中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第一名

030421

多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討

學校名稱：新竹市立光武國民中學

作者：	指導老師：
國二 蔡奇夆 國二 蘇達亞 國二 李博元	許志箐 魏子超

關鍵詞：重心、中點與重心、頂點與重心

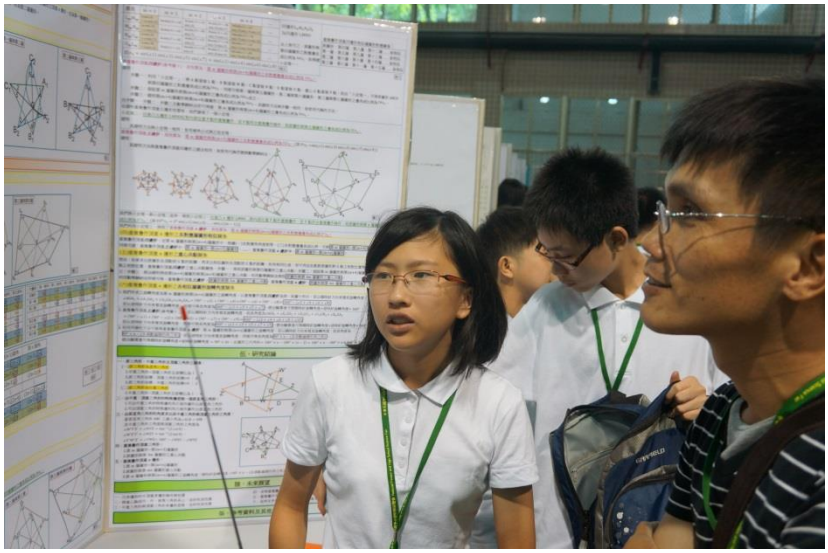
得獎感言

「啊啊啊啊！第一名啊啊！」焦急著坐在坐位上，仔細地聆聽著，終於，期待已久的這一刻到來了……，心中激動不已。

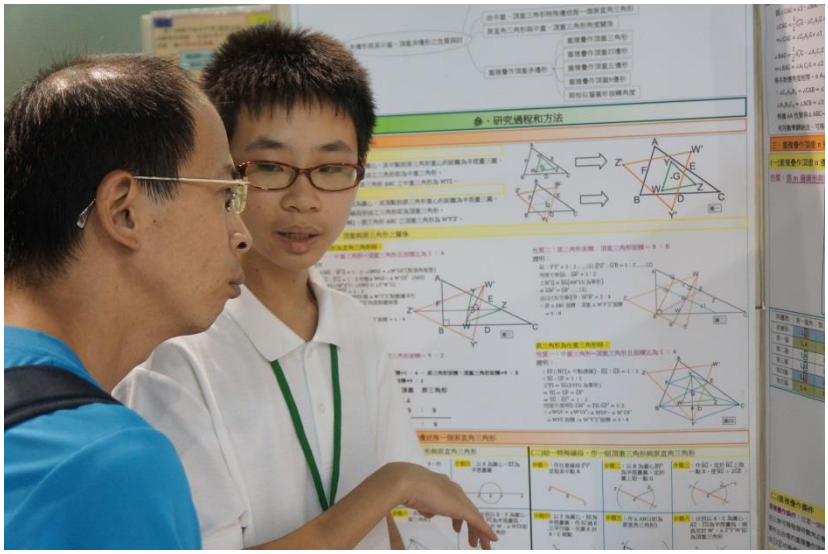
俗諺說：想怎麼收穫，先那麼栽。一句簡單的話，背後蘊含的道理其實大到令人難以想像。在做科展的過程中，我們投注了許多的心血與時光，即便過程中遇到困難仍須努力不懈，譬如有一次，我們作品中一個性質的證明遇到了瓶頸，想了許久都沒有結果，幸虧我們堅持不放棄，總算等到天時地利人和的剎那，終於突破瓶頸、解決難題，那種喜悅與快樂是無法言喻的。又有一次，與同伴發生了溝通的問題，從原本的小事，演變成難以收拾的場面，甚至因而冷戰了約莫兩個星期的時間，後來經過幾次的溝通，大家放下成見、各退一步，問題反而迎刃而解，於是接下來的研究，我們都秉持著互相扶持、持續溝通的態度，繼續走著科展的路，難怪人家會說：「退一步，海闊天空」。

我們真的很愛數學，因為相對於自然，數學總是給人堅定、唯一的感覺，這樣的感覺有種「永恆」和「安定」的美感，但是追求真理的過程中，方法卻又不是唯一，所以像是有種魔力，會讓人不自覺的投入。像我們在證明時，有無數種方法等著我們去試，總會想著：我要先試哪種工具呢？但猶豫的結果就是完全沒有進展，但是只要願意去嘗試，目標就會願來越鮮明，通往目標的道路也會越來越筆直，所以我們學到了：萬事起頭難，但不要害怕開始。雖然我們所學已超越許多人，但這些都還只是茫茫大海中的一片貝殼而已，所需努力的還多著是呢！

其實當時也沒想太多，就是乖乖守本分的做好科展，完全不知道我們有那個榮耀可以進到全國科展的聖殿，看了許多其他組的作品，只覺得完全看不懂，似乎會是強勁的對手，但我們也對自己的作品也有信心，相信我們一定可以拿到好名次的。



為參觀的民眾熱情講解。



有人對我們的作品有興趣，就是種鼓勵。

民眾的問題，讓我們詳盡解答。

摘要

本篇研究直角三角形與其重心、中點、頂點延伸圖形之性質探討，並證明出直角三角形與其重心、中點、頂點延伸圖形逆推方法，接著變化至任意三角形與其重心、中點、頂點延伸圖形的性質探討，然後再推廣至任意多邊形的重心、頂點之延伸圖形的探討，其邊長、角度皆有比值關係。

壹、　研究動機

暑假，我們在觀摩學長姐有關重心的專題研究時，發現重心是個非常特別的點，所以我們覺得重心應該有些尚未被挖掘的秘密吧！於是我們進行了一些測試，發現直角三角形的重心似乎跟中點有關係，接著我們又試驗了許多圖形，最後發現了中重跟原直角三角形的面積比值關係，然後我們想了一下，既然中點有，那麼頂點會不會也有呢？我們用了一樣的方法，發現頂重跟原三角也有面積比值關係，所以展開了我們的研究。

貳、　研究目的

一、探討直角三角形與其中重、頂重三角形的關係
二、探討任意三角形與其中重、頂重三角形的關係
三、已知中重三角形之特殊邊，利用尺規作圖作出其原直角三角形
四、已知頂重三角形之特殊邊，利用尺規作圖作出其原直角三角形
五、原直角三角形及其中重、頂重三角形的角度關係
六、重複疊作頂重三角形的性質探討
七、重複疊作頂重多邊形的性質探討

參、　研究設備及器材

GSP 軟體、電腦、紙、筆

肆、　研究過程與方法

一、　名詞定義：

(一) <u>中重三角形</u>：以原三角形的三邊中點為圓心，三邊的中點到重心的距離為半徑畫圓，三圓的交點連線所形成之三角形為中重三角形。

如圖 1，G 點為直角三角形 ABC 之重心，分別以三邊中點 D、E、F 為圓心，$\overline{GD}$、$\overline{GE}$、$\overline{GF}$為半徑畫圓，三圓分別交於 W、Y、Z，△WYZ 即為△ABC 的中重三角形。

(二) <u>頂重三角形</u>：以原三角形的三頂點為圓心，三頂點到重心的距離為半徑畫圓，三圓的交點連線所形成之三角形為頂重三角形。

如圖 1，分別以三頂點 A、B、C 為圓心，$\overline{AG}$、$\overline{BG}$、$\overline{CG}$為半徑畫圓，三圓分別交於 W'、Y'、Z'，　△W'Y'Z'即為△ABC 的頂重三角形

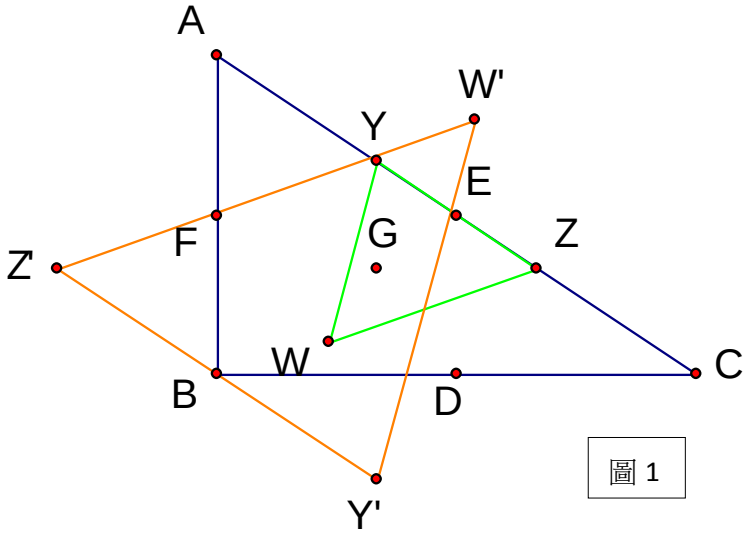


圖 1

二、　探討直角三角形與其中重、頂重三角形性質關係

(一) 中重 △ WYZ 面積：頂重 △ W′Y′Z′面積 = 1：4

證明：

1. $\overline{BP}：\overline{PC} = \overline{BQ}：\overline{QA} = 1：2$(圖 2)

$\because \overline{AB} \perp \overline{BC}$

$\overline{GY'} \perp \overline{BC}$　(箏形BCGY′對角線垂直)

$\therefore \overline{GY'} // \overline{AB}$

又$\overline{FG}：\overline{GC} = 1：2$

$\therefore \overline{BP}：\overline{PC} = 1：2$

同理可得$\overline{BQ}：\overline{QA} = 1：2$

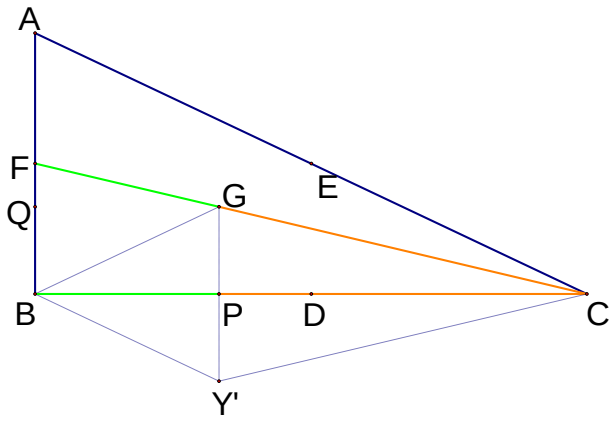


圖 2

2. Y、Z 在$\overline{AC}$上且$\overline{AY}=\overline{YZ}=\overline{ZC}$(圖 3)

$\because$ E 點為ΔABC 之外心

$\therefore \overline{AE}=\overline{BE} \Rightarrow \angle FEA=\angle FEB$

$\because$ FYEG 為箏形

$\therefore \angle FEG=\angle FEY$

又$\angle FEA=\angle FEB$

$\therefore \angle FEA=\angle FEY \Rightarrow$ Y 在$\overline{AE}$上

同理可證 Z 在$\overline{CE}$上

$\therefore$ Y、Z 在$\overline{AC}$上

$\because \overline{YG}//\overline{AB}$，$\overline{BG}:\overline{GE}=2:1$

$\therefore \overline{AY}:\overline{YE}=2:1$　同理可證 $\overline{CZ}:\overline{ZE}=2:1$

又 E 為$\overline{AC}$中點 $\Rightarrow \overline{AY}=\overline{YZ}=\overline{ZC}$

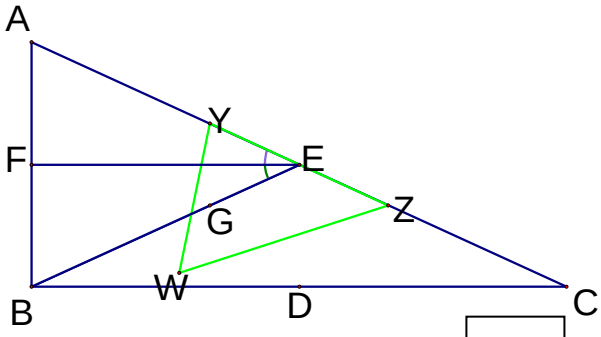


圖 3

3. $\overline{Y'P}=\overline{GP}=\overline{GY}$、$\overline{Z'Q}=\overline{QG}=\overline{GZ}$(圖 4)

$\because \overline{FE}\perp\overline{GY}$ (FYEG 為箏形)

$\overline{BC}\perp\overline{GY'}$(BGCY′為箏形)

$\therefore$ Y、G、P、Y′共線

同理可得Z、G、Q、Z′共線

$\because \overline{Y'P}=\overline{GP}$ ($\overline{BC}$平分$\overline{GY'}$)

$\overline{YG}=\overline{GP}$(平行線截等比例線段)

$\therefore \overline{Y'P}=\overline{GP}=\overline{GY}$

同理可得$\overline{Z'Q}=\overline{QG}=\overline{GZ}$

4. $\overline{WG}=\overline{GQ}=\overline{QW'}$(圖 4)

過 G 點作 $L_1//\overline{AC}$

$\because$ T 為$\overline{BE}$中點且$\overline{BG}:\overline{GE}=2:1$

$\therefore \overline{TG}:\overline{GE}=1:2 \Rightarrow \overline{SG}:\overline{GQ}=1:2$

$\because \overline{WS}=\overline{SG}$　(WDGF 為箏形)

$\overline{GQ}=\overline{QW'}$ (AGCW′為箏形)

$\overline{SG}:\overline{GQ}=1:2$

$\therefore \overline{WG}=\overline{GQ}=\overline{QW'}$

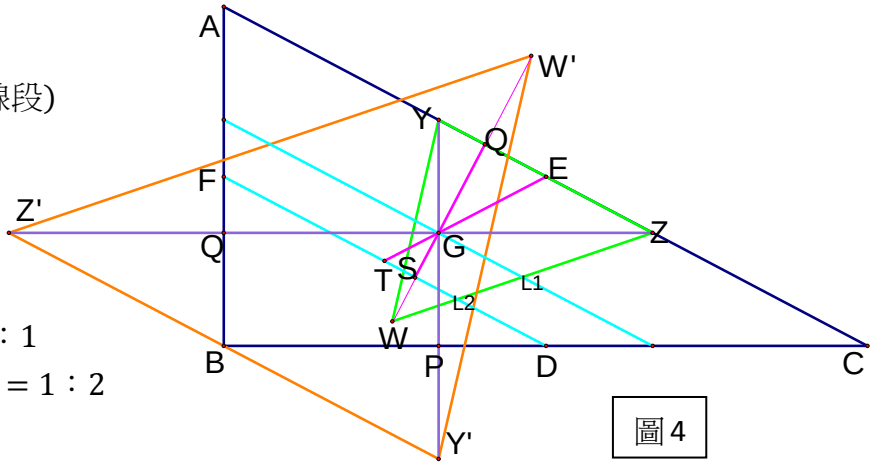


圖 4

5. $\triangle WYZ \sim \triangle W'Y'Z'$(圖 5)

$\because \overline{WG}:\overline{GW'}=1:2=\overline{ZG}:\overline{GZ'}$

$\therefore \overline{Z'W'}//\overline{ZW}$(平行線截等比例線段)

同理可得$\overline{YW}//\overline{Y'W'}$、$\overline{YZ}//\overline{Y'Z'}$

$\Rightarrow \angle Z'WY=\angle ZWY$ ，$\angle ZYW=\angle Z'Y'W'$

$\Rightarrow \triangle WYZ \sim \triangle W'Y'Z'$(AA 相似)

6. $\triangle WYZ$ 面積：$\triangle W'Y'Z'$面積 $=1:4$(圖 5)

$\because \triangle WYZ \sim \triangle W'Y'Z'$

$\overline{WZ}:\overline{W'Z'}=1:2$

$\therefore \triangle WYZ$ 面積：$\triangle W'Y'Z'$面積 $=1:4$

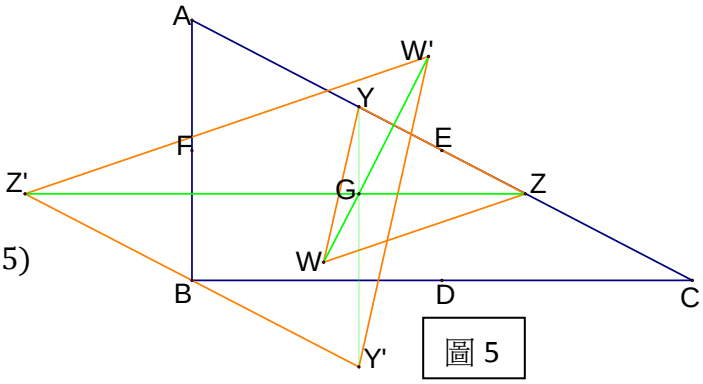


圖 5

(二) △ ABC 面積： △ W′Y′Z′面積 = 9：8(圖 6)

