中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030420

透視卡布列克怪數

學校名稱：桃園縣立平興國民中學

作者：	指導老師：
國二 林彥良 國二 汪明瀚	林慧欣

關鍵詞：卡布列克怪數、同餘、排列組合

透視卡布列克怪數

摘要

若一個數字能從中間(偏前或後)的斷開兩個數，求其和再平方即為原數，稱**卡布列克怪數**，形如 $88209=(88+209)^2$、$2025=(20+25)^2$。

我們選擇了拆末 m 位去列出一元二次方程式，分析公式解的數值關係。利用整除的概念去找同餘數，發現餘數的對稱性及單一性。 最後我們得到了拆末 m 位卡布列克怪數的所有個數與 99…9 (m 個)相異質因數的排列組合個數相同，而這些數皆為質因數任意組合後的倍數。

過程中，我們找到一份 2005 年第四屆旺宏科學金牌獎的資料，將我們的算法套用在她所提出的**雷霆數**，發現除了能簡化原作的計算技巧外，更和卡布列克怪數有相同的結論。

接著我們也去試**平方和再現數**，也是同樣。而這些特殊的結論，讓我們對這些經由不同方式回到自己的**再現數**更加充滿了興趣。

壹、 研究動機

我們在圖書館中發現一道題目：$2025=(20+25)^2$，覺得這樣的完全平方數很特別，當中所提出的解法正是我們所學一元二次方程式的公式解法，對數字有莫大熱情的我們，想嘗試能否利用這項工具找出類似的數字。因而開始去假設、分析、計算，最後我們將運算過程化繁為簡，且歸納出卡布列克怪數與質因數的關係。

貳、 研究目的

一、 找出二十位數以內的卡布列克怪數。
二、 探討卡布列克怪數之間的關連性以及特殊性。
三、 找出十位數以內的雷霆數。
四、 找出十位數以內的平方和再現數。
五、 討論卡布列克怪數、雷霆數以及平方和再現數的相關處。

參、 研究設備及器材

電腦、計算機、質數表、紙、筆。

肆、 研究過程或方法

一、 尋找卡布列克怪數的方法：

我們使用書中作者中村義作提供的方法(一元二次方程式)來計算。因為卡布列克怪數可以偏前、偏後或者從中間將數字拆成兩半，在不知道怎麼拆的情況下，我們決定要將卡布列克怪數的拆法固定成拆後面末 m 位，而不管前面數值是幾位數來列方程式。而規定 0 與形如 10 的 2m 次方的數值都不會是卡布列克怪數。

$$\underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\cdots\square}_{B(m位數)}=10^m A+B \text{ 其中 } A,B\in\mathbb{N} \qquad A,B\neq 0 \qquad 10^m>B>0$$

$$10^m A+B=(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

$$A^2+(2B-10^m)A+(B^2-B)=0$$

用公式解求出 A 的答案

$$A=\frac{-(2B-10^m)\pm\sqrt{(2B-10^m)^2-4(B^2-B)}}{2} = (5\times10^{m-1}-B)\pm\sqrt{(5\times10^{m-1})^2-(10^m-1)B}$$

設 $n^2=(5\times10^{m-1})^2-(10^m-1)B$ 得到 $\begin{cases} A=(5\times10^{m-1}-B)\pm n \\ B=\dfrac{(5\times10^{m-1})^2-n^2}{(10^m-1)} \quad (5\times10^{m-1}>n\geq 0) \end{cases}$

(一)拆末一位的卡布列克怪數（m=1）

$$\underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square}_{B}=10A+B \text{ 其中 } A,B\in\mathbb{N} \qquad A,B\neq 0 \qquad 10>B>0$$

假設 $n^2=25-9B$ 得到 $\begin{cases} A=(5-B)\pm n \\ B=\dfrac{5^2-n^2}{9} \quad (5>n\geq 0) \end{cases}$

$\because B=\dfrac{5^2-n^2}{9}\in\mathbb{N}$ $\therefore 9\mid 5^2-n^2$ (意思為5^2-n^2可以被9整除)，

也就是說 $5^2-n^2\equiv 0 \pmod 9$，

所以我們討論 $5^2\equiv n^2 \pmod 9$ 的情況即可

$\because 5^2\equiv 7 \pmod 9$ $\therefore n^2\equiv 7 \pmod 9$

因此我們將所有的正整數 n 劃分成九種：(k= 0,1,2,⋯)

n	n^2		mod 9
9k	$(9k)^2=81k^2$	$\equiv 0^2$	0
9k+1	$(9k+1)^2=81k^2+18k+1$	$\equiv 1^2$	1
9k+2	$(9k+2)^2=81k^2+36k+4$	$\equiv 2^2$	4
9k+3	$(9k+3)^2=81k^2+54k+9$	$\equiv 3^2$	0
9k+4	$(9k+4)^2=81k^2+72k+16$	$\equiv 4^2$	7
9k+5	$(9k+5)^2=81k^2+90k+25$	$\equiv 5^2$	7
9k+6	$(9k+6)^2=81k^2+108k+36$	$\equiv 6^2$	0
9k+7	$(9k+7)^2=81k^2+126k+49$	$\equiv 7^2$	4
9k+8	$(9k+8)^2=81k^2+144k+64$	$\equiv 8^2$	1

發現：

1. n^2 mod 9 後的餘數有對稱性(扣除 9k)

mod 9
0
1
4
0
7
7
0
4
1

2. n^2 mod 9 後的餘數，除了兩兩一組相同外其他皆不相同。
(下一頁會證明)

所以 $n=9k+4$ *or* $9k+5$ ($5>n\geq 0$)

則 $n=4$ ，B=1 ，$A=\begin{cases} 8 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square}_{B}=81 \\ 0 \Rightarrow 1 \text{ (不列入此分類)} \end{cases}$

(1是單一位的卡布列克怪數)

所以，拆末一位的卡布列克怪數只有 **81**。

1. 問題： n^2 mod 9 後的餘數是否有**對稱性**？

證明：

n	$n^2\equiv$ (mod 9)	改寫下半部	mod 9
9k	$(9k)^2\equiv 0^2$	$(9k)^2\equiv 0^2$	0
9k+1	$(9k+1)^2\equiv 1^2$	$(9k+1)^2\equiv 1^2$	1
9k+2	$(9k+2)^2\equiv 2^2$	$(9k+2)^2\equiv 2^2$	4
9k+3	$(9k+3)^2\equiv 3^2$	$(9k+3)^2\equiv 3^2$	0
9k+4	$(9k+4)^2\equiv 4^2$	$(9k+4)^2\equiv 4^2$	7
9k+5	$(9k+5)^2\equiv 5^2$	$[9(k+1)-4]^2\equiv 4^2$	7
9k+6	$(9k+6)^2\equiv 6^2$	$[9(k+1)-3]^2\equiv 3^2$	0
9k+7	$(9k+7)^2\equiv 7^2$	$[9(k+1)-2]^2\equiv 2^2$	4
9k+8	$(9k+8)^2\equiv 8^2$	$[9(k+1)-1]^2\equiv 1^2$	1
	因展開後，有×9 的項皆會同餘 0，故直接省略。	而且兩兩對稱的數字和皆為 9	

