

中華民國第 54 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

高中組 物理科

第三名

040103

繩圈奇「圓」—繩圈纏繞現象之探討

學校名稱：國立新竹女子高級中學

作者：  高二 周宜婷  高二 張綺云  高二 許瑋庭	指導老師：  高嘉村
---	------------------

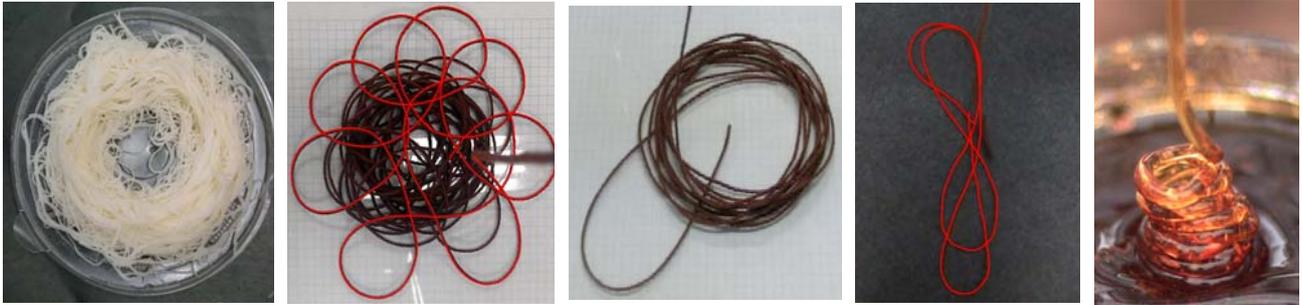
關鍵詞：繩張力、重力、圓周運動

## 摘要

本篇研究細繩落下後的圈繞現象(Coiling of rope)。經實驗發現：圈繞出的繩圈之直徑  $D$ 、週期  $T$ ，隨著細繩的初始高度  $H$ 、下落速率  $U$ 、線密度  $\rho$  的不同而有所差異。也觀察到初始高度或下落速率在某一範圍內，細繩才可圈繞出圓的圖樣。若不在其範圍則無法穩定圈繞出圓，將隨機出現 8 字形或花瓣形圖樣。我們試著找出繩圈之直徑、週期與初始高度、下落速率之間的關係。若設  $D = \alpha H^{\frac{1}{2}} U$ ， $\alpha$  為一待定數。在我們測量的範圍內，無論何種初始高度，隨著下落速率的增加， $\alpha$  值均趨於  $0.06 \text{公分}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{秒}$ 。

## 壹、研究動機

某日，觀察到米粉滑落竹筷後，會在桌面上圈繞成圓。幾次滑落后，發現這個現象具有重複性，且除了圓形外，還有其他的圖樣出現，如花瓣形或8字形等。基於好奇心，我們查詢相關資訊，發現相關文獻大多是以液體為研究對象，例如：蜂蜜、玉米糖漿或洗髮精等。但因為液體流量及流速控制不易，我們改以細繩作為本研究的主題。



圖一(a)

圖一(b)

圖一(c)

圖一(d)

圖一(e)

圖一：米粉、細繩與蜂蜜的圈繞現象

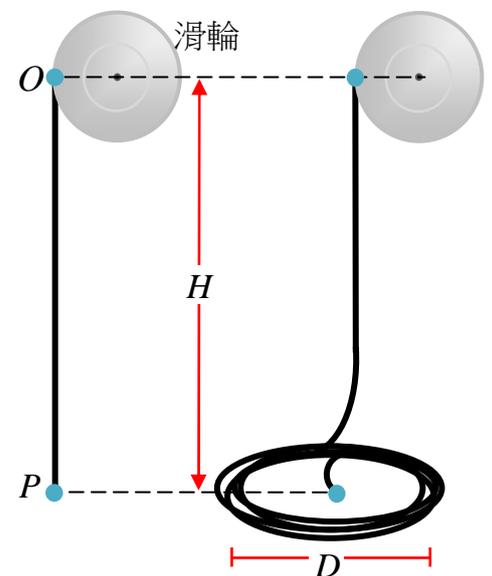
## 貳、名詞定義與研究目的

### 一、物理量定義

為了方便描述，我們先將本次研究中所遇到的物理量作介紹與定義。

編碼	物理量	符號	意義
1	週期	$T$	細繩圈繞一圈所需時間
2	頻率	$f$	一秒所繞圈數
3	速率	$U$	細繩每秒落下的距離
4	線密度	$\rho$	細繩單位長度的質量
5	繩最高點	$O$	細繩離開滑輪處
6	觸地點	$P$	細繩與地面接觸點
7	高度	$H$	繩最高點到觸地點的距離
8	直徑	$D$	圈繞出圓的直徑

表一：名詞定義



圖二：細繩繞圈示意圖

### 二、研究目的

- (一) 繩圈以順或逆時針方向圈繞之原因探討
- (二) 探討圈繞出圓形、8字形、花瓣形之條件
- (三) 探討細繩高度對圓形繩圈的影響
- (四) 探討細繩下落速率對圓形繩圈的影響
- (五) 探討細繩之線密度對圓形繩圈的影響