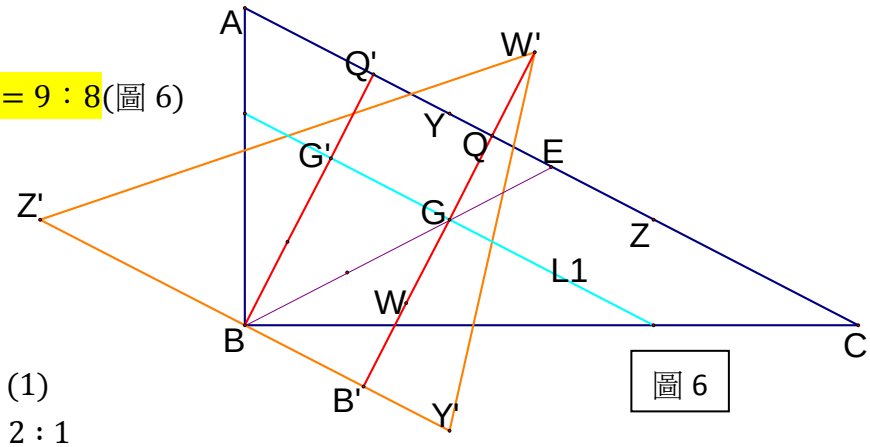


圖 6

證明：

由中重與頂重性質

$\overline{YZ} : \overline{Y'Z'} = 1 : 2$

又$\overline{YZ} = \frac{1}{3}\overline{AC}$

$\Rightarrow \overline{AC} : \overline{Y'Z'} = 3 : 2 \ldots\ldots (1)$

$\because \overline{AC} // \overline{Y'Z'}$，$\overline{BG} : \overline{GE} = 2 : 1$

$\therefore \overline{Q'G'} : \overline{G'B} = 1 : 2 \ldots\ldots (2)$　同理可得$\overline{QG} : \overline{GB'} = 1 : 2$

又$\overline{W'Q} = \overline{QG}$(AW′CG 為箏形)

$\Rightarrow \overline{GW'} = \overline{GB'} \ldots\ldots (3)$

由(2)(3)可得$\overline{Q'B} : \overline{W'B'} = 3 : 4 \ldots\ldots (4)$

由(1)(4)可得原 △ ABC 面積：頂重 △ W′Y′Z′面積

$$= \frac{\overline{AC} \times \overline{Q'B}}{2} : \frac{\overline{Y'Z'} \times \overline{W'B'}}{2} = \frac{3 \times 3}{2} : \frac{2 \times 4}{2} = 9 : 8$$

(三) 原 △ ABC 面積：中重 △ WYZ 面積：頂重 △ W′Y′Z′ = 9：2：8

證明：　**中重　頂重　原三角形**

1	：	4		
		8	：	9
2	：	8	：	9

三、　探討任意三角形與其中重、頂重三角形性質關係

性質：任意 △ **ABC**中， △ **WYZ**為中重三角形， △ **W′Y′Z′**為頂重三角形

則 △ **WYZ**面積 :△ **W′Y′Z′**面積 = **1：4**

證明：

$\because \overline{EF} // \overline{BC}$(兩邊中點連線)

$\overline{EG} : \overline{GB} = 1 : 2$

$\therefore \overline{SG} : \overline{GP} = 1 : 2$

又$\overline{YS} = \overline{SG}$(EYFG 為箏形)

$\Rightarrow \overline{YG} = \overline{GP}$

$\Rightarrow \overline{YG} = \overline{GP} = \overline{GY'}$(BGCY′為箏形)

$\Rightarrow \overline{YG} = \overline{GY'} = 1 : 2$

同理可得$\overline{WG} : \overline{GW'} = \overline{ZG} : \overline{GZ'} = 1 : 2$

$\because \angle WGY = W'GY'$(對頂角相等)

∴△ WGY~ △ W′GY′(SAS 相似)

∵ 兩相似三角形邊長平方比等於面積比

∴△ WYZ 面積： △ W′Y′Z′面積 = 1：4(得證)

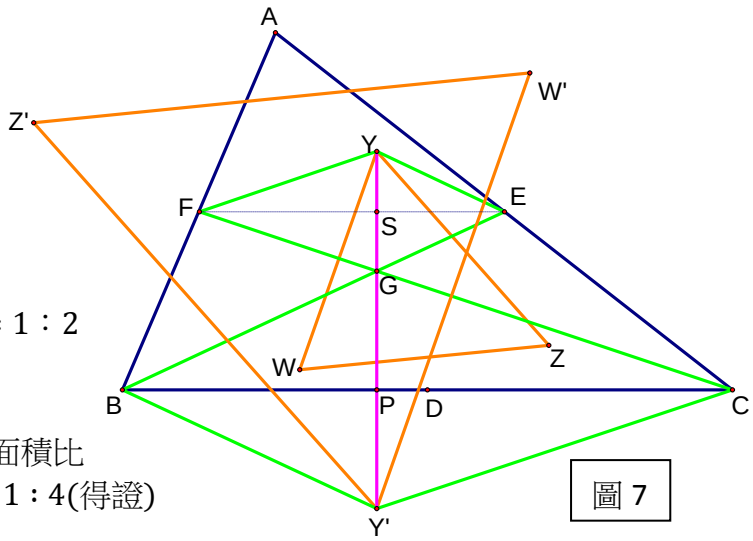


圖 7

四、　已知中重三角形之特殊邊，利用尺規作圖作出其原直角三角形

如圖，定義**中重三角形的特殊邊**($\overline{YZ}$)為滿足下列條件的邊：

(一) 此特殊邊($\overline{YZ}$)在原直角三角形的斜邊($\overline{AC}$)上。

(二) 此特殊邊邊長($\overline{YZ}$)：原直角三角形斜邊長($\overline{AC}$) = 1：3。

已知：$\overline{YZ}$為中重三角形之特殊邊

求作：中重三角形與其原直角三角形

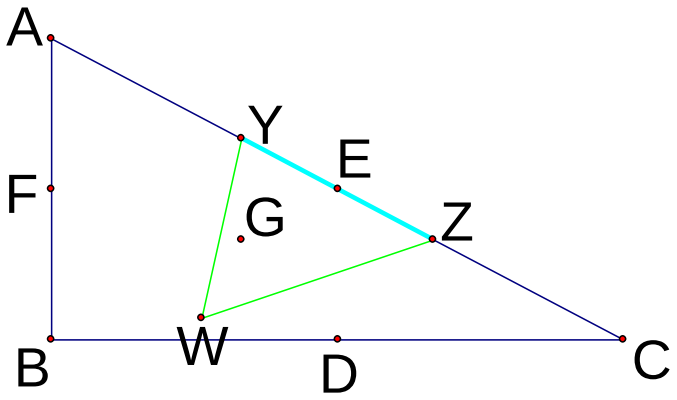
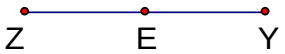


圖 8

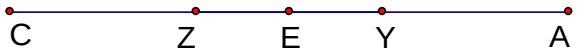
作法：

1. 已知$\overline{YZ}$為中重三角形之特殊邊

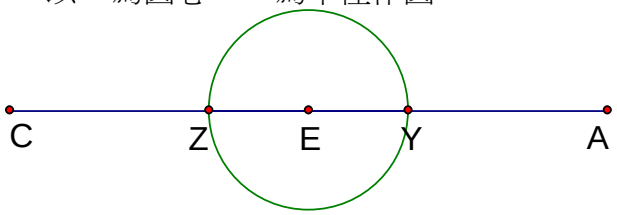
2. 作$\overline{YZ}$中點 E



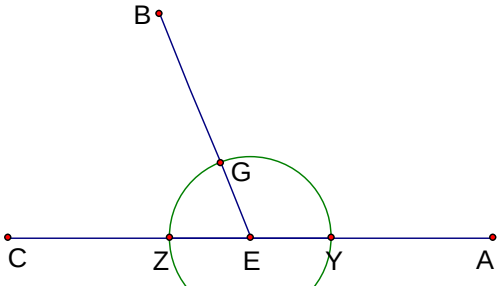
3. 將$\overline{YZ}$向外延伸，作$\overline{CZ} = \overline{ZY} = \overline{YA}$



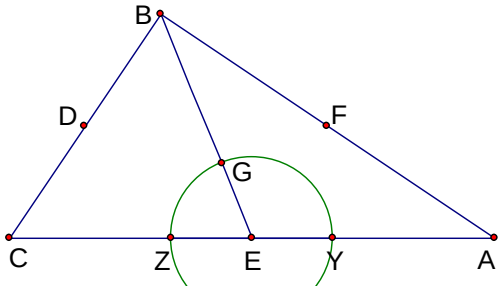
4. 以 E 為圓心，$\overline{EZ}$為半徑作圓



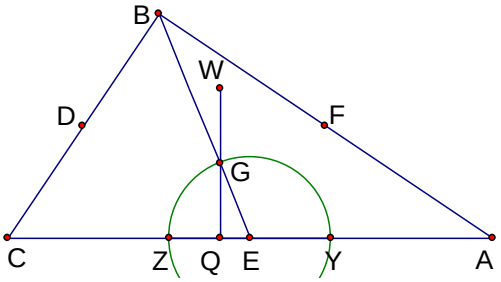
5. 於圓上取任意點 G，並於$\overrightarrow{EG}$取 B，使 $\overline{BG} = 2\overline{GE}$



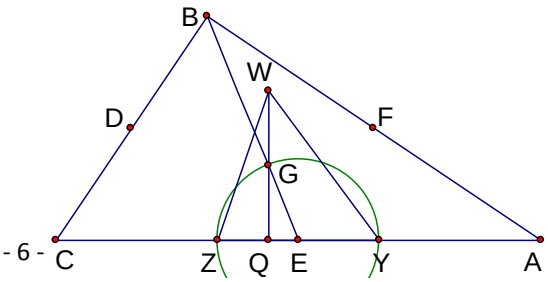
6. 作△ ABC(即為原三角形)



7. 作過 G 點且垂直$\overline{AC}$的線段交$\overline{AC}$於 Q，作 W, G, Q 三點共線且使$\overline{WG} = \overline{GQ}$



8. 作 △ WYZ 即為中重三角形



證明：

1. 由直角三角形的外心為斜邊之中點可得$\angle ABC = 90°$
2. 在$\triangle GEF$ 和 $\triangle YEF$ 中

   $\because\ \overline{GE} = \overline{YE}$　(在步驟 5.時說明)

   等腰三角形 ABE 中，F 點為$\overline{AB}$之中點，

   $\overline{EF}$平分$\angle AEB \Rightarrow\ \angle FEA = \angle FEB$

   $\overline{EF} = \overline{EF}$(共同邊)

   $\therefore \triangle GEF \cong \triangle YEF$(SAS)　$\Rightarrow \overline{FG} = \overline{FY}$，同理可得$\overline{DG} = \overline{DZ}$

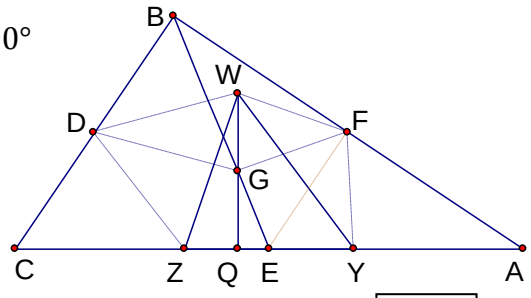


圖 9

3. 由步驟 7 可得$\overline{WG} = \overline{GQ}$
4. $\because \overline{DF}$為中點連線　$\therefore \overline{DF} \perp \overline{WG}$

   又$\overline{GS} = \overline{SW}$

   $\Rightarrow$ 四邊形 DWFG 為一箏形

   $\Rightarrow \overline{FW} = \overline{FG} = \overline{FY}$、$\overline{DW} = \overline{DG} = \overline{DZ}$

   $\Rightarrow \triangle WYZ$ 為 $\triangle ABC$ 之中重三角形

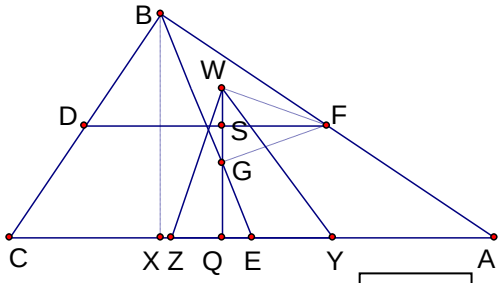


圖 10

五、　已知頂重三角形之特殊邊，利用尺規作圖作出其原直角三角形

如圖，定義**頂重三角形之特殊邊**$(\overline{Y'Z'})$為滿足下列條件之邊：

(一) 此特殊邊$(\overline{Y'Z'})$平行原直角三角形的斜邊$(\overline{AC})$。

(二) 此特殊邊邊長$(\overline{Y'Z'})$：原直角三角形的斜邊長$(\overline{AC}) = 2：3$。

(三) 此特殊邊$(\overline{Y'Z'})$之中點為原直角三角形之直角頂點(B)。

已知：$\overline{Y'Z'}$為頂重三角形之特殊邊

求作：頂重三角形與其原直角三角形

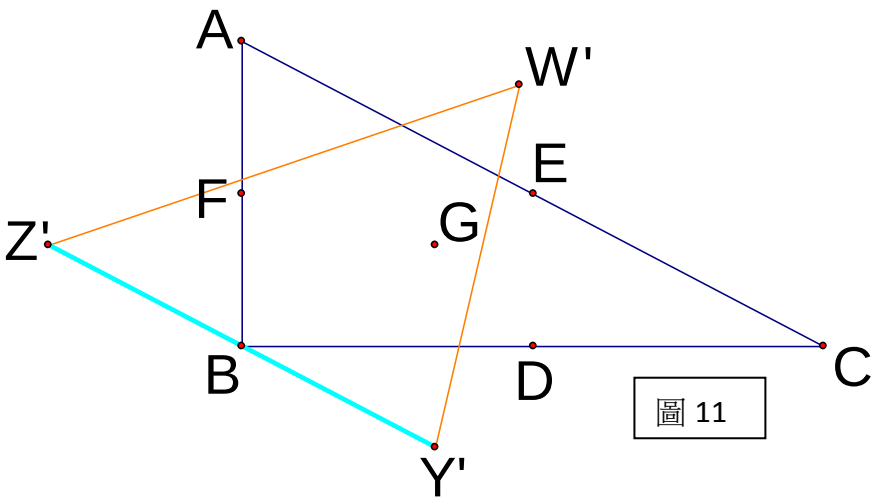
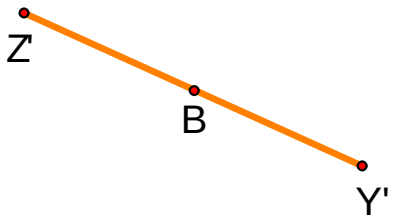


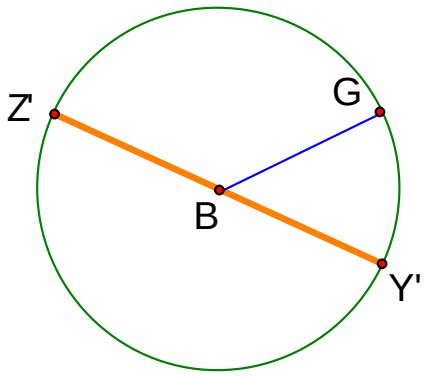
圖 11

作法：

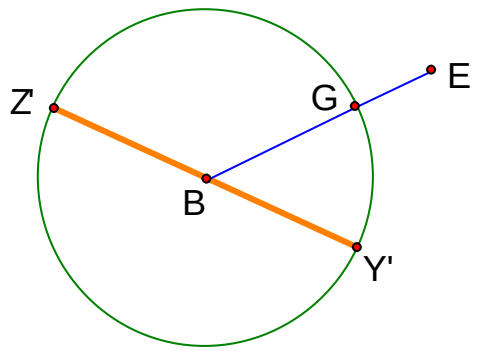
1. 已知$\overline{Y'Z'}$為中重三角形之特殊邊，作其中點 B



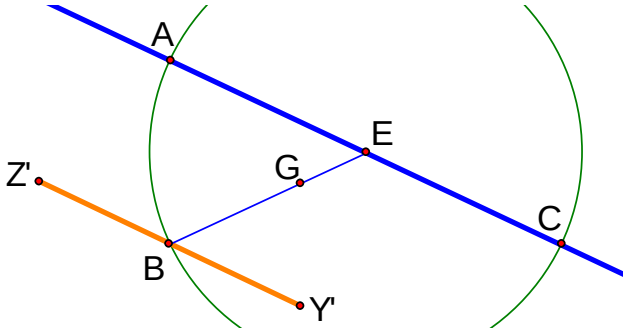
2.以 B 為圓心，$\overline{BY'}$為半徑畫圓，於圓上取一點 G



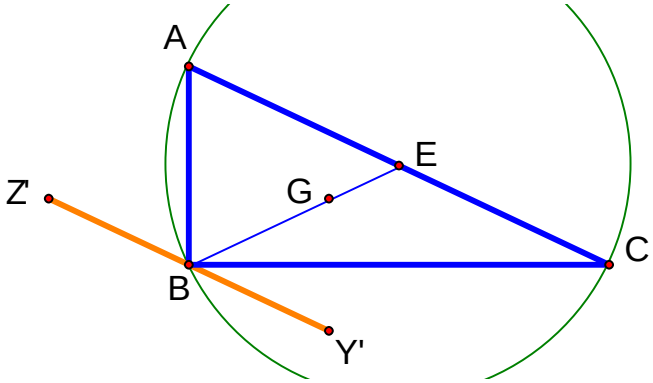
3. 作$\overrightarrow{BG}$，並於$\overrightarrow{BG}$上取一點 E，使$\overline{BG}=2\overline{GE}$