完全平方數 n^2 除以某數後，其餘數必定有**對稱性**，且兩兩對稱的數字和剛好是除數。

2. 問題： n^2 除以某數後的餘數，除了兩兩對稱相同外，能找到其他相同的餘數嗎？

想法：在計算的過程中發現，如果除數為質數，一定找不到除了對稱以外同餘的數。

證明：

p 為質數，將所有正整數 n 分成 p 種，則 $n^2 \mod p$ 的餘數如下：

$n^2 \equiv 0^2$

$n^2 \equiv 1^2$

$n^2 \equiv 2^2$

$n^2 \equiv 3^2$

$\vdots$

$n^2 \equiv (p-1)^2$

若 a^2, b^2 取自於左邊的餘數且 $a \neq b$ （$p > a > b \geq 0$）

使得 $a^2 \equiv b^2 \pmod p$ ，則 $a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod p$

也就是說 $p \mid a^2 - b^2$

則 $a^2 - b^2 = p \times i$ （i 為任意正整數）

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = p \times i$

因為 p 為質數不可分解，所以 $p \mid a+b$ 或 $p \mid a-b$

$\because p > a \geq 0$ ， $p > b \geq 0 \Rightarrow p > a-b > -p$

所以 $a-b$ 不可能為 p 的倍數，則 $a+b$ 必為 p 的倍數，

但因為 $2p > a+b \geq 0$ ，所以 $a+b = p$

所以，只有當兩個數字和為除數 p $(a+b=p)$ 的 a 和 b 會同時互餘 $\Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod p$

除了這兩個對稱數外，不會再有同餘的數值出現。

完全平方數 n^2 除以**質數**後，其餘數有對稱性，且除了對稱的兩個數字外，不會再有其他同餘的可能。我們在此稱**單一性**。

3. 在下面的計算中，除了會用到除數為質數外，尚有除數為 9 和 27，故在此一併列舉。

$n^2 \mod 9$ 的餘數如下：	$n^2 \mod 27$ 的餘數如下：	
$n^2 \equiv 0^2 \equiv 0$	$n^2 \equiv 0^2 \equiv 0$	$n^2 \equiv 7^2 \equiv 22$
$n^2 \equiv 1^2 \equiv 1$	$n^2 \equiv 1^2 \equiv 1$	$n^2 \equiv 8^2 \equiv 10$
$n^2 \equiv 2^2 \equiv 4$	$n^2 \equiv 2^2 \equiv 4$	$n^2 \equiv 9^2 \equiv 0$
$n^2 \equiv 3^2 \equiv 0$	$n^2 \equiv 3^2 \equiv 9$	$n^2 \equiv 10^2 \equiv 19$
$n^2 \equiv 4^2 \equiv 7$	$n^2 \equiv 4^2 \equiv 16$	$n^2 \equiv 11^2 \equiv 13$
$n^2 \equiv 5^2 \equiv 7$	$n^2 \equiv 5^2 \equiv 25$	$n^2 \equiv 12^2 \equiv 9$
$n^2 \equiv 6^2 \equiv 0$	$n^2 \equiv 6^2 \equiv 9$	$n^2 \equiv 13^2 \equiv 7$
$n^2 \equiv 7^2 \equiv 4$		
$n^2 \equiv 8^2 \equiv 1$		

根據對稱性，以下 $14^2 \sim 26^2$ 皆和 $13^2 \sim 1^2$ 重複故不贅述。

(二) 拆末二位的卡布列克怪數（m=2）

$\underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square}_{B}=100A+B$ 其中 $A,B\in\mathbb{N}$ $A,B\neq 0$ $100>B>0$

假設 $n^2=50^2-99B$ 得到 $\begin{cases} A=(50-B)\pm n \\ B=\dfrac{50^2-n^2}{99} \quad (50>n\geq 0) \end{cases}$

$\because B=\dfrac{50^2-n^2}{99}\in\mathbb{N}$ $\therefore 99\,|\,50^2-n^2$ 也就是說 $50^2-n^2\equiv 0 \pmod{99}$

而 $99=3^2\times 11$，因此需分開討論 $50^2-n^2\equiv 0 \pmod 9$ 和 $50^2-n^2\equiv 0 \pmod{11}$ 的情況。

1. $50^2-n^2\equiv 0 \pmod 9$

$\because 50\equiv 5 \pmod 9$ $\therefore 50^2\equiv 5^2 \pmod 9$

9有對稱性和單一性

$\because 5^2\equiv(9-5)^2\equiv 4^2 \pmod 9$

$\therefore n=9k+4 \ or \ 9k+5 \quad (50>n\geq 0)$

$\Rightarrow n=4,5,13,14,22,23,31,32,40,41,49$

2. $50^2-n^2\equiv 0 \pmod{11}$

$\because 50\equiv 6 \pmod{11}$ $\therefore 50^2\equiv 6^2 \pmod{11}$

11有對稱性和單一性

$\because 6^2\equiv(11-6)^2\equiv 5^2 \pmod{11}$

$\therefore n=11s+5 \ or \ 11s+6 \quad (50>n\geq 0)$

$\Rightarrow n=5,6,16,17,27,28,38,39,49$

同時滿足的 $n=5 \ or \ 49$

若 $n=5$，$B=25$，$A=\begin{cases} 30 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square}_{B}=3025 \\ 20 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square}_{B}=2025 \end{cases}$

若 $n=49$，$B=1$，$A=\begin{cases} 98 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square}_{B}=9801 \\ 0 \Rightarrow 1(\text{不列入此分類}) \end{cases}$

所以，拆末二位的卡布列克怪數有 **9801、3025、2025**。

(三) 拆末三位的卡布列克怪數（m=3）

$\underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square}_{B}=10^3\times A+B$ 其中 $A,B\in\mathbb{N}$ $A,B\neq 0$ $10^3>B>0$

假設 $n^2=500^2-999B$ 得到 $\begin{cases} A=(500-B)\pm n \\ B=\dfrac{500^2-n^2}{999} \quad (500>n\geq 0) \end{cases}$

$\because B=\dfrac{500^2-n^2}{999}\in\mathbb{N}$ $\therefore 999\mid 500^2-n^2$ 也就是說$500^2-n^2\equiv 0 \pmod{999}$