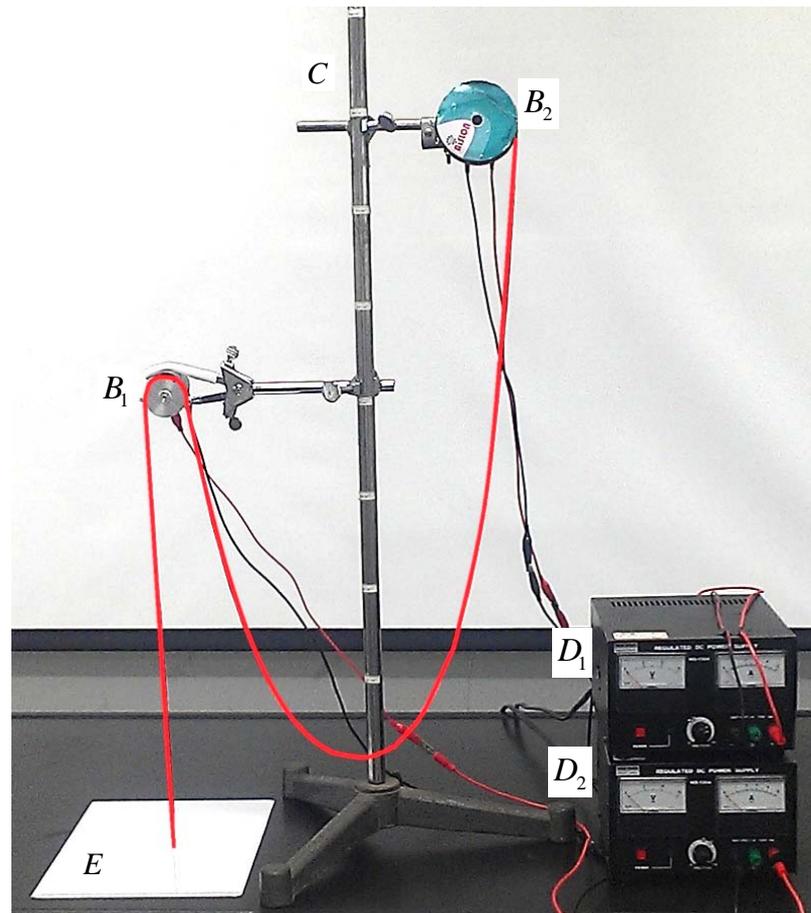
## 參、研究設備及器材

### 一、研究設備及器材

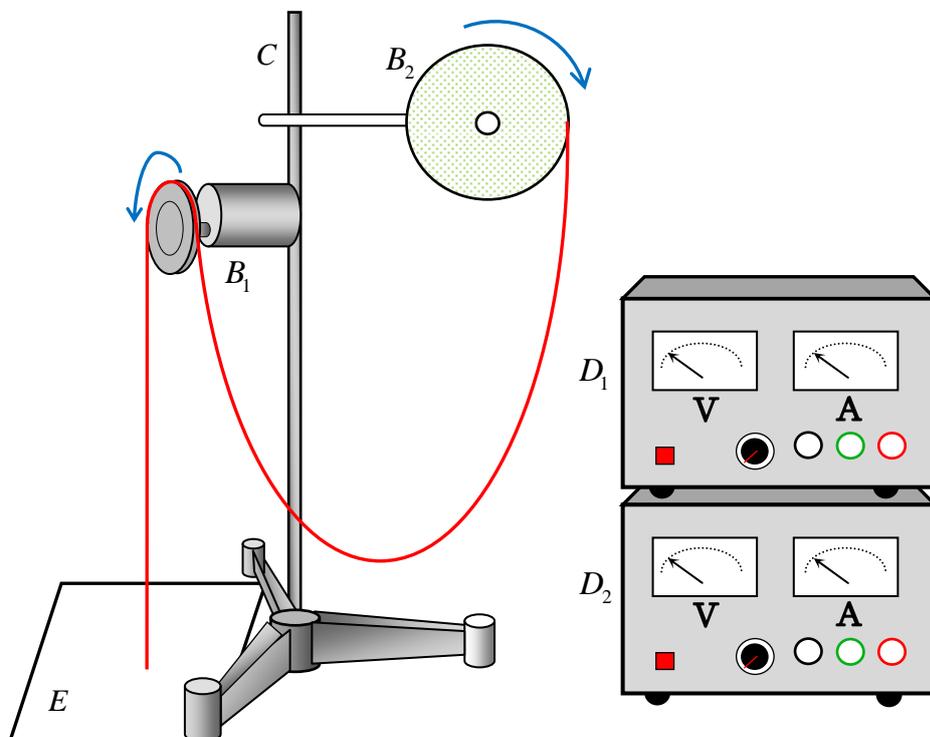
編號	名稱	圖	說明
$A_1$	細繩 1		(1)總長 25 公尺、15 公克。 (2)線密度 0.6 公克/公尺。
$A_2$	細繩 2		(1)總長 25 公尺、50 公克。 (2)線密度 2.0 公克/公尺。
$B_1$	減速馬達 1		(1)加裝滑輪作為軌道。 (2)控制細繩最高點 $O$ 。
$B_2$	減速馬達 2		加裝收繩盒，以利細繩之收放。
$C$	腳架		於架身標上刻度，以利操作。
$D_1$	電源供應器 1		控制減速馬達 $B_1$ 。
$D_2$	電源供應器 2		控制減速馬達 $B_2$ 。
$E$	壓克力板		(1)規格：297×210 毫米。 (2)防止細繩滑動。
$F$	100cm 鐵尺		精確度為 1 釐米。

表二：研究設備及器材

## 二、實驗裝置



圖三(a)：實驗裝置



圖三(b)：實驗裝置示意圖

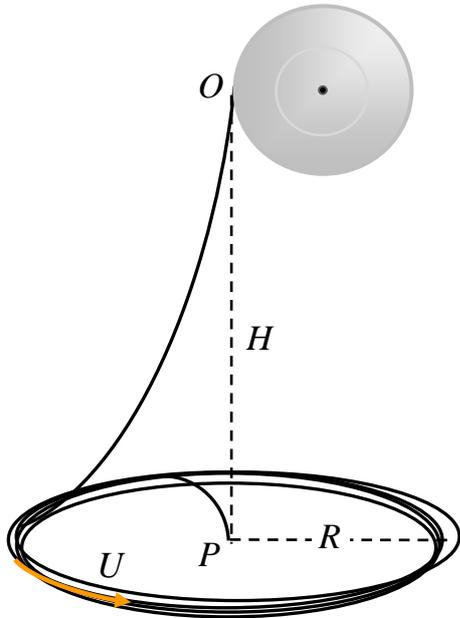
### 三、裝置說明

- (一)減速馬達  $B_1$ ：控制細繩落下的速率  $U$ 。並於  $B_1$  轉軸上固定上一滑輪，使其穩定地輸送細繩，並以電源供應器  $D_1$  控制  $B_1$  轉速。
- (二)減速馬達  $B_2$ ：提供一穩定的細繩供輸系統，減少人為拉線所造成的實驗誤差，以電源供應器  $D_2$  控制轉速。
- (三)細繩的乾燥度：在檢驗實驗的重複性時，發現細繩的乾燥程度會影響實驗結果。我們以乾燥箱控制細繩的乾燥度。
- (四)接觸面  $E$ ：以平整壓克力板作為接觸面。

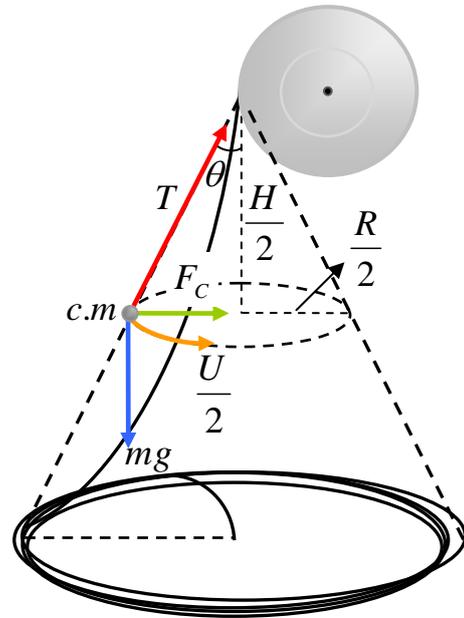
## 肆、實驗原理

### 一、錐動擺近似

經實驗發現當落下的細繩穩定圈繞出圓時，在空中的細繩亦隨之圈繞，其質心( $c.m$ )運動相似於錐動擺，如圖四。因此我們嘗試用錐動擺理論並將空中的細繩視為直線，以解釋繩圈的圈繞現象。



圖四(a)



圖四(b)

圖四：錐動擺近似

### 二、理論分析

若細繩離開滑輪時的高度為  $H$ 、細繩下落速率為  $U$ ，圈繞出的繩圈半徑為  $R$ ，如圖四(a)。

依比例關係可設質心速率為  $\frac{U}{2}$ 、旋轉半徑為  $\frac{R}{2}$ ，藉等速圓周運動可寫出：

$$a_c = g \tan \theta = \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^2}{\left(\frac{R}{2}\right)} \quad \text{式(1)}$$

又  $\tan \theta = \frac{R}{H}$ ，式(1)改寫為：

$$\frac{gR}{H} = \frac{U^2}{2R} \quad \text{式(2)}$$

整理可得  $R$  與  $H$ 、 $U$  之間的關係：

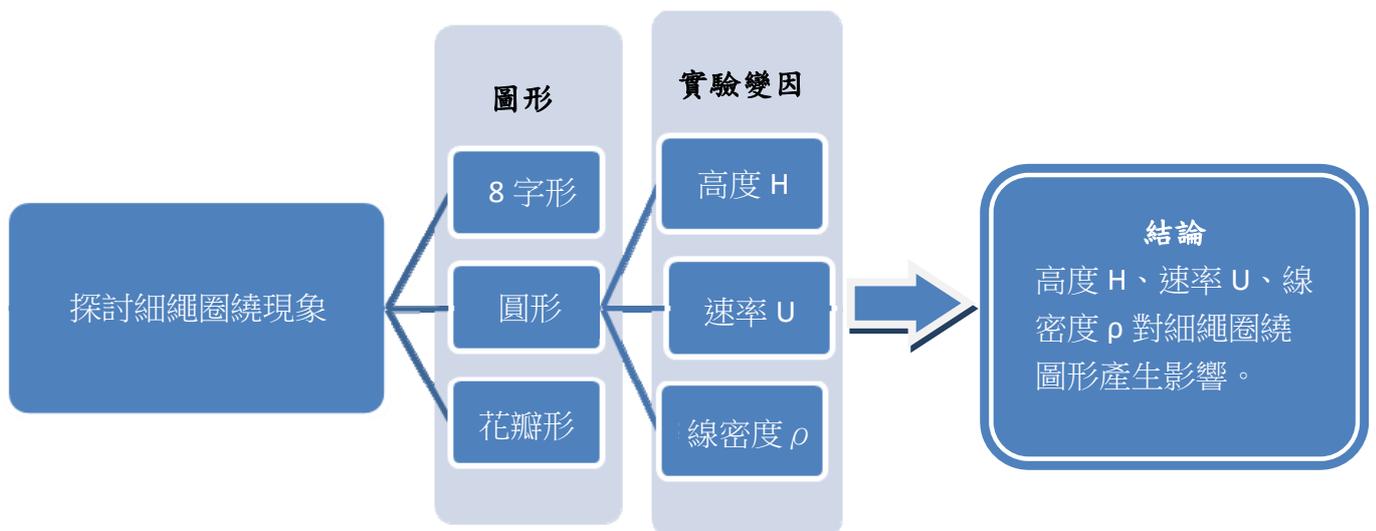
$$R = \sqrt{\frac{H}{2g}} U \quad \text{式(3)}$$