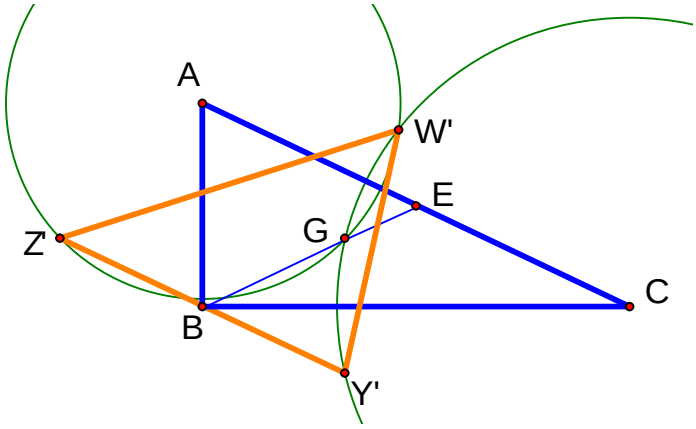
4. 以 E 為圓心，$\overline{BE}$為半徑畫圓，過 E 點作$\overleftrightarrow{AC}//\overline{Z'Y'}$，交圓 E 於 A、C 兩點



5. 作△ ABC(即為原三角形)



6. 分別以 A、C 為圓心，$\overline{AG}$、$\overline{CG}$為半徑畫弧，兩弧交於 W′，△ W′Y′Z′即為頂重三角形



證明：

$\because \angle BGZ'=\angle BZ'G$，$\angle GBY'=2\angle Z'GB$，$\angle AEB=\angle GBY'$

$\therefore \angle ABG=\dfrac{180^\circ-\angle AEB}{2}=90^\circ-\dfrac{\angle AEB}{2}=90^\circ-\angle Z'GB$

又$\angle BSG=180^\circ-\angle SGB-\angle ABG=90^\circ$　　$\therefore \overline{AB}\perp\overline{GZ'}$

$\because \angle SZ'B=\angle SGB$，$\angle Z'SB=\angle GSB$，$\overline{SB}=\overline{SB}$

$\therefore$△ $SBZ'\cong$△ SBG(AAS)　$\Rightarrow \overline{SZ'}=\overline{SG}$

又$\overline{AB}\perp\overline{GZ'}$　$\therefore$ $AGBZ'$為箏形

$\Rightarrow \overline{AG}=\overline{AZ'}$　　同理可得$\overline{CG}=\overline{CY'}$

$\because \overline{AW'}=\overline{AG}=\overline{AZ'}$，$\overline{CW'}=\overline{CG}=\overline{CY'}$，$\overline{BZ'}=\overline{BG}=\overline{BY'}$

$\therefore$△ $W'Y'Z'$為 △ ABC 之頂重三角形

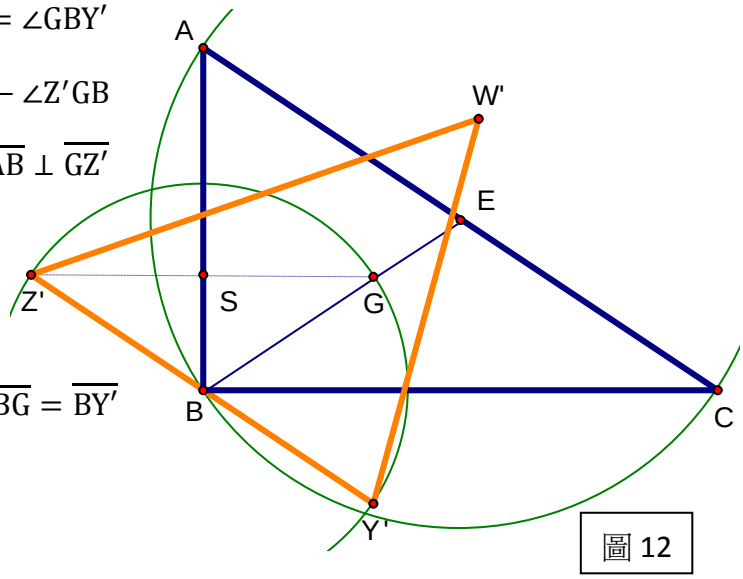


圖 12

伍、　研究結果與討論

一、　原三角形及其中重三角形的角度關係

(一)　已知$\angle ACB$為$\triangle ABC$之最小角

假設$\angle ACB = \theta$，則$\angle CAB = 90° - \theta$

$\angle BFG = x$，$\angle BDG = y$

$\overline{AC} = a$

根據中重與原三角形，可得下列性質：

1. $\tan\theta \cdot \tan x = 2$

2. $\cot\theta \cdot \tan y = 2$

3. $\tan x \cdot \tan y = 4$

4. $x = \cot^{-1}(\frac{\tan\theta}{2})$

5. $y = \tan^{-1}(2\tan\theta)$

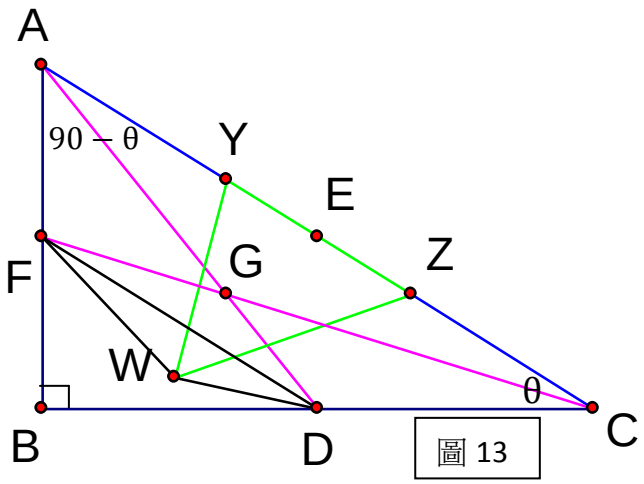


圖 13

證明：

$\overline{AB} = a\sin\theta$ ，$\overline{BC} = a\cos\theta$

$$\cot x = \frac{\frac{a\sin\theta}{2}}{a\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta} = \frac{\tan\theta}{2} \Rightarrow \tan\theta \cdot \tan x = 2 \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\Rightarrow \tan x = 2\cot\theta \Rightarrow x = \tan^{-1}(2\cot\theta)$$

$$\cot y = \frac{\frac{a\cos\theta}{2}}{a\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{\cot\theta}{2} \Rightarrow \cot\theta \cdot \tan y = 2 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$\Rightarrow \tan y = 2\tan\theta \Rightarrow y = \tan^{-1}(2\tan\theta)$$

由①×②可得 $\tan\theta \cdot \cot\theta \cdot \tan x \cdot \tan y = 4$　　$\Rightarrow \tan x \cdot \tan y = 4$

(二)　已知$\triangle WYZ$為$\triangle ABC$之中重三角形

且$\angle ACB$為$\triangle ABC$之最小角

假設$\angle WZY = \alpha$，$\overline{EG} = \overline{EZ} = \overline{EY} = b$

根據中重與原三角形，可得下列性質：

1.$\triangle YGZ \sim \triangle ABC$、$\angle GZY = \theta$

2. $\angle GEY = 2\theta$

3. $\tan(\angle WYZ) \cdot \tan\theta = 2$，(一)的$x = \angle WYZ$

4. $\tan\alpha \cdot \cot\theta = 2$，(一)的$y = \alpha$

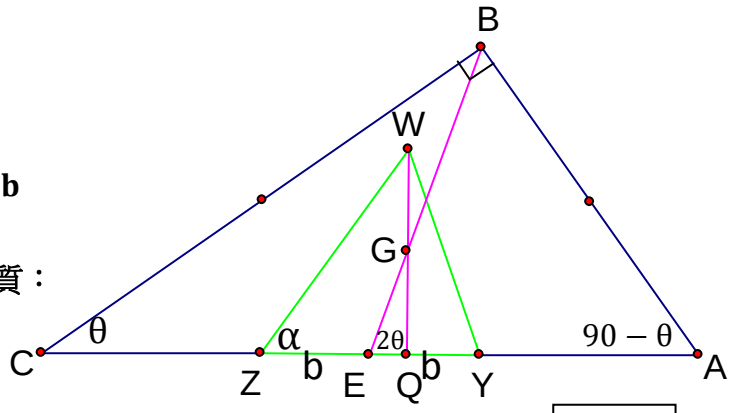


圖 14

證明：

1. 中重性質可得$\overline{GY}=\frac{1}{3}\overline{AB}$、$\overline{GZ}=\frac{1}{3}\overline{BC}$、$\overline{YZ}=\frac{1}{3}\overline{AC}$

   $\Rightarrow \triangle YGZ \sim \triangle ABC$(SSS 相似) $\Rightarrow \angle GZY=\angle ACB=\theta$

2. 由 $\triangle ZGE$ 為等腰三角形可得$\angle ZGE=\theta$

   由外角定理可得$\angle GEY=2\theta$

3. $\overline{EQ}=b\cos 2\theta$ ，$\overline{QY}=b-b\cos 2\theta=b(1-\cos 2\theta)$

   $\overline{WQ}=2b\sin\theta$

   $$\Rightarrow \tan(\angle WYZ)=\frac{2b\sin 2\theta}{b(1-\cos 2\theta)}=\frac{2\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta}=2\left(\frac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta}\right)$$

   $\Rightarrow \tan(\angle WYZ)=2\cot\theta$

   $\Rightarrow \tan(\angle WYZ)\cdot\tan\theta=2$

   將上式與$\tan\theta\cdot\tan x=2$比對可得$x=\angle WYZ$

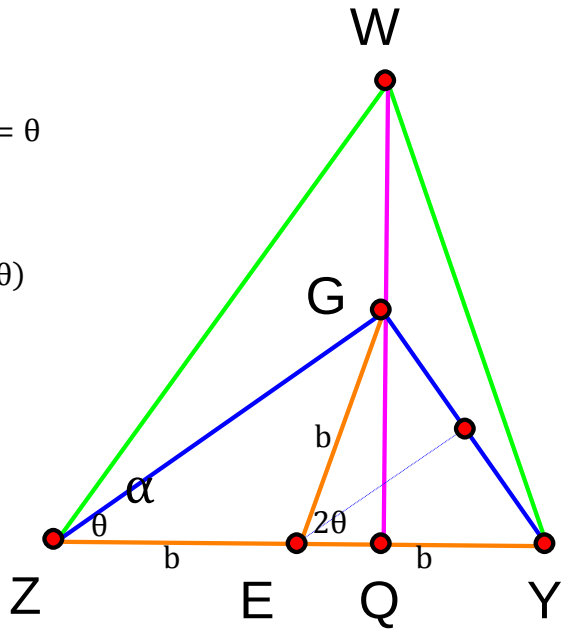


圖 15

4. $$\tan\alpha=\frac{2b\sin 2\theta}{b+b\cos 2\theta}=\frac{2\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=2\cdot\left(\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}\right)=2\cdot\tan\theta$$

   $\Rightarrow \tan\alpha\cdot\cot\theta=2$

   將上式與 $\cot\theta\cdot\tan y=2$ 比對可得 $y=\alpha=\angle WZY$

根據(1) $x=\tan^{-1}(2\cot\theta)$ (由(一))

(2) $y=\tan^{-1}(2\tan\theta)$ (由(一))

(3) $x=\angle WYZ$ (由(二))

(4) $y=\angle WZY$ (由(二))

可得中重三角形三個角度分別為

$\angle WYZ=x=\tan^{-1}(2\cot\theta)$ 、 $\angle WZY=y=\tan^{-1}(2\tan\theta)$ 、 $\angle YWZ=180^\circ-x-y$

由中重與頂重角度對應相等可得

$\boldsymbol{\angle W'Y'Z'=\angle WYZ=\tan^{-1}(2\cot\theta)}$ 、 $\boldsymbol{\angle W'Z'Y'=\angle WZY=\tan^{-1}(2\tan\theta)}$ 、 $\boldsymbol{\angle Y'W'Z'=\angle YWZ=180^\circ-x-y}$

二、 重複疊作頂重三角形性質探討

(一) 定義：重複疊作頂重三角形：

1. 作一任意三角形的重心 G，分別以各頂點為圓心，各頂點到重心之距離為半徑畫圓，將兩相鄰的圓之交點連線，即為原圖形之頂重三角形，也為第一層圖形。
2. 將此新的三角形之各頂點為圓心，各頂點到 G 點之距離為半徑，畫三個圓，將兩相鄰的圓之交點連線，即為第二層圖形。
3. 重複步驟 2 即為重複疊作頂重三角形。

(二) 重複疊作頂重三角形之性質：

性質一：第 m 層圖形相似於第(m+3)層圖形

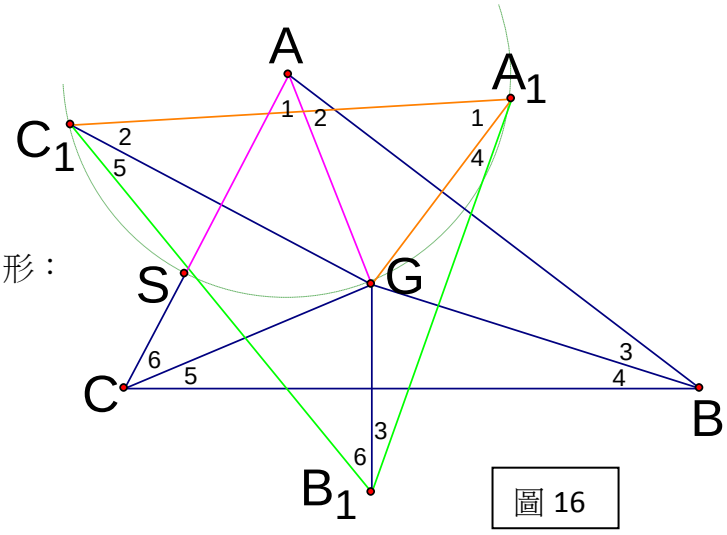


圖 16

證明：

步驟一：證明原圖形相似於第三層圖形

1. 原三角形與第一層重複疊作頂重三角形：

$\angle C_1A_1G = \frac{1}{2}\widehat{C_1SG}$ (圓周角)

$\angle CAG = \frac{1}{2}\angle C_1AG = \frac{1}{2}\widehat{C_1SG}$

$\Rightarrow \angle CAG = \frac{1}{2}\widehat{C_1SG}$ (四邊形 AC_1CG為一箏形)

$\therefore \angle CAG = \angle C_1A_1G$

同理可證：

$\angle BAG = \angle A_1C_1G$、$\angle ABG = \angle A_1B_1G$、$\angle CBG = \angle B_1A_1G$

$\angle BCG = \angle B_1C_1G$、$\angle ACG = \angle C_1B_1G$

$\Rightarrow \angle C_1A_1G = \angle 1$、$\angle A_1C_1G = \angle 2$、$\angle A_1B_1G = \angle 3$、

$\angle B_1A_1G = \angle 4$、$\angle B_1C_1G = \angle 5$、$\angle C_1B_1G = \angle 6$

2. 第一層與第二層重複疊作頂重三角形：

同 1. 的方法可得

$\angle C_1A_1G = \angle C_2A_2G$、$\angle A_1C_1G = \angle C_2B_2G$

$\angle A_1B_1G = \angle A_2B_2G$、$\angle B_1A_1G = \angle A_2C_2G$

$\angle B_1C_1G = \angle B_2C_2G$、$\angle C_1B_1G = \angle B_2A_2G$

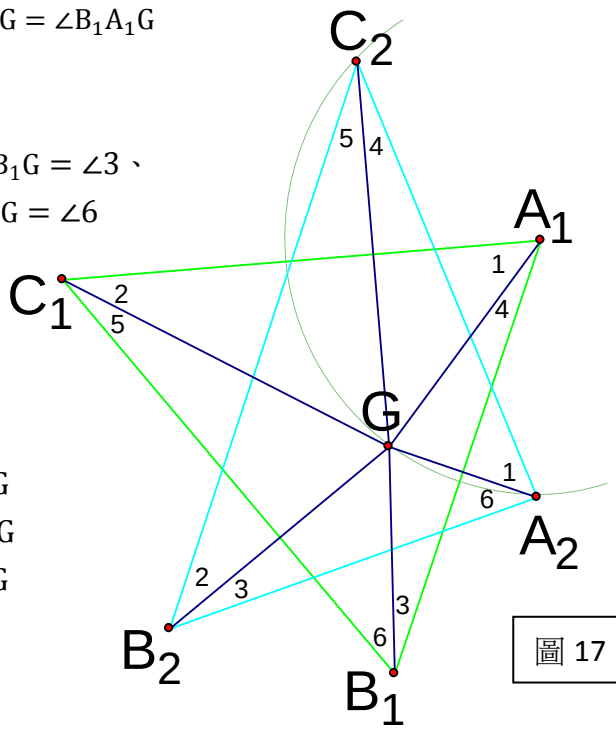


圖 17

3. 第二層與第三層重複疊作頂重三角形：

$\angle C_2A_2G = \angle C_3A_3G$、$\angle C_2B_2G = \angle B_3A_3G$

$\angle A_2B_2G = \angle A_3B_3G$、$\angle A_2C_2G = \angle C_3B_3G$

$\angle B_2C_2G = \angle B_3C_3G$、$\angle B_2A_2G = \angle A_3C_3G$

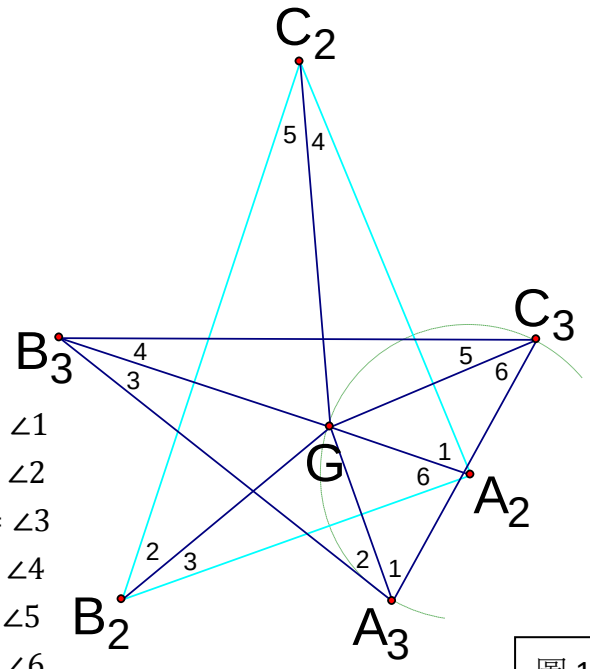


圖 18

4. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_3B_3C_3$ 中

$\because \angle CAG = \angle C_1A_1G = \angle C_2A_2G = \angle C_3A_3G = \angle 1$

