

中華民國第 54 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

佳作

040105

液滴一滴，不留痕跡

—水滴下滑與終端速度的探討

學校名稱：國立花蓮高級中學

作者： 高二 陳冠宇 高二 吳柏鋳 高二 梁斯齊	指導老師： 黃聖智
-----------------------------------------------	------------------

關鍵詞：終端速度、凡得瓦力、黏滯力

摘要

經過一連串的實驗，發現固定斜面傾角時，水滴在金屬板上能穩定下滑的質量有一定範圍，利用光電計時器測量後，發現水滴會在金屬板上達到終端速度，終端速度與不同的質量、不同傾角還有水滴與斜面間的接觸面積有關。利用高速攝影機觀察沾有衛生紙屑水滴，可以看出水滴內部的運動情形可以分為前端的滾動及後端平移兩種，表面則是如履帶般由表面張力所帶動。

壹、研究動機

在一個炎炎夏日的午後，天空開始飄起了雨。這時坐在車子裡的我觀察到，落在身旁車窗上的雨滴，若是快速的滑過，會在窗面上留下許多細小的水珠；而慢慢下滑的水滴，則不會留下任何痕跡。這個有趣的現象勾起了我們的好奇心，決定設計實驗來一探究竟。

貳、研究目的

- 一、觀察液滴在斜面上運動的特性
- 二、觀察水滴在穩定下滑時內部運動的情形
- 三、觀察液滴穩定下滑時，質量範圍與斜面傾角的關係
- 四、探討液滴穩定下滑時，斜面傾角與終端速度的關係
- 五、探討液滴穩定下滑時，液滴接觸面積與終端速度的關係
- 六、探討液滴穩定下滑時，表面張力與終端速度的關係

參、研究設備及器材

- 一、白鐵金屬長板 (130x7 cm) 圖一
- 二、木製長桿 (130x7 cm) 圖二
- 三、千斤頂 圖二
- 四、微量滴管 pipette (0.5-10 μ l)
- 五、微量滴管 pipette (10-100 μ l)
- 六、微量滴管 pipette (100-1000 μ l)
- 七、奈米防水噴漆 圖三
- 八、高速攝影機 圖四
- 九、光電計時器 圖五
- 十、陀螺儀 圖六
- 十一、單眼相機
- 十二、繪圖軟體 Image J
- 十三、直尺 (100 cm)
- 十四、燒杯
- 十五、膠帶、保麗龍膠、雙面膠
- 十六、蒸餾水
- 十七、噴球



圖一 白鐵金屬長板



圖二 千斤頂



圖三 奈米防水噴漆



圖四 高速攝影機



圖五 光電計時器



圖六 陀螺儀

肆、研究過程或方法

一、架設實驗裝置及測量斜面傾角

- (一)將奈米塗料來回均勻噴灑在金屬板上
- (二)將金屬板放在千斤頂上
- (三)利用千斤頂與陀螺儀調整斜面傾角大小

二、觀察水滴下滑的過程

- (一)分別觀察水滴在斜面上靜止、穩定下滑、變質量下滑的過程
- (二)觀察水滴穩定下滑時，衛生紙屑在水滴內部的運動情形
- (三)利用高速攝影機分析衛生紙屑在水滴內部的動態變化

三、測量不同角度下，水滴穩定下滑的質量範圍

- (一)用微量滴管調整水滴質量至洽下滑為最小質量(圖七)
- (二)在金屬板上不留下小水滴的最大值為最大質量

四、測量固定角度時，不同質量水滴穩定下滑的速度

- (一)取質量範圍的四分位分別測量
- (二)利用光電計時器測量水滴每下滑 5 cm 所需要的時間

五、測量固定質量時，不同角度水滴穩定下滑的終端速度

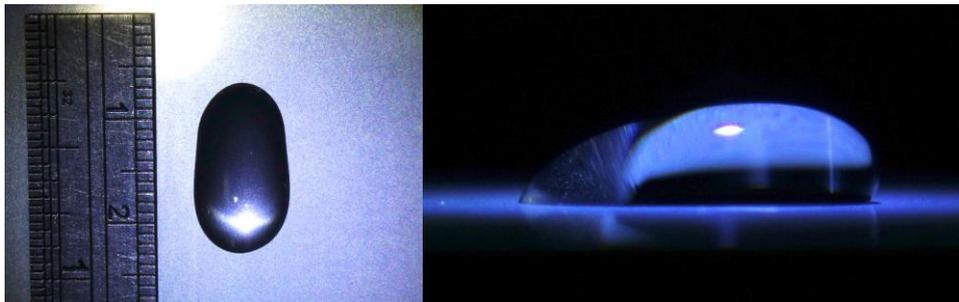
- (一)分析實驗二的數據找出合適的質量與角度範圍
- (二)利用光電計時器測量水滴每下滑 5 cm 所需要的時間
- (三)取兩倍的質量並找出合適角度重複實驗並更精確的驗證
- (四)探討角度與終端速度的關係

六、測量固定質量時，不同角度下，水滴和斜面的接觸面積

- (一)利用相機俯拍下滑水滴的面積(圖八)
- (二)探討接觸面積與終端速度的關係



圖七



圖八

圖九

六、測量固定質量時，不同角度下，水滴前端與後端和斜面的夾角

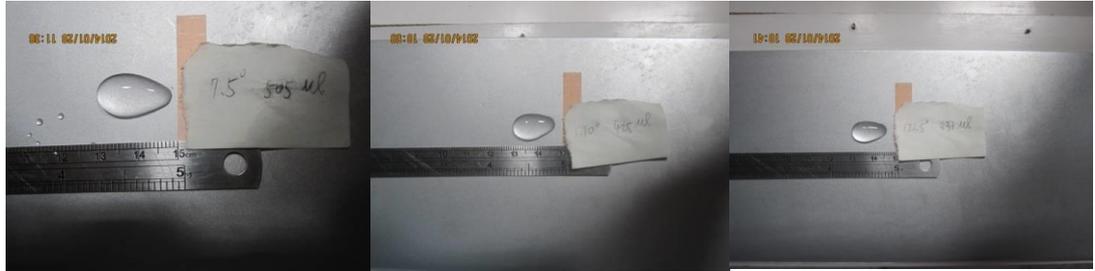
- (一)利用相機側拍下滑水滴的前角與後角(圖九)
- (二)利用前角與後角求出表面張力的反作用力對水滴下滑時造成的阻力
- (三)探討此阻力與水滴終端速度的關係