則週期  $T$  為：

$$T = \frac{2\pi R}{U} = \pi \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad \text{式(4)}$$

## 伍、研究過程及方法

### 一、實驗流程圖



圖五：實驗流程圖

### 二、實驗方法

(一)對細繩順、逆時針方向圈繞觀察

觀察數種纏繞方式不同細繩之圈繞方向。

(二)圓形、8字形與花瓣形觀察

觀察並記錄圓形、8字形與花瓣形出現之高度  $H$ 、速率  $U$ 。

(三)探討高度  $H$ 、速率  $U$  與線密度  $\rho$  對圓形繩圈的影響

1.速率  $U$  測量

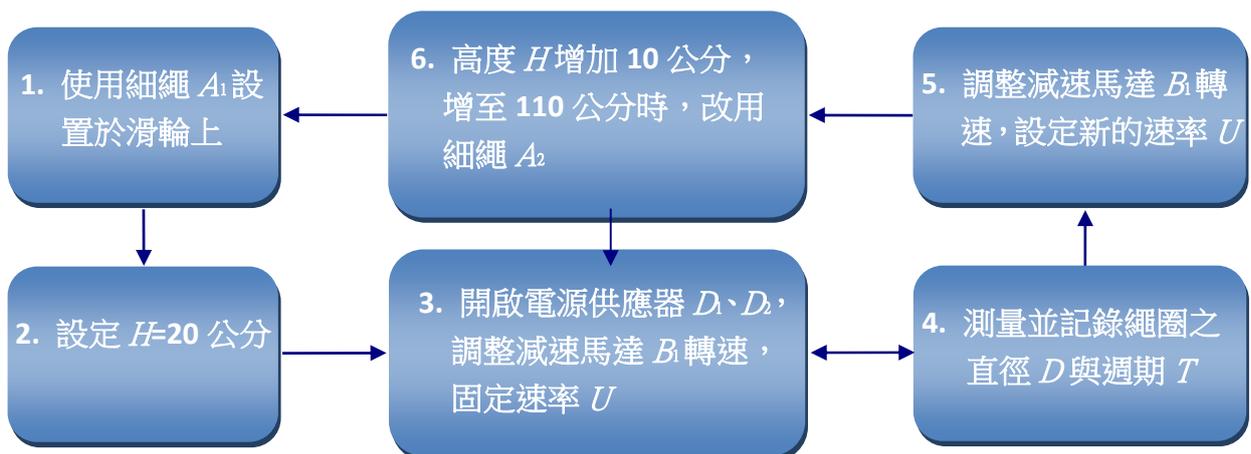
以電源供應器  $D_1$  調整減速馬達  $B_1$  轉速，計算下落細繩之長度與下落時間的比值，該值即為速率  $U$ 。

## 2. 繩圈直徑 $D$ 與週期 $T$ 之測量

- (1) 細繩落下後，第 1 圈似橢圓，不予記錄。
- (2) 為減少實驗誤差，依操作經驗決以第 2 圈到第 11 圈為記錄圈數。
- (3) 將圈繞 10 圈的時間除以 10 為週期  $T$ 。
- (4) 將 10 圈之總長度除以  $10\pi$  為直徑  $D$ 。

## 3. 實驗步驟

- (1) 使用細繩  $A_1$ ，設置於滑輪上，並將細繩末端與壓克力板  $E$  恰碰觸。
- (2) 設定高度  $H = 20$  公分。
- (3) 開啟電源供應器  $D_1$ 、 $D_2$ ，調整減速馬達  $B_1$  轉速，固定速率  $U$ 。
- (4) 測量並記錄繩圈之直徑  $D$  與週期  $T$ 。
- (5) 調整減速馬達  $B_1$  轉速、設定新的速率  $U$ ，重複步驟 3~4。
- (6) 高度  $H$  增加 10 公分，重複步驟 3~5，直至高度  $H = 110$  公分。
- (7) 細繩改為  $A_2$ ，重複步驟 2~6。



圖六：探討高度  $H$ 、速率  $U$  與線密度  $\rho$  對圓形繩圈影響的實驗步驟圖。

## 陸、結果與討論

### 一、實驗結果

#### (一)繩圈圈繞方向之觀察

經實驗發現，細繩落下平面後其圈繞方向為順或逆時針與其繩本身的纏繞方向有關。若細繩入紙面方向為順時針纏繞，其圈繞方向多為順時針，且可產生穩定的圓圈，如圖七；若發生逆時針圈繞時，則可能會出現不穩定的8字形與花瓣形，如圖八。若細繩入紙面方向為逆時針纏繞，其結果則反之。



圖七(a)

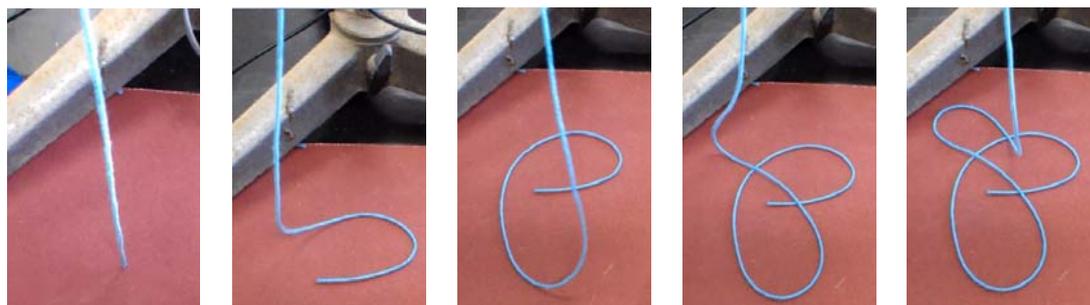
圖七(b)

圖七(c)

圖七(d)

圖七(e)

圖七：細繩穩定圈繞出圓的過程。



圖八(a)

圖八(b)

圖八(c)

圖八(d)

圖八(e)