$\angle BAG = \angle A_1C_1G = \angle C_2B_2G = \angle B_3A_3G = \angle 2$

$\angle ABG = \angle A_1B_1G = \angle A_2B_2G = \angle A_3B_3G = \angle 3$

$\angle CBG = \angle B_1A_1G = \angle A_2C_2G = \angle C_3B_3G = \angle 4$

$\angle BCG = \angle B_1C_1G = \angle B_2C_2G = \angle B_3C_3G = \angle 5$

$\angle ACG = \angle C_1B_1G = \angle B_2A_2G = \angle A_3C_3G = \angle 6$

$\therefore \angle ABC = \angle ABG + \angle CBG = \angle A_1BG + \angle BA_1G = \angle A_2B_2G + \angle A_2B_2G$

$= \angle A_3B_3G + \angle C_3B_3G = \angle A_3B_3C_3$

$\angle BAC = \angle BAG + \angle CAG = \angle A_1C_1G + C_1A_1G = \angle C_2B_2G + \angle C_2A_2G$

$= \angle B_3A_3G + \angle C_3A_3G = B_3A_3C_3$

$\angle ACB = \angle ACG + \angle BCG = \angle C_1B_1G + \angle B_1C_1G = \angle B_2A_2G + \angle B_2C_2G$

$= \angle A_3C_3G + B_3C_3G = A_3C_3B_3$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_3B_3C_3$(AAA 相似)，故原圖形相似於第三層圖形

步驟二：假設第 m 層圖形~第(m+3)層圖形成立

步驟三：證明第(m+3)層圖形~第(m+6)層圖形

如下圖，G 為第(m+3)層圖形內部一點，對其重複疊作，與步驟一同理，

得到第(m+3)層圖形與第(m+6)層圖形之各對應角相等，

故可得第(m+3)層圖形~第(m+6)層圖形(AAA 相似)。

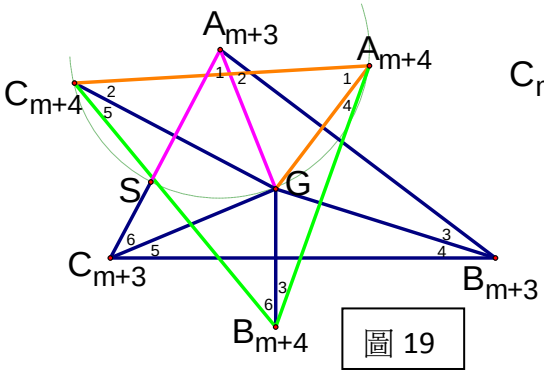


圖 19

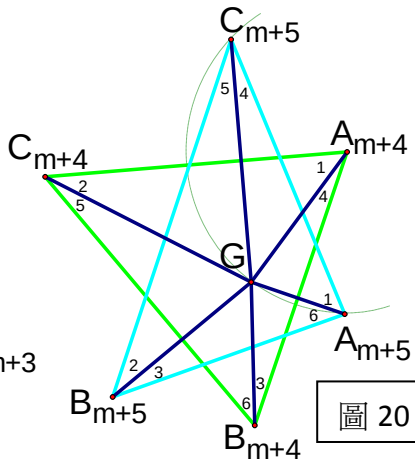


圖 20

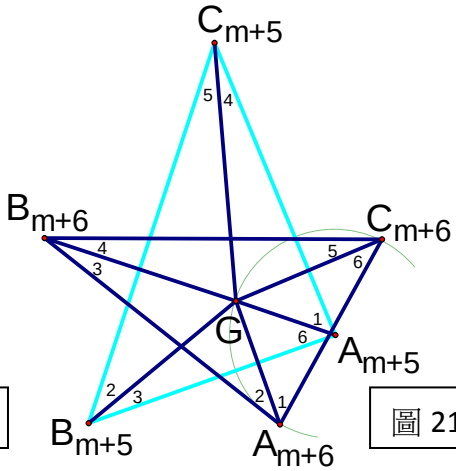


圖 21

由步驟一、步驟二、步驟三及數學歸納法可得第 m 層圖形~第(m+3)層圖形，得證。

性質二：原圖形與第 3h 層圖形之重心共點

證明：

1. 想法：如果求出原圖形各頂點到某點的距離，再求出相似圖形各頂點到某點的距離，如有相同比值，即可判定此點對原圖形之相對位置等於此點對相似圖形之相對位置。同理，如果此點為原圖形之重心，即可判定此點也為相似圖形之重心。

(1) 求出$\frac{\overline{A_3G}}{\overline{AG}}$、$\frac{\overline{B_3G}}{\overline{BG}}$、$\frac{\overline{C_3G}}{\overline{CG}}$

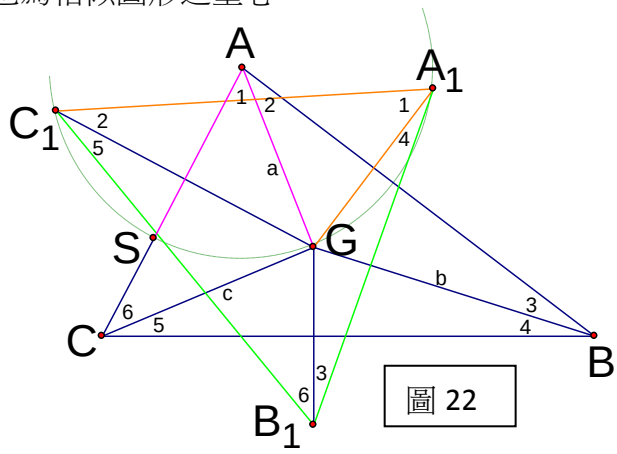


圖 22

假設$\overline{AG}=a$、$\overline{BG}=b$、$\overline{CG}=c$

以$\overline{C_1G}$為例，∵ 四邊形 AC_1CG 為箏形

∴ $\overline{AC}$垂直平分$\overline{C_1G}$

$\Rightarrow \overline{C_1G}=2\cdot a\sin(\angle 1)=2a\sin(\angle 1)$

同理可得$\overline{A_1G}=2b\sin(\angle 3)$ 、$\overline{B_1G}=2c\sin(\angle 5)$

可利用同樣的方法得到

$\overline{A_2G}=2\cdot\overline{B_1G}\cdot\sin(\angle 3)=2\cdot 2c\sin(\angle 5)\cdot\sin(\angle 3)=4c\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)$

$\overline{B_2G}=2\cdot\overline{C_1G}\cdot\sin(\angle 5)=2\cdot 2a\sin(\angle 1)\cdot\sin(\angle 5)=4a\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)$

$\overline{C_2G}=2\cdot\overline{A_1G}\cdot\sin(\angle 1)=2\cdot 2b\sin(\angle 3)\cdot\sin(\angle 1)=4b\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)$

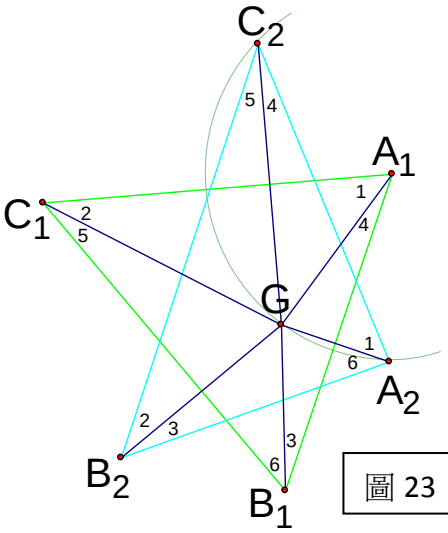


圖 23

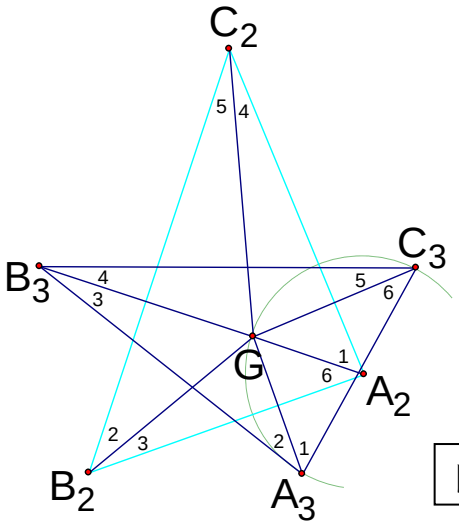


圖 24

可利用同樣的方法得到下表：

表(一)

	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	...
A_mG	a	$2b\sin(\angle 3)$	$4c\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)$	$8ax_3$	$16bx_3\sin(\angle 3)$	...
B_mG	b	$2c\sin(\angle 5)$	$4a\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)$	$8bx_3$	$16cx_3\sin(\angle 5)$	...
C_mG	c	$2a\sin(\angle 1)$	$4b\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)$	$8cx_3$	$16ax_3\sin(\angle 1)$	...
設$x_3=\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)=\sin(\angle 2)\sin(\angle 4)\sin(\angle 6)$						

(2) 得知$\frac{\overline{A_3G}}{\overline{AG}}=\frac{\overline{B_3G}}{\overline{BG}}=\frac{\overline{C_3G}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{D_3G}}{\overline{DG}}=8x_3$

(3) 故可得知 G 點也為第三層圖形之重心，原圖形與第三層圖形之重心共點。

2. 假設第 h 層圖形與第(h+3)層圖形之重心共點成立 $(h=3m，m\in\mathbb{Z}$ 且 $m\geq 0)$

3. 證明第(h+3)層圖形與第(h+6)層圖形之重心共點 $(h=3m，m\in\mathbb{Z}$ 且 $m\geq 0)$

(1) 求出$\frac{\overline{A_{h+6}G}}{\overline{A_{h+3}G}}=\frac{(8x_3)^{m+2}a}{(8x_3)^{m+1}a}=8x_3$、$\frac{\overline{B_{h+6}G}}{\overline{B_{h+3}G}}=\frac{(16x_4)^{m+2}b}{(16x_4)^{m+1}b}=8x_3$、

$\frac{\overline{C_{h+6}G}}{\overline{C_{h+3}G}}=\frac{(16x_4)^{m+2}c}{(16x_4)^{m+1}c}=8x_3$

(2) 得之$\frac{\overline{A_{h+6}G}}{\overline{A_{h+3}G}}=\frac{\overline{B_{h+6}G}}{\overline{B_{h+3}G}}=\frac{\overline{C_{h+6}G}}{\overline{C_{h+3}G}}$

(3) 故可得第(h+3)層圖形與第(h+6)層圖形之重心共點

由 1.、2.、3.及數學歸納法可得原圖形與第 3h 層圖形之重心共點，故得證。

三、重複疊作頂重 n 邊形的性質探討

定義：重複疊作頂重 n 邊形：

1. **作一任意 n 邊形的重心 G，分別以各頂點為圓心，各頂點到重心之距離為半徑畫圓，將兩相鄰的圓之交點連線，即為原圖形之頂重 n 邊形，也為第一層圖形。**
2. **將此新的 n 邊形之各頂點為圓心，各頂點到 G 點之距離為半徑，畫 n 個圓，將兩相鄰的圓之交點連線，即為第二層圖形。**
3. **重複步驟 2 即為重複疊作頂重 n 邊形。**

如下圖，以四邊形為例：

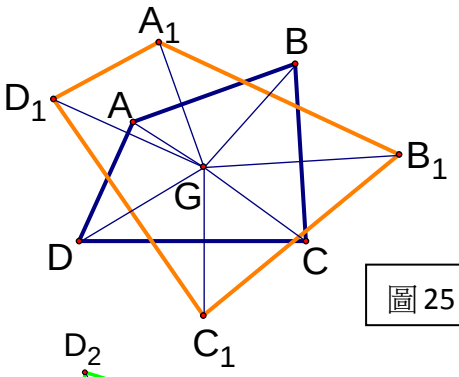


圖 25

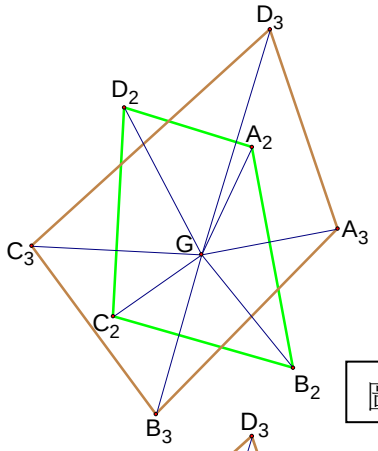


圖 27

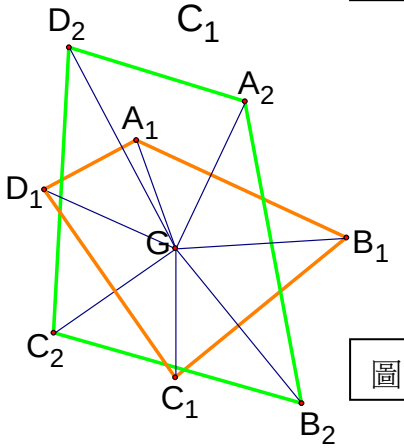


圖 26

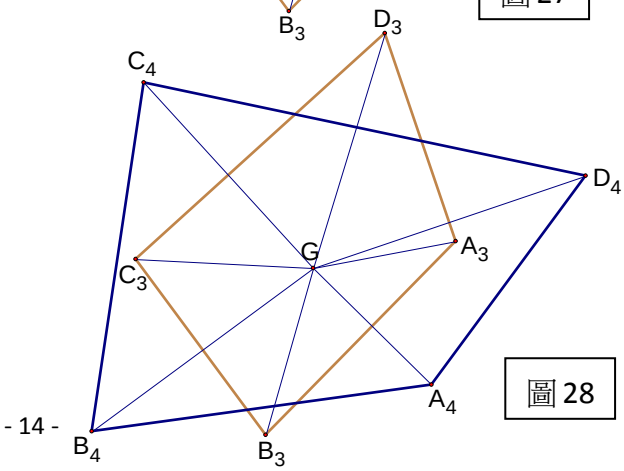


圖 28

經由分析與討論，我們發現重複疊作頂重 n 邊形有下列性質：

(一) **重複疊作頂重 n 邊形之角度關係：**

第 k 層圖形與第(k+n)層圖形之各對應角相等

(二) **重複疊作條件：**任意一個編號為奇數的角的角度，加上任意一個編號為偶數的角度，不可超過180°

(三) **重複疊作頂重四邊形：**

性質一：第 m 層圖形相似於第(m+4)層圖形　$(k \in \mathbb{N})$

性質二：原圖形與第 4h 層圖形之重心共點 $(h \in \mathbb{N})$

(四) **重複疊作頂重五邊形：**

性質一：第 m 層圖形相似於第(m+5)層圖形　$(k \in \mathbb{N})$

性質二：原圖形與第 5h 層圖形之重心共點　$(h \in \mathbb{N})$

(五) **重複疊作頂重 n 邊形：**　$(\mathbf{n} \in \mathbb{N})$

性質一：第 m 層圖形相似於第(m+n)層圖形　$(k \in \mathbb{N})$

性質二：原圖形與第 nh 層圖形之重心共點　$(h \in \mathbb{N})$

(六) **重複疊作頂重 n 邊形，第 m 層圖形與第(m+n)層圖形之旋轉角度：**　$(\mathbf{n} \in \mathbb{N})$

性質一：若以順時針方向來看旋轉角度，則其角度為 $90° \times n -$ (各偶數編號的角之和)

性質二：若以逆時針方向來看旋轉角度，則其角度為 $90° \times n -$ (各奇數編號的角之和)

證明：

(一) 重複疊作頂重 n 邊形之角度關係：

由重複疊作頂重三角形求角度之方法套用至多邊形，在此以六邊形舉例：

表(二)

