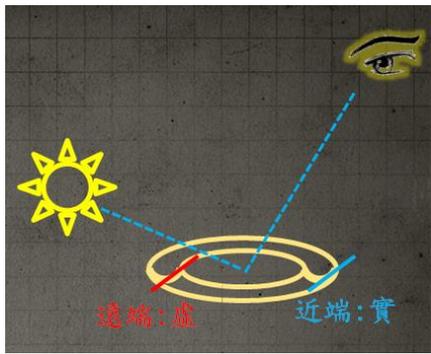
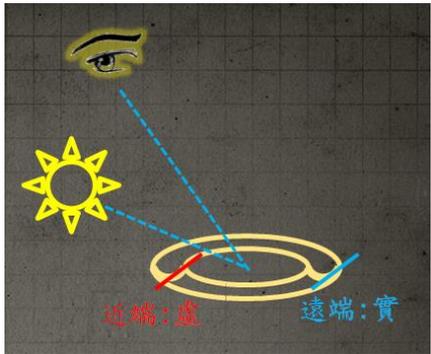
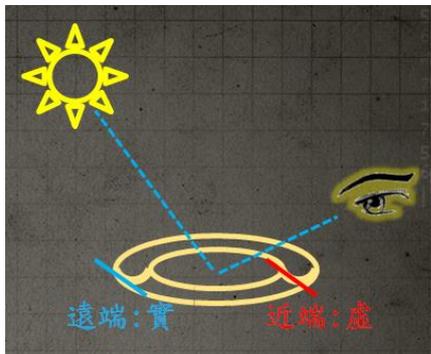
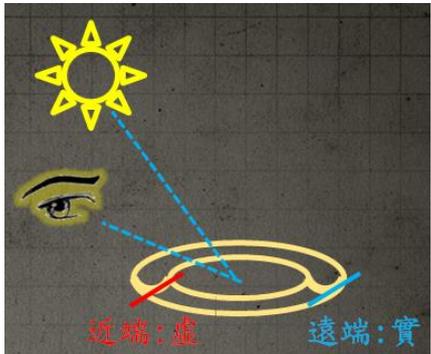


實驗中像高與 Δ 的關係為 $h = 2.94\Delta$ ，而斜率理論值為3 (初始半徑為 3cm) 由此可知實驗與理論相符。

四、 α 對 β 的影響

(一) 現象解釋

在改變偏移角度的實驗中，我們可以發現從 $\alpha = 0^\circ$ 轉到 $\alpha = 180^\circ$ 的過程中， $\theta > \varphi$ 和 $\theta < \varphi$ 的情況相差甚遠，而此結果主要是受到像的性質所影響，因為事實上当觀測者移動時，反射點也會跟著移動，連帶影響到成像，如下表：

	移動前	移動後	結果
$\theta > \varphi$			維持原狀→ 像轉回原處
$\theta < \varphi$			交換位置→ 像轉到對面

並且由理論推導可知，在偏轉 α 時像所對應的 β 角，如果成虛像則像的位移方向跟觀測者相同(注意：非角位移方向!!)，若成實像則跟觀測者位移方向相反，所以結果的兩張數據圖中 β 的初始方向才會一個往正向、一個往負向(因為像的性質不同)。