圖八：細繩圈繞出8字形過程。

#### (二)8字形、花瓣形觀察

由實驗中觀察出細繩之圈繞方向非為本身纏繞方向時，圈繞過程不穩定，易出現8字形、花瓣形。高度 $H$ 、速率 $U$ 過大或過小時亦容易圈繞出8字形、花瓣形。



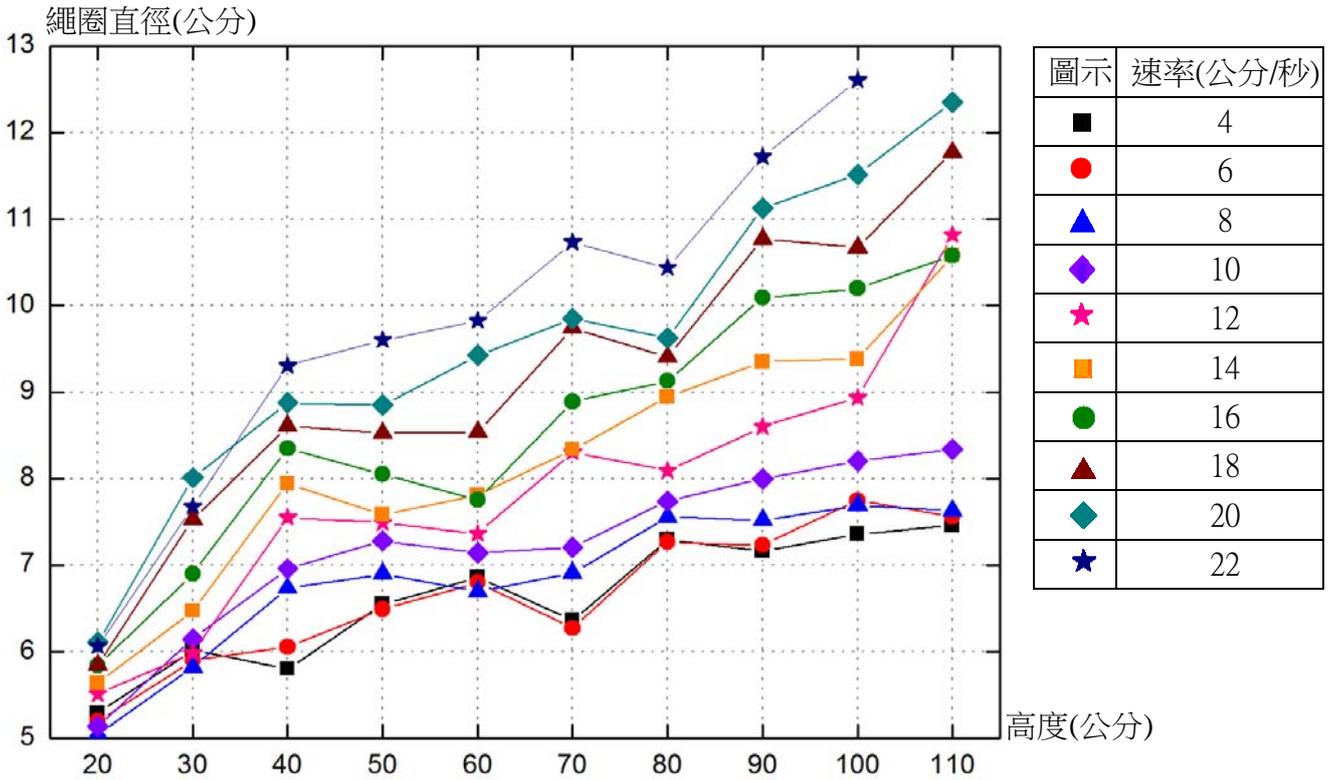
圖九(a)

圖九(b)

圖九：細繩圈繞出8字形與花瓣形。

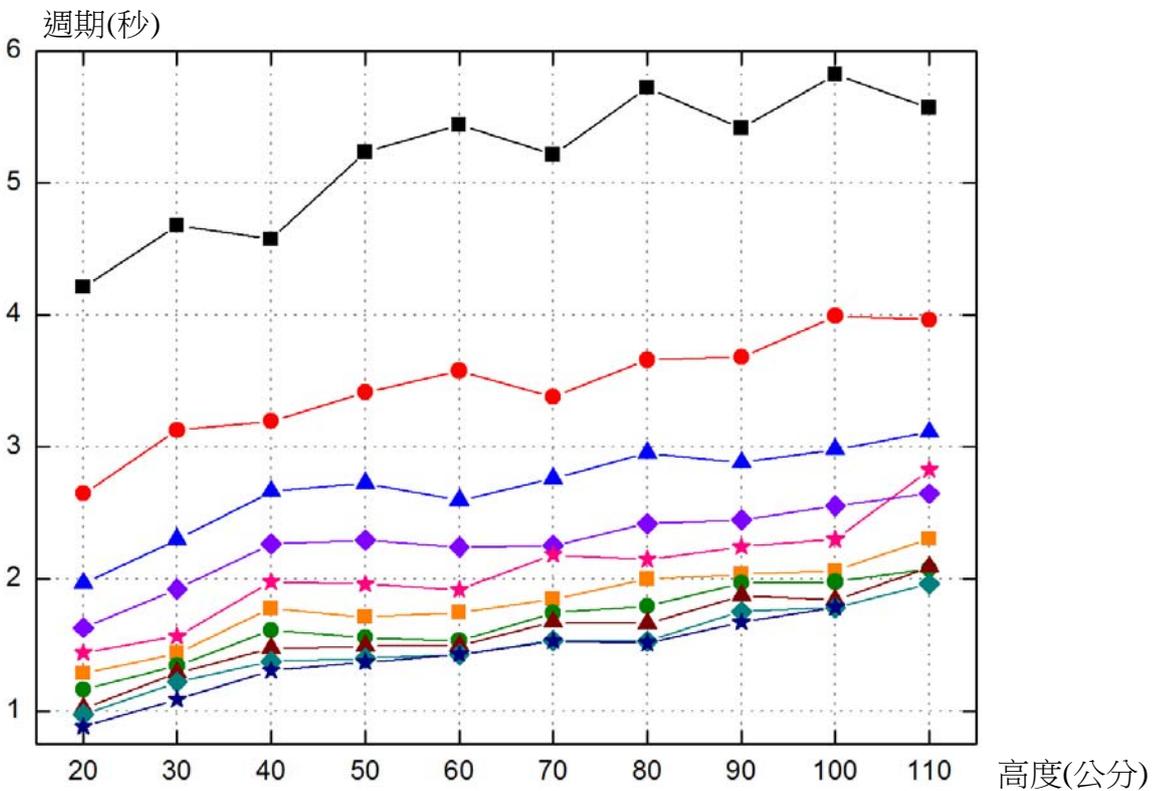
(三)當細繩  $A_1$  穩定圈繞出圓時，高度  $H$ 、速率  $U$  對繩圈之直徑  $D$ 、週期  $T$  的影響