六邊形	第一個角	第二個角	第三個角	第四個角	第五個角	第六個角	
原圖形	1,2	3,4	5,6	7,8	9,10	11,12	
第一層	1,4	3,6	5,8	7,10	9,12	11,2	(偶數編號的角往前)
第二層	1,6	3,8	5,10	7,12	9,2	11,4	(偶數編號的角往前)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
第五層	1,12	3,2	5,4	7,6	9,8	11,10	(偶數編號的角往前)
第六層	1,2	3,4	5,6	7,8	9,10	11,12	與原圖形角度對應相等
第七層	1,4	3,6	5,8	7,10	9,12	11,2	與第一層角度對應相等

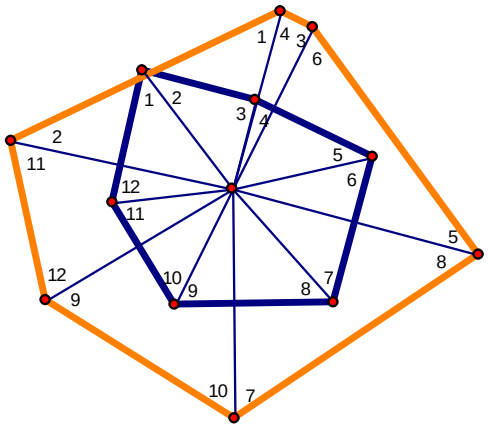


圖 29：原圖形與第一層圖形

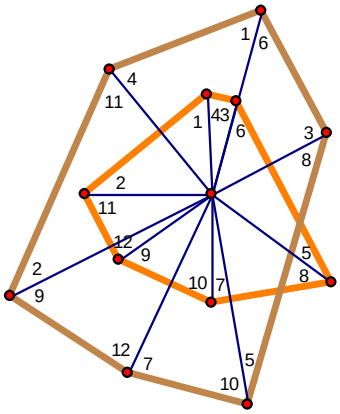


圖 30：第一層與第二層圖形

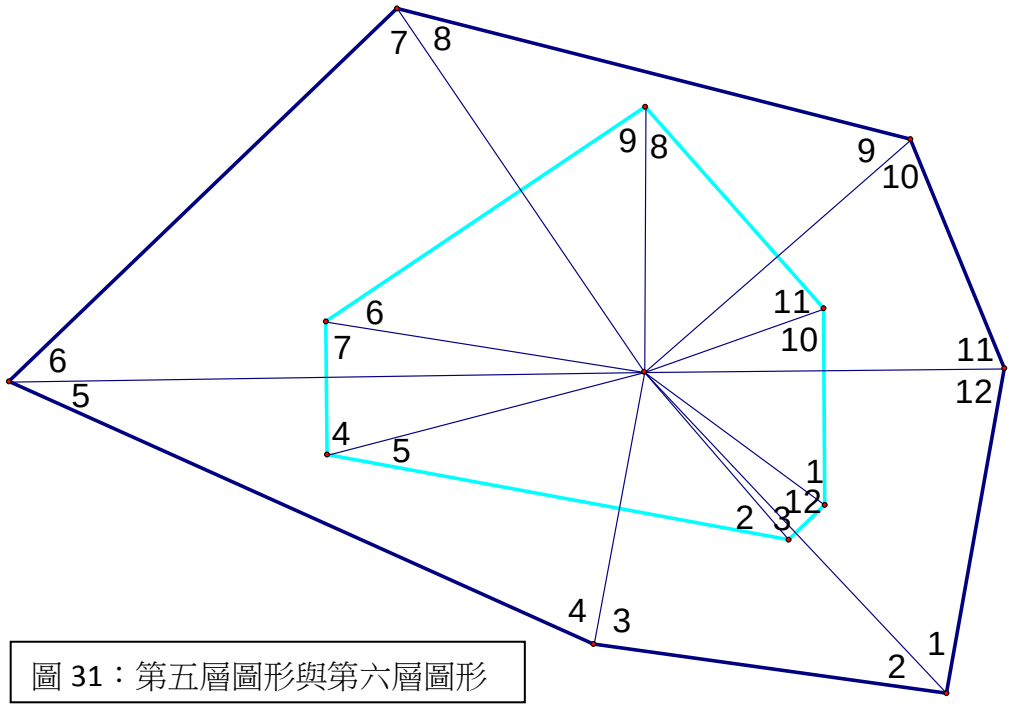


圖 31：第五層圖形與第六層圖形

將其方法套用至任意三角形、四邊形、五邊形、.....、n 邊形，皆可得到對應之角度相等：

表(三)

三角形	第一個角	第二個角	第三個角	
原圖形	1,2	3,4	5,6	
第一層	1,4	3,6	5,2	
第二層	1,6	3,2	5,4	
第三層	1,2	3,4	5,6	與原圖形角度對應相等
第四層	1,4	3,6	5,2	與第一層角度對應相等

表(四)

四邊形	第一個角	第二個角	第三個角	第四個角	
原圖形	1,2	3,4	5,6	7,8	
第一層	1,4	3,6	5,8	7,2	
第二層	1,6	3,8	5,2	7,4	
第三層	1,8	3,2	5,4	7,6	
第四層	1,2	3,4	5,6	7,8	與原圖形角度對應相等
第五層	1,4	3,6	5,8	7,2	與第一層角度對應相等

表(五)

五邊形	第一個角	第二個角	第三個角	第四個角	第五個角	
原圖形	1,2	3,4	5,6	7,8	9,10	
第一層	1,4	3,6	5,8	7,10	9,2	
第二層	1,6	3,8	5,10	7,2	9,4	
第三層	1,8	3,10	5,2	7,4	9,6	
第四層	1,10	3,2	5,4	7,6	9,8	
第五層	1,2	3,4	5,6	7,8	9,10	與原圖形角度對應相等
第六層	1,4	3,6	5,8	7,10	9,2	與第一層角度對應相等

經由重複疊作頂重三角形的方法並推廣，可得重複疊作頂重 n 邊形之角度關係如下表：

表(六)

n 邊形	第一個角	第二個角	第三個角	…	第(n-1)個角	第 n 個角	
原圖形	1,2	3,4	5,6	…	(2n-3),(2n-2)	(2n-1),2n	
第一層	1,4	3,6	5,8	…	(2n-3),2n	(2n-1),2	
第二層	1,6	3,8	5,10	…	(2n-3),2	(2n-1),4	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	
第(n-1)層	1,2n	3,2	5,4	…	(2n-3),(2n-4)	(2n-1),(2n-2)	
第 n 層	1,2	3,4	5,6	…	(2n-3),(2n-2)	(2n-1),2n	與原圖形角度對應相等
第(n+1)層	1,4	3,6	5,8	…	(2n-3),2n	(2n-1),2	與第一層角度對應相等

同理利用前面的數學歸納法方法來證明，

可得第 m 層圖形與第(m+n)層圖形之各對應角相等。(得證)

(二) 重複疊作條件：

由表(六)可得每個奇數角必會與每個偶數角配對……①

要作出合理的頂重，其原圖形不可為凹多邊形……②

由①②可得任意一個編號為奇數的角加上任意一個編號為偶數的角，其角度不可超過180°

(三) 重複疊作頂重四邊形：

性質一：第 m 層圖形~第(m+4)層圖形

證明：

1. 在證明過程中，我們發現了一個與證明有關的「小定理一」。

小定理一：任意凸四邊形 LMNO 對內部任意 P 點作重複疊作，若 P 點符合重複疊作條件，則原圖形與第四層圖形之邊長成比例。

證明：如圖，假設$\overline{LP}=l$、$\overline{MP}=m$、$\overline{NP}=n$、$\overline{OP}=o$，$\angle OLP=\angle 1$、$\angle MLP=\angle 2$、$\angle LMP=\angle 3$、$\angle NMP=\angle 4$、$\angle MNP=\angle 5$、$\angle ONP=\angle 6$、$\angle NOP=\angle 7$、$\angle LOP=\angle 8$

(1) $\because \angle LPL_1=90°-\angle 2$，$\angle LPO_1=90°-\angle 1$

$\therefore \angle L_1PO_1=(180°-\angle 1-\angle 2)$ $\Rightarrow \sin(\angle L_1PO_1)=\sin(\angle 1+\angle 2)$

$\because \dfrac{\overline{O_1L_1}}{\sin(\angle 1+\angle 2)}=2l$(正弦定理) $\Rightarrow \overline{O_1L_1}=2l\sin(\angle 1+\angle 2)$

同理 $\overline{L_1M_1}=2m\sin(\angle 3+\angle 4)$、$\overline{M_1N_1}=2n\sin(\angle 5+\angle 6)$、

$\overline{N_1O_1}=2o\sin(\angle 7+\angle 8)$

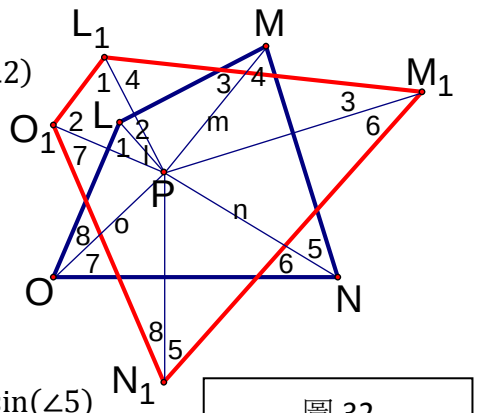


圖 32
原圖形與第一層

(2) 四邊形$L_1M_1N_1O_1$各頂點到 P 的距離：

$\overline{L_1P}=2l\sin(\angle 2)=2m\sin(\angle 3)$、$\overline{M_1P}=2m\sin(\angle 4)=2n\sin(\angle 5)$

$\overline{N_1P}=2n\sin(\angle 6)=2o\sin(\angle 7)$、$\overline{O_1P}=2o\sin(\angle 8)=2l\sin(\angle 1)$

(3) 經由運算可得各層邊長如下表：

表(七)

邊長	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	…
L_mM_m	$l\cos(\angle 2)+m\cos(\angle 3)$	$2m\sin(\angle 3+\angle 4)$	$4n\sin(\angle 3+\angle 6)\sin(\angle 5)$	$8o\sin(\angle 3+\angle 8)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)$	$16l\sin(\angle 3+\angle 2)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 1)$	…
M_mN_m	$m\cos(\angle 4)+n\cos(\angle 5)$	$2n\sin(\angle 5+\angle 6)$	$4o\sin(\angle 5+\angle 8)\sin(\angle 7)$	$8l\sin(\angle 5+\angle 2)\sin(\angle 7)\sin(\angle 1)$	$16m\sin(\angle 5+\angle 4)\sin(\angle 7)\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)$	…
N_mO_m	$n\cos(\angle 6)+o\cos(\angle 7)$	$2o\sin(\angle 7+\angle 8)$	$4l\sin(\angle 7+\angle 2)\sin(\angle 1)$	$8m\sin(\angle 7+\angle 4)\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)$	$16n\sin(\angle 7+\angle 6)\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)$	…
O_mL_m	$o\cos(\angle 8)+l\cos(\angle 1)$	$2l\sin(\angle 1+\angle 2)$	$4m\sin(\angle 1+\angle 4)\sin(\angle 3)$	$8n\sin(\angle 1+\angle 6)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)$	$16o\sin(\angle 1+\angle 8)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)$	…
設$x_4=\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)=\sin(\angle 2)\sin(\angle 4)\sin(\angle 6)\sin(\angle 8)$						

(四邊形 LMNO 即為四邊形$L_0M_0N_0O_0$)

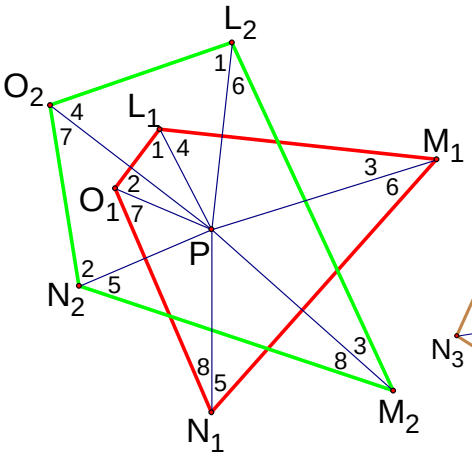


圖 33
第一層與第二層

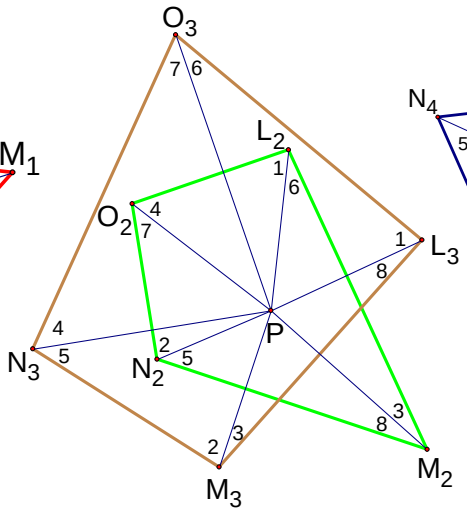


圖 34
第二層與第三層

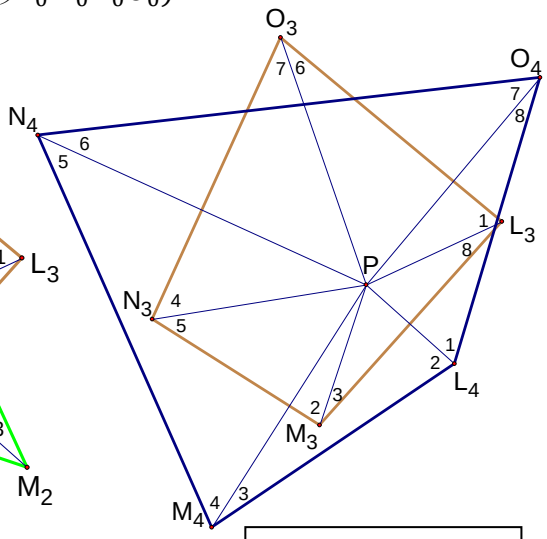


圖 35
第三層與第四層

$$\frac{\overline{L_4M_4}}{\overline{LM}}=\frac{16l\sin(\angle 3+\angle 2)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 1)}{l\cos(\angle 2)+m\cos(\angle 3)}$$

$$=\frac{16l[\sin(\angle 2)\cos(\angle 3)+\cos(\angle 2)\sin(\angle 3)]\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 1)}{l\cos(\angle 2)+m\cos(\angle 3)}$$

$$=\frac{16l\sin(\angle 2)\cos(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 1)+16l\cos(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 1)}{l\cos(\angle 2)+m\cos(\angle 3)}$$

$\Rightarrow$ 將$\overline{L_1P}=2l\sin(\angle 2)=2m\sin(\angle 3)$代入上式

$$\frac{16m\sin(\angle 3)\cos(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 1)+16lx_4\cos(\angle 2)}{l\cos(\angle 2)+m\cos(\angle 3)}$$

$$=\frac{[16x_4][m\cos(\angle 3)+l\cos(\angle 2)]}{l\cos(\angle 2)+m\cos(\angle 3)}=16x_4$$

同理可得$\frac{\overline{M_4N_4}}{MN}=16x_4$、$\frac{\overline{N_4O_4}}{NO}=16x_4$、$\frac{\overline{O_4L_4}}{OL}=16x_4$

故原圖形 LMNO 與第四層圖形$L_4M_4N_4O_4$之對應邊長成比例。(得證)

2. 重複疊作頂重四邊形之**邊長**關係：

步驟一：證明原圖形與第四層圖形各對應邊長成比例，
第一層圖形與第五層圖形、第二層圖形與第六層圖形、
第三層圖形與第七層圖形之各對應邊長成比例。

證明：

如圖，利用「小定理一」，將 A 點當做 L 點，B 點當做 M 點，C 點當做 N 點，D 點當做 O 點，重心 G 點當做 P 點，則由「小定理一」可得原圖形 ABCD 與第四層圖形$A_4B_4C_4D_4$之對應邊長成比例為$16x_4$。

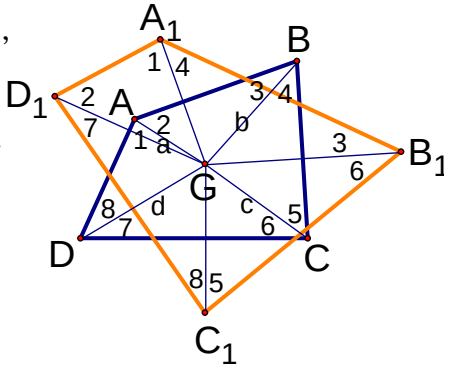


圖 36：原圖形與第一層

利用「小定理一」將第一層圖形$A_1B_1C_1D_1$當作 LMNO，G 點當做 P 點，則可得第一層圖形$A_1B_1C_1D_1$與第五層圖形$A_5B_5C_5D_5$之對應邊長成比例為$16x_4$。

同理可得第二層圖形$A_2B_2C_2D_2$與第六層圖形$A_6B_6C_6D_6$之邊長成比例為$16x_4$、
第三層圖形$A_3B_3C_3D_3$與第七層圖形$A_7B_7C_7D_7$之邊長成比例為$16x_4$。