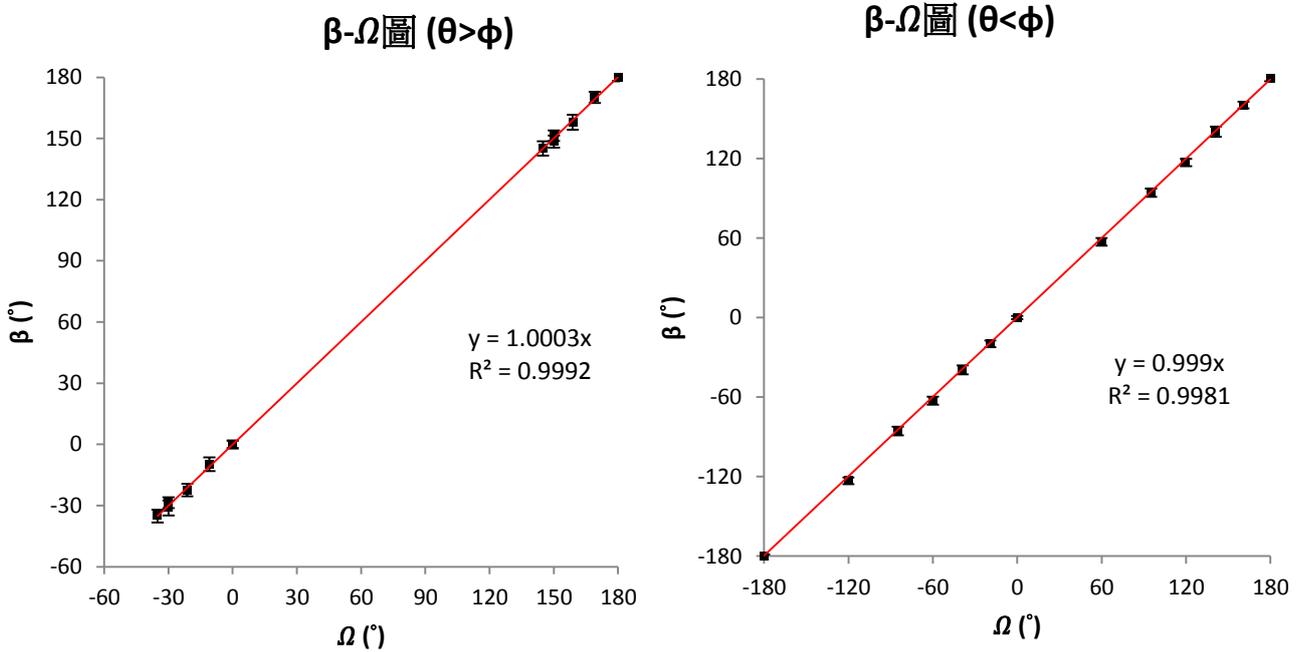
(二) 數據解釋

雖然在實驗四應變變因從像高 h 變為像的偏轉角度 β ，在數據圖中我們依然直接拿

觀測者偏轉角度 α 對 β 作圖，如果我們令 $\Omega = \cos^{-1} \left(\pm \frac{\cos \alpha \left(\frac{\cos \theta}{\cos \phi} \right) - 1}{\sqrt{\left(\frac{\cos \theta}{\cos \phi} \right)^2 + 1 - 2 \cos \alpha \left(\frac{\cos \theta}{\cos \phi} \right)}} \right)$

則偏轉角度的推導式可寫為： $\beta = \Omega$

將實驗四的數據重新整理，將像的偏轉角度 β 對 Ω 作圖：



$\beta \approx \Omega$ ，代表實驗值與理論值相符

另外兩個像有相對的運動模式在公式裡也是有跡可循的，由推導式

$\beta = \cos^{-1} \left(\pm \frac{\cos \alpha \left(\frac{\cos \theta}{\cos \phi} \right) - 1}{\sqrt{\left(\frac{\cos \theta}{\cos \phi} \right)^2 + 1 - 2 \cos \alpha \left(\frac{\cos \theta}{\cos \phi} \right)}} \right)$ 可看出 β 其實有 **4個解**，此時只要定義出 α 的方

向，即可得 β 的 **2個解**，分別為 β 與 $180^\circ + \beta$ ，說明了兩個像偏移時的運動模式。

五、 理論模型應用上的限制

(一) 刮痕：一整圈 → 一段弧

在實驗中我們皆採用“一整圈”的刮痕，所以只要看的到像，必定會在近端及遠端產生立體的像，且一定為一個實像、一個虛像，但是如果刮痕不是一個完整的圓，使得反射點不在刮痕的範圍內，我們就無法看到像。

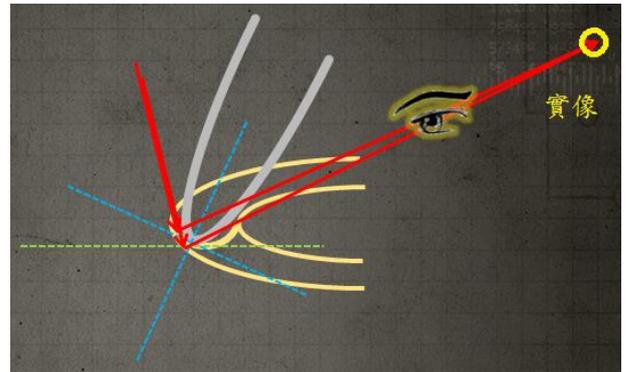
以 $\frac{1}{4}$ 圈刮痕範圍取代整圈的刮痕進行實驗：



由上可看出若刮痕範圍小於 180° ，將只能看到一個像，像的性質(實像或虛像&像高)亦由推導式 $h = r \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta}$ 決定，且觀測者在偏轉 α 之後，像的角位移若是超出刮痕範圍，觀測者就無法看到像。