伍、研究結果

一、實驗一：觀察水滴下滑的過程

(一)實驗結果

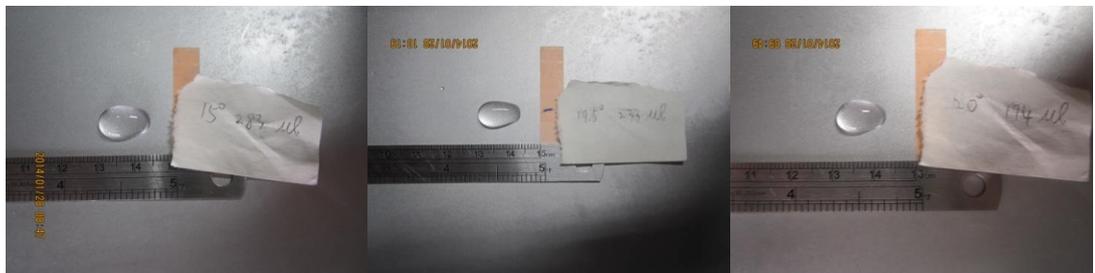
- 1.當斜面傾角固定時，水滴質量小於某一固定值，水滴不會下滑(圖十~十七)。



圖十

圖十一

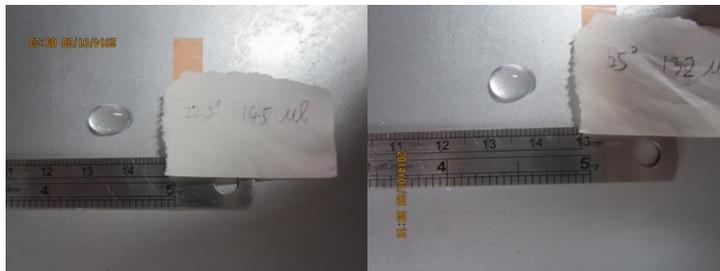
圖十二



圖十三

圖十四

圖十五



圖十六

圖十七

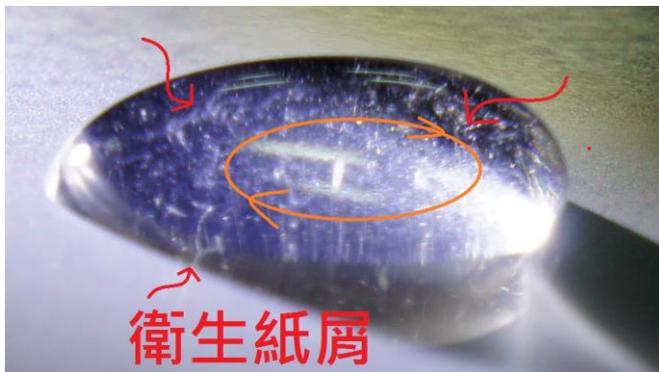
- 2.水滴質量大於某一固定值，水滴後端將拉長變形，並留下小水滴(圖十八)。



圖十八

由此結果，我們發現同一斜面傾角下，水滴有一定的質量範圍使其能不留下小水滴地穩定下滑。因此，我們將進一步研究，探討使水滴能穩定下滑的質量範圍與斜面傾角的關係。

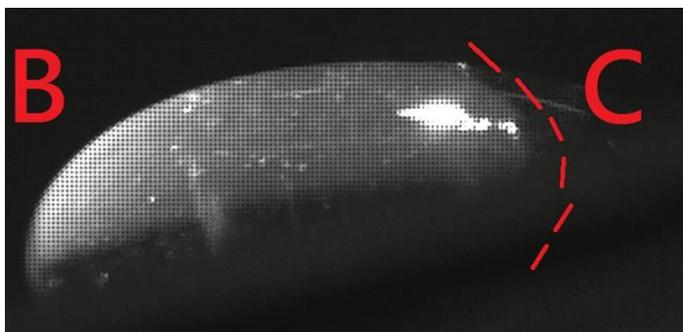
- 3.當斜面傾角固定時，同一質量的水滴下滑一段距離，會達到相同的終端速度。因此，我們將進一步研究，探討水滴下滑的終端速度與斜面傾角還有和質量的關係。
- 4.我們在水滴中置入一條一條的衛生紙屑，在水滴穩定下滑的過程中，發現衛生紙屑會在表面沿著的箭頭方向轉動，因此我們推論水滴在斜面上運動的方式有滾動，如圖十九、二十。
- 5.我們更進一步地使用高速攝影機觀察衛生紙屑在水滴穩定下滑的過程，發現水滴前端(B 部分)的衛生紙屑會做類似圓周運動，但是水滴後端(C 部分)的衛生紙屑則不會做圓周運動，在 C 部分的衛生紙屑會相對於水滴質心靜止，但是整顆水滴底部的衛生紙屑卻是相對斜面靜止。
- 6.依照費曼物理學講義[II] 電磁與物質—磁性、彈性與流體第 41 章中提到：在任何普通流體中，固體界面處的分子速度為零(相對於介面)。從第 5.6 項敘述中我們推論在達到終端速度時，水滴底層與斜面的相對速度是零，也就是水滴不會滑動而是以類似球體純滾動的方式運動。



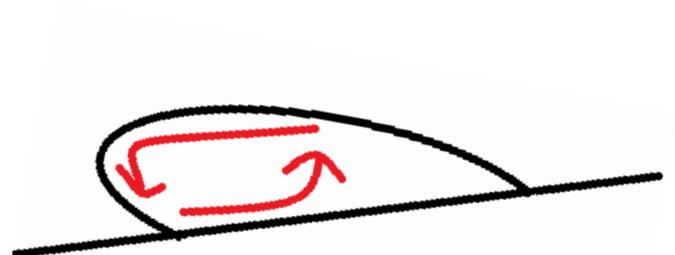
圖十九



圖二十



圖二十一



圖二十二

二、實驗二：觀察不同斜面傾角水滴能下滑且不會留下小水滴的質量範圍

(一)實驗結果

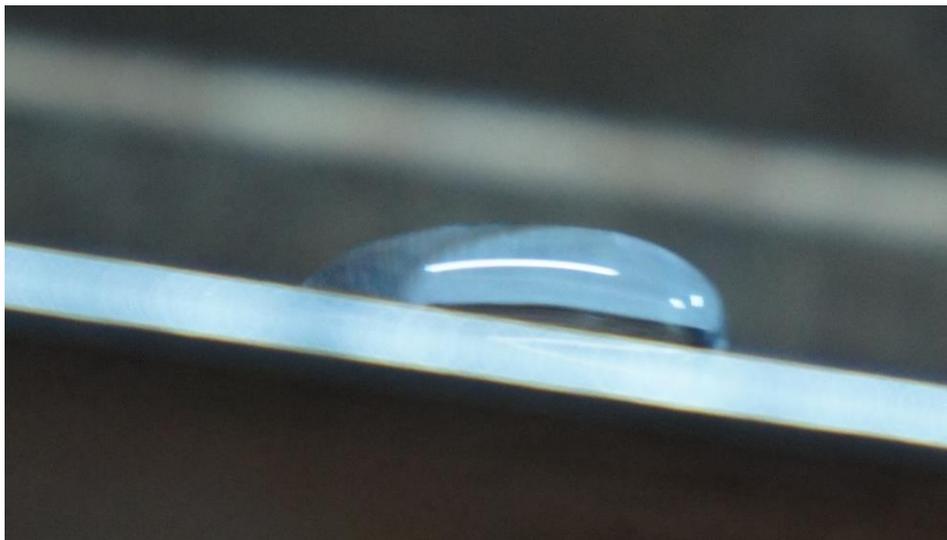
M_a :水滴下滑最小質量

M_b :水滴下滑最大質量 單位： mg

θ :斜面傾角

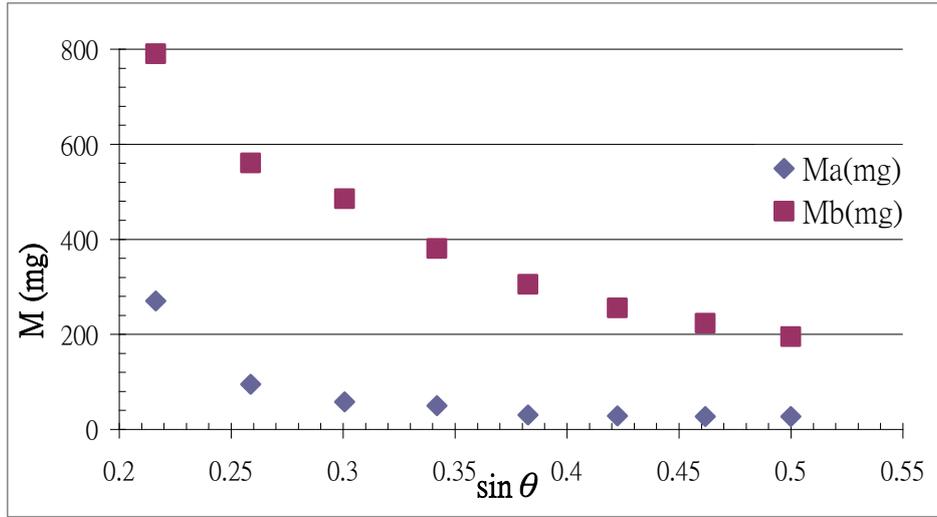
表一

θ ($^\circ$)	M_a	M_b	$\sin \theta$
12.5	270	790	0.22
15	95	560	0.26
17.5	58	485	0.30
20	50	380	0.34
22.5	30	305	0.38
25	28	255	0.42
27.5	27	223	0.46
30	26.8	195	0.5



圖二十三

(二)數據分析



圖二十四

- 1.由圖二十四我們可以得知，當斜面的傾角越大時，水滴下滑所需的最小質量越小，下滑時不在斜面上留下小水滴的最大質量也越小。
- 2.觀察各點變化趨勢可知，隨著斜面傾角增加，水滴穩定下滑的質量範圍則漸減，且質量變化漸趨平緩。