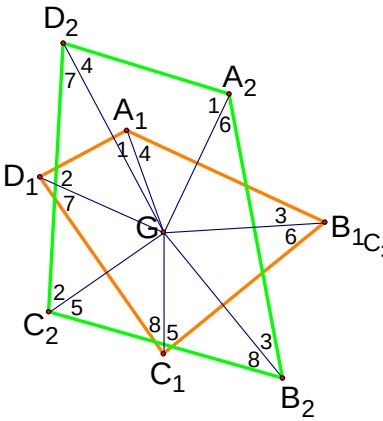


圖 37
第一層與第二層

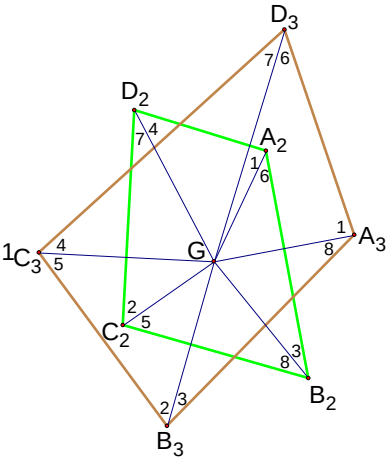


圖 38
第二層與第三層

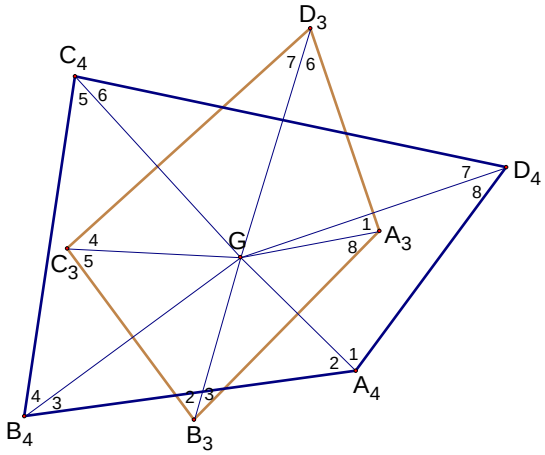


圖 39
第三層與第四層

步驟二：假設第 m 層圖形與第(m+4)層圖形之邊長成比例為$16x^4$成立

步驟三：證明第(m+4)層圖形與第(m+8)層圖形之邊長成比例為$16x^4$

我們對任意一層圖形之重心 G 點作重複疊作，如圖，利用「小定理一」，將點A_{m+4}當做 L 點，點B_{m+4}當做 M 點，點C_{m+4}當做 N 點，點D_{m+4}當做 O 點，點 G 當作 P 點，則由「小定理一」可得原圖形$A_{m+4}B_{m+4}C_{m+4}D_{m+4}$與第四層圖形$A_{m+8}B_{m+8}C_{m+8}D_{m+8}$之對應邊長成比例為$16x_4$。

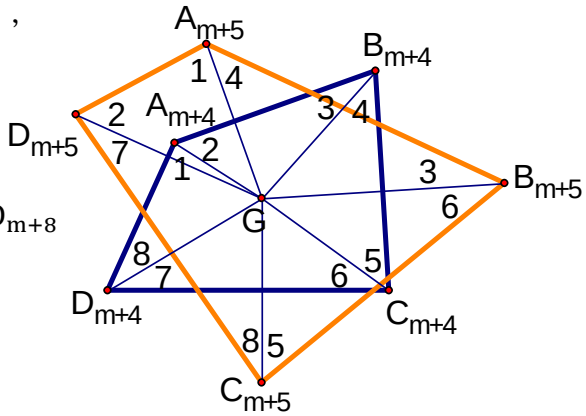


圖 40：原圖形與第一層

由步驟一、步驟二、步驟三及數學歸納法即得證。

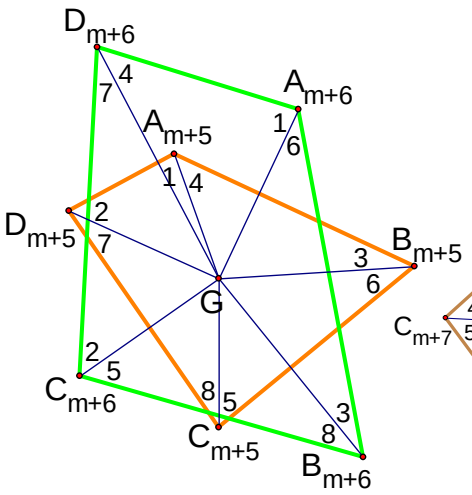


圖 41：第一層與第二層

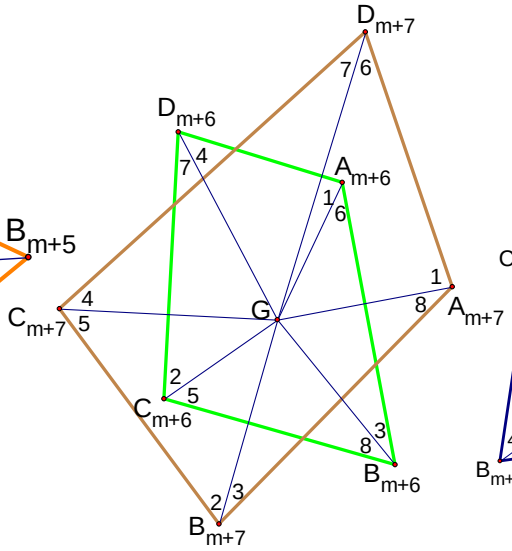


圖 42：第二層與第三層

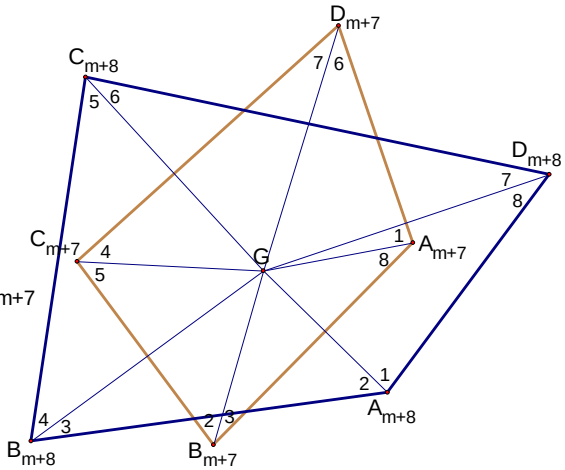


圖 43：第三層與第四層

性質二：重複疊作頂重四邊形，原圖形與第 4h 層圖形之重心共點

證明：

1. 想法：如果求出原圖形各頂點到某點的距離，再求出相似圖形各頂點到某點的距離，如有相同比值，即可判定此點對原圖形之相對位置等於此點對相似圖形之相對位置。同理，如果此點為原圖形之重心，即可判定此點也為相似圖形之重心。

(1) 求出$\frac{\overline{A_4G}}{\overline{AG}}$、$\frac{\overline{B_4G}}{\overline{BG}}$、$\frac{\overline{C_4G}}{\overline{CG}}$、$\frac{\overline{D_4G}}{\overline{DG}}$

假設$\overline{AG}=a$、$\overline{BG}=b$、$\overline{CG}=c$、$\overline{DG}=c$

以$\overline{D_1G}$為例，∵ 四邊形 AD_1DG 為箏形

∴ $\overline{AD}$垂直平分$\overline{D_1G}$

$\Rightarrow \overline{D_1G}=2\cdot a\sin(\angle 1)=2a\sin(\angle 1)$

同理可得$\overline{A_1G}=2b\sin(\angle 3)$、$\overline{B_1G}=2c\sin(\angle 5)$、

$\overline{C_1G}=2d\sin(\angle 7)$

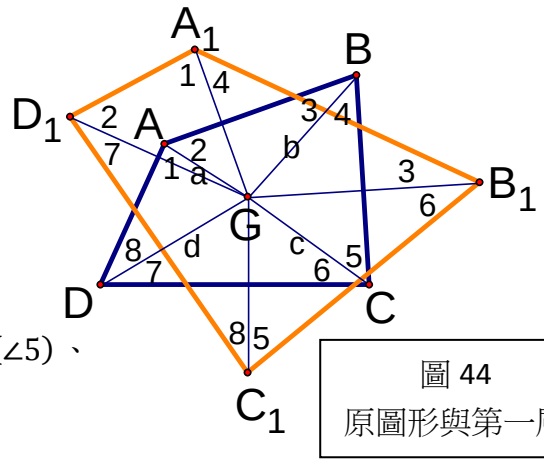


圖 44
原圖形與第一層

同理可得各層圖形到 G 點的距離如下表：

表(八)

各頂點到重心之距離	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5	m = 6	m = 7	…
A_mG	a	$2a\sin(\angle 2)$ $=2b\sin(\angle 3)$	$4c\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)$	$8d\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)$ $\sin(\angle 7)$	$16ax_4$	$32bx_4\sin(\angle 3)$	$64cx_4\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)$	$128dx_4\sin(\angle 3)$ $\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)$	…
B_mG	b	$2b\sin(\angle 4)$ $=2c\sin(\angle 5)$	$4d\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)$	$8a\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)$ $\sin(\angle 1)$	$16bx_4$	$32cx_4\sin(\angle 5)$	$64dx_4\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)$	$128ax_4\sin(\angle 5)$ $\sin(\angle 7)\sin(\angle 1)$	…
C_mG	c	$2c\sin(\angle 6)$ $=2d\sin(\angle 7)$	$4a\sin(\angle 7)\sin(\angle 1)$	$8b\sin(\angle 7)\sin(\angle 1)$ $\sin(\angle 3)$	$16cx_4$	$32dx_4\sin(\angle 7)$	$64ax_4\sin(\angle 7)\sin(\angle 1)$	$128bx_4\sin(\angle 7)$ $\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)$	…
D_mG	d	$2d\sin(\angle 8)$ $=2a\sin(\angle 1)$	$4b\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)$	$8c\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)$ $\sin(\angle 5)$	$16dx_4$	$32ax_4\sin(\angle 1)$	$64bx_4\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)$	$128cx_4\sin(\angle 1)$ $\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)$	…
設$x_4=\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)=\sin(\angle 2)\sin(\angle 4)\sin(\angle 6)\sin(\angle 8)$									

(2) 得知$\frac{\overline{A_4G}}{\overline{AG}}=\frac{\overline{B_4G}}{\overline{BG}}=\frac{\overline{C_4G}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{D_4G}}{\overline{DG}}=16x_4$

(3) 故可得知 G 點也為第四層圖形之重心，原圖形與第四層圖形之重心共點。

2. 假設第 h 層圖形與第(h+4)層圖形之重心共點成立 $(h=4m，m\in\mathbb{Z}$ 且 $m\geq 0)$

3. 證明第(h+4)層圖形與第(h+8)層圖形之重心共點 $(h=4m，m\in\mathbb{Z}$ 且 $m\geq 0)$

(1) 求出$\frac{\overline{A_{h+8}G}}{\overline{A_{h+4}G}}=\frac{(16x_4)^{m+2}a}{(16x_4)^{m+1}a}=16x_4$、$\frac{\overline{B_{h+8}G}}{\overline{B_{h+4}G}}=\frac{(16x_4)^{m+2}b}{(16x_4)^{m+1}b}=16x_4$、

$\frac{\overline{C_{h+8}G}}{\overline{C_{h+4}G}}=\frac{(16x_4)^{m+2}c}{(16x_4)^{m+1}c}=16x_4$、$\frac{\overline{D_{h+8}G}}{\overline{D_{h+4}G}}=\frac{(16x_4)^{m+2}d}{(16x_4)^{m+1}d}=16x_4$

(2) 得之$\frac{\overline{A_{h+8}G}}{\overline{A_{h+4}G}}=\frac{\overline{B_{h+8}G}}{\overline{B_{h+4}G}}=\frac{\overline{C_{h+8}G}}{\overline{C_{h+4}G}}=\frac{\overline{D_{h+8}G}}{\overline{D_{h+4}G}}$

(3) 故可得第(h+4)層圖形與第(h+8)層圖形之重心共點

由 1.、2.、3.及數學歸納法可得原圖形與第 4h 層圖形之重心共點，故得證。

(四) 重複疊作頂重五邊形

性質一：第 m 層圖形~第(m+5)層圖形

證明：

1. 在證明過程中，我們發現了一個與證明有關的「小定理二」。

小定理二：任意凸五邊形 LMNOQ 對內部任意 P 點作重複疊作，若 P 點符合重複疊作條件，則原圖形與第五層圖形之邊長成比例。

證明：如圖，假設$\overline{LP}=l$、$\overline{MP}=m$、$\overline{NP}=n$、$\overline{OP}=o$、$\overline{QP}=q$，$\angle QLP=\angle 1$、$\angle MLP=\angle 2$、$\angle LMP=\angle 3$、$\angle NMP=\angle 4$、$\angle MNP=\angle 5$、$\angle ONP=\angle 6$、$\angle NOP=\angle 7$、$\angle QOP=\angle 8$、$\angle OQP=\angle 9$、$\angle LQP=\angle 10$

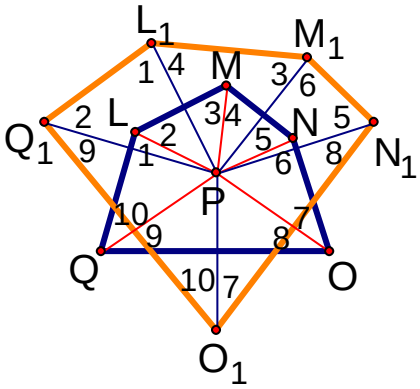


圖 45：原圖形與第一層

(1) $\because \angle LPL_1=90°-\angle 2$，$\angle LPQ_1=90°-\angle 1$

$\therefore \angle L_1PQ_1=(180°-\angle 1-\angle 2)$ $\Rightarrow \sin(\angle L_1PQ_1)=\sin(\angle 1+\angle 2)$

$\because \frac{\overline{Q_1L_1}}{\sin(\angle 1+\angle 2)}=2l$(正弦定理) $\Rightarrow \overline{Q_1L_1}=2l\sin(\angle 1+\angle 2)$

同理 $\overline{L_1M_1}=2m\sin(\angle 3+\angle 4)$、$\overline{M_1N_1}=2n\sin(\angle 5+\angle 6)$、

$\overline{N_1O_1}=2o\sin(\angle 7+\angle 8)$、$\overline{O_1Q_1}=2n\sin(\angle 5+\angle 6)$

(2) 五邊形$L_1M_1N_1O_1Q_1$各頂點到 P 的距離： $\overline{L_1P}=2l\sin(\angle 2)=2m\sin(\angle 3)$、

$\overline{M_1P}=2m\sin(\angle 4)=2n\sin(\angle 5)$、$\overline{N_1P}=2n\sin(\angle 6)=2o\sin(\angle 7)$、

$\overline{O_1P}=2o\sin(\angle 8)=2q\sin(\angle 9)$ 、 $\overline{Q_1P}=2q\sin(\angle 10)=2l\sin(\angle 9)$

(3) 經由運算可得各層邊長如下表：

表(九)

邊長	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	…
L_mM_m	$l\cos(\angle 2)+m\cos(\angle 3)$	$2m\sin(\angle 3+\angle 4)$	$4n\sin(\angle 3+\angle 6)\sin(\angle 5)$	$8o\sin(\angle 3+\angle 8)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)$	$16l\sin(\angle 3+\angle 10)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 9)$	$32l\sin(\angle 3+\angle 2)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 9)\sin(\angle 1)$	…
M_mN_m	$m\cos(\angle 4)+n\cos(\angle 5)$	$2n\sin(\angle 5+\angle 6)$	$4o\sin(\angle 5+\angle 8)\sin(\angle 7)$	$8l\sin(\angle 5+\angle 10)\sin(\angle 7)\sin(\angle 9)$	$16m\sin(\angle 5+\angle 2)\sin(\angle 7)\sin(\angle 1)\sin(\angle 1)$	$32m\sin(\angle 5+\angle 4)\sin(\angle 7)\sin(\angle 9)\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)$	…
N_mO_m	$n\cos(\angle 6)+o\cos(\angle 7)$	$2o\sin(\angle 7+\angle 8)$	$4l\sin(\angle 7+\angle 10)\sin(\angle 9)$	$8m\sin(\angle 7+\angle 2)\sin(\angle 1)\sin(\angle 1)$	$16n\sin(\angle 7+\angle 4)\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)\sin(\angle 3)$	$32n\sin(\angle 7+\angle 6)\sin(\angle 9)\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)$	…
O_mQ_m	$o\cos(\angle 8)+q\cos(\angle 9)$	$2l\sin(\angle 9+\angle 10)$	$4m\sin(\angle 9+\angle 2)\sin(\angle 1)$	$8n\sin(\angle 1+\angle 4)\sin(\angle 3)\sin(\angle 3)$	$16o\sin(\angle 1+\angle 6)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 5)$	$32o\sin(\angle 9+\angle 8)\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)$	…
Q_mL_m	$q\cos(\angle 10)+l\cos(\angle 1)$	$2l\sin(\angle 1+\angle 2)$	$4m\sin(\angle 1+\angle 4)\sin(\angle 3)$	$8n\sin(\angle 1+\angle 6)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)$	$16o\sin(\angle 1+\angle 8)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)$	$32o\sin(\angle 1+\angle 10)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 9)$	…
設$x_5=\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 9)=\sin(\angle 2)\sin(\angle 4)\sin(\angle 6)\sin(\angle 8)\sin(\angle 10)$							

(五邊形 LMNOQ 即為五邊形$L_0M_0N_0O_0Q_0$)