而 $999=3^3\times 37$ ，

因此需分開討論$500^2-n^2\equiv 0 \pmod{27}$和$500^2-n^2\equiv 0 \pmod{37}$的情況。

1. $500^2-n^2\equiv 0 \pmod{37}$

$\because 500\equiv 19 \pmod{37}$ $\therefore 500^2\equiv 19^2 \pmod{37}$

37有對稱性和單一性

$\because 19^2\equiv(37-19)^2\equiv 18^2 \pmod{37}$

$\therefore n=37a+18$ *or* $37a+19$ $(500>n\geq 0)$

2. $500^2-n^2\equiv 0 \pmod{27}$

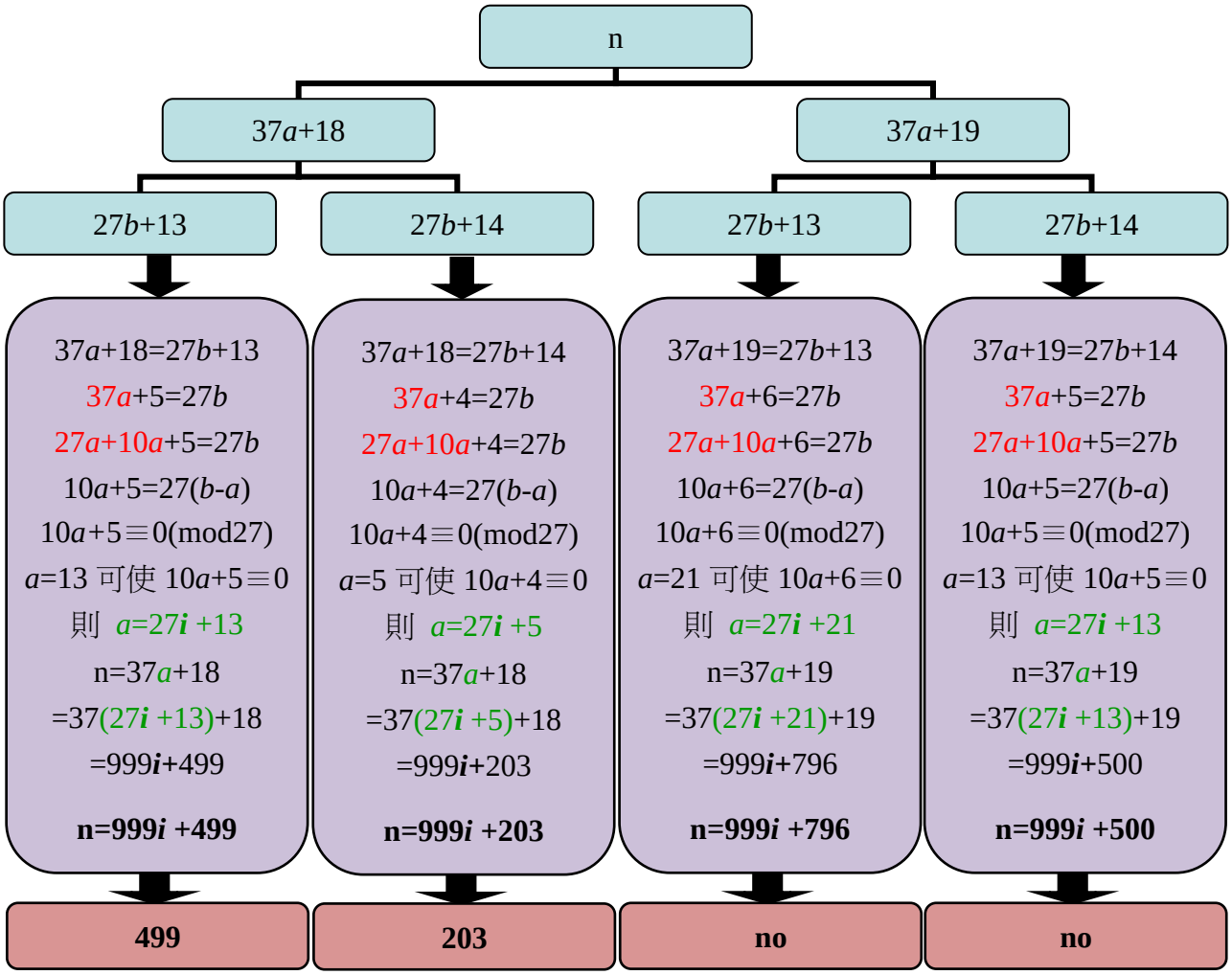
$\because 500\equiv 14 \pmod{27}$ $\therefore 500^2\equiv 14^2 \pmod{27}$

27有對稱性和單一性

$\because 14^2\equiv(27-14)^2\equiv 13^2 \pmod{27}$

$\therefore n=27b+13$ *or* $27b+14$ $(500>n\geq 0)$

因數字較大，所以這裡我們改用下列方法，就不一個一個列舉。



同時滿足(一)和(二)的 n = 203 *or* 499

若 $n=203$ ，$\mathrm{B}=209$ ，$\mathrm{A}=\begin{cases} 494 \Rightarrow \underbrace{\square}_{\mathrm{A}}\underbrace{\square\square\square}_{\mathrm{B}}=494209 \\ 88 \Rightarrow \underbrace{\square}_{\mathrm{A}}\underbrace{\square\square\square}_{\mathrm{B}}=88209 \end{cases}$

若 $n=499$ ，$\mathrm{B}=001$ ，$\mathrm{A}=\begin{cases} 998 \Rightarrow \underbrace{\square}_{\mathrm{A}}\underbrace{\square\square\square}_{\mathrm{B}}=998001 \\ 0 \Rightarrow 1 \text{ (不列入此分類)} \end{cases}$

所以，拆末三位的卡布列克怪數有 **998001、494209、88209**。

(四) 拆末四位的卡布列克怪數（m=4）

$\underbrace{\square}_{\mathrm{A}}\underbrace{\square\square\square\square}_{\mathrm{B}}=10^4\times\mathrm{A}+\mathrm{B}$ 其中 $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{N}$ $\quad \mathrm{A},\mathrm{B}\neq 0$ $\quad 10^4>\mathrm{B}>0$

假設 $n^2=5000^2-9999\mathrm{B}$ 得到 $\begin{cases} \mathrm{A}=(5000-\mathrm{B})\pm n \\ \mathrm{B}=\dfrac{5000^2-n^2}{9999} \quad (5000>n\geq 0) \end{cases}$

$\because \mathrm{B}=\dfrac{5000^2-n^2}{9999}\in\mathbb{N}$ $\therefore 9999\,|\,5000^2-n^2$ 也就是說$5000^2-n^2\equiv 0 \pmod{9999}$

而 $999=3^2\times 11\times 101$ ，

因此需分開討論$5000^2-n^2\equiv 0 \pmod 9$、$\pmod{11}$和$\pmod{101}$的情況。

1. $5000^2-n^2\equiv 0 \pmod{101}$

$\because 5000\equiv 51 \pmod{101}$ $\therefore 5000^2\equiv 51^2 \pmod{101}$ $\Rightarrow$ 101有對稱性和單一性

$\because 51^2\equiv(101-51)^2\equiv 50^2 \pmod{101}$ $\quad \therefore n=101a+50 \ \ or \ \ 101a+51 \ (\because 5000>n\geq 0)$