三、實驗三：觀察不同質量在固定斜面傾角的下滑速度

(一)實驗結果

Q_1 : M_a 與 M_b 的第一四分位數

Q_2 : M_a 與 M_b 的第二四分位數

單位 : mg

Q_3 : M_a 與 M_b 的第三四分位數

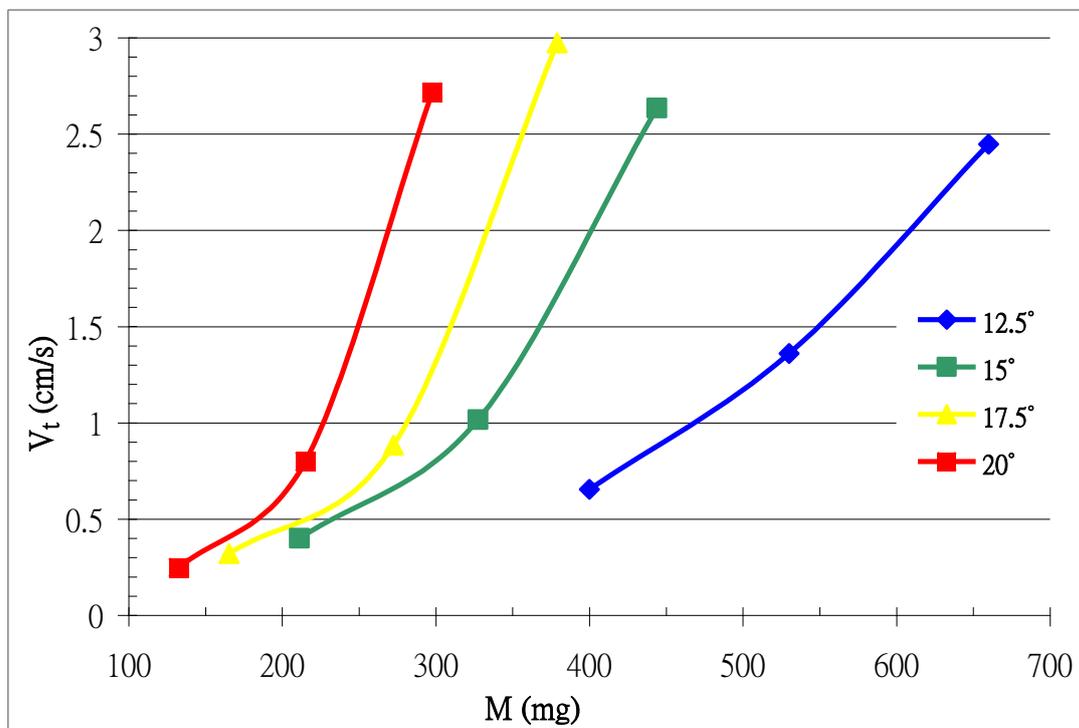
V_{avg} : 平均終端速度

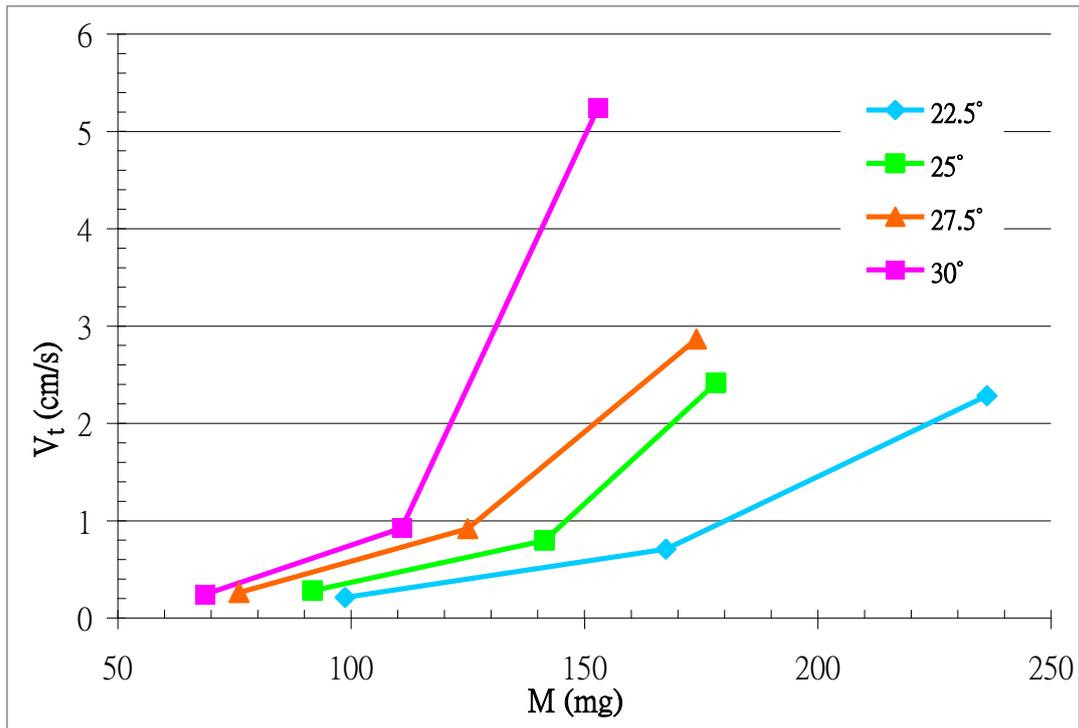
單位 : cm/s

表二

$\theta(^{\circ})$	Q_1	V_{avg}	Q_2	V_{avg}	Q_3	V_{avg}
12.5	400	0.65	530	1.36	660	2.45
15	211.3	0.40	327.5	1.02	444	2.64
17.5	165.3	0.32	272.5	0.884	379	2.97
20	132.5	0.25	215	0.80	279.5	2.72
22.5	98.75	0.21	167.5	0.70	236.25	2.28
25	91.75	0.28	141.5	0.79	178.25	2.41
27.5	76	0.26	125	0.92	174	2.87
30	68.85	0.24	110.9	0.92	152.95	5.24

(二)數據分析





圖二十六

- 1.圖二十五、二十六中同一條線中由左至右的三點分別為 M_a 、 M_b 的三個四分位點 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 ，比較各條線的上升幅度可知，斜面傾角大時速度隨質量增加的變化率愈大。
- 2.由觀察同一條線的趨勢，可得知當斜面傾角固定時，水滴的質量愈大，終端速度愈快，且終端速度隨質量增加而增加的幅度(圖形斜率)愈來愈快。

四、實驗四：觀察固定質量在不同斜面傾角的下滑速度

(一)條件一

質量 M_1 : 150 mg

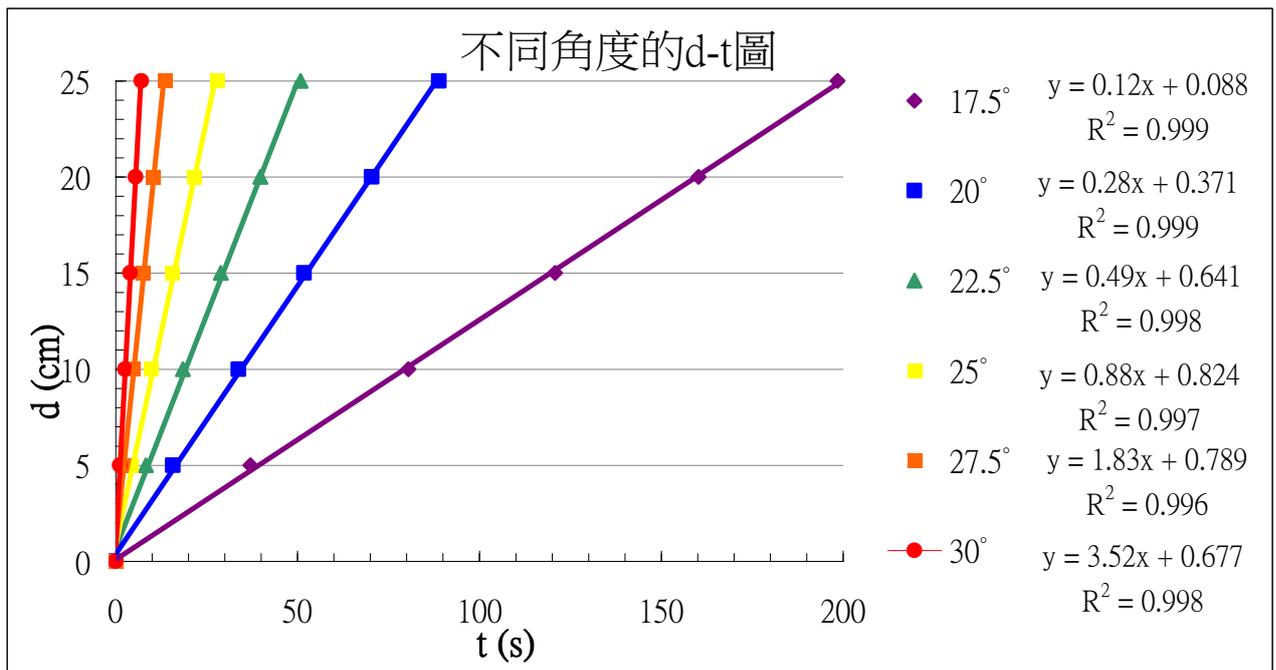
θ : 斜面傾角

d: 光電匣的間距(5 cm)

1. 實驗結果

表三

θ (°)	$\sin \theta$	V_t	$\ln \sin \theta$	$\ln V_t$
17.5	0.30	0.126	-1.20	-2.07
20	0.34	0.282	-1.07	-1.265
22.5	0.38	0.496	-0.96	-0.70
25	0.42	0.911	-0.86	-0.09
27.5	0.46	1.867	-0.77	0.624
30	0.50	3.583	-0.69	1.276

