

中華民國第 54 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

佳作

040106

超疏水表面上水珠碰撞之探討

學校名稱：國立武陵高級中學

作者： 高二 溫皓良 高二 呂鈞瀚	指導老師： 張峰誌
-------------------------	--------------

關鍵詞：超疏水表面、水珠碰撞、表面能

摘要

此研究的主要應用在於提升表面導熱的效率，在一般的發電機中，水蒸氣重新冷卻需要藉由一導熱裝置，而在冷卻水蒸汽的過程中，水蒸氣會凝結在此導熱裝置的表面上，在表面形成一層水膜，阻礙之後熱的傳導，使導熱效率降低，我們的研究顯示當兩極小水珠在超疏水表面(接觸角 $>140^\circ$)上結合時，水珠的表面能會下降，造成多餘的表面能轉為動能，使水珠跳離表面。如果利用此現象應用在導熱裝置上，使水珠不易附著在導熱裝置上，便能提升裝置的效率。我們主要研究此水珠彈跳現象發生的條件；此外，我們將兩水珠結合之間的作用力做分析，並考慮水珠的帶電，建立整個水珠彈跳過程的模型。

壹、 前言

一、 研究動機：

前幾年，英國有位研究生拍了一段短片顯示兩水珠在疏水表面上結合時，會發生彈跳，而被這一幕所吸引的我們，決定對這個現象進行更徹底的原理探討及研究，因為水在我們的生活中扮演了重要的角色，許多生活中的現象都離不開生命萬物的源頭—水，藉由了解水的各種特性，有助於我們在各個領域有更長足的發展，不僅如此，此一現象在近幾年的研究中被認為具有改善發電機中熱傳導效率的功用。

二、 研究目的：

- (一) 探討彈跳水珠現象所發生的條件
- (二) 探討水珠結合時的受力以及能量
- (三) 探討彈跳水珠的帶電
- (四) 建立模型



圖 2-1 高速攝影機

貳、 研究設備及器材

一、 實驗設備

- (一) 高速攝影機(phantom v711；圖 2-1)
- (二) 單筒顯微鏡(型號；圖例 2-2)
- (三) CCD
- (四) 溫濕度計
- (五) 光學顯微鏡(圖 2-3)
- (六) 高壓電源供應器



圖 2-2 單筒顯微鏡以及 CCD

二、 實驗器材

- (一) 疏水表面 (接觸角 $>140^\circ$ ；圖 2-4)
- (二) 塑膠容器(圖例 2-5)
- (三) 壓克力容器(30X30X40；圖 2-6)
- (四) 銅金屬片(導熱)(10cm*8cm*0.2mm)
- (五) 銅金屬片(電極版)(20cm*16cm*0.5mm)
- (六) 燒杯
- (七) 冰塊
- (八) 鋁箔
- (九) 數位相機

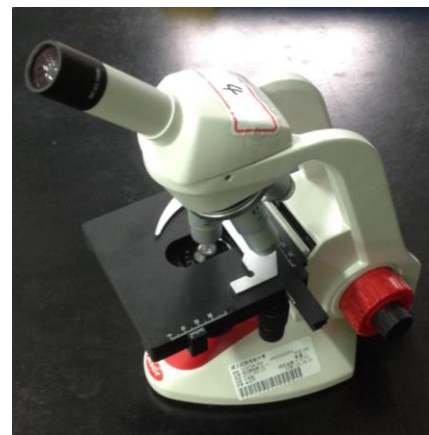


圖 2-3 光學顯微鏡

- (十) 高電壓直流電源供應器
- (十一) 木板
- (十二) 絕緣膠帶

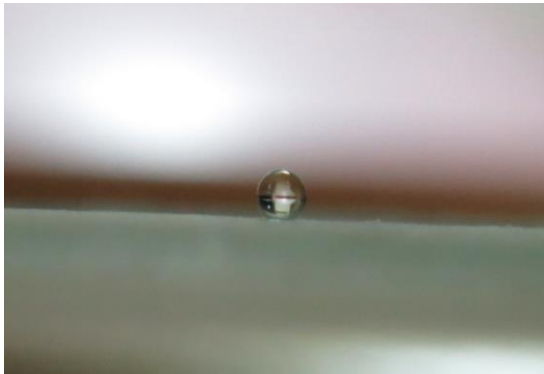


圖 2-3 超疏水表面



圖 2-4 塑膠容器



圖 2-5 壓克力容器



圖 2-6 銅金屬片

參、 研究原理

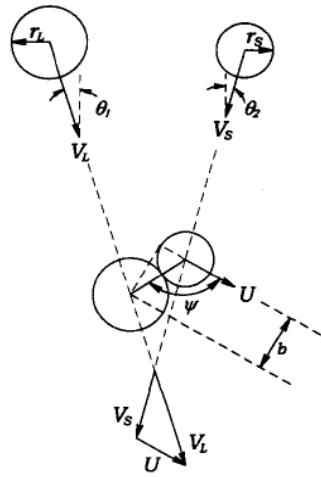
一、 定義參數

水滴碰撞的結果共有四種: bounce、coalescence、disruption、fragmentation，及結果的決定由下列三個參數決定：

(一) 韋伯數(Weber number)： $We = \rho U^2 D_s / \sigma$

(ρ 密度、 U 相對速度、 D_s 兩顆水珠中較小的直徑、 σ 表面張力)

(二) 碰撞參數 (impact parameter): $b/(r_1 + r_2)$ ， b 定義如下圖，取連心距中與相對速度垂直的分量。



(三) 碰撞能量(collisional kinetic energy) :

$$C.K.E. = \frac{1}{12} \rho \pi \left(\frac{D_L^3 D_S^3}{D_L^3 + D_S^3} \right) (V_L^2 + V_S^2)$$

二、水珠碰撞各碰撞情形介紹^[3]

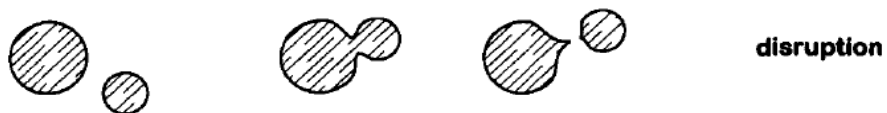
(一) Bounce: 猶如彈性碰撞，兩球碰撞後的淨結果為速度方向改變。



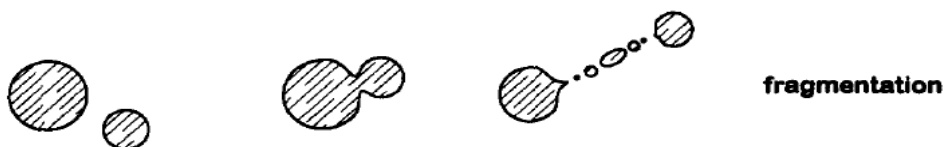
(二) Coalescence: 兩球接近的時候，碰撞後結合成一顆較大的水珠。



(三) Disruption: 其碰撞的結果與 bounce 類似，其不同的地方在於淨結果不是兩球方向改變，而是方向不變。



(四) Fragmentation: 由於碰撞能量過大，導致在分離的時候的剩餘能量使有些小水珠被牽扯出來



三、 情況分析

控制水滴碰撞結果的變因除了 Weber number 以及 impact parameter，兩球半徑的比值也是穩定與不穩定區域的廣窄的參考變因。如果將半徑比值作為變因對碰撞結果做圖，可得圖 3-1 及圖 3-2。

兩圖的差異為，圖 3-1 的半徑比值控制在 1，而圖 3-2 控制在 2。可以發現當半徑比值較大的時候，coalescence 這種碰撞結果發生的條件範圍較廣，兩圖中的實驗是以直徑 100 微米一直增加到 500 微米作為變數