2. $5000^2-n^2\equiv 0 \pmod{11}$

$\because 5000\equiv 6 \pmod{11}$ $\therefore 5000^2\equiv 6^2 \pmod{11}$ 而11有對稱性和單一性

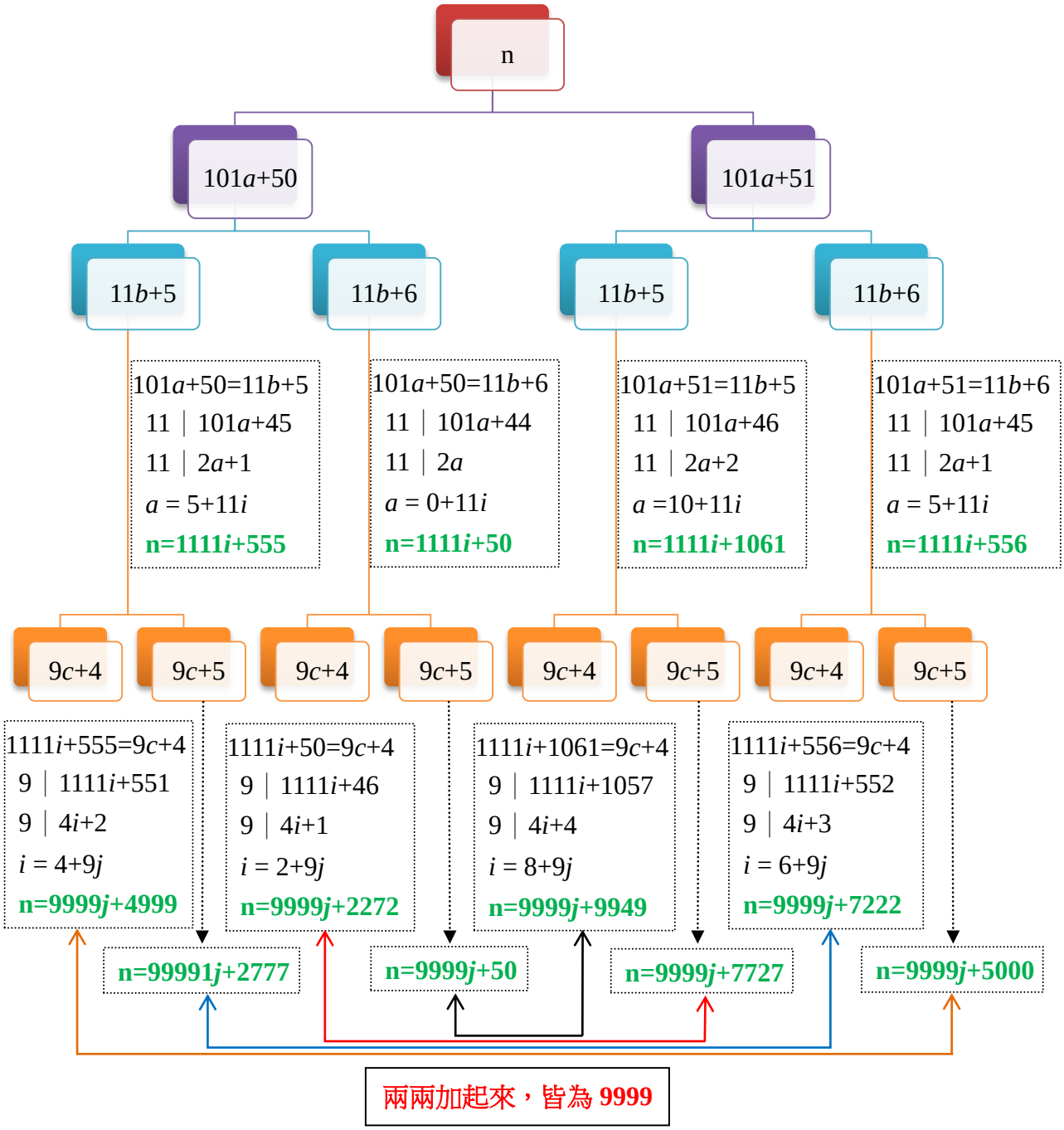
$\because 6^2\equiv(11-6)^2\equiv 5^2 \pmod{11}$ $\quad \therefore n=11b+5 \ \ or \ \ 11b+6 \ (\because 5000>n\geq 0)$

3. $5000^2-n^2\equiv 0 \pmod 9$

$\because 5000\equiv 5 \pmod 9$ $\therefore 5000^2\equiv 5^2 \pmod 9$ ，而 9有對稱性和單一性

$\because 5^2\equiv(9-5)^2\equiv 4^2 \pmod 9$ $\quad \therefore n=9c+4 \ \ or \ \ 9c+5 \ (\because 5000>n\geq 0)$

這邊再簡略算法，而且我們發現其實左右兩邊會兩兩互補(兩邊的 n 加起來都會是 9999)，所以只要找某一邊就可以直接得到另一邊的答案，所以時間又減少一半。



若 $n=50$ ，$B=2500$ ，$A=\begin{cases} 2550 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square}_{B}=25502500 \\ 2450 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square}_{B}=24502500 \end{cases}$

若 $n=2272$ ，$B=1984$ ，$A=\begin{cases} 5288 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square}_{B}=52881984 \\ 744 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square}_{B}=7441984 \end{cases}$

若 $n=2777$ ，$B=1729$ ，$A=\begin{cases} 6048 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square}_{B}=60481729 \\ 494 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square}_{B}=4941729 \end{cases}$

若 $n=4999$ ，$B=1$ ，$A=\begin{cases} 9998 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square}_{B}=99980001 \\ 0 \Rightarrow 1 \text{ (不列入此分類)} \end{cases}$

所以，拆末四位的卡布列克怪數有 **99980001、25502500、24502500、52881984、7441984、60481729、4941729**。

(五) 拆末五位的卡布列克怪數 (m=5)

$\underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square}_{B}=10^5\times A+B$ 其中 $A,B\in\mathbb{N}$ $A,B\neq 0$ $10^5>B>0$

假設 $n^2=50000^2-99999B$ 得到 $\begin{cases} A=(50000-B)\pm n \\ B=\dfrac{50000^2-n^2}{99999} \end{cases}$ $(50000>n\geq 0)$

$\because B=\dfrac{50000^2-n^2}{99999}\in\mathbb{N}$ $\therefore 99999\,|\,50000^2-n^2$ 也就是說 $50000^2-n^2\equiv 0 \pmod{99999}$

而 $99999=3^2\times 41\times 271$

討論 $50000^2-n^2\equiv 0 \pmod 9$、$\pmod{41}$ 和 $\pmod{271}$ 的情況。

1. $50000^2-n^2\equiv 0 \pmod{271}$

$\because 50000\equiv 136 \pmod{271}$ $\therefore 50000^2\equiv 136^2\equiv n^2 \pmod{271}$ 而271 有對稱性和單一性