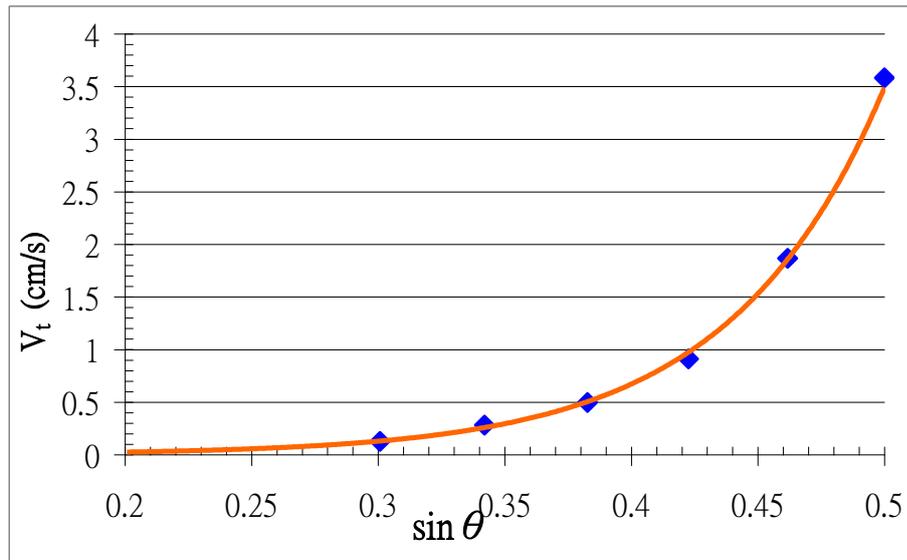


圖二十七

a.圖二十七是在各個斜面傾角下取其中一組數據做圖，而不是五組數據平均，因圖中所示的斜率(終端速度)會與表格中的 V_t 有些許差別。

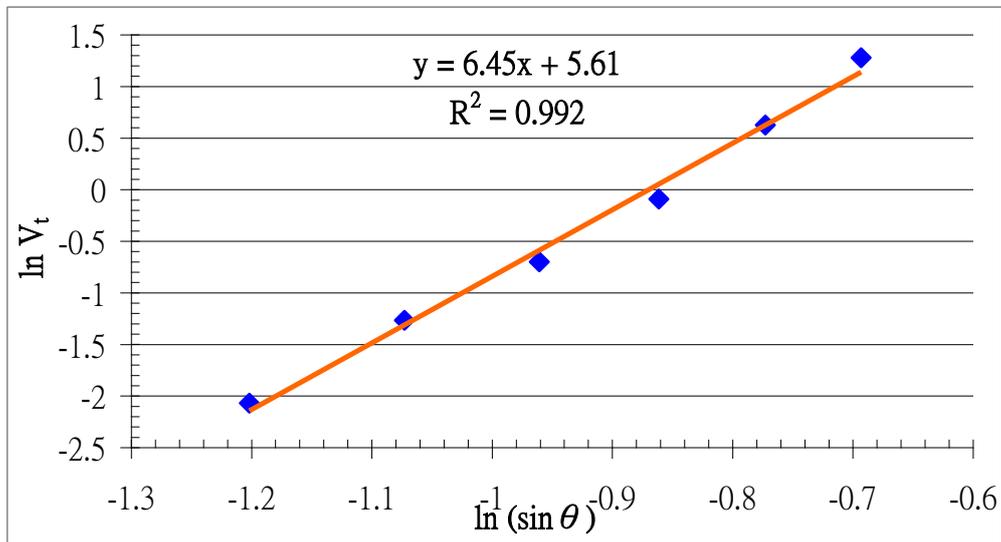
b.由實驗二圖二十四的結果我們發現在水滴質量在150 mg時，能夠在範圍最大的斜面傾角下穩定下滑，因此我們取150 mg作為實驗四條件一的質量。

2.數據分析



圖二十八

由圖二十八可以得知，當斜面的傾角越大時，水滴下滑的終端速度愈大，從點分布位置可看出當 $\sin \theta$ 大約是 0.21~0.25 ($\theta=12.5\sim 15^\circ$) 之間時，水滴速度會趨近於 0，而當斜面傾角超過 30 度後達到某個斜面傾角的 M_b 剛好為 150 mg 時，終端速度會提高使水滴變形留下小水滴，符合實驗二的結果。



圖二十九

將終端速度與傾角的正弦值取對數作圖，發現其關係為一條斜直線，斜率 $m=6.45$ ，因此，終端速度與 $\sin \theta$ 可由一簡潔的關係式來表示：

$$V_t = \alpha(\sin \theta)^{6.45}$$

其中， α 為一常數。

(二)條件二

質量 M_2 : 300 mg

θ : 斜面傾角

1. 實驗結果

表四

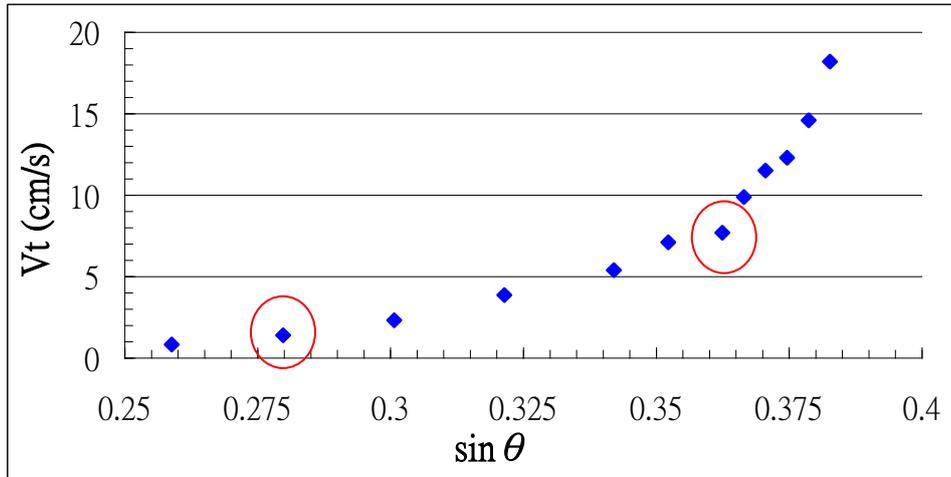
θ (°)	$\sin \theta$	V_t	$\ln \sin \theta$	$\ln V_t$
15	0.259	0.83	-1.352	-0.186
16.25	0.280	1.39	-1.274	0.329
17.5	0.301	2.31	-1.201	0.837
18.75	0.321	3.87	-1.135	1.353
20	0.342	5.4	-1.073	1.686
20.625	0.352	7.1	-1.043	1.960
21.25	0.362	7.68	-1.015	2.039
21.5	0.367	9.88	-1.004	2.291
21.75	0.371	11.51	-0.993	2.443
22	0.375	12.3	-0.982	2.510
22.25	0.379	14.59	-0.971	2.680
22.5	0.383	18.2	-0.961	2.901

a. 為了驗證是否不同質量下的液滴都會有類似相同的趨勢，我們將質量取 M_1 的兩倍 300 mg 觀察水滴在能夠穩定下滑範圍中的趨勢，根據實驗二的結果，300 mg 時的最大角度為 22.5°。

b. 為了增加實驗的精確度，我們將小角度的公差改為 1.25°，大角度的公差改為 0.25°。

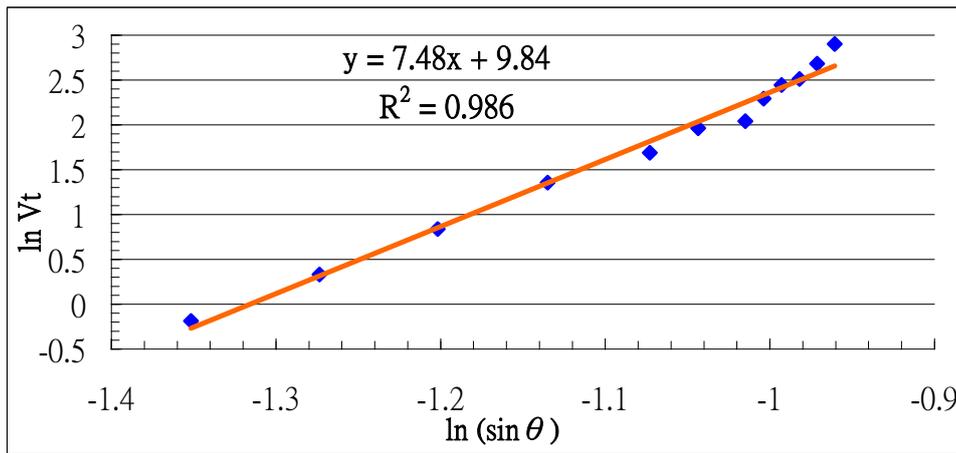
c. 其中我們發現在 20°與 21.25° 間圖形有明顯的差異，因此我們取 20.625° 來觀察水滴在過渡期的變化。

2.數據分析



圖三十

由圖三十我們可以觀察到從 16.5° 到 20.625° (左二到左七)速度有增加的趨勢，但是超過 20.625° 後，速度隨斜面傾角變化的幅度明顯不同且更大，而 20.625° 為兩種速度增加幅度的轉折點，再來我們將此圖取對數分析：