若將固定半徑比值進行實驗的話，大致呈現如圖 3-3 的情況。

四種碰撞結果中的 fragmentation 一直未出現在上述所給的圖是因為發生此所需的碰撞能量必須很高(C.K.E.)，因此不特別探討。

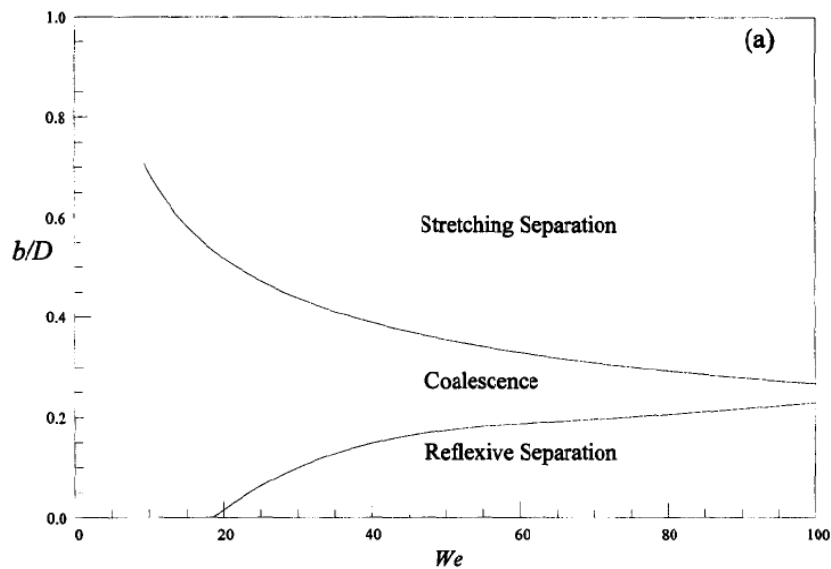


圖 3-2 韋伯數對碰撞參數作圖，半徑比值為 2

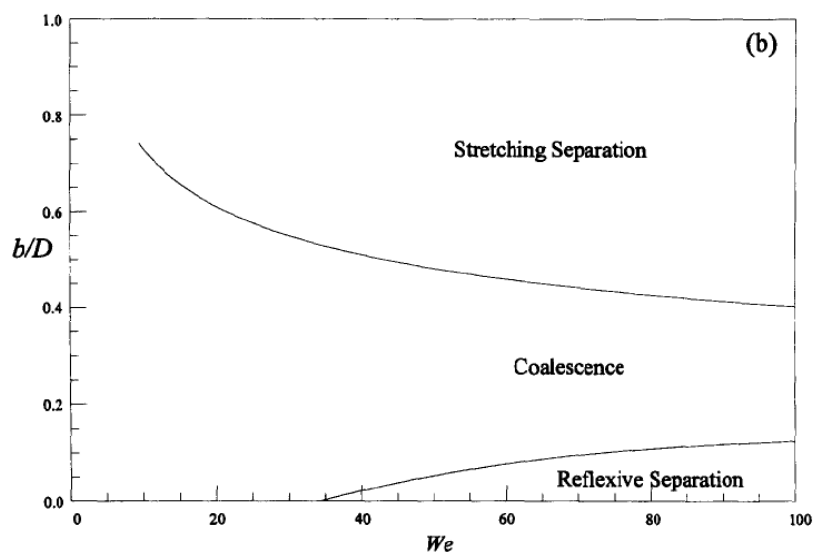


圖 3-1 韋伯數對碰撞參數作圖，半徑比值為 1

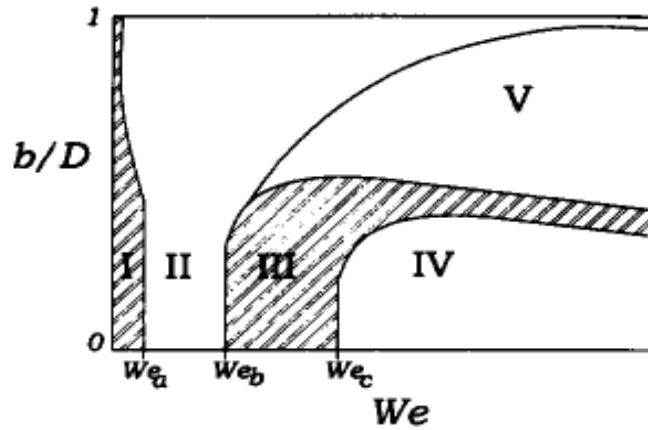


圖 3-3 圖中區域 1、3 為 coalescence，區域 2 為 bounce，區域 5、6 為 disruption

在我們的科展研究中，所探討的水滴碰撞均為 coalescence(圖 4-3 中區域 I)。為了將韋伯數控制在極小，所採用的水滴製造方法是利用低溫自然凝結在超疏水表面上，而利用自然擾動發生碰撞並只取有分析價值的數據。我們利用超疏水表面的原因是為了降低表面對水珠的影響，若不是凝結在超疏水表面上，水珠碰撞結合且彈跳的現象有可能很難發生甚至根本無法觀測。

四、原理推導

當兩水滴由兩獨立個體結合而成一大水滴後，由於水分子本身表面張力的結果，在計算兩水滴的表面位能時會有差額能量。我們的研究便是要探討這所謂差額能量在結合後是由甚麼形式釋放出來。首先我們假設在結合前兩水珠的半徑各為 R_1 以及 R_2 ，水的表面張力為 σ ，並且在結合前兩水珠幾乎為靜止，在受到外界極小的擾動之後結合。

$$U_s = \int dw = \int \Delta p \Delta v = \int (2\sigma / r)(4r^2 \pi) dr = 4r^2 \pi \sigma$$

$$\Delta U = 4\pi\sigma(R_1^2 + R_2^2 - R_{1+2}^2) \quad [3-1]$$

$$R_1^3 + R_2^3 = R_{1+2}^3 \text{ 代入 [3-1]}$$

$$\Delta U = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{8\pi\sigma}{m}[R_1^2 + R_2^2 - (R_1^3 + R_2^3)^{2/3}]} \quad [3-2]$$

若考慮各種不同能量形式，則結合後的彈跳速度將會低於上述理論值。因此我們假設表面位能差將有 n 種能量補齊，寫成數學式將表達成：

$$\Delta U = \sum_n f(R_1, R_2)$$

我們的目標就是盡可能地把 n 種 f 的形式找出並試著求出數學式。

肆、 研究方法

一、 疏水表面

我們將疏水噴霧噴附在載玻片上，作為水珠碰撞的環境。

二、 製造微小水珠

由於水珠碰撞必須同時滿足疏水表面的需求以及質量微小的條件，我們所採用的方法為利用冰鹽混和降低表面溫度，並觀察自然凝結的小水珠，當小水珠受到擾動便有可能產生水珠碰撞。另外我們也在疏水表面與冰鹽混合液上擺置銅片，讓冷卻均勻。後來基於環境穩定的考量，我們改用乾冰裝置在小盒子裡來冷卻表面。



圖 4-1

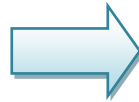


圖 4-2

三、 提高實驗環境溫度及濕度

為了能夠更快速得到自凝結而成的小水珠，我們將熱水加到燒杯內並放置在由壓克力容器構成的封閉系統中，以增加溫度及濕度。另外在燒杯上加蓋鋁箔紙則是為了減緩蒸氣擴散速度，避免在鏡頭上起霧。



圖 4-3 實驗系統的架構



圖 4-4 增加溫濕度之設計

四、 觀察、拍攝與數據取得

我們分別在水平及垂直的角度拍攝水珠彈跳，在水平的拍攝主要是定量地討論水珠彈跳的模型，垂直拍攝則是輔助水平抑或定性探討變因與結果的趨勢。

(一) 垂直拍攝

利用單筒式顯微鏡接上 ccd，我們從表面的正上方進行拍攝，記錄兩水珠結合時的大小(如圖 4-5)。

(二) 水平拍攝

為了拍攝水珠彈跳的過程，我們需要用高速攝影機對準表面，以 7500fps 以上的拍攝速度錄影(如圖 4-6)，圖中放置在我們實驗系統後方的為搭配高速攝影機的強光源，因曝光時間過短，拍攝到的畫面過暗，我們在壓克力容器四面擺上白紙反光。

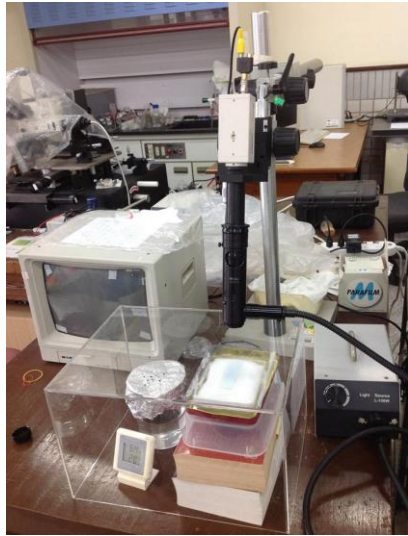


圖 4-5



圖 4-6

五、 外加電場

除了直接拍攝水珠彈跳過程，我們也外加了強電場。一方面是為了模擬將研究應用在發電時的環境，另一方面則是為了更進一步探討我們所建立的模型。

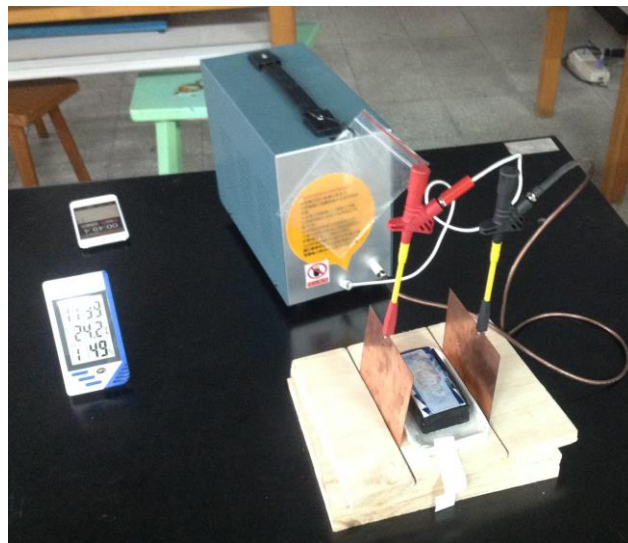


圖 4-7 外加電場實驗裝置圖

伍、 研究結果

一、 實驗一 探討彈跳水珠發生條件

(一) 實驗設計:

利用垂直式的單筒顯微鏡，拍攝兩水珠結合並消失的影片，來取得水珠彈跳時水珠的直徑大小。

(二) 實驗結果:

1. 由圖 5-1 可知彈跳的水珠直徑大小大約介於 10 μm ~100 μm 之間，代表了只有當水珠夠小時，表面能差的影響才足以使得水珠能跳離表面。
2. 考慮兩水珠 R1、R2，假設 R2 為 R1 的 α 倍，則由式子[3-1]計算可得:

$$\Rightarrow \Delta U = 4\pi\sigma R_1^2 \left[1 + \alpha^2 - (1 + \alpha^3)^{\frac{2}{3}} \right]$$

若 $\alpha \ll 1$ 時: $\Delta U \approx 0$

代表了當 R1、R2 大小相差過多時，表面能差過小而不至於使水珠彈跳。

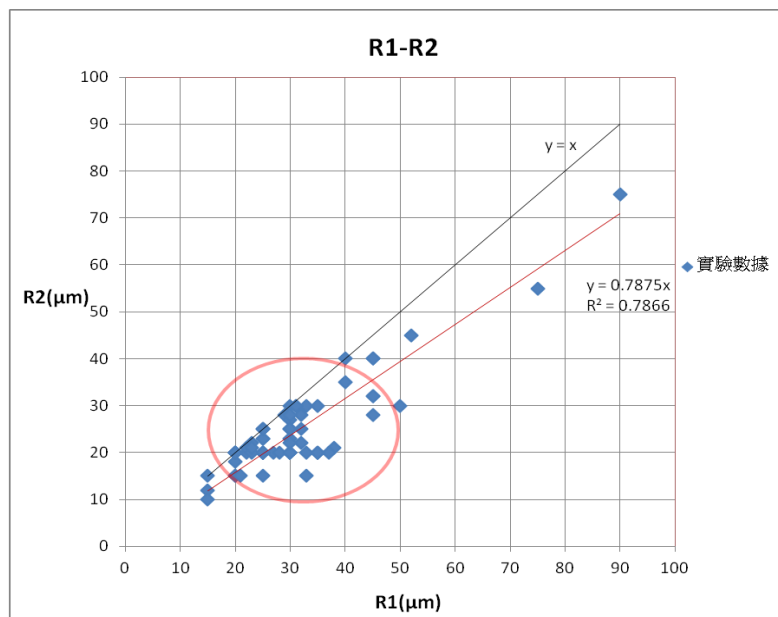


圖 5-1 R1-R2 分布圖

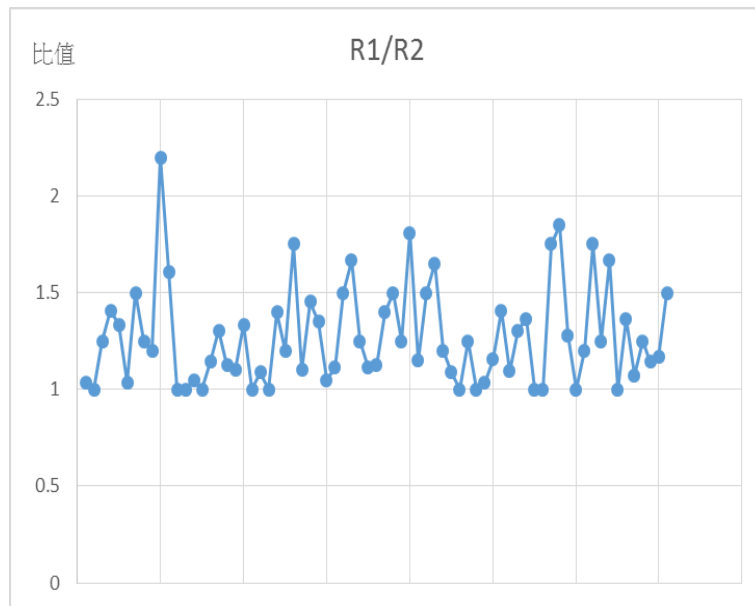


圖 5-2 各組數據 R1/R2 比值(大者為分子)