$\because 136^2\equiv(271-136)^2\equiv 135^2 \pmod{271}$ $\therefore n=271a+135$ *or* $271a+136$ $(50000>n\geq 0)$

2. $50000^2-n^2\equiv 0 \pmod{41}$

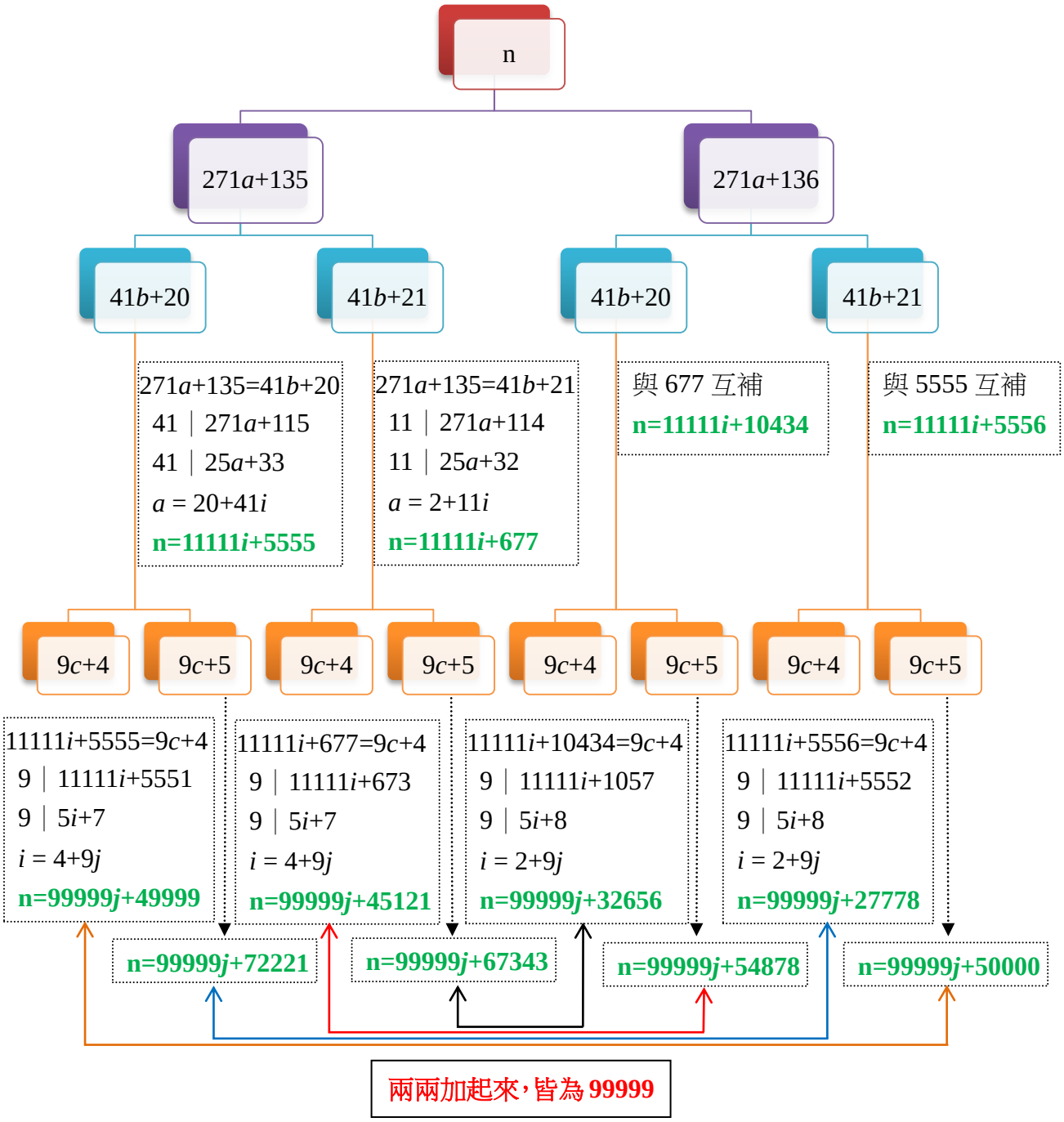
$\because 50000\equiv 21 \pmod{41}$ $\therefore 50000^2\equiv 21^2 \pmod{41}$ 而41有對稱性和單一性

$\because 21^2\equiv(41-21)^2\equiv 20^2 \pmod{41}$ $\therefore n=41b+20$ *or* $41b+21$ $(50000>n\geq 0)$

3. $50000^2 - n^2 \equiv 0 \pmod 9$

$\because 50000 \equiv 5 \pmod 9 \quad \therefore 50000^2 \equiv 5^2 \pmod 9$ 而9有對稱性和單一性

$\because 5^2 \equiv (9-5)^2 \equiv 4^2 \pmod 9 \qquad \therefore n = 9c+4 \ \ or \ \ 9c+5 \ \ (50000 > n \geq 0)$



同時滿足(一)、(二) 和(三)的 $n=27778$、32656、45121、49999

若 $n=27778$ ，$\mathrm{B}=17284$ ，$\mathrm{A}=\begin{cases} 60494 \Rightarrow \underbrace{\square}_{\mathrm{A}}\underbrace{\square\square\square\square\square}_{\mathrm{B}}=6049417284 \\ 4938 \Rightarrow \underbrace{\square}_{\mathrm{A}}\underbrace{\square\square\square\square\square}_{\mathrm{B}}=493817284 \end{cases}$

若 $n=32656$ ，$\mathrm{B}=14336$ ，$\mathrm{A}=\begin{cases} 68320 \Rightarrow \underbrace{\square}_{\mathrm{A}}\underbrace{\square\square\square\square\square}_{\mathrm{B}}=6832014336 \\ 3008 \Rightarrow \underbrace{\square}_{\mathrm{A}}\underbrace{\square\square\square\square\square}_{\mathrm{B}}=300814336 \end{cases}$

若 $n=45121$ ，$\mathrm{B}=04641$ ，$\mathrm{A}=\begin{cases} 90480 \Rightarrow \underbrace{\square}_{\mathrm{A}}\underbrace{\square\square\square\square\square}_{\mathrm{B}}=9048004641 \\ 238 \Rightarrow \underbrace{\square}_{\mathrm{A}}\underbrace{\square\square\square\square\square}_{\mathrm{B}}=23804641 \end{cases}$

若 $n=49999$ ，$\mathrm{B}=00001$ ，$\mathrm{A}=\begin{cases} 99998 \Rightarrow \underbrace{\square}_{\mathrm{A}}\underbrace{\square\square\square\square\square}_{\mathrm{B}}=9999800001 \\ 0 \Rightarrow 1 \text{ (不列入此分類)} \end{cases}$