圖三十一

- 比較條件一、二的數據，發現不同質量下，速度隨 $\sin \theta$ 的變化趨勢相近。
- 因為條件一中的數據點較少，所以從圖二十八中看不出終端速度分段變化；而條件二中數據點較多，可以觀察出水滴終端速度變化在 18.75° 與 20° 間和 20.625° 與 21.25° 間分為兩段。
- 實驗一中終端速度愈大時，水滴的接觸面積也愈大，因此我們推論水滴達到終端速度時有凡得瓦力的作用，代表終端速度與接觸面積有關。
- 將終端速度與傾角的正弦值取對數作圖，發現其關係為一條斜直線，斜率 $m = 7.48$ ，因此，終端速度與 $\sin \theta$ 可由一簡潔的關係式來表示：

$$V_t = \beta (\sin \theta)^{7.48}$$

其中， β 為一常數。

五、實驗五：觀察在固定質量、不同斜面傾角下，接觸面積與終端速度的關係

(一)實驗結果

1.質量 M_2 : 300 mg

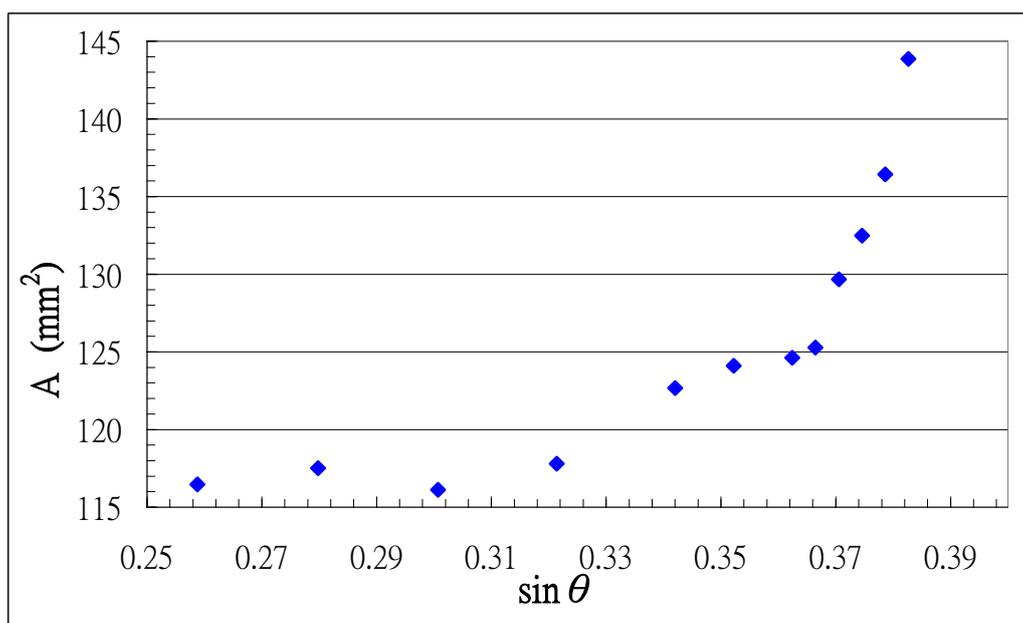
θ : 斜面傾角

A: 水滴與斜面的接觸面積 (mm^2)

表五

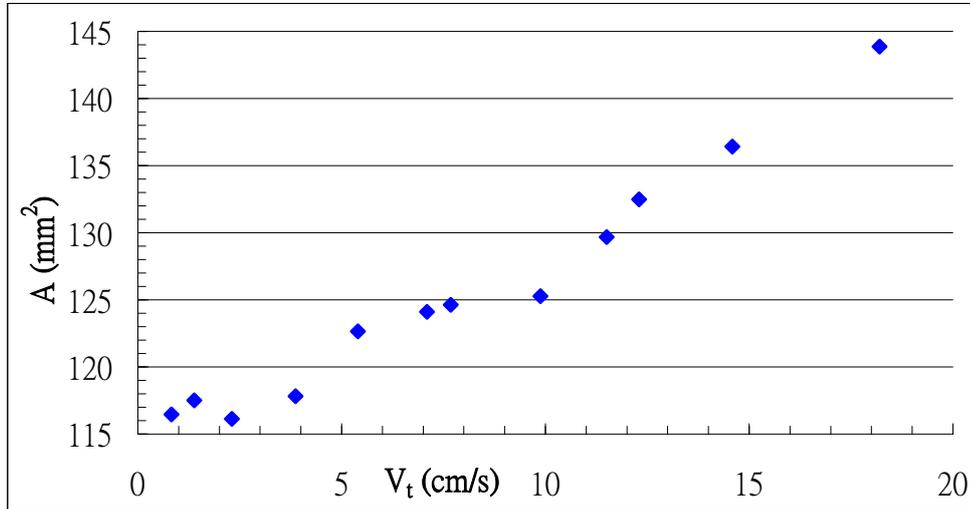
θ ($^\circ$)	V_t	A	$\ln V_t$	$\ln A$
15	0.83	116.45	-0.19	4.76
16.25	1.39	117.51	0.33	4.77
17.5	2.31	116.11	0.84	4.75
18.75	3.87	117.8	1.35	4.77
20	5.4	122.65	1.69	4.81
20.625	7.1	124.09	1.96	4.82
21.25	7.684	124.62	2.04	4.83
21.5	9.88	125.27	2.29	4.83
21.75	11.51	129.67	2.4	4.86
22	12.3	132.47	2.51	4.89
22.25	14.59	136.41	2.68	4.92
22.5	18.2	143.85	2.90	4.97

(二)數據分析



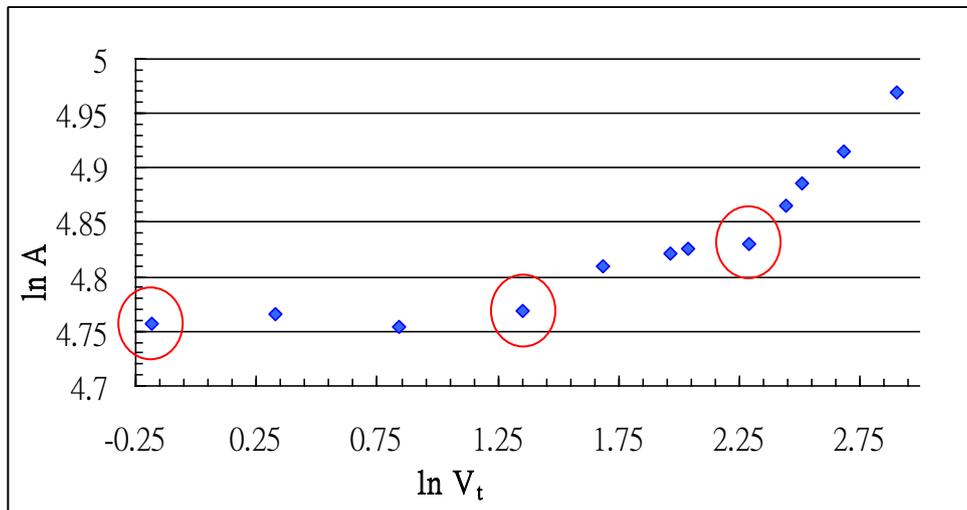
圖三十二

由圖三十、三十二我們發現，接觸面積隨斜面傾角變化的趨勢，類似終端速度隨斜面傾角的變化的趨勢，皆是隨斜面傾角增大而增加且趨勢有分段，因此我們推論水滴在不同斜面傾角下的終端速度會受到水滴與斜面間的摩擦力影響，此摩擦力應與接觸面積有關(討論四)。



圖三十三

由圖三十二、圖三十三可以看出水滴與斜面的接觸面積分別和斜面傾角與終端速度的趨勢呈現正相關，我們將接觸面積與終端速度取對數後，如圖三十四：



圖三十四

由圖三十四可看出當斜面傾角從 15° (左一)到 18.75° (左四)時，終端速度與接觸面積的關係不大明顯，但隨著斜面傾角逐漸增加，在斜面傾角 18.75° 與 21.75° 間及 21.75° 之後分別有一區間，表示接觸面積對終端速度影響有不同的關係。