由圖 5-2 可知 R1/R2 的比值範圍約為 1~2.3，水珠大小相差不遠，且圖 5-1 中之數據與 $y=x$ 方程式比對後可發現數據相當接近比值為 1 的直線，說明了只有當 R1、R2 大小相近時，才能發生水珠彈跳的現象。

由圖 5-1 可發現彈跳的水珠多集中於 $20\mu\text{m}\sim 40\mu\text{m}$ (圖中紅色框

二、 實驗二：水珠結合彈跳模型的建立

(一) 實驗方法:

利用超高速攝影機拍攝超疏水表面上的碰撞過程，測量水滴碰撞時的各項參數，並作圖與分析，並建立起物理模型來討論之。

(二) 紀錄數據的方法:

我們將高速攝影機所拍攝的影像記錄下來，並利用軟體中的測量工具以及已知的比例尺得到相關數據(水珠直徑、碰撞初速、碰撞高度等等)。利用這些數據間的關係，我們建構出一個模型來解釋這個物理現象。

(三) 實驗數值分析

先前我們提過，理論動能就是由所有表面位能差額補齊，而表面位能差為

$$\Delta U = 4\pi\sigma(R_1^2 + R_2^2 - (R_1^3 + R_2^3)^{2/3}) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} (R_1^3 + R_2^3) \pi \rho v^2$$

為: $\Delta U - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} (R_1^3 + R_2^3) \pi \rho v_{\text{實驗}}^2$ 。根據推測，若並非所有表面位能差都由動能表現，

其中也應有摩擦損耗，但考慮該時距內摩擦的影響應不大。因此動能之外應包含如彈力位能的能量。將能量差與水珠結合後直徑做分布圖如下(圖 5-3)，由趨勢線的方程式可得到能量差是和水珠直徑平方成正比，因此吾人將能量差再對直徑平方做圖(圖 5-4)

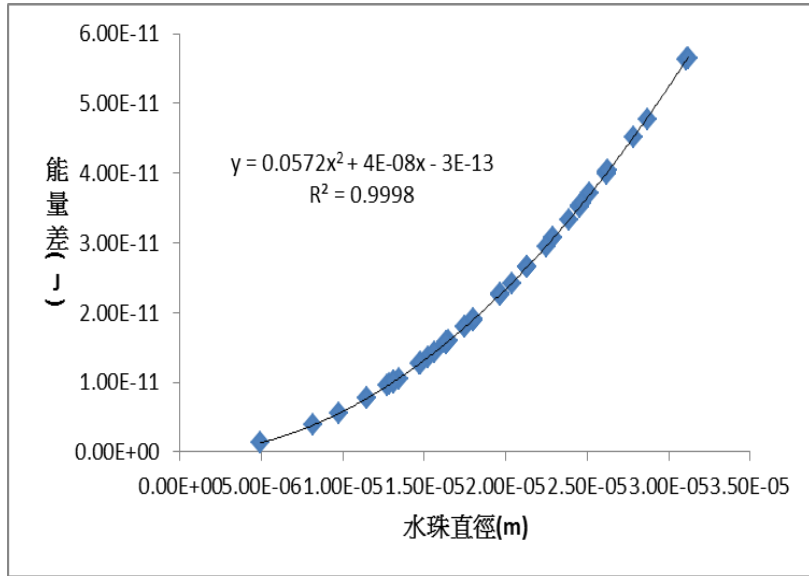


圖 5-3 能量差對水滴直徑作圖，其中能量差為(表面能-初動能)

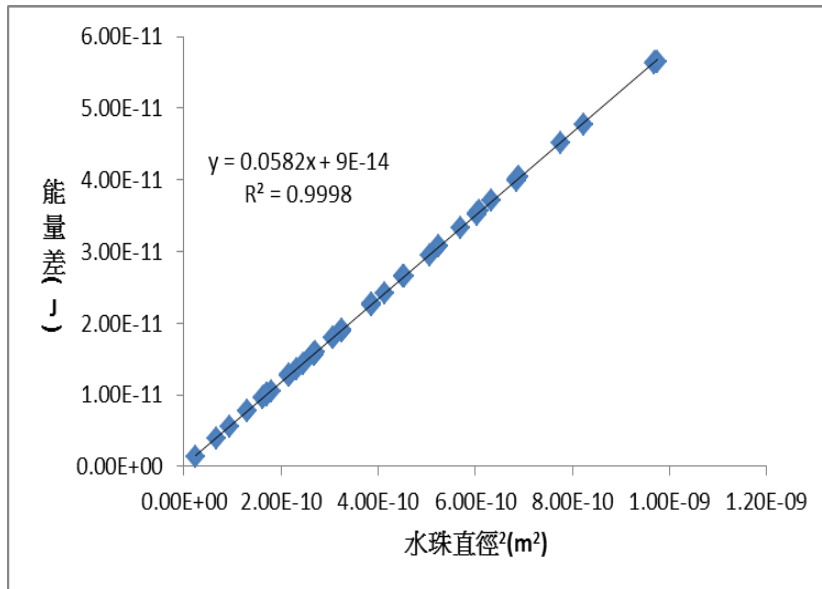


圖 5-4 能量差對水滴直徑平方作圖

若推測是對的，那麼圖 5-4 中的斜率應該是和彈力常數有關的常數，現在欲架一個簡單的模型，來驗證此彈力常數的準確性。

(四) 理論模型架設與討論：

所欲假設的理論模型為:設兩水滴在結合後的運動猶如振盪。此運動必有阻尼，依其阻尼的大小又分為阻尼震盪或單純的能量衰減。但我們只探討諧振子的始末能量，在初始情況阻尼影響較小時，可以忽略阻尼。

模型假設時，由實驗一所得到的結果。我們假設水珠碰撞初始時為兩顆大小相同的水珠，並發生 coalescence 時在表面產生振盪。欲找出和 $R^2 - \Delta U$ 圖中斜率有關的常數，我們寫下水珠在結合時的受力情形。由於表面張力，因此有 $\frac{2\sigma}{R}$ 的

壓力差。珠結合時，在結合處會有極小的面積使得在水平方向上有淨力。利用此觀點並假設除結合處外均為完美球體。令結合前兩球半徑為 R ，結合後大球直徑為 D ，結合時兩球半徑為 $R'(r)$ ，結合時兩球連心距為 $2r$ 。

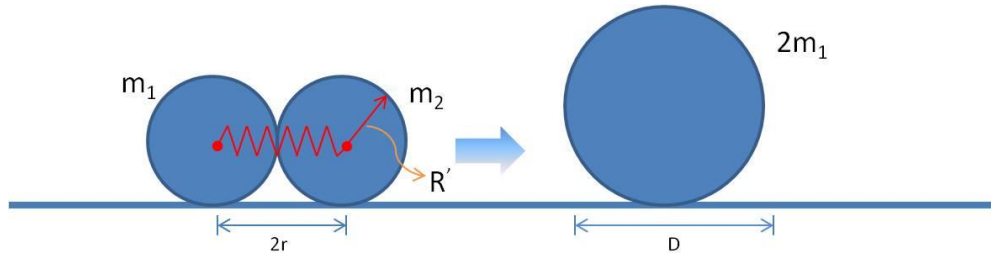


圖 5-5 假設水珠結合振盪示意圖

$$R' = \left[(1+M)x^3 + \frac{1}{4}D^3 + \sqrt{(1+2M)x^6 + \frac{1}{2}(1+M)D^3x^3 + \frac{1}{16}D^6} \right]^{\frac{1}{3}} + M = \frac{1}{-27} \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} \right)^3$$

$$\left[(1+M)x^3 + \frac{1}{4}D^3 - \sqrt{(1+2M)x^6 + \frac{1}{2}(1+M)D^3x^3 + \frac{1}{16}D^6} \right]^{\frac{1}{3}} + M^{1/3}x$$

[5-2]

利用守恆式得到 $R'(r)$ ，將 $r = R - \Delta x = 2^{-4/3}D - \Delta x$ 代入[5-2]化簡後令結果為

$$R' = aD - b\Delta x ; a = 0.387 ; b = 3.394$$

[5-3]

當 Δx 大於零，水滴會接合處造成淨力，將[5-3]代入力的表達式[5-4]：

$$F = \Delta p A = \frac{2\sigma}{R'} * (R'^2 - r^2)\pi = \frac{2\sigma}{(aD - b\Delta x)} * \left[(aD - b\Delta x)^2 - (R - \Delta x)^2 \right] \pi$$

[5-4]

$$F \approx F_0 + \left[\left(\frac{2\pi\sigma}{a} \right) \left(-3ab + 2^{-8/3} \frac{b}{a} + 2^{-1/3} \right) \right] \Delta x$$

$$k' = - \left[\left(\frac{2\pi\sigma}{a} \right) \left(-3ab + 2^{-8/3} \frac{b}{a} + 2^{-1/3} \right) \right]$$

[5-5]