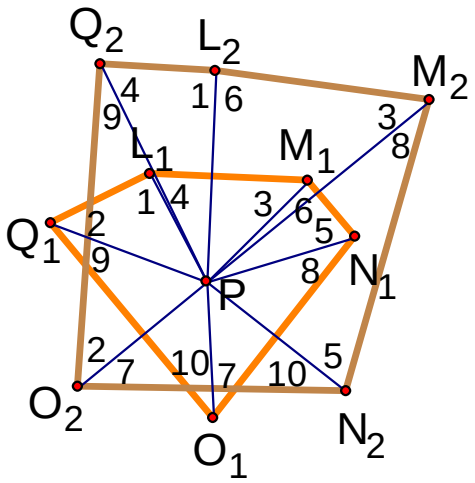


圖 46：第一層與第二層

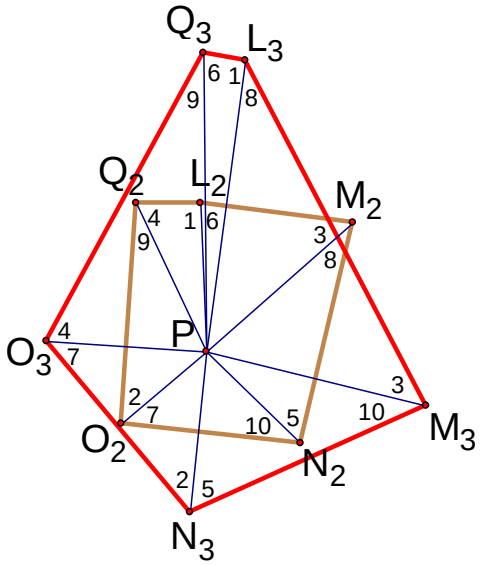


圖 47：第二層與第三層

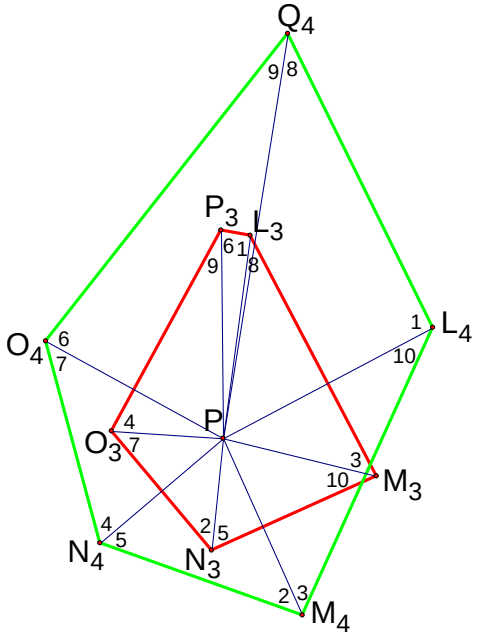


圖 48：第三層與第四層

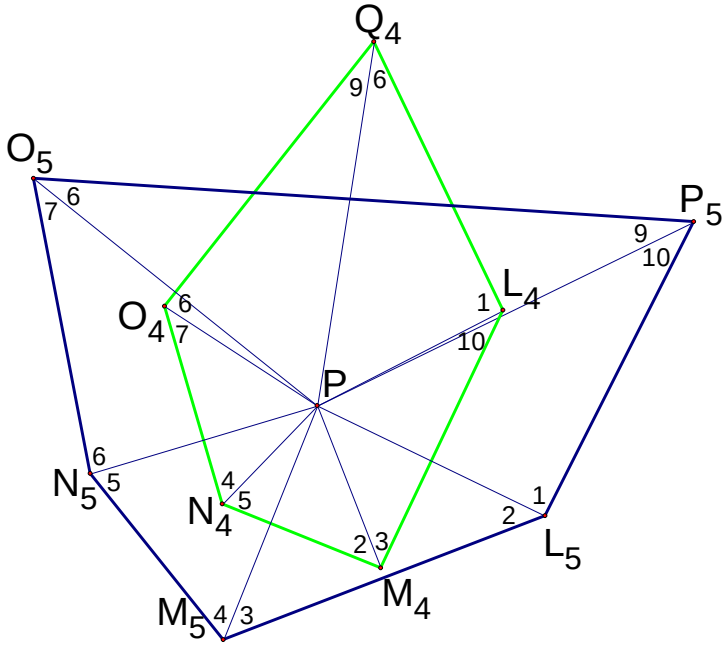


圖 49：第四層與第五層

$$\frac{\overline{L_5M_5}}{\overline{LM}}=\frac{32l\sin(\angle 3+\angle 2)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 9)\sin(\angle 1)}{l\cos(\angle 2)+m\cos(\angle 3)}$$

$$=\frac{32l[\sin(\angle 2)\cos(\angle 3)+\cos(\angle 2)\sin(\angle 3)]\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 9)\sin(\angle 1)}{l\cos(\angle 2)+m\cos(\angle 3)}$$

$$=\frac{32l\sin(\angle 2)\cos(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 9)\sin(\angle 1)+32l\cos(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 9)\sin(\angle 1)}{l\cos(\angle 2)+m\cos(\angle 3)}$$

$\Rightarrow$ 將$\overline{L_1P}=2l\sin(\angle 2)=2m\sin(\angle 3)$ 帶入

$$\frac{32m\sin(\angle 3)\cos(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 9)\sin(\angle 1)+32lx_5\cos(\angle 2)}{l\cos(\angle 2)+m\cos(\angle 3)}$$

$$=\frac{[32x_5][m\cos(\angle 3)+l\cos(\angle 2)]}{l\cos(\angle 2)+m\cos(\angle 3)}=32x_5$$

同理可得$\frac{\overline{M_5N_5}}{MN}=32x_5$、$\frac{\overline{N_5O_5}}{NO}=32x_5$、$\frac{\overline{O_5Q_5}}{OQ}=32x_5$、$\frac{\overline{Q_5L_5}}{QL}=32x_5$

故原圖形 LMNOQ 與第五層圖形$L_5M_5N_5O_5Q_5$之對應邊長成比例。(得證)

2. 重複疊作頂重五邊形之**邊長**關係：

步驟一：證明原圖形與第五層圖形各對應邊長成比例，

第一層圖形與第六層圖形、第二層圖形與第七層圖形、第三層圖形與第八層圖形、第四層圖形與第九層圖形之各對應邊長成比例。

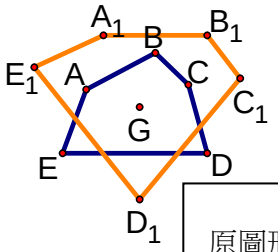


圖 50
原圖形與第一層

證明：

如圖，利用「小定理二」，將 A 點當做 L 點，B 點當做 M 點，C 點當做 N 點，D 點當做 O 點，E 點當做 Q 點，重心 G 點當做 P 點，則由「小定理二」可得原圖形 ABCDE 與第五層圖形$A_5B_5C_5D_5E_5$之對應邊長成比例為$32x_5$。

利用「小定理二」將第一層圖形$A_1B_1C_1D_1E_1$當作 LMNOQ，G 點當做 P 點，則可得第一層圖形$A_1B_1C_1D_1E_1$與第六層圖形$A_6B_6C_6D_6E_6$之對應邊長成比例為$32x_5$。

同理可得第二層圖形$A_2B_2C_2D_2E_2$與第七層圖形$A_7B_7C_7D_7E_7$之邊長成比例為$32x_5$、

第三層圖形$A_3B_3C_3D_3E_3$與第八層圖形$A_8B_8C_8D_8E_8$之邊長成比例為$32x_5$、

第四層圖形$A_4B_4C_4D_4E_4$與第九層圖形$A_9B_9C_9D_9E_9$之邊長成比例為$32x_5$。

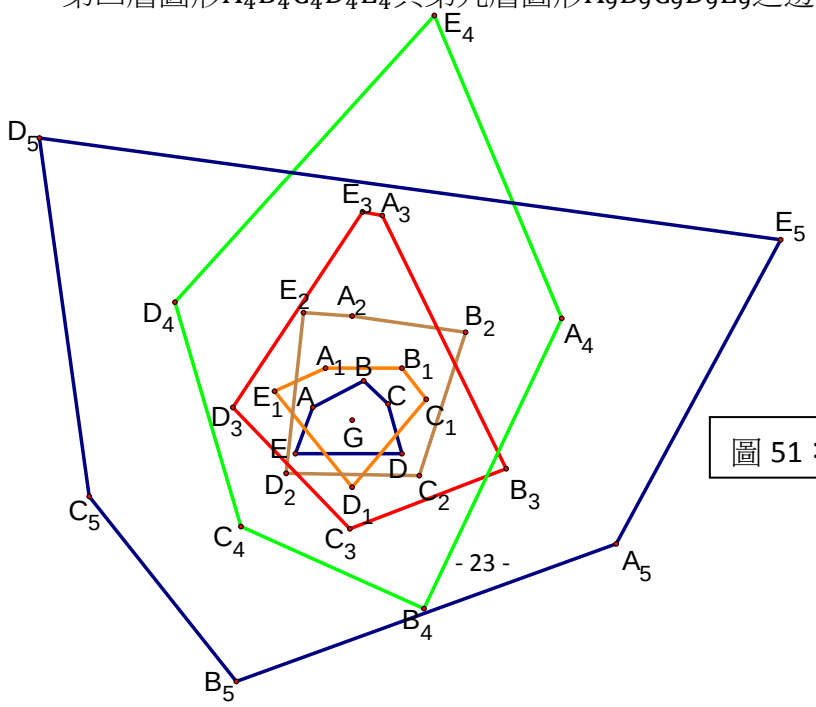


圖 51：原圖形到第五層

步驟二：假設第 m 層圖形與第(m+5)層圖形之邊長成比例為$32x_5$成立

步驟三：證明第(m+5)層圖形與第(m+10)層圖形之邊長成比例為$32x_5$

我們對任意一層圖形之重心 G 點作重複疊作，如下圖，利用「小定理二」，將點A_{m+5}當做 L 點，點B_{m+5}當做 M 點，點C_{m+5}當做 N 點，點D_{m+5}當做 O 點，點E_{m+5}當做 Q 點，G 點當作 P 點，則由「小定理二」可得原圖形$A_{m+5}B_{m+5}C_{m+5}D_{m+5}$第四層圖形$A_{m+10}B_{m+10}C_{m+10}D_{m+10}E_{m+10}$之對應邊長成例為$16x_4$。

由步驟一、步驟二、步驟三及數學歸納法即得證。

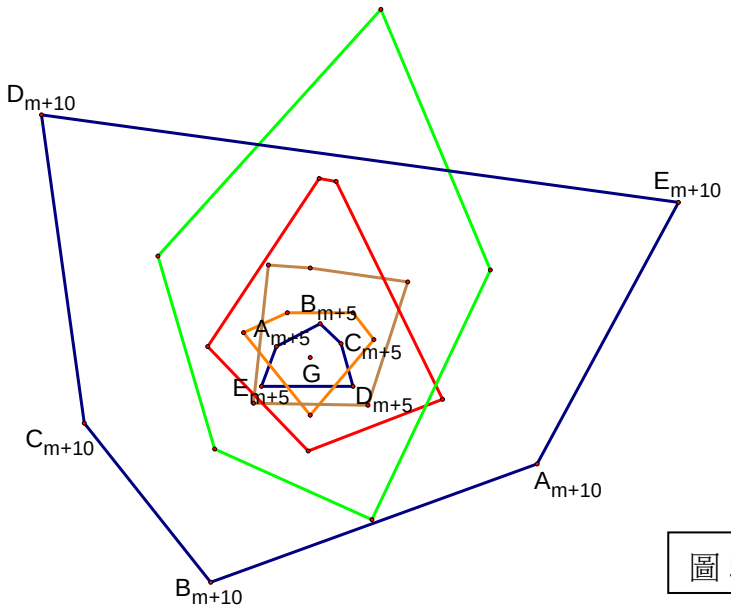


圖 52

性質二：**重複疊作頂重五邊形，原圖形與第 5h 層圖形之重心共點**

證明：

1. 想法：與重複疊作頂重四邊形之重心共點證明相同。

   (1) 經由歸納三角形、四邊形、五邊形，可得$\frac{\overline{A_5G}}{\overline{AG}}=32x_5$、$\frac{\overline{B_5G}}{\overline{BG}}=32x_5$、$\frac{\overline{C_5G}}{\overline{CG}}=32x_5$、$\frac{\overline{D_5G}}{\overline{DG}}=32x_5$、$\frac{\overline{E_5G}}{\overline{DG}}=32x_5$

   (2) 得知$\frac{\overline{A_5G}}{\overline{AG}}=\frac{\overline{B_5G}}{\overline{BG}}=\frac{\overline{C_5G}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{D_5G}}{\overline{DG}}=\frac{\overline{E_5G}}{\overline{DG}}$

   (3) 故可得知 G 點也為第五層圖形之重心，原圖形與第五層圖形之重心共點。

2. 假設第 h 層圖形與第(h+5)層圖形之重心共點成立　$(h=5m，m\in\mathbb{Z}$ 且 $m\geq 0)$

3. 證明第(h+5)層圖形與第(h+10)層圖形之重心共點　$(h=5m，m\in\mathbb{Z}$ 且 $m\geq 0)$

   (1) 求出$\frac{\overline{A_{h+10}G}}{\overline{A_{h+5}G}}=\frac{(16x_5)^{m+2}a}{(16x_5)^{m+1}a}=32x_5$、$\frac{\overline{B_{h+10}G}}{\overline{B_{h+5}G}}=\frac{(16x_5)^{m+2}b}{(16x_5)^{m+1}b}=32x_5$、$\frac{\overline{C_{h+10}G}}{\overline{C_{h+5}G}}=\frac{(16x_5)^{m+2}c}{(16x_5)^{m+1}c}=32x_5$、$\frac{\overline{D_{h+10}G}}{\overline{D_{h+5}G}}=\frac{(16x_5)^{m+2}d}{(16x_5)^{m+1}d}=32x_5$、$\frac{\overline{E_{h+10}G}}{\overline{E_{h+5}G}}=\frac{(16x_5)^{m+2}e}{(16x_5)^{m+1}e}=32x_5$

(2) 得之$\frac{\overline{A_{h+10}G}}{\overline{A_{h+5}G}}=\frac{\overline{B_{h+10}G}}{\overline{B_{h+5}G}}=\frac{\overline{C_{h+10}G}}{\overline{C_{h+5}G}}=\frac{\overline{D_{h+10}G}}{\overline{D_{h+5}G}}=\frac{\overline{E_{h+10}G}}{\overline{E_{h+5}G}}$

(3) 故可得第(h+5)層圖形與第(h+10)層圖形之重心共點

由 1.、2.、3.及數學歸納法可得原圖形與第 5h 層圖形之重心共點，故得證。

(五) 重複疊作頂重 n 邊形

性質一：第 m 層圖形~第(m+n)層圖形

證明：

1. 在證明過程中，我們發現了一個與證明有關的「小定理三」。

小定理三：任意凸 n 邊形 LMNO ...對內部任意 P 點作重複疊作，若 P 點符合重複疊作條件，則原圖形與第 n 層圖形之邊長成比例為$2^n x_n$

證明方法與小定理一、小定理二皆相同。

$(x_n=\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\ldots\ldots=\sin(\angle 2)\sin(\angle 4)\sin(\angle 6)\sin(\angle 8)\ldots\ldots$

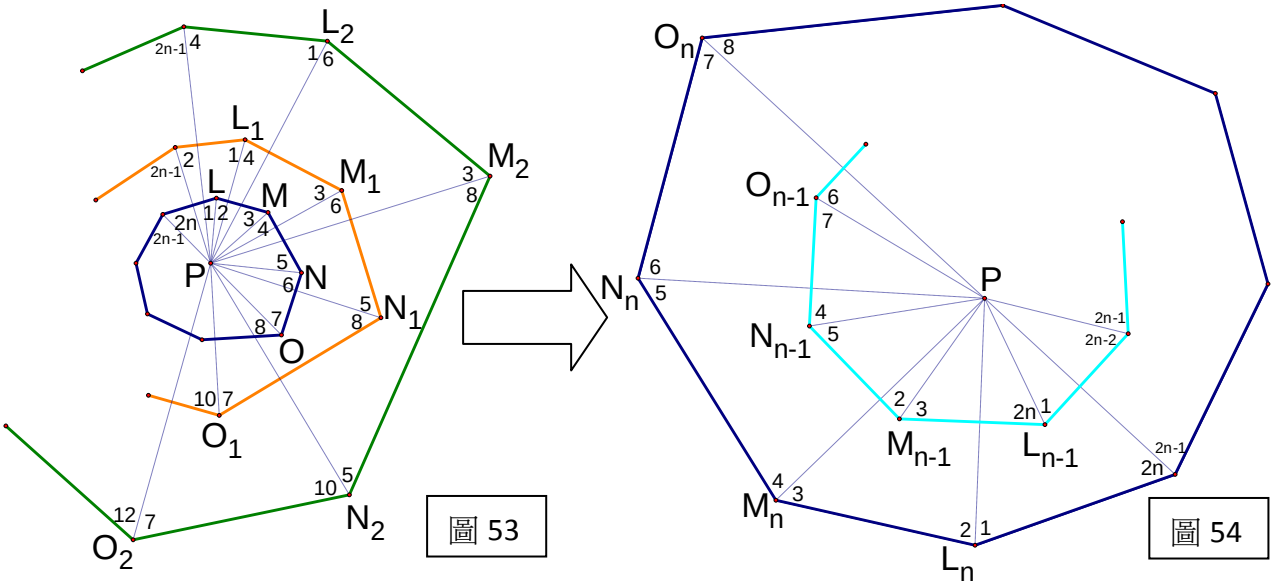


圖 53　　圖 54

2. 重複疊作頂重 n 邊形之**邊長**關係：

步驟一：證明原圖形與第 n 層圖形各對應邊長成比例，
第一層圖形與第(n+1)層圖形、第二層圖形與第(n+2)層圖形、……、
第(n-1)層圖形與第(2n-1)層圖形之各對應邊長成比例。