1. 【高度  $H$  對繩圈直徑  $D$  的影響】



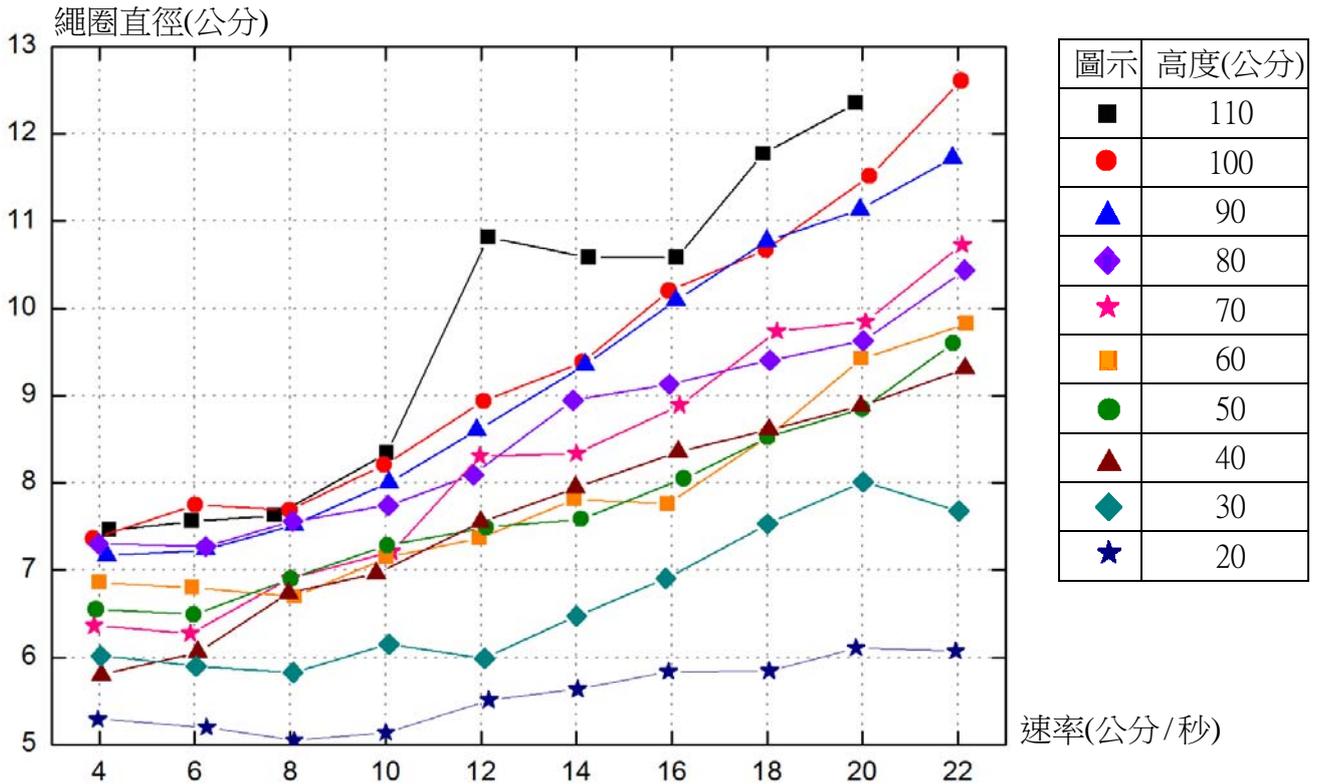
圖十：隨著高度增加，繩圈的直徑也增加。

2. 【高度  $H$  對繩圈週期  $T$  的影響】



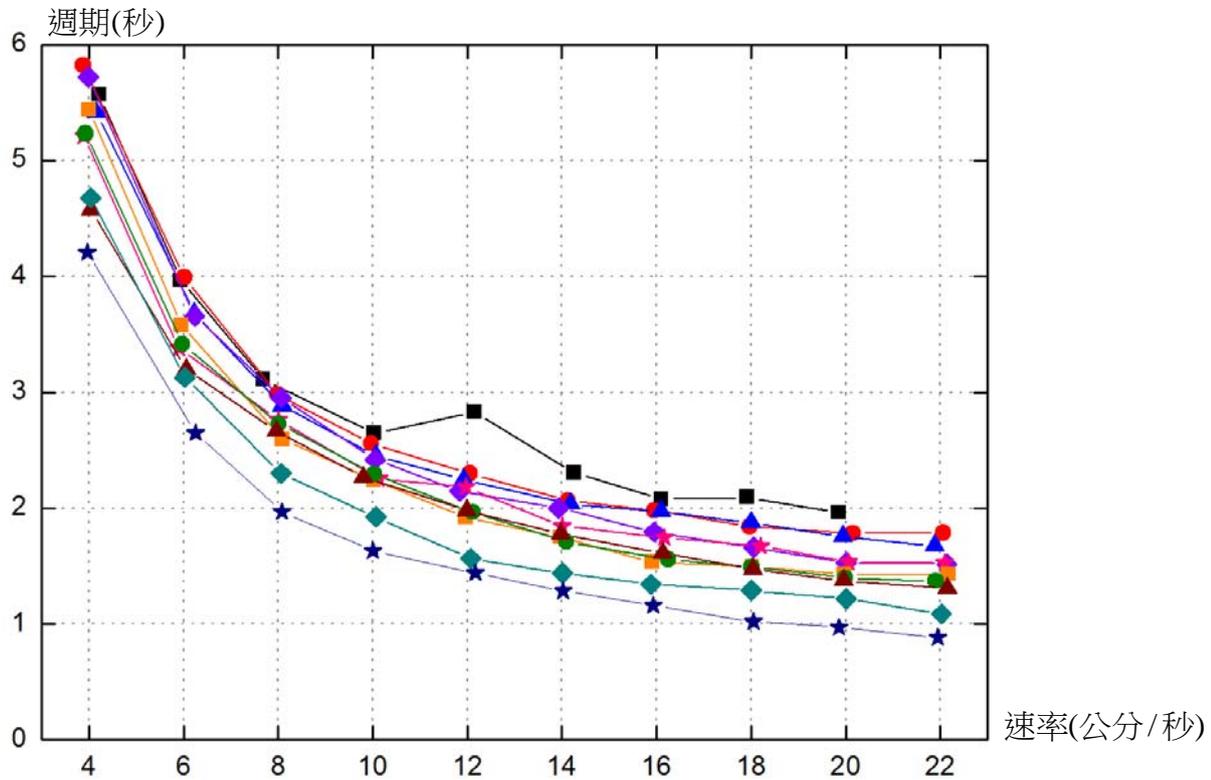
圖十一：隨著高度增加，繩圈的週期也增加。

### 3. 【速率 $U$ 對繩圈直徑 $D$ 的影響】



圖十二：隨著速率的增加，繩圈直徑亦增加。

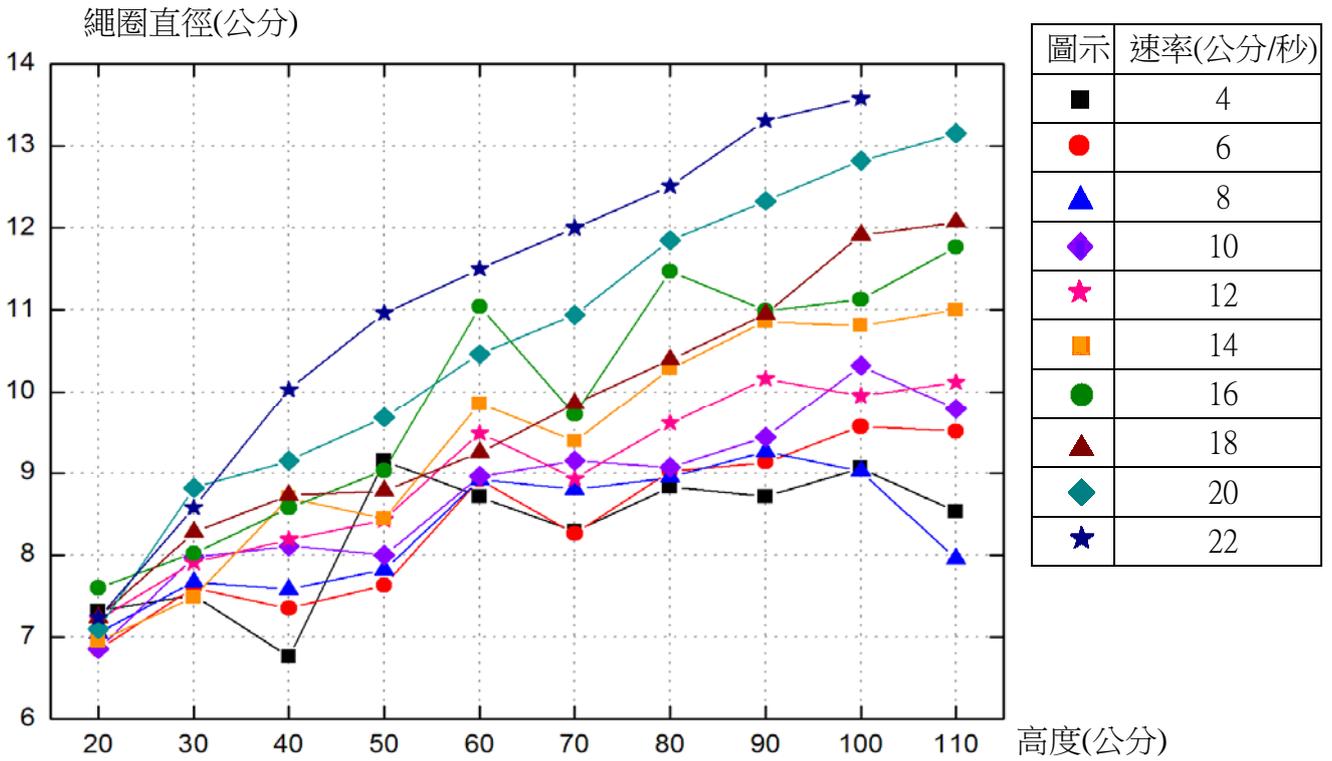
### 4. 【速率 $U$ 對繩圈週期 $T$ 的影響】



圖十三：隨著速率的增加，繩圈週期隨之減小。