得到理論的彈力常數[5-5]之後，再計算實驗值，令 $R^2 - \Delta U$ 的分布圖(圖 5-4)中的斜率為 m ，並假設在接觸瞬間時兩水珠就正處於諧振子系統中的位移最大值，並以結合後大球的球心為原點。

$$\Delta U - \text{K.E.} = \frac{1}{2}kR^2 = \frac{1}{2}k(2^{-8/3}D^2) , m = 2^{-\frac{11}{3}}k$$

[5-6]

我們定義參數 ε 定義來顯示結果的準確性，其值愈接近 1 表示模型更趨於真實。

$$\varepsilon = \frac{k'}{k} = \frac{- \left[\left(\frac{2\pi\sigma}{a} \right) \left(-3ab + 2^{-8/3} \frac{b}{a} + 2^{-1/3} \right) \right]}{2^{-\frac{11}{3}}m} = 2.83$$

[5-7]

理論值和實驗時的數量級相同，可見模型和真實情況相去不遠，但仍有改善空間，我們將誤差歸咎於理論架設時幾何的假設以及計算時的近似。

(五) 模型的新發現、修正與誤差討論

當吾人在取實驗數據的時候，發現水珠接近表面時水珠的軌跡能有異常的曲線(圖 5-7)。在吾人參考文獻^{[1][2]}之後，發現可能是水珠和表面的電雙層(double layer)作用使得水珠帶有電荷。利用軌跡追蹤該組水珠軌跡，可以發現該水珠加速度也不是定值。根據此現象，我們作了以下分析:

1. 理論彈力常數的修正

先前架設物理模型時，並沒有考慮到水珠帶電。現在將這項因素考慮做分析，首先寫下水滴的受力(圖 5-8)：

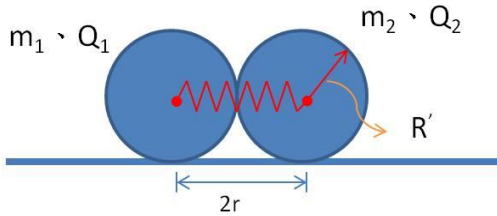


圖 5-8 修正後的水珠模型結合示意圖

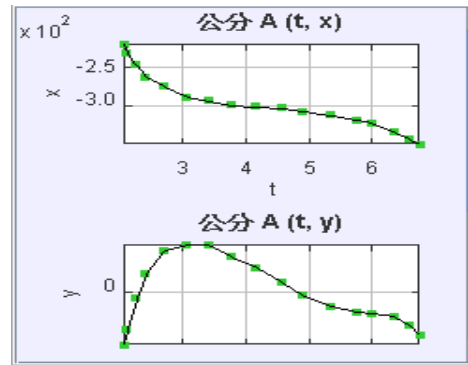


圖 5-7 水珠的運動路徑路徑

$$m\ddot{x} = k'\Delta x - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(D-2\Delta x)^2}$$

$$m\ddot{x} = F_0 - \left(k' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q^2}{D^3} \right) \Delta x = F_0 - k''\Delta x$$

$$k'' = \left(k' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q^2}{D^3} \right)$$

[5-8]

由於彈力常數 k'' 應為常數， Q 及 R 的關係 $Q \propto R^{3/2}$ 。我們已知水珠帶電的事實，利用能量守恆，欲得出帶電量的大小：

$$\Delta U_s = U_e + K.E. + U_k, \quad Q^2 = 4\pi\epsilon_0 D \left[-D^2 \pi \sigma (2^{1/3} - 1) + \frac{1}{12} D^3 \pi \rho v_0^2 + \frac{1}{2} k' D^2 \right] \quad [5-9]$$

求出電量之後對半徑作分布圖(圖 5-9) 在修正彈力常數時曾推導並預測出帶電量與水珠直徑應該符合 $Q \propto R^{3/2}$ ，作圖得(圖 5-10)：

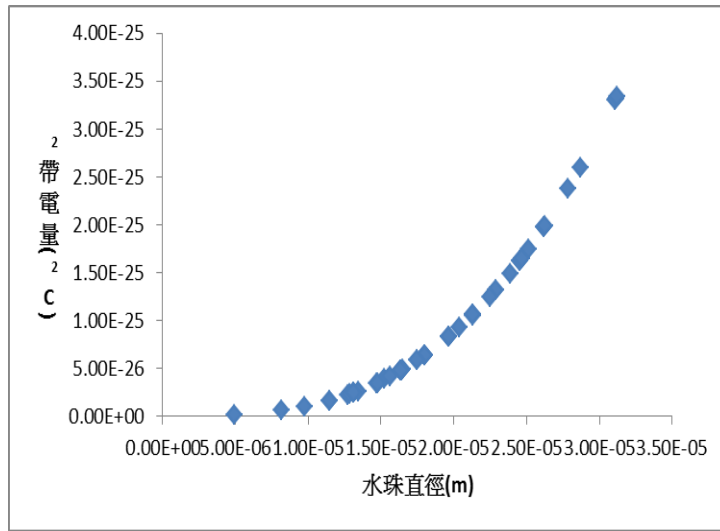


圖 5-9 水珠帶電量平方對水珠半徑關係圖

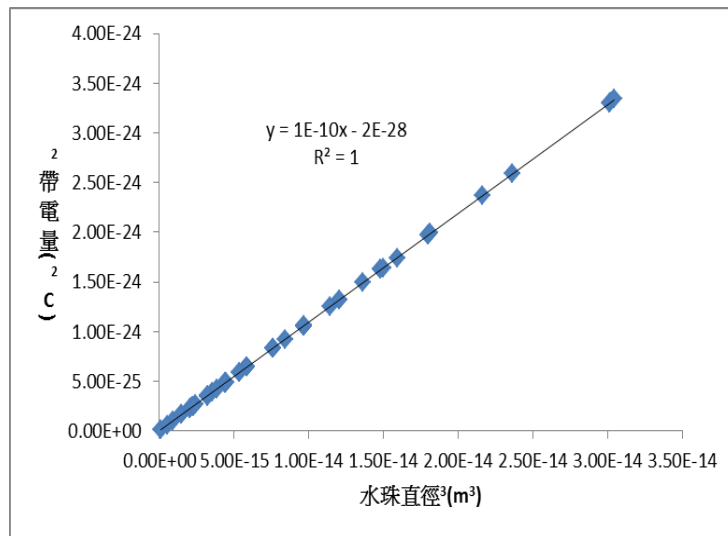


圖 5-10 水珠帶電量平方對水珠半徑之三次方作圖

將帶電量 Q 的結果帶回修正彈力常數內，並算出定義的參數，得到 $\varepsilon' = 2.56$ ，此結果比第一次的理論常數更為接近，表示代墊量的考量是使模型趨於正確的。

2. 探討幾何不定性的誤差影響：

建立模型時，我們想要知道初始假設對於準確性的影響有多大，假設結合前兩水珠的大小各為 R_1 及 R_2 ，其中 $R_2 = \alpha R_1$ ，且 $\alpha > 1$ ，帶入到更一般性的能量守恆式子並做差量運算，化簡便可得到：

$$4\pi\sigma \left[3\alpha^2(1+\alpha^2)(1+\alpha^3)^{-5} + \alpha(1+\alpha^3)^{-2} \right] \Delta\alpha \quad [5-10]$$

$$= \frac{1}{32}(1+\alpha^2)(1+\alpha^3)^{-2} \Delta k + \frac{1}{16}k \left[3(1+\alpha)^2(1+\alpha^3)^{-5} \alpha^2 + (1+\alpha)(1+\alpha^3)^{-2} \right] \Delta\alpha$$

[5-10]式中的 k 為修正前理論彈力常數， $\Delta\alpha$ 為實驗一中平均值與理論值的差，

將各數據帶入[5-10]後得 $\frac{\Delta k}{k} = 1.62$ ，這結果表示幾何不定性對整個模型的影響是

不容忽視的。將幾何不定性一同考慮進模型內並求得定義的參數 ε'' 可得

$$\varepsilon'' = \frac{k'' - \Delta k}{k} = 0.92$$

，此數值已非常接近 1，表示此模型已相當完備。

3. 水珠垂直動量的提供

由於模型已相當完備，現在我們希望利用理論求出水珠在垂直動量的產生原因。如果忽略疏水表面的存在，水珠在水平及垂直的表面振盪都應存在，利用此特性可以算出表面提供給水珠的正向力大小以及衝量。先寫下兩結合前水珠的受力情形：

$$m_1 \ddot{x} = kx - mg \quad ; \quad m_2 \ddot{x} = N - kx - mg$$

得 $N = 2kx$ ，由於整個受力過程可預測經過時間極短，所以水珠受力過程時振盪模型的阻尼可忽略，由於水珠極小，所以吾人選擇忽略重力對水珠的影響，依據以上的假設可寫下水珠收到正向力 N 衝量的式子：

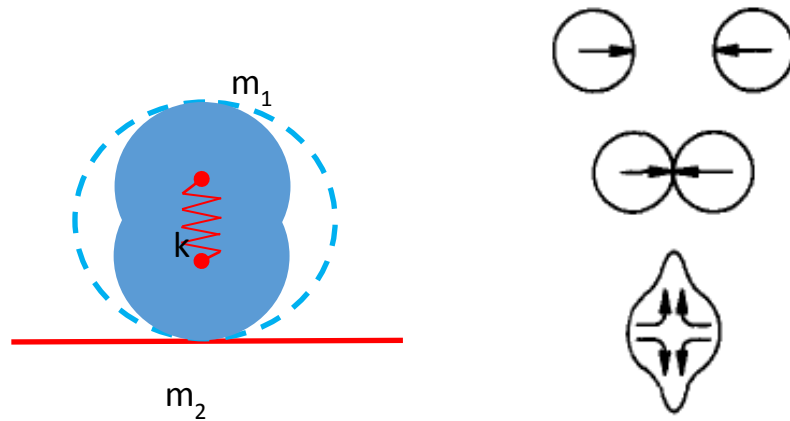


圖 5-12 及 5-13 水珠結合時，轉為垂直振盪示意圖

積分後化簡得： $t = \sqrt{\frac{M}{k}} \left[\sin^{-1} \left(\frac{2^{1/3} P_0}{\sqrt{Mk}} \right) \right]$ ，其中 M 為結合後水珠質量， P_0 為初動