所以，拆末五位的卡布列克怪數有 **99980001、25502500、24502500、52881984、7441984、60481729、4941729**。

(六) 拆末六位的卡布列克怪數(m=6)

$\underbrace{\square}_{\mathrm{A}}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{\mathrm{B}}=10^6\times\mathrm{A}+\mathrm{B}$ 其中 $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{N}$ $\mathrm{A},\mathrm{B}\neq 0$ $10^6>\mathrm{B}>0$

假設 $n^2=500000^2-999999\mathrm{B}$ 得到 $\begin{cases} \mathrm{A}=(500000-\mathrm{B})\pm n \\ \mathrm{B}=\dfrac{500000^2-n^2}{999999} \end{cases}$ $(500000>n\geq 0)$

$\because \mathrm{B}=\dfrac{500000^2-n^2}{999999}\in\mathbb{N}$ $\therefore 999999\,|\,500000^2-n^2$ 也就是說$500000^2-n^2\equiv 0 \pmod{999999}$

而 $999999=3^3\times 7\times 11\times 13\times 37$ ，因此需分開討論

$500000^2-n^2\equiv 0$ (mod27)、(mod7)、(mod11)、(mod13)和(mod37)的情況。

1. $500000^2-n^2\equiv 0 \pmod{37}$

$\because 500000\equiv 19 \pmod{37}$ $\therefore 500000^2\equiv 19^2 \pmod{37}$ ，而 37 有對稱性和單一性

$\because 19^2\equiv(37-19)^2\equiv 18^2 \pmod{37}$ $\therefore n=37a+18$ *or* $37a+19$ $(500000>n\geq 0)$

2. $500000^2 - n^2 \equiv 0 \pmod{27}$

$\because 500000 \equiv 14 \pmod{27}$ $\therefore 500000^2 \equiv 14^2 \pmod{27}$ ，而27有對稱性和單一性

$\because 14^2 \equiv (27-14)^2 \equiv 13^2 \pmod{27}$ $\therefore n = 27b + 13 \ \ or \ \ 27b + 14 \ (500000 > n \geq 0)$

3. $500000^2 - n^2 \equiv 0 \pmod{11}$

$\because 500000 \equiv 6 \pmod{11}$ $\therefore 500000^2 \equiv 6^2 \pmod{11}$ ，而11有對稱性和單一性

$\because 6^2 \equiv (11-6)^2 \equiv 5^2 \pmod{11}$ $\therefore n = 11c + 5 \ \ or \ \ 11c + 6 \ (500000 > n \geq 0)$

4. $500000^2 - n^2 \equiv 0 \pmod{13}$

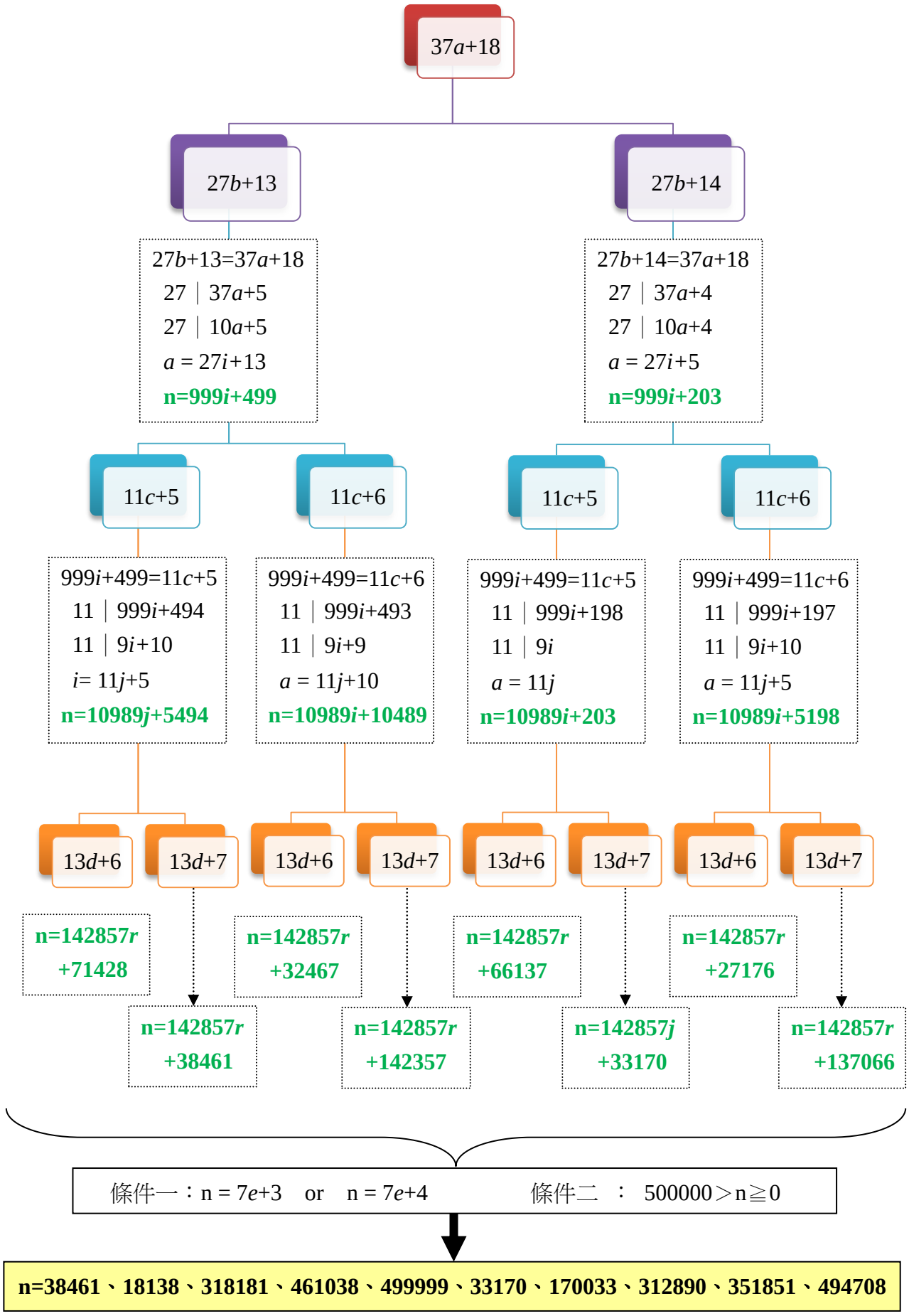
$\because 500000 \equiv 7 \pmod{13}$ $\therefore 500000^2 \equiv 7^2 \pmod{13}$ ，而13有對稱性和單一性