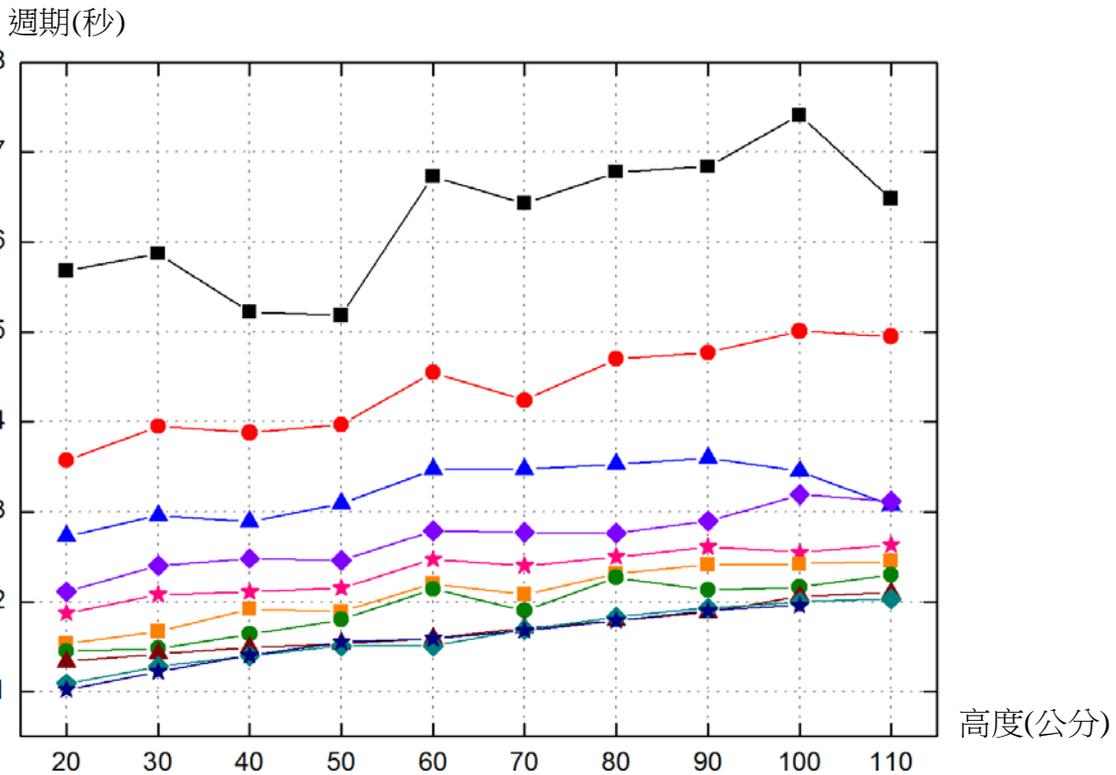
(四)當細繩  $A_2$  穩定圈繞出圓時，高度  $H$ 、速率  $U$  對圓之直徑  $D$ 、週期  $T$  的影響

1. 【高度  $H$  對繩圈直徑  $D$  的影響】



圖十四：隨著高度增加，繩圈的直徑也增加。

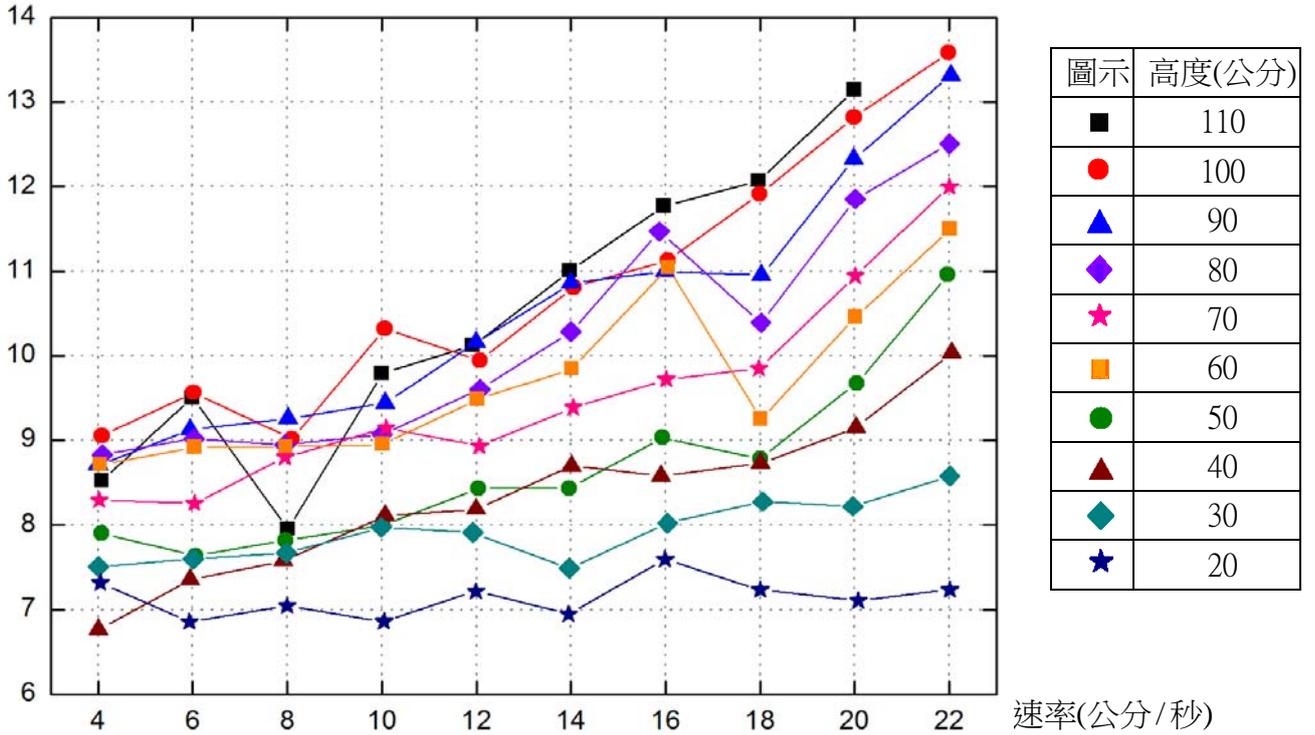
2. 【高度  $H$  對繩圈週期  $T$  的影響】



圖十五：隨著高度的增加，繩圈的週期隨之增加。

### 3. 【速率 $U$ 對繩圈直徑 $D$ 的影響】

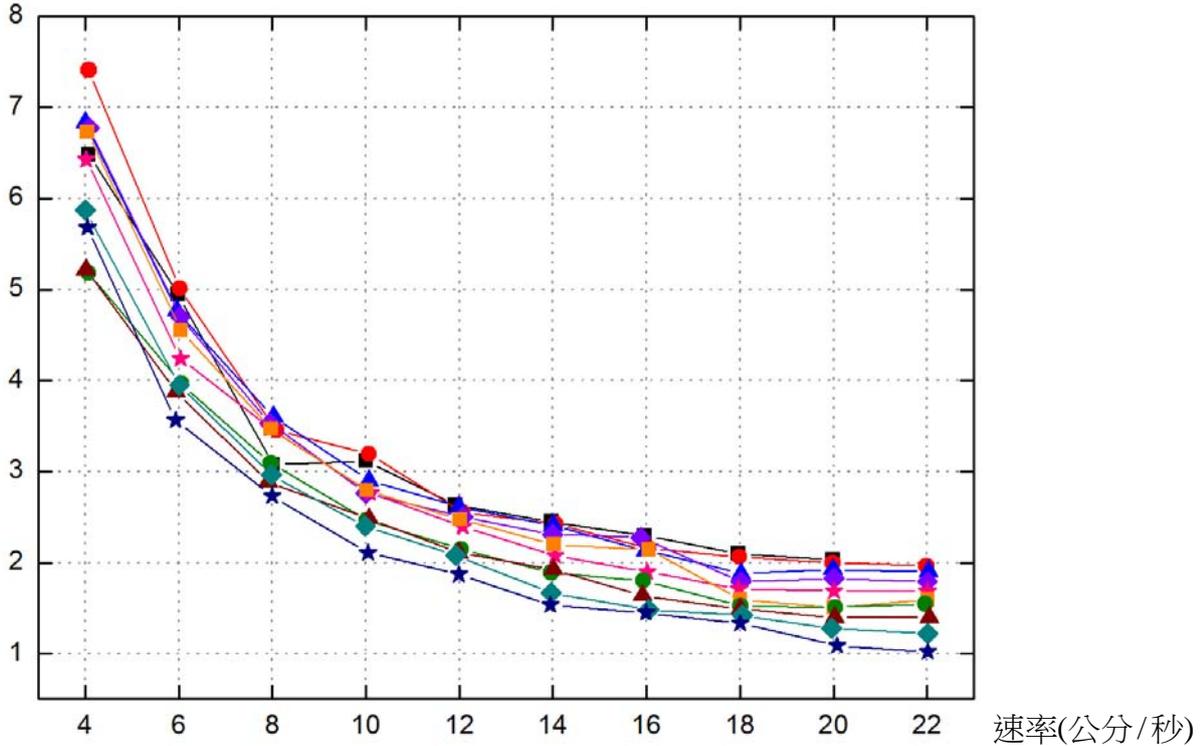
繩圈直徑(公分)