量，這裡的參數 t 為水珠受力的時間，也就是結合瞬間至彈跳離開表面瞬間這兩個時間點經過的時間，利用各組數據算出各組的 t ，將其對結合後水珠直徑作圖 (圖 5-14)。

由趨勢線可以得知，水珠直徑與表面的作用時間大致上成三次方關係，若能善加利用水珠與表面接觸時間，就可以增加利用電場控制水珠的效率(例如同時控制一個大小範圍內的水珠)，以及增加表面傳熱。

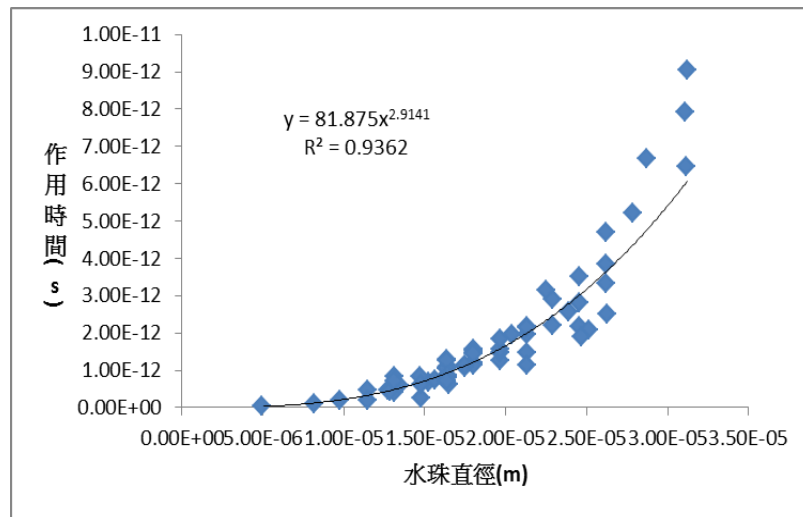


圖 5-14 水珠脫離表面時間 t 對水珠直徑關係圖

(六) 進階模型

在這個小節裡，我們想要與讀者們討論一個建立在初等模型的基礎上的進階模型，並進一步討論以及分析，分成三部分：帶電量前的理論分析、帶電量後的理論分析、內部渦流

1. 帶電量前的理論分析：

首先，我們知道表面位能差並不會全部以動能表現，有一部分會以表面振盪形式散失。就像先期提到圖[5-3]所傳達的訊息，是能量差與水珠直徑的次方關係。先前我們依這張圖推測系統為簡諧振盪，但這是不嚴謹的思考。基於此疑問，我們將整個系統中位能對特徵長度(兩水珠連心距)作圖，如果位能在結合處有最低點，就能夠證明其行為為振盪(圖 5-15)。並且也重新分析水珠在結合過程中的受力情形，我們在盡可能不作任何數學上的化簡，將力對特徵長度作圖(圖 5-16)。

另外，我們也必須重新定義參數，先前我們將實驗彈力常數以及理論彈力常數的比值定義成 ε ，來表示我們理論的準確性。現在我們要摒棄彈力常數的概念，重新定義的參考參數 β ，此參數為能量差與作用力做功的比

值，將作用力所作的功計算出來後，得到的參數為 $\beta = \frac{\int F dx}{\text{能量差}} = 1.82$ ，表示此模型仍有一定的準確性。

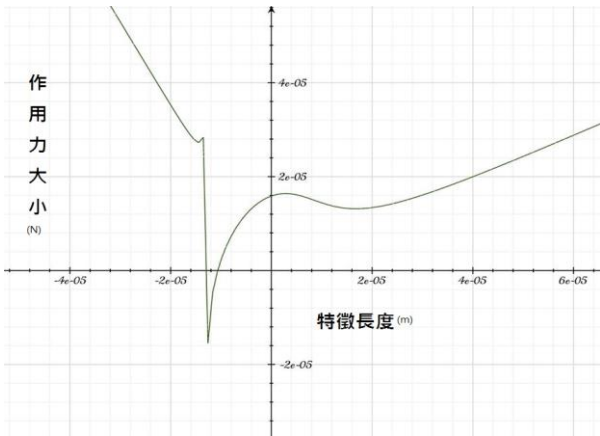


圖 5-16 作用力大小與特徵長度的作圖

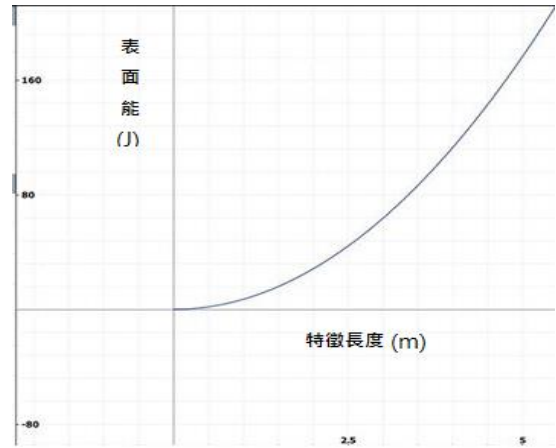
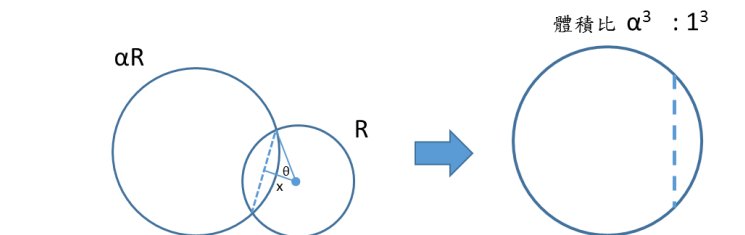


圖 5-15 表面能與特徵長度的作圖

注: 圖 5-16 中作用力只有在 $0 \leq x \leq 2 \frac{4}{3} D$ 有意義, 此圖的 D 為 20 微米, 但任何大小的 D 的趨勢都一樣

圖 5-16 顯示, 由液壓造成的作用力並不是線性的, 而是以上圖的方式演進。所以我們重新定義的參數就是將函數從作用區域的所作的功積分起來與能量差(理論表面位能差與初動能的差)的比值。



除此之外, 先前在討論幾何不定性的時候, 也引用了彈力常數的概念。現在我們希望重新討論幾何不定性的影響, 並且屏除彈力常數的概念。先假設兩水珠在結合前的半徑比例是 $1 : \alpha$, 小球球心到接觸面的距離為 x , 利用之前的概念寫下兩水珠在結合時的受力情形:

$$4R_0^3 = 2R'^3 + 2R'^2 x - x^3, \quad \cos^3 \theta - 4\cos^2 \theta - \cos \theta + \frac{4\alpha^3}{\alpha^3 + 1} = 0$$

$$\Rightarrow R' = \frac{1}{3} \left(27R_0^3 - \frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{2}\sqrt{4R_0^6 + R_0^3 x^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \left(27R_0^3 - \frac{27}{8}x^3 - \frac{27}{2}\sqrt{4R_0^6 + R_0^3 x^3} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{3} \left(\frac{11 - 27k}{2} + \sqrt{\left(\frac{27k - 11}{2} \right)^2 - 64} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{11 - 27k}{2} - \sqrt{\left(\frac{27k - 11}{2} \right)^2 - 64} \right)^{1/3} + \frac{1}{3}$$

$$F = \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{\alpha R'} \right) \sigma \pi (R'^2 - x^2), \quad \Delta \beta = \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{R_0}^{R' \cos \theta} F dx}{\Delta E} \Delta \alpha \Rightarrow \beta' = \beta + \Delta \beta = 0.79$$

同樣的，我們仍可以發現，幾何不定性對模型的準確性的影響很大，並且在我們考慮幾何不定性之後，模型與實驗約有 20% 的誤差。

2. 帶電後的理論分析:

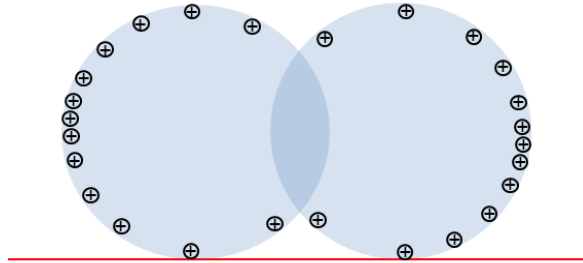


圖 5-20 水珠的假想電量分布情形

我們將圖[5-15]考慮帶電量的因素後，重新繪得位能圖[5-18]發現位能在接近原點有極大值，這項錯誤被我們歸咎於在初等模型中的假設。我們曾假設帶電會「均勻」分布在水珠表面，但很顯然這是錯的。理由如下:

「首先，將焦點挪移到表面上的每一點電荷。假如電荷密度是均勻的，那麼考慮在兩水珠結合面附近的電荷。由於區域的電荷和另一顆水珠上相同相對位置的電荷非常相近，因此電位比其他位置的電荷還要高。但球面上不會有電流，所以水珠表面的電荷不會是均勻分布的。」

電位能的正確數學形式如式[5-11]，我們試著用 Laplace equation 解出電荷密度分布函數 σ ，但是由於系統並非穩態，所以無法以純理論的方式解得。

$$U_E = \int_{\phi_1=0}^{\phi_1=\pi} \int_{\theta_1=\cos^{-1}\frac{x}{R'}}^{\theta_1=2\pi-\cos^{-1}\frac{x}{R'}} \sigma(\phi, \theta, x) \frac{R'^2 \cos \theta_1}{4\pi\epsilon_0} * \left(\int_{\phi_1=0}^{\phi_1=\pi} \int_{\theta_2=\cos^{-1}\frac{x}{R'}}^{\theta_2=\pi-\cos^{-1}\frac{x}{R'}} \frac{\sigma R'^2 \cos \theta_2 d\theta_2 d\phi_2}{r} \right) d\theta_1 d\phi_1$$

[5-11]

$$r = \sqrt{(R' \cos \theta_1 \sin \phi_1 - R' \cos \theta_2 \sin \phi_2 + 2x)^2 + (R' \cos \theta_1 \cos \phi_1 - R' \cos \theta_2 \cos \phi_2)^2 + (R' \sin \theta_1 - R' \sin \theta_2)^2}$$