六、實驗六：觀察水滴滑動時的前後角與終端速度的關係

(一)實驗結果

1. 水滴質量 $M_2 = 300 \text{ mg}$

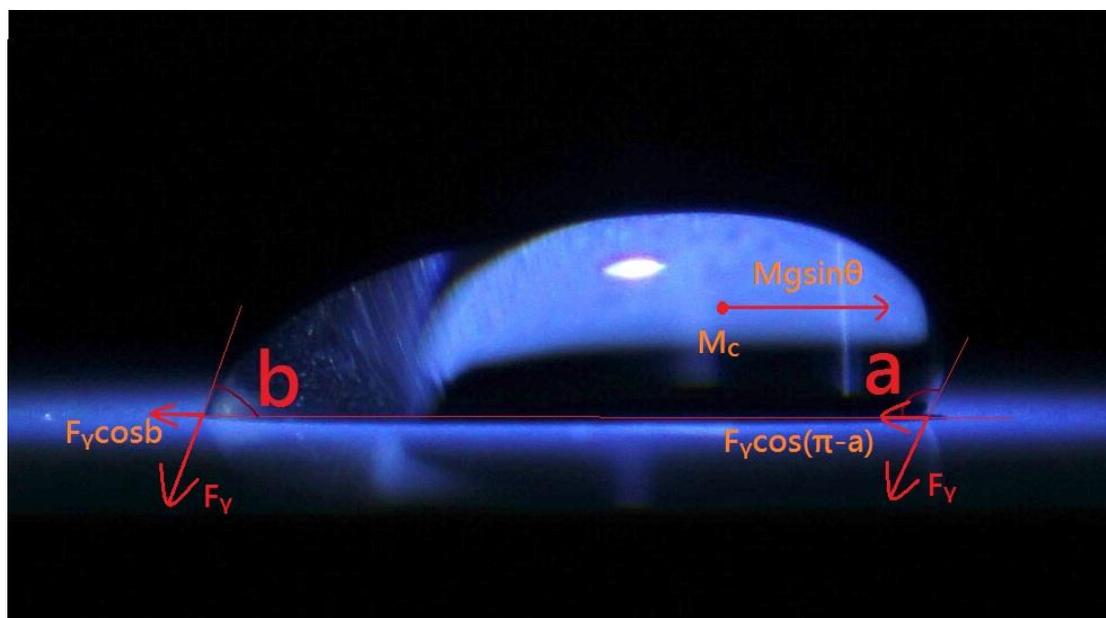
θ = 斜面傾角

a = 下滑水滴的前角

b = 下滑水滴的後角

表六

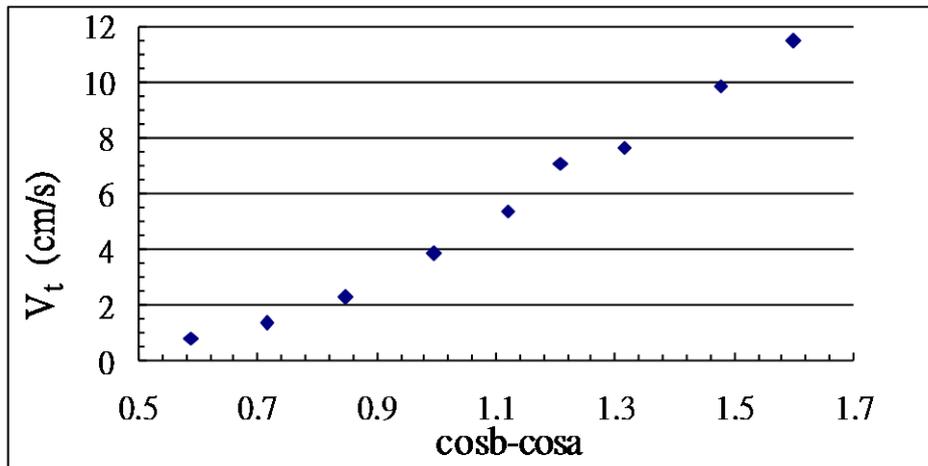
$\theta(^{\circ})$	V_t	$a(^{\circ})$	$b(^{\circ})$	$\cos b - \cos a$	$\ln V_t$	$\ln(\cos b - \cos a)$
15	0.83	111.71	77.41	0.589	-0.19	-0.53
16.25	1.39	114.94	73.02	0.71	0.33	-0.34
17.5	2.31	118.92	68.72	0.85	0.84	-0.17
18.75	3.87	124.26	64.4	0.995	1.35	-0.005
20	5.4	131.49	58.52	1.18	1.69	0.17
20.625	7.1	134.66	59.71	1.21	1.96	0.19
21.25	7.68	137.25	54.53	1.31	2.04	0.27
21.5	9.88	141.59	46.22	1.48	2.29	0.39
21.75	11.51	144.61	38.44	1.60	2.44	0.47



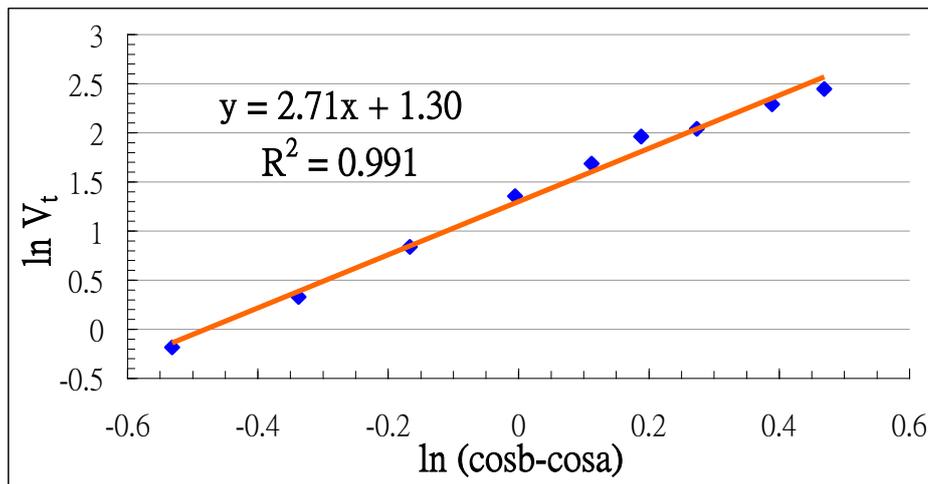
圖三十五

a. 從表六中我們可以看出當斜面傾角愈大時，重力的作用會愈顯著，水滴的表面張力為了抵抗重力作用，會使水滴與斜面間的前角變大，後角變小，以增加平行於斜面的分力。

(二)數據分析



圖三十六



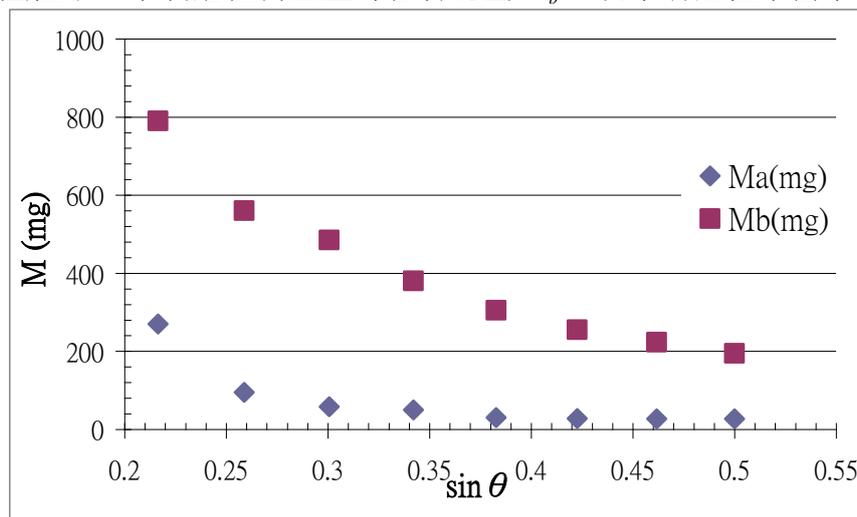
圖三十七

由圖三十七可以看出取對數後，水滴前後端表面張力的反作用力，其平行斜面方向的合力與終端速度有線性關係。此力隨著斜面傾角增加，是由於在體積不變、接觸面積逐漸變大的情況下，水滴的高度會愈來愈低，因此前角 a 變大，後角 b 變小。

陸、討論

一、

由實驗一的結果，我們發現斜面傾角超過某一定值， M_a 的變化幾近水平線，而 M_b 則持續下降。隨著角度增加 M_a 與 M_b 的範圍縮小，最後有可會重疊。以日常生活中的車窗、鏡子為例，這些斜面的傾角較大，此時水滴的質量範圍極小，水滴落在斜面上時容易超出 M_b ，於下滑過程中留下小水滴。

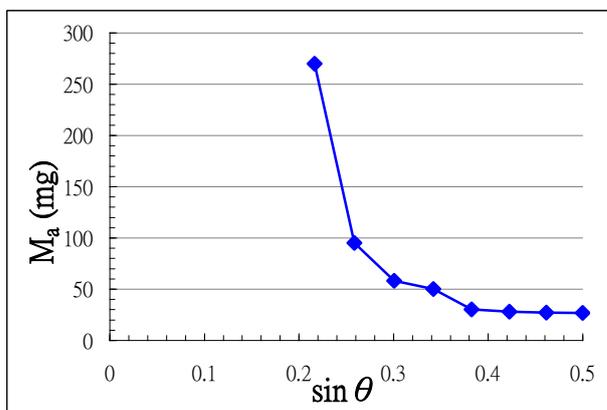


圖三十八

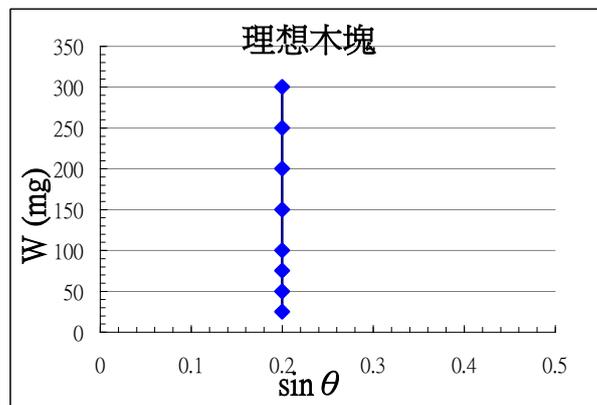
二、

在斜面傾角趨近於零的時候， M_a 的值會大幅增加，如同一般的木塊在一斜面上，摩擦係數 $\mu = \tan \theta$ ，臨界角的大小只與摩擦係數有關係，與質量無關，因此當我們做 $M_a(\theta)$ 的圖形時，是一條鉛直線；不過當 θ 逐漸增大時，圖形並不符合鉛直線， M_a 的值會隨 θ 而改變。