圖十六：隨著速率的增加，繩圈直徑亦增加。

### 4. 【速率 $U$ 對繩圈週期 $T$ 的影響】

週期(秒)



圖十七：隨著速率的增加，繩圈週期隨之減小。

## 二、討論

### (一)細繩圈繞出 8 字形、花瓣形的原因

從實驗發現，當高度  $H$  與速率  $U$  過大或過小時，細繩易圈繞出 8 字形、花瓣形。關於此點我們解釋為：當圈繞過程速率過大或半徑過小，繩圈繞圈時需更大的向心力，若向心力不夠細繩會沿切線方向切出，造成 8 字形、花瓣形圖樣。

### (二)高度對繩圈的影響

#### 1. 直徑與高度間的關係

從圖十與圖十四可知：在固定速率  $U$  下，繩圈的直徑  $D$  隨著高度  $H$  的增加而變大，這與式(3)所表現的趨勢相同。

#### 2. 週期與高度間的關係

圖十一與圖十五中顯示：繩圈的週期隨著高度的增加，這與式(4)表現的趨勢相同。

### (三)速率對繩圈的影響

#### 1. 直徑與速率間的關係

依式(3)，繩圈的直徑  $D$  正比於速率  $U$ ，將其與我們實驗結果圖十二與圖十六比較。雖然從實驗結果無法看出正比的關係，但仍可看出直徑  $D$  正相關於速率  $U$ 。

#### 2. 週期與高度間的關係

依式(4)，繩圈的週期  $T$  與速率  $U$  無關，但實驗結果圖十三、圖十七卻顯示隨著週期  $T$  隨著速率  $U$  的增加而減小。但分析圖後發現，當速率增大時，其  $T-U$  圖斜率減少，意味著在速率  $U$  較大時，週期  $T$  與速率的相關性降低。

### (四)直徑與高度、速率間的關係分析

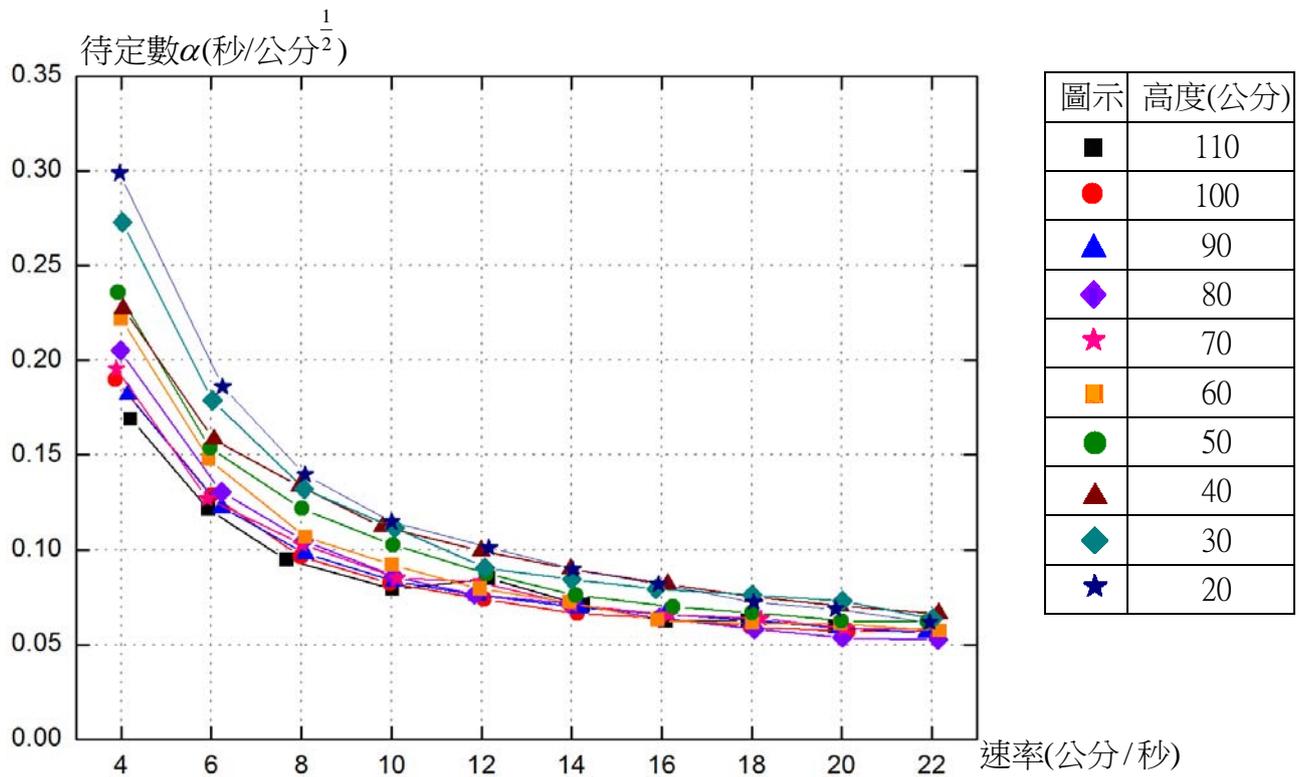
從討論(一)、(二)，我們假設直徑  $D$  與高度  $H$ 、速率  $U$  間的關係為：

$$D = \alpha H^{\frac{1}{2}} U, \alpha \text{ 為一待定數} \quad \text{式(5)}$$

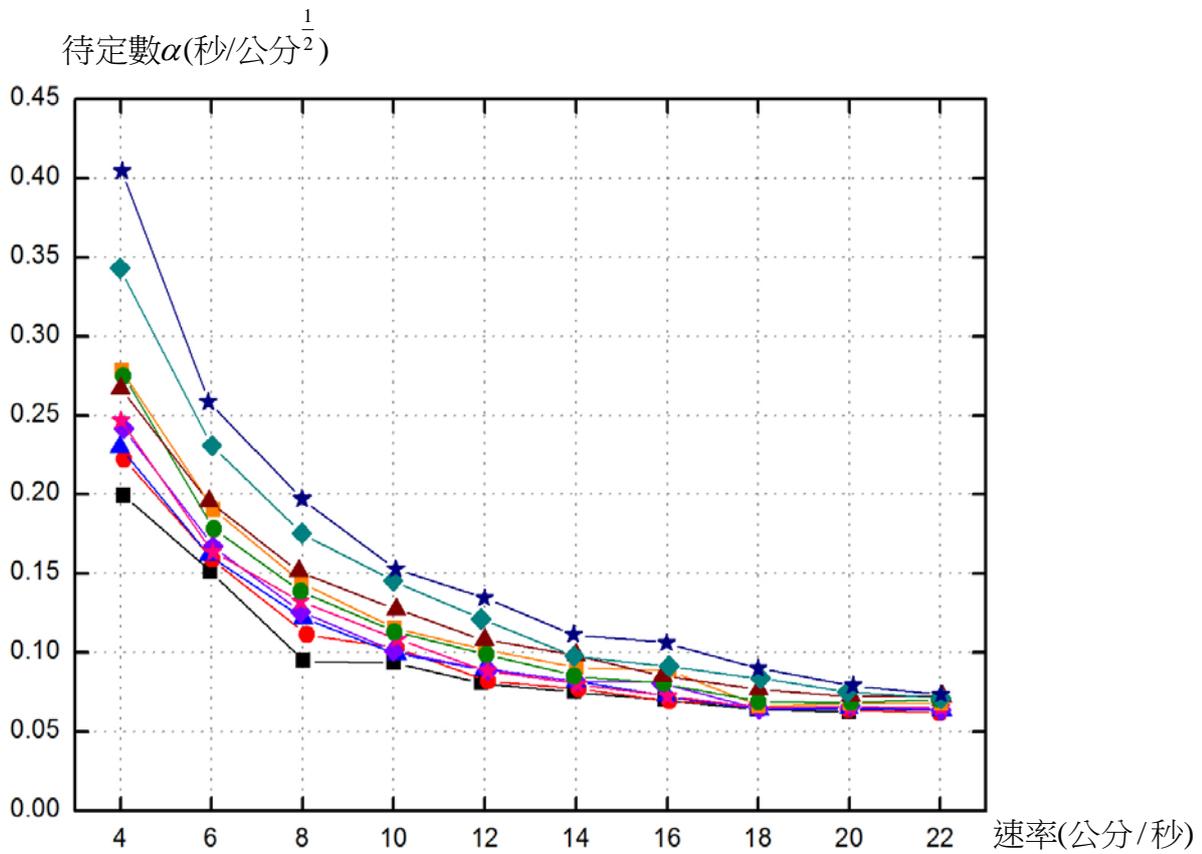
分別討論細繩  $A_1$  與  $A_2$  其待定數  $\alpha$  與速率  $U$  的關係，結果如圖十八、圖十九所示。比較細繩  $A_1$  與  $A_2$  待定數  $\alpha$  值，發現兩細繩的待定數  $\alpha$  值隨著速率增加均而趨於  $0.06 \text{ 公分}^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{秒}$ 。