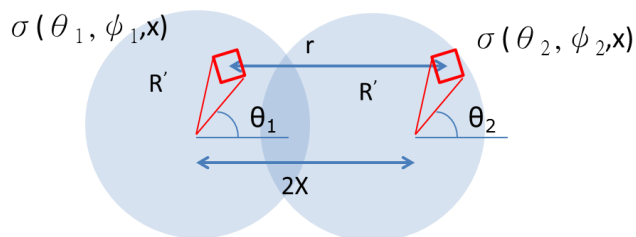


圖 5-17 對[5-11]式中的各項參數的示意圖

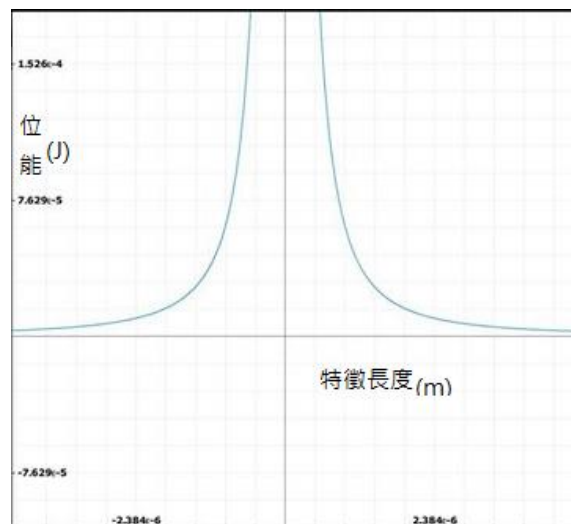


圖 5-18 考慮帶電後的位能圖

雖然我們無法直接定量討論帶電量對振盪系統的路徑影響程度，但在各種實驗以及理論證明：

- (1) 水珠帶電對系統影響小
- (2) 水珠的帶電情形並非均勻分布
- (3) 帶電量對模型的影響是使模型趨於更精確的

因此我們預測如果我們能夠定量探討水珠帶電量對水珠振盪路徑的影響，我們所建構的進階模型會更趨於真實狀況。

3. 內部渦流與表面振盪的重現性

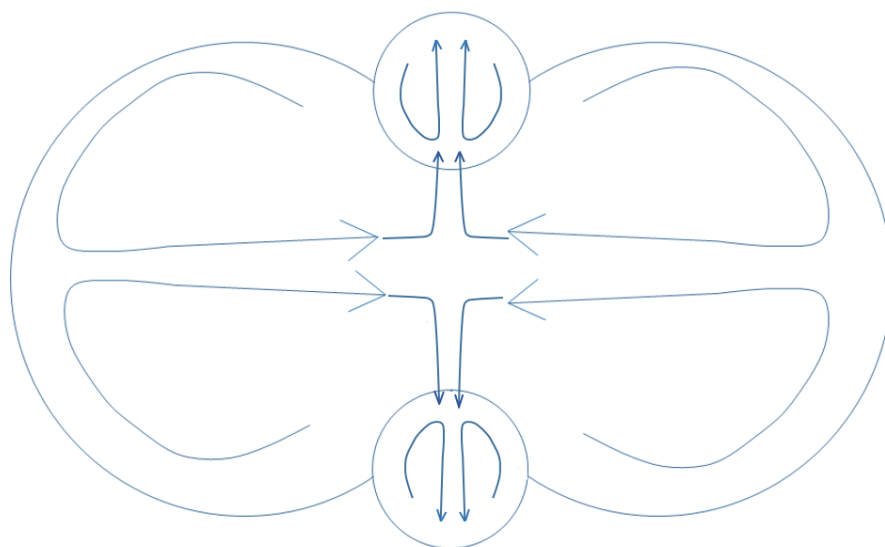


圖 5-19 理想內部環流的示意圖

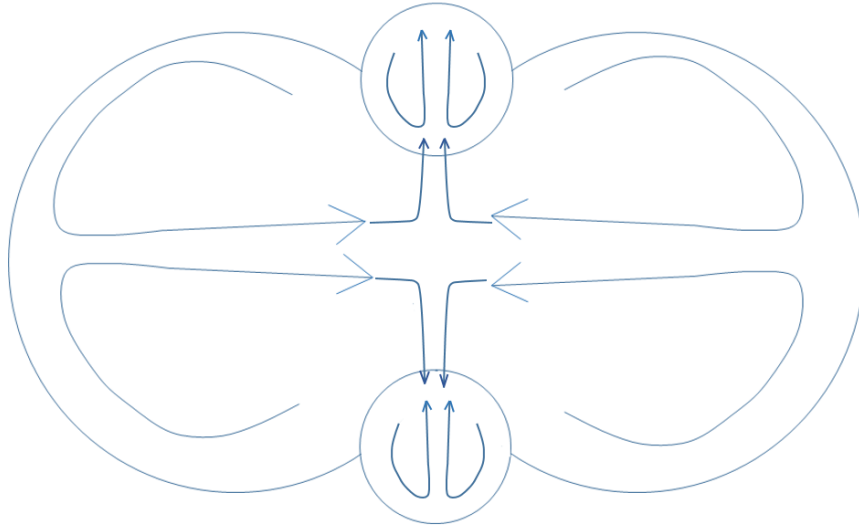


圖 5-20 內部紊流示意圖

在整個振盪 process 運作的時候，表面振盪不會一直重現，只會維持幾個週期。我們推測有兩個機制使水珠的幾何形狀受到影響，進而影響到表面振盪的重現性，使整個 process 漸漸停止：

- (1) 內部渦流循環中的紊流
- (2) 環流間的摩擦力

現在我們來探討第一種機制在能量上的分布，其中 m_1 為圖 5-19 中兩顆較大的水珠質量， m_2 為質量較小的兩顆。在建構內部環流的模型時，假設結合前兩水珠的半徑不會因為兩球連心距改變，且因為水珠重疊而多出來的質量由結合處上方及下方漸漸生成的小水珠補充，在不考慮紊流的影響下， m_1 及 m_2 會交替互相補充，也就是表面振盪(圖 5-19)。

由於一個水珠有兩個方向的環流，且共有四個水珠，為了個別探討環流，所以假設每一個水珠是由兩個大小相同的小水珠組成，且滿足質量守恆。現在來推導公式， x 為球 m_1 到兩球接觸面的距離， R_0 為 m_1 的半徑， R' 為將 m_1 假想成兩相同大小的水珠的半徑， w 為 m_1 的環流角速度， η 為空氣的黏滯係數。

$$\frac{4}{3}R_0^3\pi\left(\frac{R_0+x}{2R_0}\right) + \frac{1}{3}(R_0^2-x^2)x\pi = \frac{8}{3}R^3\pi, \quad f = -6\pi\eta rv = -3\pi\eta R_0 v$$

$$\bar{\tau} = (\bar{f} \times \bar{r}) = \frac{3}{2}\eta\pi v R_0^2 \Rightarrow \tau dt = \frac{3}{2}\eta\pi R_0^2 dx = \Delta(Iw) = \frac{4}{15}\rho\pi R'^5 dw + \frac{4}{3}\rho\pi R'^4 w dR'$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dx} + \frac{5(R_0^2-x^2)}{2R_0^3+3R_0^2x-x^3}w - \frac{90\eta}{4\rho(2R_0^3+3R_0^2x-x^3)} = 0 \quad [5-12]$$

微分方程式[5-12]寫下的概念是，兩水珠在水平做振盪時得到由空氣阻力獲得的角衝量，進而帶動整個系統的環流，關於[5-12]的解，我們用了 wxMaxima 程式還是無法得到。所以我們現在必須用到二項式近似來作化簡，其中必有誤差，但是卻是目前解決辦法：

$$8R'^3 = 2R_0^3 + 3R_0^2x - x^3, \quad x = R_0 - \gamma, \quad \gamma \ll 1 \Rightarrow R' = aR_0 - b\gamma$$

$$dI = -\frac{8\rho\pi}{3}a^4bR_0^4\gamma, \quad I = \frac{8}{15}\rho\pi a^5R_0^5\left(1 - \frac{5b\gamma}{aR_0}\right), \quad \left[\left(\frac{5bw}{aR_0}\right) + \frac{45\eta}{16\rho a^5R_0^3}\right]\left(1 + \frac{5b\gamma}{aR_0}\right) = \frac{dw}{dx}$$

When $\gamma = 0, w = 0$

$$\Rightarrow K.E._{(m_1+m_2)} = \frac{16}{15}\rho\pi a^5R_0^5\left(1 - \frac{b\gamma}{aR_0}\right)\left(\left(\frac{9\eta}{16a^4b\rho R_0^2}\right)\exp\left(\frac{5b}{aR_0}\gamma + \frac{25b^2}{2a^2R^2}\gamma^2\right)\right)^2 \quad [5-13]$$

[5-13]式是圖 5-19 中兩質量為 m_1 球的轉動動能，如果將 m_2 也一併考慮的話，

由於 m_2 為 m_1 的投影，所以只須將[5-13]中的 γ 以 $R_0 - \gamma$ 替代，就是兩 m_2 的轉動動能了。

$$K.E._{(total)} = \frac{16}{15}\rho\pi a^5R_0^5\left(1 - \frac{b\gamma}{aR_0}\right)\left(\left(\frac{9\eta}{16a^4b\rho R_0^2}\right)\exp\left(\frac{5b}{aR_0}\gamma + \frac{25b^2}{2a^2R^2}\gamma^2\right)\right)^2 + \quad [5-14]$$

$$\frac{16}{15}\rho\pi a^5R_0^5\left(1 - \frac{b(R_0 - \gamma)}{aR_0}\right)\left(\left(\frac{9\eta}{16a^4b\rho R_0^2}\right)\exp\left(\frac{5b}{aR_0}(R_0 - \gamma) + \frac{25b^2}{2a^2R^2}(R_0 - \gamma)^2\right)\right)^2$$

[5-14]式便是整個不考慮紊流時系統的轉動動能了。現在我們來談談紊流，紊流是在水珠的表面振盪轉為垂直方向的時候，與疏水表面作用後使其帶有垂直動量，再將垂直動量造成的阻力考慮後有的一個現象。因為疏水表面會提供水珠系統一個正向衝量，造成系統的質心有向上的初速，也就是紊流的產生原因。

兩環流交換的地方上方的兩環流為同向，下方的兩環流為反向(圖 5-20)；我們推測，這兩部分會造成水珠的幾何非常不穩定，且紊流的影響會越來越大。在前面的探討已經知道，水珠的幾何形狀對整個系統影響非常大，所以我們推測，最後表面振盪會因為紊流而消失。