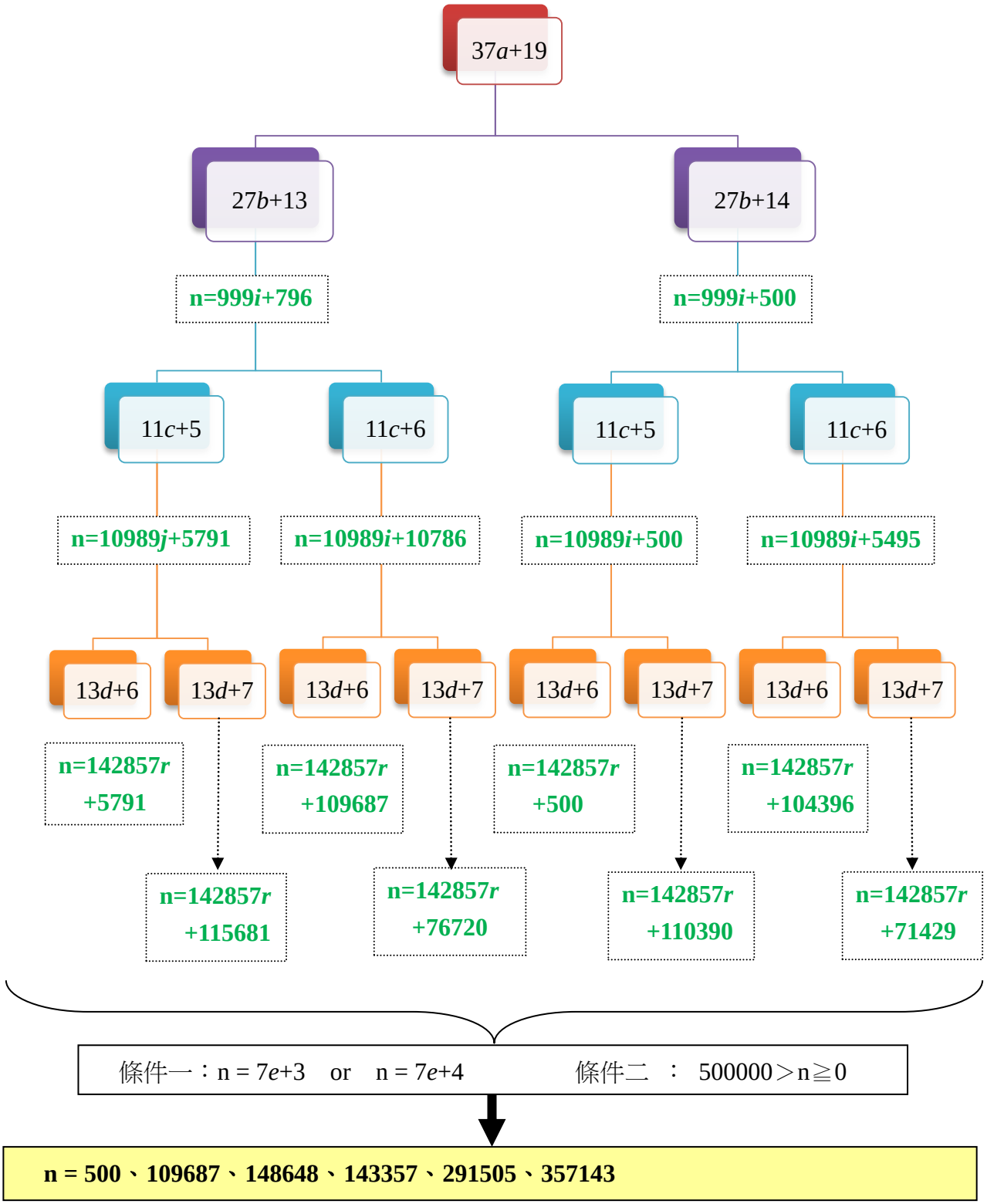
$\because 7^2 \equiv (13-7)^2 \equiv 6^2 \pmod{13}$ $\therefore n = 13d + 6 \ \ or \ \ 13d + 7 \ (500000 > n \geq 0)$

5. $500000^2 - n^2 \equiv 0 \pmod{7}$

$\because 500000 \equiv 4 \pmod{7}$ $\therefore 500000^2 \equiv 4^2 \pmod{7}$ ，而7有對稱性和單一性

$\because 4^2 \equiv (7-4)^2 \equiv 3^2 \pmod{7}$ $\therefore n = 7e + 3 \ \ or \ \ 7e + 4 \ (500000 > n \geq 0)$


37a+18
27b+13
27b+14
27b+13=37a+18
27 | 37a+5
27 | 10a+5
a = 27i+13
n=999i+499
27b+14=37a+18
27 | 37a+4
27 | 10a+4
a = 27i+5
n=999i+203
11c+5
11c+6
11c+5
11c+6
999i+499=11c+5
11 | 999i+494
11 | 9i+10
i= 11j+5
n=10989j+5494
999i+499=11c+6
11 | 999i+493
11 | 9i+9
a = 11j+10
n=10989i+10489
999i+499=11c+5
11 | 999i+198
11 | 9i
a = 11j
n=10989i+203
999i+499=11c+6
11 | 999i+197
11 | 9i+10
a = 11j+5
n=10989i+5198
13d+6
13d+7
13d+6
13d+7
13d+6
13d+7
13d+6
13d+7
n=142857r +71428
n=142857r +32467
n=142857r +66137
n=142857r +27176
n=142857r +38461
n=142857r +142357
n=142857j +33170
n=142857r +137066
條件一：n = 7e+3 or n = 7e+4
條件二 ： 500000＞n≧0
n=38461、18138、318181、461038、499999、33170、170033、312890、351851、494708



n = 500、109687、148648、143357、291505、357143

若 $n=500$, B $=250000$, A $=\begin{cases} 250500 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 250500250000 \\ 249500 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 249500250000 \end{cases}$

若 $n=33170$, B $=248900$, A $=\begin{cases} 284270 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 284270248900 \\ 217930 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 217930248900 \end{cases}$

若 $n=38461$, B $=248521$, A $=\begin{cases} 289940 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 289940248521 \\ 213018 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 213018248521 \end{cases}$

若 $n=109687$, B $=237969$, A $=\begin{cases} 371718 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 371718237969 \\ 152344 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 152344237969 \end{cases}$

若 $n=143357$, B $=229449$, A $=\begin{cases} 413908 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 413908229449 \\ 127194 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 127194229449 \end{cases}$

若 $n=148648$, B $=227904$, A $=\begin{cases} 420744 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 420744227904 \\ 123448 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 123448227904 \end{cases}$

若 $n=170033$, B $=221089$, A $=\begin{cases} 448944 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 448944221089 \\ 108878 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 108878221089 \end{cases}$

若 $n=181318$, B $=217124$, A $=\begin{cases} 464194 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 464194217124 \\ 101558 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 101558217124 \end{cases}$

若 $n=291505$, B $=165025$, A $=\begin{cases} 626480 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 626480165025 \\ 43470 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 43470165025 \end{cases}$