### (五)實驗結果與文獻比較

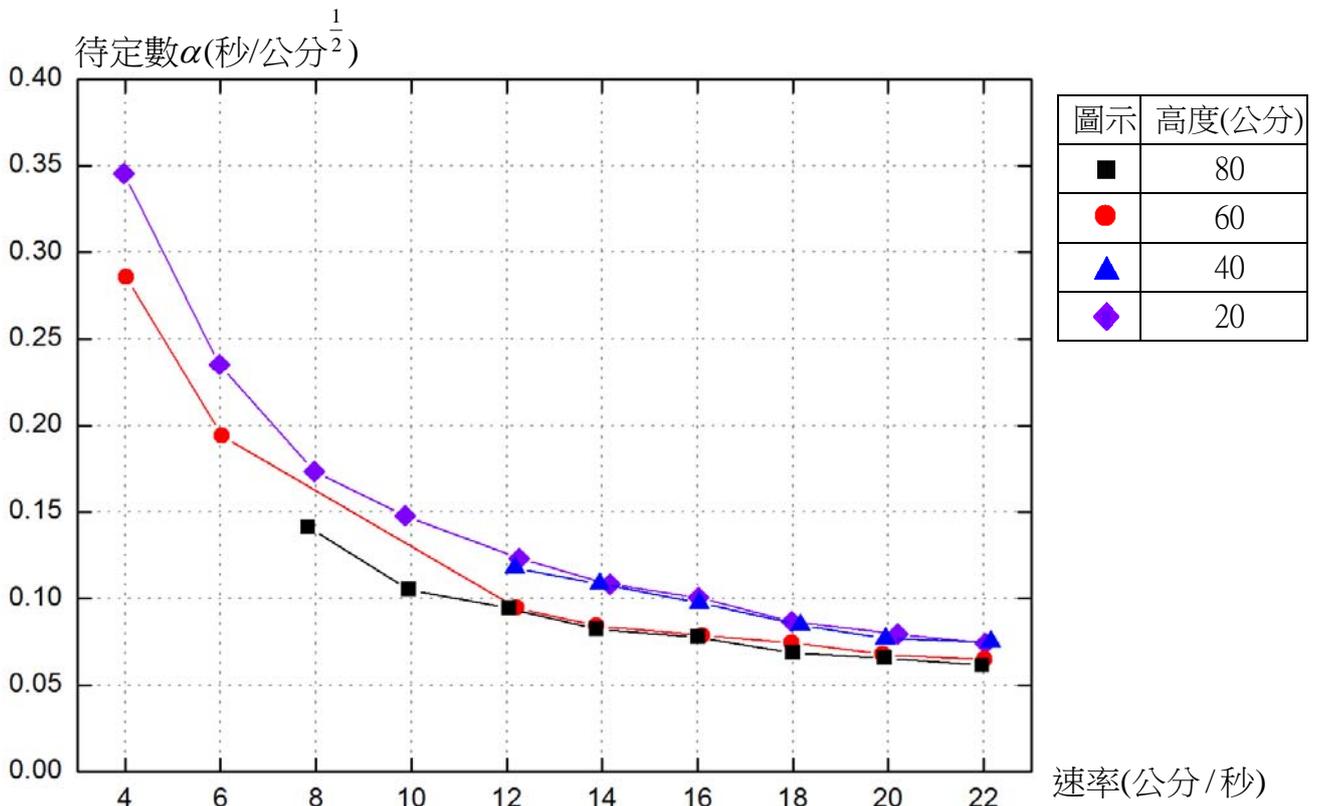
我們將實驗結果與文獻<sup>[1]</sup>比較，發現圖十~圖十七之圖形趨勢大致吻合。



圖十八：細繩  $A_1$  之待定數  $\alpha$  與速率  $U$  的關係圖



圖十九：細繩  $A_2$  之待定數  $\alpha$  與速率  $U$  的關係圖



圖二十：細繩  $A_3$  之待定數  $\alpha$  與速率  $U$  的關係圖

## 柒、結論與未來展望

### 一、結論

#### (一)細繩的選擇

剛開始研究這主題時，發現舊的細繩比較容易穩定圈繞成圓，新的繩子卻容易出現 8 字形與花瓣形。仔細研究後才發現，新的繩子上面有漿、較硬，落下時不易轉彎成圈，故較易出現 8 字形與花瓣形。因此對於實驗用繩，我們都將泡過熱水、烘乾與拉直。

#### (二)細繩的保養

反覆操作同一條細繩，多次後，該繩會被拉長，線密度變小，造成同條細繩前後實驗結果不一。這幾個月來天氣不穩定常下雨，空氣濕度高，影響到繩的乾燥度，造成實驗誤差，因此每當實驗完畢，便將細繩收回乾燥箱，讓細繩保持乾燥。

#### (三)實驗繩樣本數太少

我們嘗試多種的細繩，甚至於麵條、米粉等，但僅有極少數的細繩可穩定地圈繞出圓。至後僅找到  $A_1$ 、 $A_2$  兩細繩以供研究。理想的研究需要多種類的細繩，以提供較多的研究數據，交叉比較，如此才能更深入探討圈繞現象。

#### (四)圈繞理論的探究

後來查詢到文獻<sup>[2]</sup>，發現 Mahadevan, and Keller 對圈繞現象有著詳細的理論分析，但礙於數學能力與物理知識的不足，無法從中學習到更多圈繞的理論。

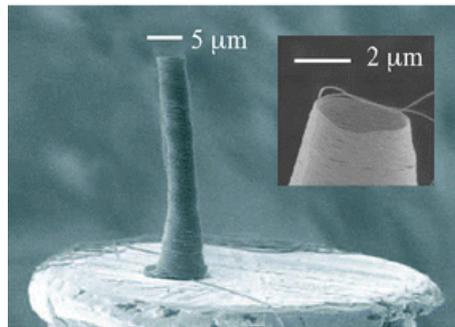
### (五)待定數 $\alpha$

在理論分析中我們曾經以錐動擺找出繩圈半徑、週期與高度、速率之間的關係，雖不如預期中的精確，但趨勢大致符合。最令人驚喜的是：在可以穩定圈繞出圓

的情況下待定數 $\alpha$ 隨著速率的增加而趨近於 $0.06 \text{公分}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{秒}$ 。

### 二、未來展望

從這次實驗中，找出各種線密度下可穩定圈繞出圓的高度或速率之臨界條件、彈性對圈繞現象的影響、和找尋到更多適合研究圈繞現象的細繩，都是未來值得進一步努力的方向。後來發現，不僅在日常生活中存在著圈繞現象，奈米碳管也有著圈繞現象，如圖二十一。或許在未來可以對奈米碳管的圈繞現象做一番的研究。



圖二十一：奈米碳管的圈繞現象<sup>[3]</sup>

### 捌、參考資料及其他

1. Habibi, N. M. Ribe, and Daniel Bonn (2007) “Coiling of Elastic Ropes” Physical Review Letters
2. L.Mahadevan, and Joseph B. Keller (2014) “Coiling of Flexible Ropes” Proceedings of The Royal Society
3. Ho-Young Kim, Minhee Lee, Kun Joong Park, Sungho Kim and, L. Mahadevan(2010) “Nanopottery: Coiling of Electrospun Polymer Nanofibers” , Nano Lett.

## 【評語】 040103

本作品探討繩圈落地纏繞的現象，討論繞圈大小與釋放高度、釋放速率的關係，並嘗試建構理論模型來解釋其所發現的關係，實驗設計與精神值得肯定。