(二) 觀看實像的限制

先前所有實驗所加上的條件： $R \gg r$ ，其意義除了確保近端與遠端成像條件相同外，同樣重要的是實像的成像點必須在觀測者與反射點之間，如果等效曲率半徑太大時，像距 q 就有可能超過觀測者與反射點的距離，也就是成像在觀測點之後，如【圖二十二】因此觀測者到反射點的距離 R 有其限制：



【圖二十二】

$$R \sin \theta \geq h = r \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta}$$

$$R_{min} = \frac{r}{\cos \varphi - \cos \theta}$$

而在所有實驗中所採用之 $R=100\text{cm}$ 皆大於任何情況下的 $\frac{r}{\cos \varphi - \cos \theta}$ 。

柒、 結論

一、 像的物理意義：

- (一)光在刮痕內反射，且必遵守**反射定律**。
- (二)像的來源是刮痕**匯聚與發散**光線的效果。
- (三)所成之像為一**實像**且在塑膠板上方，另一為**虛像**且在塑膠板下方；根據像高推導式亦可得出一正一負之解，說明了為何有兩成像。

二、 刮痕半徑對成像高度的影響：

刮痕半徑與成像高度成正比，在 $\theta = 60^\circ, \varphi = 30^\circ$ 時： $h = 2.36r$ ，且理論假設與實驗結果都呈現此關係。

三、 θ, φ 對像高的影響：

根據推導式： $h = r \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta} > 0$ 時為實像， $h = r \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta} < 0$ 實為虛像；換言之， $\cos \varphi < \cos \theta$ 演變為 $\cos \varphi > \cos \theta$ 時，實像與虛像易位；且實驗結果與理論值相符。

四、 α 對 β 的影響：

$$\beta = \cos^{-1} \left(\pm \frac{\cos \alpha \left(\frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \right) - 1}{\sqrt{\left(\frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \right)^2 + 1 - 2 \cos \alpha \left(\frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \right)}} \right)$$

- (一) 且定義出 α 的方向，即可得 β 的兩解： β 與 $180^\circ + \beta$ ， β 之解說明兩個像的運動模式。
- (二) 一開始的**虛像**的移動方向與觀測者**相同**，實像則**相反**。
- (三) $\theta > \varphi$ 時像會折返， $\theta < \varphi$ 時像會轉到**對面**，此現象與象的性質(實 or 虛)有關。