證明：

與重複疊作頂重四、五邊形方法相同，利用「小定理三」，將 A 點當做 L 點，B 點當做 M 點，C 點當做 N 點，D 點當做 O 點，……，重心 G 點當做 P 點，則由「小定理三」可得原圖形 ABCD ……與第 n 層圖形$A_nB_nC_nD_n$ ……之對應邊長成比例為$2^n x_n$。

利用「小定理三」將第一層圖形$A_1B_1C_1D_1$ ……當作 LMNO ……，G 點當做 P 點，則可得第一層圖形$A_1B_1C_1D_1E_1$與第(n+1)層圖形$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ ……之對應邊長成比例為$2^n x_n$。

同理可得第二層圖形$A_2B_2C_2D_2$ ……與第(n+2)層圖形$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}D_{n+2}$ ……之邊長成比例為$2^n x_n$、
第三層圖形$A_3B_3C_3D_3$ ……與第(n+3)層圖形$A_{n+3}B_{n+3}C_{n+3}D_{n+3}$ ……之邊長成比例為$2^n x_n$、
⋮
第(n-1)層圖形$A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$ ……與第(2n-1)層圖形$A_{2n-1}B_{2n-1}C_{2n-1}D_{2n-1}$ ……
之邊長成比例為$2^n x_n$。

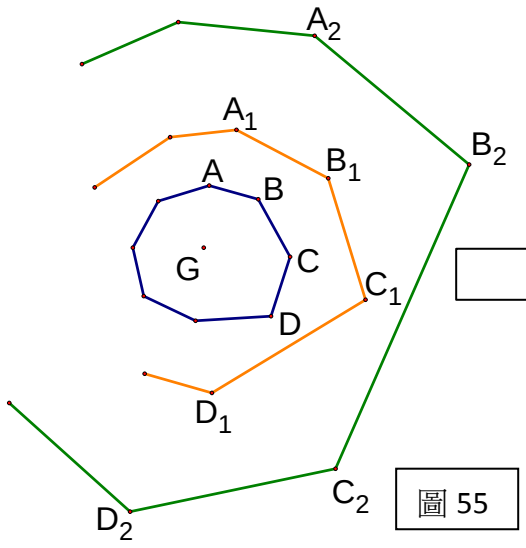


圖 55

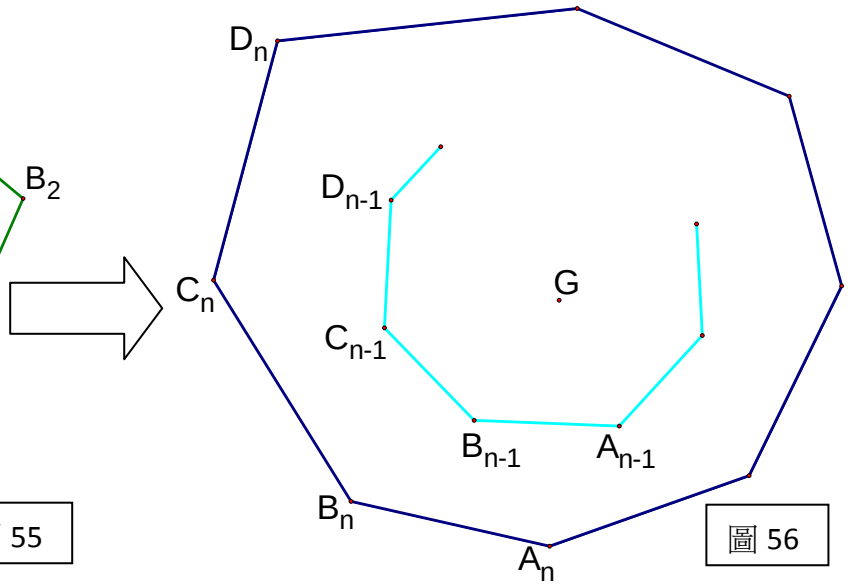


圖 56

步驟二：假設第 m 層圖形與第(m+n)層圖形之邊長成比例為$2^n x_n$成立

步驟三：證明第(m+n)層圖形與第(m+2n)層圖形之邊長成比例為$2^n x_n$

我們對任意一層圖形之重心 G 點作重複疊作，如下圖，利用「小定理三」，將點A_{m+n}當做 L 點，點B_{m+n}當做 M 點，點C_{m+n}當做 N 點，點D_{m+n}當做 O 點，.....，G 點當作 P 點，則由「小定理三」可得原圖形$A_{m+n}B_{m+n}C_{m+n}D_{m+n}$ ⋯ ⋯與第 n 層圖形$A_{m+2n}B_{m+2n}C_{m+2n}D_{m+2n}$ ⋯ ⋯之對應邊長成例為$2^n x_n$。

由步驟一、步驟二、步驟三及數學歸納法即得證。

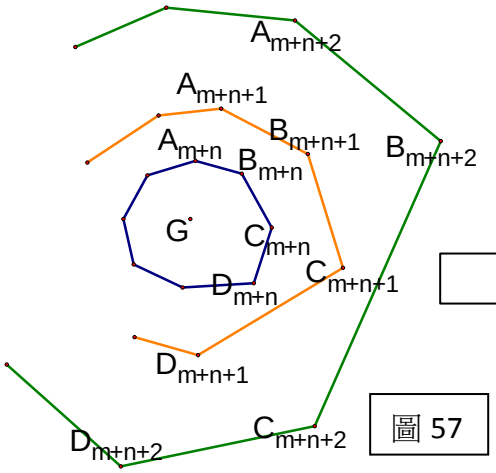


圖 57

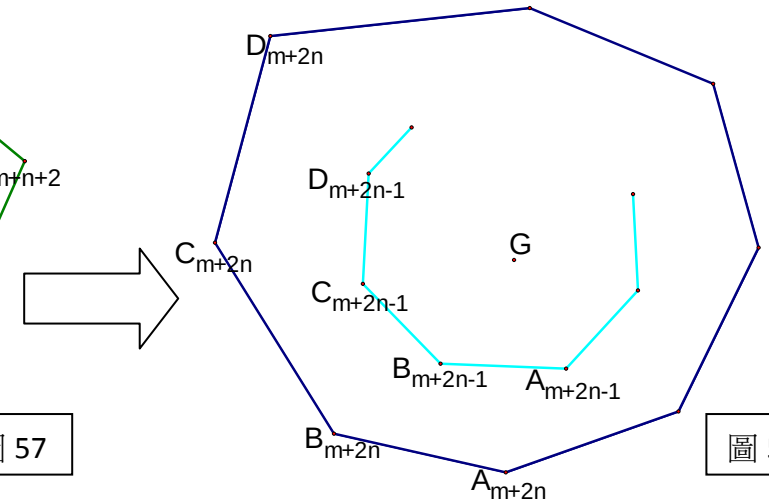


圖 58

性質二：重複疊作頂重 n 邊形，原圖形與第 nh 層圖形之重心共點

1. 想法：與重複疊作頂重四、五邊形之重心共點證明相同。

(1) 經由歸納三角形、四邊形、五邊形，可得$\frac{\overline{A_nG}}{\overline{AG}} = 2^n x_n$、$\frac{\overline{B_nG}}{\overline{BG}} = 2^n x_n$、$\frac{\overline{C_nG}}{\overline{CG}} = 2^n x_n$、$\frac{\overline{D_nG}}{\overline{DG}} = 2^n x_n$、⋯ ⋯

(2) 得知$\frac{\overline{A_nG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{B_nG}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{C_nG}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{D_nG}}{\overline{DG}} =$ ⋯ ⋯

(3) 故可得知 G 點也為第 n 層圖形之重心，原圖形與第 n 層圖形之重心共點。

2. 假設第 h 層圖形與第(h+n)層圖形之重心共點成立 $(h = nm，m \in \mathbb{Z}$ 且 $m \geq 0)$

3. 證明第(h+n)層圖形與第(h+2n)層圖形之重心共點 $(h = nm，m \in \mathbb{Z}$ 且 $m \geq 0)$

(1) 經由歸納三角形、四邊形、五邊形，可得$\frac{\overline{A_{h+2n}G}}{\overline{A_{h+n}G}} = \frac{(2^n x_n)^{m+2}a}{(2^n x_n)^{m+1}a} = 2^n x_n$、

$\frac{\overline{B_{h+2n}G}}{\overline{B_{h+n}G}} = \frac{(2^n x_n)^{m+2}b}{(2^n x_n)^{m+1}b} = 2^n x_n$、$\frac{\overline{C_{h+2n}G}}{\overline{C_{h+n}G}} = \frac{(2^n x_n)^{m+2}c}{(2^n x_n)^{m+1}c} = 2^n x_n$、

$\frac{\overline{D_{h+2n}G}}{\overline{D_{h+n}G}} = \frac{(2^n x_n)^{m+2}d}{(2^n x_n)^{m+1}d} = 2^n x_n$、……

(2) 得之$\frac{\overline{A_{h+2n}G}}{\overline{A_{h+n}G}} = \frac{\overline{B_{h+2n}G}}{\overline{B_{h+n}G}} = \frac{\overline{C_{h+2n}G}}{\overline{C_{h+n}G}} = \frac{\overline{D_{h+2n}G}}{\overline{D_{h+n}G}} =$ ……

(3) 故可得第(h+n)層圖形與第(h+2n)層圖形之重心共點

由 1.、2.、3.及數學歸納法可得原圖形與第 nh 層圖形之重心共點，故得證。

(六) 重複疊作頂重 n 邊形，第 m 層圖形與第(m+n)層圖形之旋轉角度： $(\mathbf{n} \in \mathbb{N})$

1. 重複疊作頂重四邊形，第 m 層圖形與第(m+4)層圖形之旋轉角度：

(1)若以順時針方向來看旋轉角度，則其角度為$\angle AGA_1 + \angle A_1GA_2 + \angle A_2GA_3 + \angle A_3GA_4$

$= (90° - \angle 2) + (90° - \angle 4) + (90° - \angle 6) + (90° - \angle 8)$

$= 360° - (\angle 2 + \angle 4 + \angle 6 + \angle 8)$

(2)若以逆時針方向來看旋轉角度，則其角度為$\angle AGD_1 + \angle D_1GC_2 + \angle C_2GB_3 + \angle B_3GA_4$

$= (90° - \angle 1) + (90° - \angle 3) + (90° - \angle 5) + (90° - \angle 7)$

$= 360° - (\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 7)$

(3)順時針旋轉角度+逆時針旋轉角度$= 720° - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8)$

$= 720° - 360° = 360°$ (符合 順時針角度 + 逆時針角度 = 360°)

2. 重複疊作頂重五邊形，第 m 層圖形與第(m+5)層圖形之旋轉角度：

(1)若以順時針方向來看旋轉角度，則其角度為$\angle AGA_1 + \angle A_1GA_2 + \angle A_2GA_3 + \angle A_3GA_4$

$+\angle A_4GA_5 = (90° - \angle 2) + (90° - \angle 4) + (90° - \angle 6) + (90° - \angle 8) + (90° - \angle 10)$

$= 450° - (\angle 2 + \angle 4 + \angle 6 + \angle 8 + \angle 10)$

(2)若以逆時針方向來看旋轉角度，則其角度為$\angle AGE_1 + \angle E_1GD_2 + \angle D_2GC_3 + \angle C_3GB_4$

$+\angle B_4GA_5 = (90° - \angle 1) + (90° - \angle 2) + (90° - \angle 5) + (90° - \angle 7) + (90° - \angle 9)$

$= 450° - (\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 7 + \angle 9)$

(3)順時針旋轉角度+逆時針旋轉角度$= 900° - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8$

$+\angle 9 + \angle 10) = 900° - 540° = 360°$ (符合 順時針角度 + 逆時針角度 = 360°)

3. 重複疊作頂重 n 邊形，第 m 層圖形與第(m+n)層圖形之旋轉角度：

(1)若以順時針方向來看旋轉角度，則其角度為 $90° \times n -$ (各偶數編號的角之和)

(2)若以逆時針方向來看旋轉角度，則其角度為 $90° \times n -$ (各奇數編號的角之和)

(3)順時針旋轉角度+逆時針旋轉角度$= 90° \times 2n -$ 此圖形之內角和

$= 180° \times n - 180° \times (n - 2) = 180° \times n - 180° \times n + 360° = 360°$

(符合 順時針角度 + 逆時針角度 = 360°)

陸、 結論

一、**直角三角形與其中重、頂重三角形的關係：**

中重三角形~頂重三角形、且中重三角形、頂重三角形與原直角三角形之面積比為 2：8：9

二、**任意三角形與其中重、頂重三角形的關係：**

中重三角形~頂重三角形、且中重三角形與頂重三角形之面積比為 1：4

三、**能以一特殊邊作出一原直角三角形與其中重三角形與頂重三角形**

四、**原三角形及其中、頂重三角形的角度關係：假設△ ABC之最小角∠ACB = θ**

$\angle WYZ = \angle W'Y'Z' = \tan^{-1}(2\cot\theta)$ 、 $\angle WZY = \angle W'Z'Y' = \tan^{-1}(2\tan\theta)$ 、

$\angle YWZ = \angle Y'W'Z' = 180° - \angle BFG - \angle BDG$

五、**重複疊作頂重三角形的性質**

(一) 第 m 層圖形~第(m+3)層圖形 $(k \in \mathbb{N})$

(二) 原三角形與第 3h 層圖形之重心共點

六、**頂重多邊形重複疊作的性質探討**

(一) 任意四邊形重複疊作頂重四邊形：

1. 第 m 層相似於第(m+4)層 $(k \in \mathbb{N})$，其邊長比為$16x_4$

設$x_4 = \sin(\angle 1)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)$
$= \sin(\angle 2)\sin(\angle 4)\sin(\angle 6)\sin(\angle 8)$

2. 原四邊形與第 4h 層重複疊作頂重四邊形之重心共點 $(h \in \mathbb{N})$

(二) 任意五邊形重複疊作頂重五邊形：

1. 第 m 層相似於第(m+5)層 $(k \in \mathbb{N})$ 其邊長比為$32x_5$

設$x_5 = \sin(\angle 1)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\sin(\angle 7)\sin(\angle 9)$
$= \sin(\angle 2)\sin(\angle 4)\sin(\angle 6)\sin(\angle 8)\sin(\angle 10)$

2. 原四邊形與第 5h 層重複疊作頂重五邊形之重心共點 $(h \in \mathbb{N})$

(三) 任意 n 邊形重複疊作頂重 n 邊形：

1. 第 m 層相似於第(m+n)層 $(k \in \mathbb{N})$ 其邊長比為$2^n x_n$

設$x_n = \sin(\angle 1)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5)\ldots\ldots\sin(\angle(2n-1))$
$= \sin(\angle 2)\sin(\angle 4)\sin(\angle 6)\ldots\ldots\sin(\angle 2n)$

2. 原四邊形與第 nh 層重複疊作頂重四邊形之重心共點 $(h \in \mathbb{N})$

七、**重複疊作頂重 n 邊形，第 k 層圖形與第(m+n)層圖形之旋轉角度**

(一) 若以順時針方向來看旋轉角度，則其角度為 $90° \times n -$ (各偶數編號的角之和)

(二) 若以逆時針方向來看旋轉角度，則其角度為 $90° \times n -$ (各奇數編號的角之和)

柒、　未來展望

一、凹多邊形的中頂重條件與性質
二、研究出重複疊作多邊形頂重各層的面積
三、重複疊作中重多邊形且其性質
四、中重與頂重多邊形逆推，且研究其性質
五、延伸至多面體，作出多面體之中重及頂重多面體，並研究其性質
六、將重心換成內心、外心、垂心等三角形各心，研究其性質

捌、　參考資料

【單篇文章】

葉克斌、林彤、李堉辰、林語謙、鄧爵明 （無日期）。**自然 12-任意多邊形的重心求法.pdf**。2010 年，取自：
http://blog.ylsh.ilc.edu.tw/life/gallery/45/%E8%87%AA%E7%84%B612-%E4%BB%BB%E6%84%8F%E5%A4%9A%E9%82%8A%E5%BD%A2%E7%9A%84%E9%87%8D%E5%BF%83%E6%B1%82%E6%B3%95.pdf

【評語】030421

本作品由直角三角形出發，以原三角形三邊中點為圓心，三邊中點至重心之距離為半徑作圓，三圓交點連線所形成之三角形，稱為中重三角形。其次定義出頂重三角形，證明出兩三角型面積比為 1 比 4，然後證明此結果對任意三角形亦成立。本作品之陳述及推廣，大致均夠細膩，也能推廣至較一般的情況，是一不錯的作品。