假設水滴在實驗中只受到重力、表面張力、黏滯力與凡得瓦力，當 M_a 愈大時，水滴受重力影響較顯著，因此表現出類似木塊的性質；當 M_a 逐漸變小，受表面張力、黏滯力與凡得瓦力的影響比重力明顯時，就不再是鉛直線。這是水的表面張力、黏滯力與凡得瓦力特有的性質，木塊則無這些性質，因此圖形會與木塊有所不同。



圖三十九



圖四十

三、

1.由實驗四條件一分析後可得一關係式

$$V_t \propto (\sin \theta)^{6.45} \quad \text{式一}$$

由式一可推出

$$\sin \theta \propto (V_t)^{0.155} \quad \text{式二}$$

且當達到終端速度時，阻力等於下滑力

$$F_d = mg \sin \theta \quad \text{式三}$$

將式二帶進式三可得下滑時，阻力與速度的關係式

$$F_d = \alpha' (V_t)^{0.155} \quad \text{式四}$$

其中 α' 為一常數，可能與水滴質量和液體性質有關。

2.由實驗四條件二分析後可得一關係式

$$V_t \propto (\sin \theta)^{7.48} \quad \text{式五}$$

由式五可推出

$$\sin \theta \propto (V_t)^{0.134} \quad \text{式六}$$

且當達到終端速度時，阻力等於下滑力

$$F_d = mg \sin \theta \quad \text{式七}$$

將式六帶進式七可得下滑時，阻力與速度的關係式

$$F_d = \beta' (V_t)^{0.134} \quad \text{式八}$$

其中 β' 為一常數，可能與水滴質量和液體性質有關

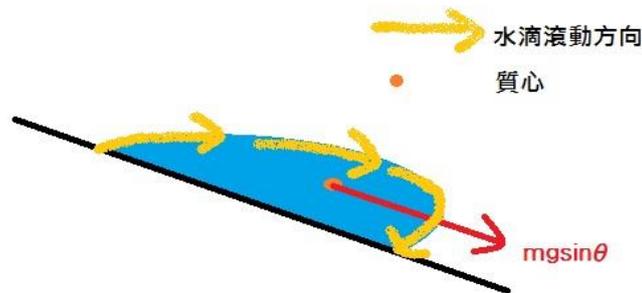
因為質量的差異，所以阻力與水滴終端速度的關係式中，次方數與常數會有所不同。

四、

摩擦力為抵抗物體相對滑動的力，而兩物體接觸面壓得愈緻密，則摩擦力愈大，而有兩種力會使得兩物體的接觸面更緻密，第一個是正向力，第二個是分子間的作用力(凡得瓦力)，在固體分子之間，分子間的作用力造成的影響遠小於正向力，因此在固體之間的摩擦力大小與正向力還有接觸面的性質有關，與接觸面積無關，然而在液體和固體之間，摩擦係數很小 ($\mu = 0.001 \sim 0.0001$)，因此正向力對摩擦力的影響比凡得瓦力還要小，而凡得瓦力的大小正比於接觸面積，因此在我們的實驗中，摩擦力的大小與接觸面積有關，與正向力無關。

五、

當下滑力作用使得水滴從靜止開始滾動時，會從水滴前半部表層的水分子開始滾動，並且因表面張力而拉動後半部表層的水分子，當下滑力愈大，會使水滴表層的水分子轉速增加。因為在任何普通流體中，固體界面處的分子速度為零(相對於介面)，那麼水滴在斜面上穩定下滑時，則以類似履帶滾動的方式下滑，也就是水分子會從後端受到表面張力被拉起並沿著水滴表面到達前端(如圖四十一)。



圖四十一

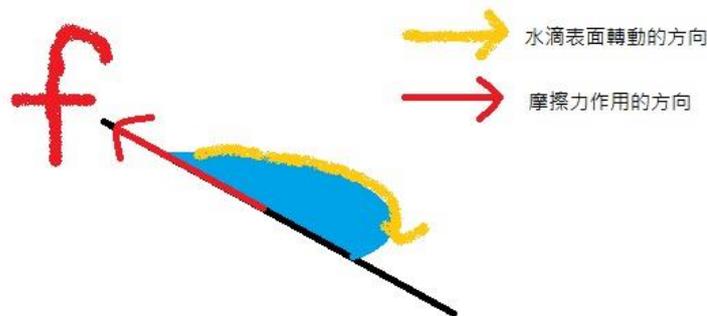
不過當固定角度下，水滴轉速正在增加時，後端水滴與斜面夾角會不夠小，使得表面張力需要抵抗更多的重力來拉起後端水分子，拉起的速度如果跟不上前端水分子滾落的速度，會造成水滴高度下降，接觸面積增加，後端水滴與斜面的夾角變小，拉起的速度跟上滾落的速度，那麼接觸面積則達到穩定不會再增加，此即代表當斜面傾角愈大，下滑力愈大，水滴前端水分子滾落的速度愈快，後端拉起的速度必須追更多才能跟上，造成水滴更扁，接觸面積更大。

履帶滾動時是固體和固體接觸，摩擦力受到正向力的影響，而水滴在斜面上滾動時，摩擦力則是受到接觸面積的影響。

六、

當水滴開始滾動時，會由水滴的表層先滾動，受到水分子之間黏滯力的作用，帶有不同動能的水分子會在不同層間跑來跑去，將表層能量往內分散而帶動水滴內部跟著滾動。當滾動加速時，質心和表層會有一速度差，而黏滯力則會不斷地作用使表層與內部的角速度達到一致，從力矩上來看，黏滯力造成的力矩方向會與滾動方向相反。

固定角度下，水滴下滑時速度從零到達終端速度之間，滾動會受到力矩的作用，其中黏滯力作負力矩，摩擦力作正力矩，忽略前半段和後半段表面張力的反作用力造成的力矩(討論五)，而重力通過質心不造成力矩，當水滴達到終端速度時，速度沒有變化因此合力矩為零，力矩作用力示意圖如下：



圖四十二

合力矩為零時可以表示成一關係式：

$$-\tau_A + \tau_f = 0 \quad \text{式九}$$

其中 τ_A 為黏滯力造成的力矩， τ_f 為摩擦力造成的力矩，黏滯力與滾動方向相反，作負力矩，而摩擦力的方向與滾動方向相同，作正力矩。

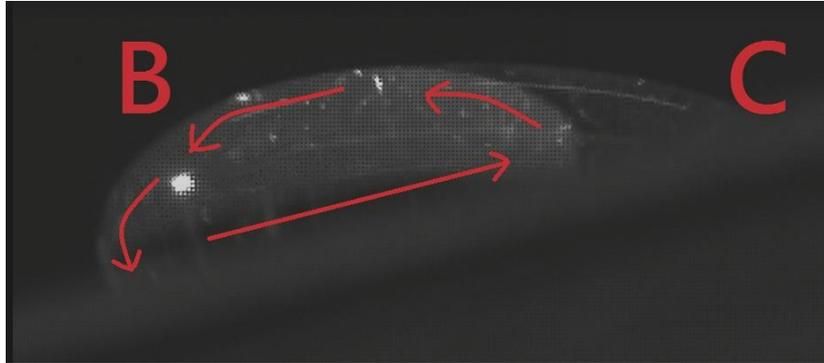
在固定角度下，水滴下滑達到終端速度時，接觸面積會固定，而摩擦力正比於接觸面積，也就是 τ_f 在固定角度時，會有一個最大值。

因為黏滯力正比於速度梯度，當水滴下滑速度還是零的時候， $\tau_f > \tau_A$ ，轉速會逐漸上升，隨著轉速上升， τ_A 也會愈大直到 $\tau_f = \tau_A$ 合力矩為零的時候，轉速不再上升， τ_A 也不再上升，此時水滴下滑即達到終端速度。

隨著斜面傾角愈大，水滴下滑達到終端速度時，接觸面積會愈大，也就是 τ_f 會愈大，那麼 τ_A 得上升到更大且追更久才會達到合力矩為零，而因為力矩作用的更多使得角速度和角動量皆更大。

七、

上面討論水滴的表面會滾動，而我們利用高速攝影機側面拍攝出達到終端速度時並有衛生紙屑在內部運動的水滴(如下圖)，會發現前端 **B** 有在轉動，**C** 則沒有轉動地被拖曳著，而這兩部分被會滾動的表層像是膜一樣包覆著。



圖四十三

當斜面傾角為零度時，**C** 的體積為零，**B** 的體積即為水滴的體積，隨著斜面傾角上升，下滑時達到終端速度的水滴會愈扁，**B** 的體積會愈小、**C** 的體積會愈大。

水滴在體積固定且達到終端速度時，**B** 比起 **C** 更類似於球體，也就是 **B** 的體積和表面積的比值會大於 **C**，那麼隨著斜面傾角上升，前端 **B** 的體積會減少且等於後端 **C** 增加的體積，但是 **B** 減少的表面積卻小於 **C**，延伸到接觸面積上的來看，**C** 對表面積的影響比 **B** 大，且 **C** 又比 **B** 扁，那麼 **C** 對於底面積(接觸面積)的影響會比 **B** 還要大。