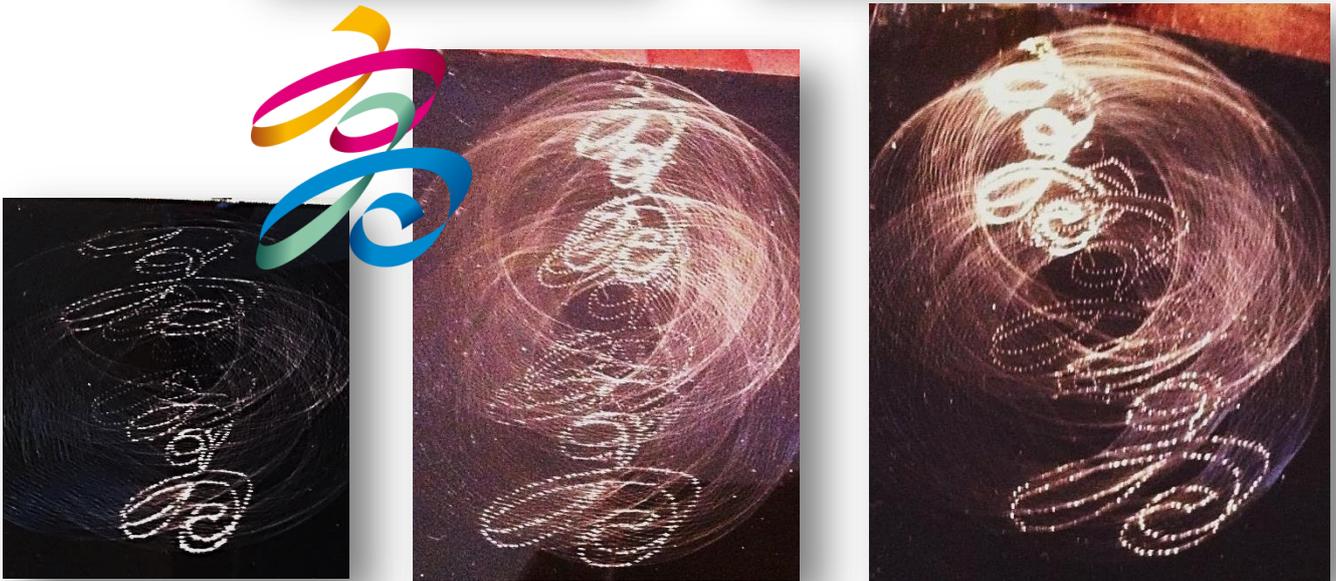
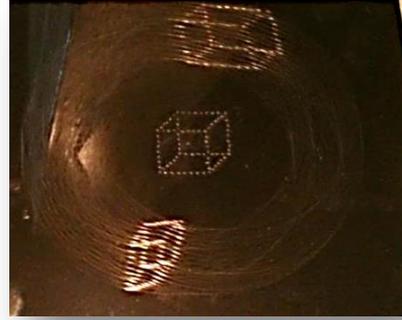
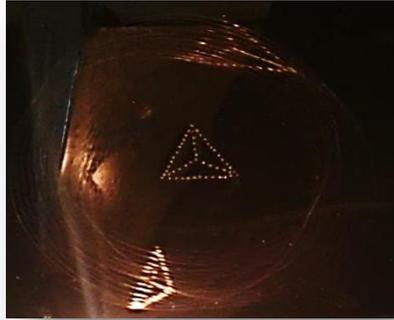
五、 理論模型應用上的限制：

- (一) 若刮痕不是一個完整的圓，使得**反射點不在刮痕的範圍內**，我們就**無法看到像**。
- (二) 若等效曲率半徑太大時，像距 q 有可能**超過觀測者與反射點的距離 R** ，因此造成觀
察者看不到成像；本實驗中 $R=100\text{cm}$ 皆 $> \frac{r}{\cos \varphi - \cos \theta}$ 以確保 q 在限制範圍內。

六、 平面圖與立體圖之轉換：

- (一)平面圖可經由函數公式轉換為立體圖；反之，立體圖可由反函數公式轉換為平面圖。
- (二)不同半徑的刮痕在改變水平角度所對應到的 β 修正項： $\alpha' = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \frac{\Delta r}{R}} \right)$ 。

捌、 作品展示



玖、 參考資料及其他

- 一、透射全像圖，取自：<http://www.flickr.com/photos/holoworld/7001172807/sizes/o/in/photostream/>
- 二、反射全像圖，取自：<http://makezine.com/2011/12/01/kit-a-day-giveaway-diy-hologram-kit/>
- 三、鏡面全像圖，取自：<http://www.instructables.com/id/Make-a-Tool-to-Draw-Scratch-Holograms!/all/?lang=pt>
- 四、SPECULAR HOLOGRAPHY BY MATT BRAND：<http://www.zintaglio.com/how.html>
- 五、M.-P. Cani and M. Slater (Guest Editors) (2004), *EUROGRAPHICS 2004*, Volume 23, Number 3
A Physically-Based Model for Rendering Realistic Scratches
- 六、Drawing Light-fields: Hand-drawn Approaches to Abrasion Holography T Duke Museum of
Jurassic Technology and Optics Divison of the Metabolic Studio
- 七、William T. Plummer and Leo R. Gardner (1992), *A mechanically generated hologram?*,
Applied Optics, Vol. 31, Issue 31, pp. 6585-6588 (1992) <http://dx.doi.org/10.1364/AO.31.006585>
- 八、William J. Beaty, *Drawing Holograms by Hand*, Box 351700, University of Washington,
Seattle WA 98195-1700
- 九、Wikipedia Holography：<http://en.wikipedia.org/wiki/Hologram>

【評語】 040109

本作品探討分析弧形刮痕全像圖之原理，分析方法有條理，對於該成像原理有良好之理解，並也提出進一步應用的想法，值得肯定鼓勵。