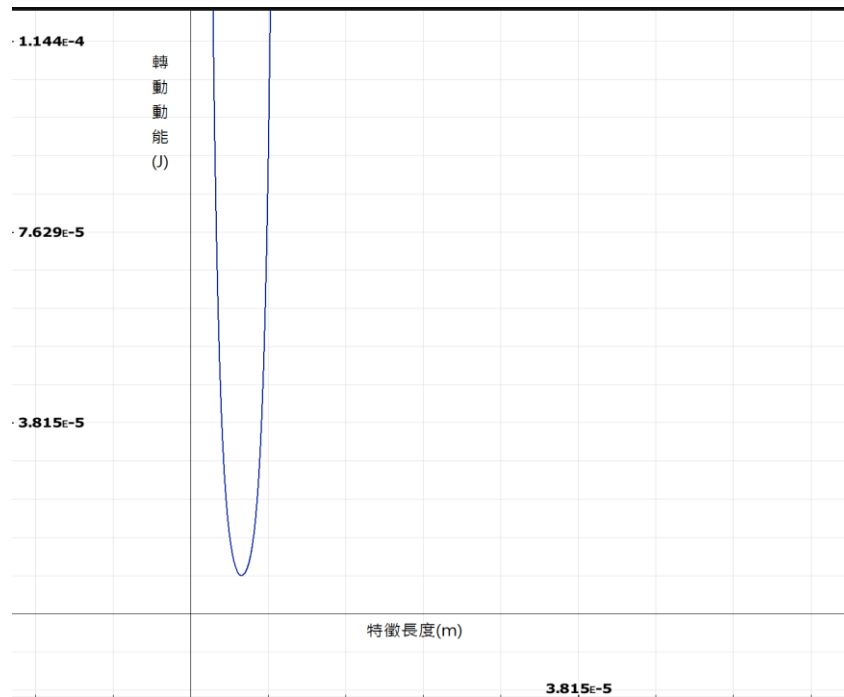


圖 5-21 系統理想轉動動能作圖

圖 5-21 便是[5-14]式對 γ 的作圖，不過圖 5-21 是建構在紊流不影響系統下個前提下得到的。實際上系統的轉動動能的模型必須考慮液體摩擦以及紊流影響，不過從圖 5-21 可以大略看出，轉動動能似乎也有振盪的路徑。

三、 實驗三: 水珠帶電量與質量關係

(一) 實驗目的與設計:

利用高速攝影機拍攝並記錄水珠彈跳過程，並且在疏水表面上建立起外加電場觀察水珠的運動情形，並計算其水珠的加速度來得知帶電量。

(二) 紀錄數據方法:

在已知的電場數質情況下，在拍攝的畫面中取得水珠的質量以及加速度，便可以依據運動定律得到帶電量。

(三) 實驗結果

當我們觀察一組水珠的運動情形時，我們可以藉由觀察速度變化情形來得知加速度。由於我們認為我們所建立起的電場在水珠的彈跳空間內的水平程度並不會很準確，但其數值我們認為不會差太多。因此當我們在分析水珠的加速度時，會將

方向的不定性考慮進去。假設兩金屬版間距 Δd 、電位差 ΔV 、水珠質量為 m 、

初位移及末位移 x_i 、 x_f ，兩位移與水平夾角 θ_i 、 θ_f 時距為 Δt ，電場與水平夾

角為 θ_E ，求得水珠電荷方法如下:

$$m \frac{(-x_i \cos \theta_i + x_f \cos \theta_f)}{\Delta t^2} = Q \frac{\Delta V}{\Delta d} \cos \theta_E ; \quad m \frac{(-y_i \sin \theta_i + y_f \sin \theta_f)}{\Delta t^2} = Q \frac{\Delta V}{\Delta d} \sin \theta_E - mg$$

$$Q = \frac{m\Delta d}{\Delta V\Delta t^2} \sqrt{(-x_i \cos \theta_i + x_f \cos \theta_f)^2 + (-y_i \sin \theta_i + y_f \sin \theta_f + g\Delta t^2)^2} \quad [5-15]$$

利用[5-15]式，我們便可以得到水珠的帶電量。其中我們所採用的時間間距為高速攝影機相鄰的五個畫面內，相鄰的二個畫面則是 0.0002667 秒，由於此實驗的精準度，因此所得到的帶電量應該不會相去太遠。我們將水珠的質量帶電量取完自然對數之後做圖，由於水珠的質量與戴電量都過小，因此我將取完對數之後的數值再乘上一個負號後做圖得圖 5-22。

從圖 5-22 可以看到，水珠質量與帶電量大小大致上在三個區段中分別有不同趨勢：

1. (第一區間) 質量過小時，帶電量大致上是成定值
2. (第二區間) 質量在大一些後，質量與帶電亮成負相關
3. (第三區間) 質量大到某一程度之後，帶電量與質量呈正相關

我們將水珠分開討論，從上述的第一區間開始，我們將質量與帶電量作圖得圖 5-23

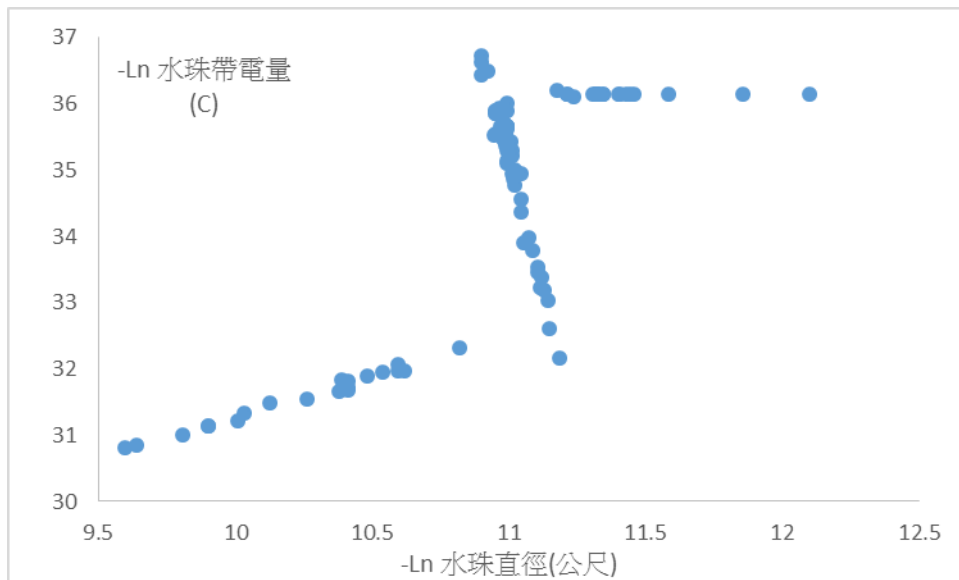


圖 5-22 水珠帶電量與質量做 nature log 後加上負號的作圖

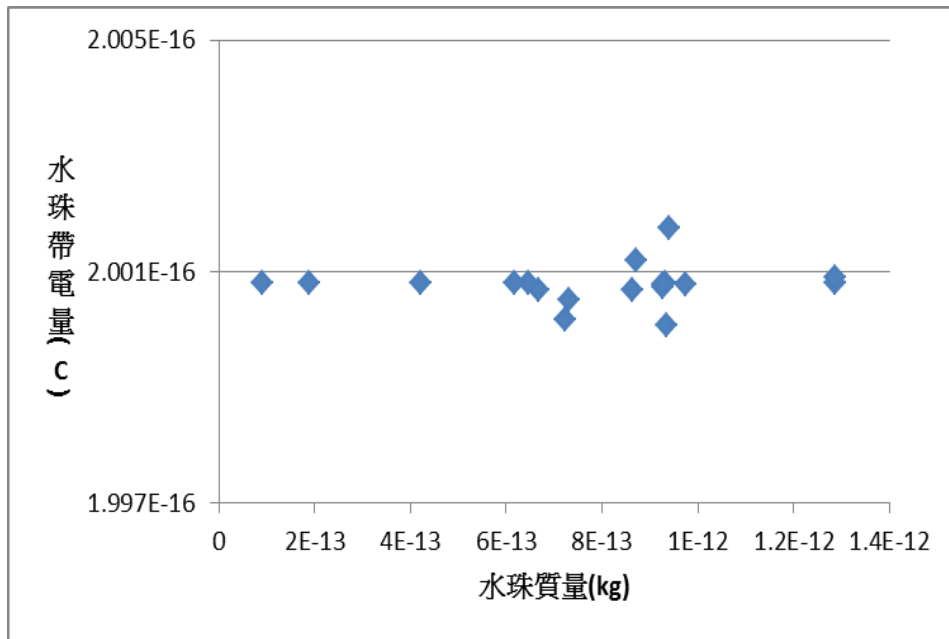


圖 5-23 水珠帶電量與質量的直接作圖

從圖 5-23 可以發現到，在第一區間內，質量的大小並不影響帶電量大小，帶電量大約是 2×10^{-16} 庫倫，是個非常小的值。接下來分析第二及第三區間，我們直接將兩點敘述的區間從圖 5-22 分析其斜率，並將 x 軸的質量改為水珠直徑，得圖 5-24 及圖 5-25:

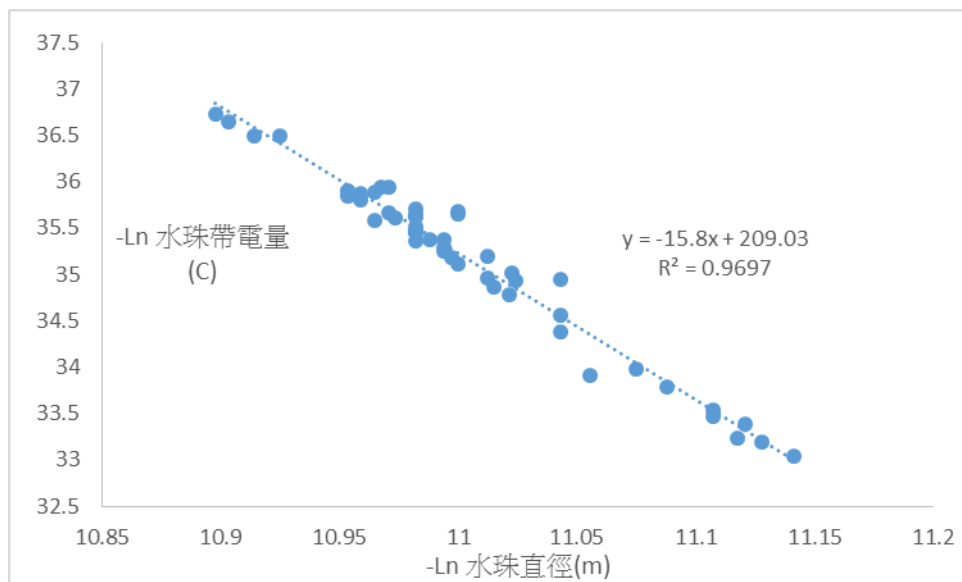


圖 5-24 第二區間的水珠其直徑與帶電量取 nature log 後加上負號的作圖

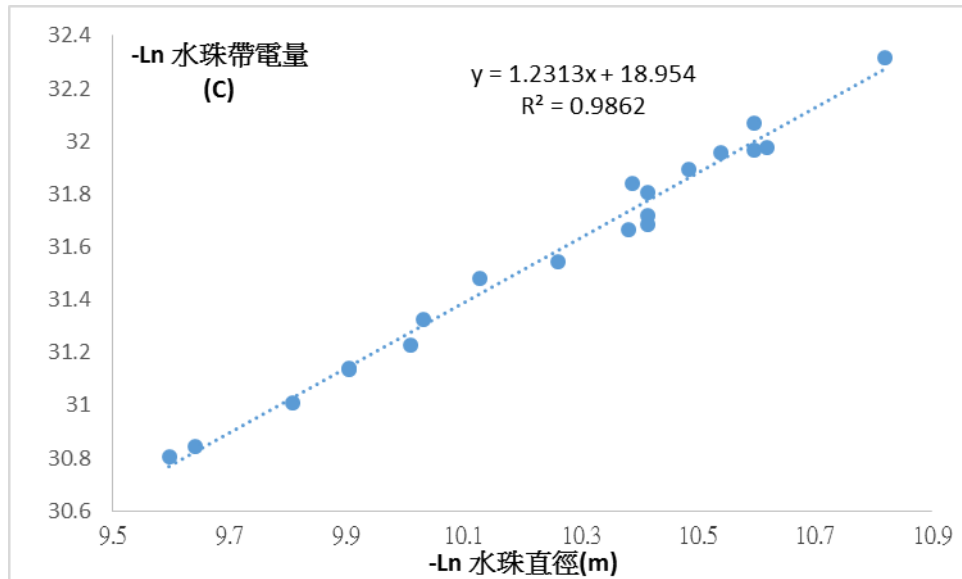


圖 5-25(第三段區間的水珠其直徑與帶電量取 nature log 後加負號的作圖

從圖 5-24 可以發現，當水珠質量增加到一定程度時，質量的大小會影響到帶電量。從圖 5-24 可以得到，在第二區間的質量，帶電量和水珠直徑的 16 次方成反比，在第三區間則是帶電量與水珠直徑成正比。

四、 實驗四: 將理論模型帶到應用

(一) 實驗目的與設計:

為了計算出在具有強電場的作用下的發電效率能夠被提升多少，我們將疏水表面在室溫攝氏 24.1 度、疏水表面的溫度為攝氏-10 度、相對溼度為 39%，在給予外加電場下自然凝結並得到水珠的平均直徑，以及水珠的分布密度。得到凝結速率在外電壓 300-4000 伏特下的的關係圖。

(二) 測得數據方法:

我們將樣品置於已設計好的環境中實驗，並同時利用數位相機拍攝下一樣品中多個位置的水珠分布圖，在逐一分析。

關於自然凝結的測量，必須同時考慮到單位面積中水珠的數量對時間的變化率，以及水珠質量對時間的變化率。為了較容易控制各個變因，我們利用相同時距中改變外加電場觀察水珠的平均直徑以及分布密度，作為比較出平均凝結速率的方法。

(三) 實驗結果:

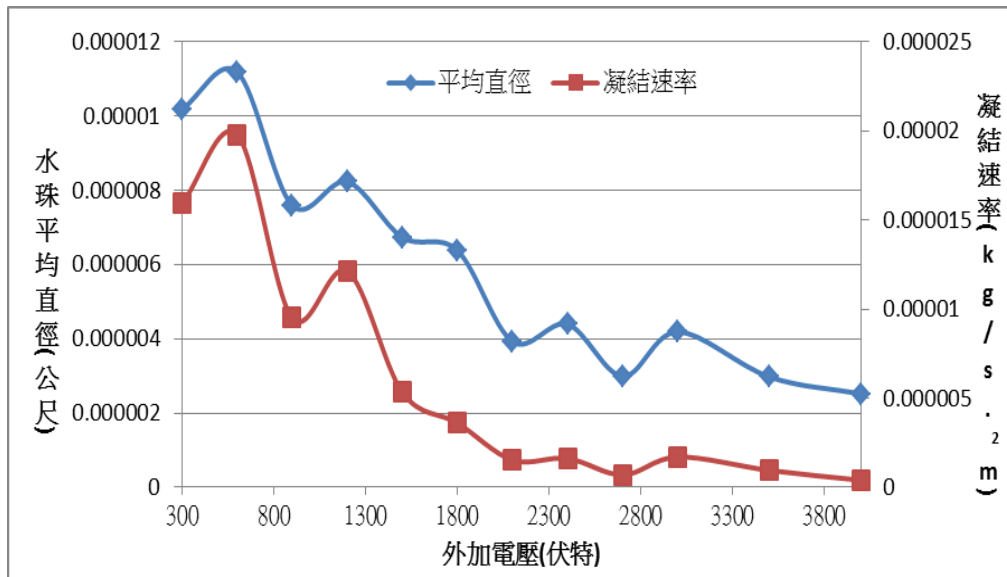


圖 5-26 水珠平均直徑與凝結速率和外加電壓的作圖

從圖 5-26 可以發現到平均直徑隨著外加電壓的變化為，在小區間內有擺盪的現象，但識大體趨勢為隨著電壓增強下降。這個現象我們的解釋為：

「當水珠在表面上凝結然後受到自然擾動發生彈跳時，因為外加電場而造成水平偏移，並與該處的水珠結合。當這個現象不斷重現時，該處的水珠就會變的非常大，以至於無法再繼續發生彈跳。

但此時除了大水珠所在的地方之外，水珠都已經彈跳到該處並成為大水珠，而來不及生成小水珠，所以會造成平均直徑微微上升。而當外加電場上升時，這種現象發生的機率就會降低。

當電壓曾強大某一個值得時候，能夠形成大水珠的區域就會被偏移到疏水表面之外，這麼一來凝結速率就會開始急遽降低，達到增進表面傳熱效率。」

從上述的描述之中，我們可以得到一個額外的結論。如果外加電場不夠強的話，是有可能造成凝結速率上升的。從圖 5-26 中可以看到有幾個數據點上升，但是如果繼續加強電場，那麼就會是穩定下降了。因此依據本實驗結果，利用外壓強電場降低固定表面上的凝結速率是可行的。

陸、結論

一、 碰撞發生條件:

兩水珠的比例需介於 1~2.3，且任一水珠的大小不能超過 100 微米。

二、 初等模型

- (一) 水珠的表面位成差與初動能之差與結合後水珠直徑有密切關係(圖 5-4)。
- (二) 兩水珠在結合時受到一源自於表面張力的線性力，並做簡諧振盪。
- (三) 結合過程中，受到電雙層的作用影響。在系統表面上有均勻電荷。
- (四) 將受力情形用數學描述後，並考慮初始假設造成的誤差所得到的理論彈力常數，和實驗數據僅有 8% 誤差。

三、 進階模型

- (一) 水珠在結合過程中受到的作用力的演進方式如圖 5-16，並非線性。
- (二) 水珠的電荷分布函數如圖 5-18，在試著將正確的電位能形式考慮進位能圖 5-15。但由於式中含無法直接以理論得到的電荷分布函數，因此無法定量討論電荷對振盪路徑的影響。
- (三) 重新定義模型準確度的參考參數，在沒有討論帶電量的影響下，模型與實驗值有 20% 的誤差。

四、 延伸討論

- (一) 利用初等模型探討水珠在水平碰撞上的產生垂直動量的原因，並得到水珠和表面作用時間的關係。(圖 5-14)
- (二) 提出內部環流模型的假說，以解釋水珠振盪在水平和垂直方向上交替發生以及運動停止的原因。

五、 水珠質量與帶電量關係

- (一) 定義了三個結合後水珠直徑的區間，大於 20 微米、20 微米至 14 微米之間、小於 14 微米三個區間:
 1. 大於 20 微米的水珠，帶電量和直徑一次方成正比。
 2. 介於 20 微米和 14 微米的水珠，帶電量和直徑的 16 次方成反比。
 3. 小於 14 微米的水珠，帶電量成定值，大約是 $2 \cdot 10^{-16}$ 庫倫。
 4. 在數據觀測中，也得到了水珠的帶電量為**負號**。係因為疏水表面的分子是較易放出電子的，因此水珠帶負電。

六、 應用評估

- (一) 利用電場控制凝結速率時，我們解釋為何水珠的平均直徑在小區間有擺盪的現象，但是在在大體上卻仍有下降的趨勢。
- (二) 利用外加強電場降低凝結速率是可行的，但是如果外加電壓不夠強的話，是有可能會讓凝結速率上升，導致反效果。

柒、 未來展望

- 一、 驗證提出的環流與電壓的假說
- 二、 觀察表面振盪
- 三、 探討其他液滴的碰撞
- 四、 深入探討電雙層作用

捌、 參考文獻

- 一、 N. Miljkovic, D.J. Preston, R. Enright, E.N. Wang.(2013).Electric-Field-Enhanced Condensation on Superhydrophobic Nanostructured Surfaces. *ACS Nano*, 7(12), p. 11043–11054
- 二、 N. Miljkovic, D. Preston, R. Enright, E.N. Wang.(2013).Electrostatic charging of jumping droplets. *Nature Communications*, 4:2517
- 三、 Melissa Orme .(1997).Experiments on droplet collisions, bounce, coalescence and disruption

【評語】 040106

1. 作品中測量的數據例如：水珠質量、電量、時間等精密度極高。

如果能夠說明實際測量的方法整篇作品就更加完整。

2. 理論的分析主軸集中在水珠的碰撞能量轉移。建議也能對水珠

融合時作用力的形成多做探討。