當斜面傾角較小時，**B** 的體積遠大於 **C**，因此 **B** 對於接觸面積的影響比 **C** 顯著，隨著斜面傾角上升，**C** 對接觸面積的影響漸漸追上 **B** 並且超越它，使得接觸面積隨著斜面傾角的變化趨勢產生差異，而實驗五的數據圖中也呈現出接觸面積的變化趨勢有分段的情形。

接觸面積的變化會直接影響到摩擦力造成的力矩大小，也就影響到終端速度的大小，而實驗四的數據圖中能觀察出終端速度隨斜面傾角的變化趨勢也有分段，且終端速度與接觸面積隨著斜面傾角的變化趨勢轉折點幾乎相同。

八、

在傾角為零度時，水滴因為受到表面張力的反作用力影響(斜面拉水滴)，會在斜面上呈現半球形，此時前、後角皆為銳角(如圖四十四)，左右力平衡靜止於斜面上，但是隨著斜面傾角逐漸增加且水滴會穩定下滑時，水滴前端與斜面的銳角 a 會越來越大，躍過直角而形成一鈍角，後端與斜面的銳角 b 則是越來越小，維持為一銳角。

在測量水滴前角 a 與後角 b 隨著斜面傾角變化的實驗中，從小角度的數據中可以看出表面張力反作用力的斜面分力隨著斜面傾角增大而有增加的趨勢，不過當水滴在斜面傾角和終端速度大的時候，拍攝前角與後角會模糊不清，因此無法精確測量。

水滴穩定下滑時，表面張力反作用力的斜面分力 $F_\gamma \cos a$ 與 $F_\gamma \cos b$ 皆作為下滑力的阻力，又因其是作用在接觸面上(與接觸面的周長有關)，所以它對於水滴的影響類似於摩擦力，而前面討論出摩擦力與接觸面積有正比關係，而接觸面積愈大也會使接觸面的周長愈大，還有在水滴的周長上，每個點的夾角大小又不相同，單看前角與後角的變化也不太正確，頂多能作為變化趨勢的指標，這些都使我們無法精確分辨表面張力反作用力的斜面分力對於終端速度的影響。

水滴在滾動時，表面張力的反作用力在水滴前半段與後半段所造成的力矩方向相反，而前半段與後半段的力大小相近，因此在變因是斜面傾角大小的實驗中，其造成的力矩變化相互抵銷，所以我們忽略其對於滾動速度變化的影響。



圖四十四

九、

隨著斜面傾角增加，水滴會因為重力作用而導致接觸面積變大、高度變低、後角變小，因為後角逐漸變小，使水滴後端沿著表面向前端拉的表面張力分力變大，可以加速後方的水滴向前補足，但是垂直於斜面的表面張力分力卻會愈來愈小，當水滴質量一超過 M_b 時，水滴與斜面間的凡得瓦力大於將底面水分子向上拉的表面張力分力時，水滴後端的水分子就會被拉住，留在表面上，也就是水滴下滑時會在斜面上留下小水滴。

柒、結論

- 一、當斜面傾角固定時，水滴有一定的質量範圍，使其能夠不留下小水滴地穩定下滑。
- 二、水滴穩定下滑時，內部前端的水分子會做類似圓周運動，內部後端的水分子會相對於水滴質心靜止，表層的水分子會如履帶般滾動，底層的水分子相對於斜面的速度為零。
- 三、當斜面的傾角越大時，水滴能夠穩定下滑的 M_a 、 M_b 越小，質量範圍也越小，且質量變化漸趨平緩。
- 四、當斜面傾角固定時，水滴的質量愈大，終端速度愈快，且終端速度隨質量增加的變化率也愈大。
- 五、當水滴穩定下滑時，阻力與終端速度的關係可表示為：

$$F_d = \alpha'(V_t)^{0.155} \qquad F_d = \beta'(V_t)^{0.134}$$

因為質量的差異，所以阻力與水滴終端速度的關係式中，次方數與常數會有所不同。

- 六、水滴穩定下滑時，只有滾動，摩擦力對滾動作正力矩，黏滯力作負力矩。
- 七、當水滴從靜止開始下滑時， $\tau_f > \tau_A$ ，合力矩為正力矩，轉速會逐漸上升，隨著轉速上升， τ_A 也會愈大直到 $\tau_f = \tau_A$ 合力矩為零的時候，轉速不再上升， τ_A 也不再上升，此時水滴下滑即達到終端速度。
- 八、摩擦力主要是受到凡得瓦力的影響，而凡得瓦力正比於接觸面積，故摩擦力會與接觸面積成正比
- 九、隨著斜面傾角上升，下滑力增大，水滴下滑達到終端速度時的接觸面積也愈大，摩擦力所造成的最大力矩也會上升。
- 十、摩擦力所造成的最大力矩會隨著斜面傾角增加而上升，因此 τ_A 要更久才能追上 τ_f ，力矩作用得更多，角動量和角速度皆會更大。
- 十一、水滴下滑從靜止加速達到終端速度時，會累積角動量，使水滴內部前段部分做圓周運動，後段則是相對於水滴質心靜止。
- 十二、固定質量的水滴下滑達到終端速度時，隨著斜面傾角改變，水滴內部前段能做圓周運動 **B** 的體積變化量，將等同於後段相對靜止於水滴質心 **C** 的體積變化量；但 **B** 較 **C** 類似於球體，因此相同體積變化下，**B** 對接觸面積的影響會小於 **C**。
- 十三、斜面傾角較小時，**B** 的體積遠大於 **C**，對接觸面積的影響較顯著；隨著斜面傾角上升，**C** 的體積會追上 **B** 甚至超越 **B**，此時 **C** 對接觸面積的影響較顯著，因此接觸面積隨斜面傾角的變化趨勢會有不同。
- 十四、表面張力反作用力的斜面分力會隨著斜面傾角增加而變大。

捌、未來展望

一、

當我們做水滴質量大於 M_b 的終端速度時，水滴的運動情形會變得不穩定，原本在質量範圍內的水滴會在斜面上筆直的下滑，然而大於 M_b 的水滴因為在下滑過程中會逐漸拉長變形，使受力不均、速度過快而導致水滴無法直線下滑。

在現實生活中，工廠切割金屬板時，由於兩端會受到機器的外力作用，導致金屬板的邊緣會呈現些許凹凸不平，然而就如同封面的照片所示，我們用來計時的光電計時器感應組寬為 8 公分，所以我們的金屬板僅有 7 公分寬；假如之後能找到另一種計時方法，不會限制金屬板的寬度，應該能解決表面些許不平的問題，同時我們就可以觀察變質量水滴下滑時達到的終端速度、剩餘質量與斜面傾角之間的關係。

二、

實驗六中探討水滴下滑達到終端速度時，前端與後端夾角和終端速度的關係，但是水滴在下滑的過程中，形狀類似橢圓形，因此在水滴的兩側也會有表面張力作用而不同位置夾角也不相同，因此不能只探討前端與後端的夾角，希望未來可用全方位攝影來計算表面張力真正對水滴造成的影響。

三、

實驗一中，當水滴穩定下滑時，水滴前端內部會像球體一般繞水滴質心轉動，但是我們不能精確測量水滴前端內部的角速度，使我們無法探討角速度隨斜面傾角變化的關係，也無法精確比較角速度和角動量變化的比例差別。

四、

假如把觀察點設在水滴質心，水滴的運動便會繞著該點轉動，距離表面較近的水分子因距質心較遠，相對速度較快，因此在水滴的一層一層之間會有速度的不同而產生速度梯度，對質心造成力矩，不過由於我們無法精確測量出每層的速度與面積，希望未來能夠測量出水滴每一層的速度與面積，精確分析黏滯力對水滴的影響。

五、

在實驗六中有提到隨著速度的增加，接觸面積愈大，連帶著水滴表面張力反作用力的斜面分力也會跟著愈大，因此在我們的實驗中無法獨立出單一變因下，對終端速度造成的影響，而且黏滯力的計算必須要使用到納維--斯托克斯方程，其對我們來說艱深難解，假如將來能夠設計出實驗分離此二種變因，並能夠活用納維--斯托克斯方程，那我們就可以精確的描述兩力對終端速度個別的影響。

玖、參考資料及其他

一、流體力學 FLUID MECHANICS (Fundamentals and Applications)/
CENGEL、CIMBALA

二、費曼物理學講義[II] 電磁與物質—磁性、彈性與流體第 40、41 章

三、凡得瓦力 維基百科：

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%8C%83%E5%BE%B7%E7%93%A6%E8%80%B3%E6%96%AF%E5%8A%9B>

四、表面張力 維基百科：

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%A1%A8%E9%9D%A2%E5%BC%A0%E5%8A%9B>

五、納維--斯托克斯方程 維基百科：

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BA%B3%E7%BB%B4%EF%BC%8D%E6%96%AF%E6%89%98%E5%85%8B%E6%96%AF%E6%96%B9%E7%A8%8B>

【評語】 040105

本作品很有系統地用實驗的方法經過一系列的實驗探討出水滴在斜面上穩定下滑的條件和運動型式，分析出前端滾動及後端平移的運動模式，表面則如履帶般由表面張力帶動。非常難得。實驗的定性結果極佳，定量之分析仍可以有改進之處。