若 $n=312890$, B $=152100$, A $=\begin{cases} 660790 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 660790152100 \\ 35010 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B} = 35010152100 \end{cases}$

$$若\ n=318181\ ,\ B=148761\ ,\ A=\begin{cases} 669420 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B}=669420148761 \\ 33058 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B}=33058148761 \end{cases}$$

$$若\ n=351851\ ,\ B=126201\ ,\ A=\begin{cases} 725650 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B}=725650126201 \\ 21948 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B}=21948126201 \end{cases}$$

$$若\ n=357143\ ,\ B=122449\ ,\ A=\begin{cases} 734694 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B}=734694122449 \\ 20408 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B}=20408122449 \end{cases}$$

$$若\ n=461038\ ,\ B=037444\ ,\ A=\begin{cases} 923594 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B}=923594037444 \\ 1518 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B}=1518037444 \end{cases}$$

$$若\ n=494708\ ,\ B=005264\ ,\ A=\begin{cases} 989444 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B}=989444005264 \\ 28 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B}=28005264 \end{cases}$$

$$若\ n=499999\ ,\ B=000001\ ,\ A=\begin{cases} 999998 \Rightarrow \underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{B}=999998000001 \\ 0 \Rightarrow 1\ \ (不列入此分類) \end{cases}$$

所以，拆末六位的卡布列克怪數有 **250500250000、249500250000、284270248900、217930248900、289940248521、213018248521、371718237969、152344237969、4136908229449、127194229449、420744227904、123448227904、448944221089、108878221089、464094217124、101558217124、626480165025、43470165025、660790152100、35010152100、669420148761、33085148761、725650126201、21948126201、734694122449、20408122449、989444005264、28005264、923594037444、1518037444、999998000001**。

(七) 拆末七位、八位、九位以及十位的卡布列克怪數：

末七位			個數
99999980000001	9999999	$3^2\times239\times4649$	**7** (扣除 1)
1	1	1	
25725782499481	5072059	1091×4649	
24284602499481	4927941	$3\times3^2\times29\times79\times239$	
87841600588225	9372385	$5\times11\times23\times31\times239$	
393900588225	627615	$3^2\times5\times4649$	
30864202469136	5555556	$2^2\times3^2\times154321$	
19753082469136	4444444	$2^2\times239\times4649$	

末八位			個數
9999999800000001	99999999	$3^2\times11\times73\times101\times137$	
1	1	1	
6957134013838096	83409436	$2^2\times11\times101\times137^2$	
275246813838096	16590564	$2^2\times3^2\times59\times73\times107$	
8934133805179209	94520547	$3\times3^2\times11\times23\times101\times137$	
30024405179209	5479453	$7\times73\times10723$	
7901234409876544	88888888	$2^3\times11\times73\times101\times137$	
123456809876544	11111112	$2^3\times3^2\times154321$	
3095437824682281	55636659	$3\times3^2\times13^2\times89\times137$	
1968106024682281	44363341	$73\times11\times101\times547$	
2500500025000000	50005000	$2^3\times5^4\times73\times137$	
2499500025000000	49995000	$2^3\times3^2\times5^4\times11\times101$	
3735179023764321	61116111	$3^2\times7\times73\times97\times137$	
1511956823764321	38883889	$11\times101\times34999$	
4776996021345856	69115816	$2^3\times7\times11\times29\times53\times73$	
953832821345856	30884184	$2^3\times3^2\times31\times101\times137$	**31**
6436359815863329	80226927	$3^2\times11\times17\times73\times653$	(扣除 1)
390974415863329	19773073	$101\times137\times1429$	
4049586823140496	63636364	$2^2\times11\times1446281$	
1322314023140496	36363636	$2^2\times3^2\times73\times101\times137$	
5587185018875625	74747475	$3\times3^2\times5^2\times11\times10067$	
637690018875625	25252525	$5^2\times73\times101\times137$	
3077414824700304	55474452	$2^2\times3^2\times11\times19\times73\times101$	
1982524424700304	44525548	$2^2\times31\times137\times26217$	
6516844815558529	80726977	$73\times101\times10949$	
371449415558529	19273023	$3^2\times7^2\times11\times29\times137$	
8434234407495744	91838088	$2^2\times3^2\times73\times101\times173$	
66616807495744	8161912	$2^3\times11\times137\times677$	
7457814011780496	86358636	$2^2\times3^2\times3^2\times13\times101\times203$	
186086811780496	13641364	$2^2\times11\times31\times73\times137$	
5662190018625625	75247525	$5^2\times101\times19801$	
612685018625625	24752475	$73\times137\times3^2\times5^2\times11$	

末九位			個數
999999998000000001	999999999	$3^4\times37\times333667$	
1	1	1	**7**
444889444222110889	667000333	333667×1999	(扣除 1)
110888778222110889	332999667	$3\times3^4\times7\times11\times13\times37^2$	

322132944245434624	567567568	$2^4\times37\times958729$	
186997808245434624	432432432	$2^4\times3^4\times333667$	
585886298179545801	765432099	$3^4\times9449779$	
55022100179545801	234567901	$19\times37\times333667$	

末十位			個數
99999999980000000001	9999999999	$3^2\times11\times41\times271\times9091$	
1	1	1	
79012345680987654321	8888888889	$3^2\times3^2\times109739369$	
12345679000987654321	1111111111	$11\times41\times271\times9091$	
83407877440792003584	9132791328	$2^5\times3^2\times41\times773441$	
752050880792003584	867208672	$2^5\times11\times271\times9091$	
34423550882424803584	5867158671	$2^4\times271\times1353127$	
17080377442424803584	4132841328	$2^4\times3^2\times7\times11\times41\times9091$	
37345067902376554321	6111061111	$41\times271\times550001$	
15123845682376554321	3888938889	$3^2\times11\times9091\times4321$	
63677175801612080400	7979797980	$2^2\times3^2\times5\times11\times4030201$	
40812162001612080400	2020202020	$2^2\times5\times41\times271\times9091$	
82644628100826446281	9090909091	11×826446281	
826446280826446281	909090909	$3^2\times41\times271\times9091$	
67629248581460775561	8223700419	$3^3\times11\times41\times67537$	**31**
3155240201460775561	1776299581	$7\times103\times271\times9091$	(扣除 1)
87138706300620940900	9334811530	$2\times5\times11\times41\times2069803$	
4424757000620940900	665188470	$2\times3\times3^2\times5\times271\times9091$	
27060493982495920804	5201970202	$2\times11\times41\times271\times21281$	
23021089942495920804	4798029798	$2\times3^2\times9091\times29321$	
16735128102417346281	4090859091	$3^2\times11\times41\times271\times3719$	
34917946282417346281	5909140909	9091×649999	
25421080682499824169	5041932237	$3^2\times3^2\times41\times167\times9091$	
24582435942499824169	4958067763	$11\times271\times1663223$	
25000500002500000000	5000050000	$2^4\times5^5\times11\times9091$	
24999500002500000000	4999950000	$2^4\times3^2\times5^5\times41\times271$	
27499037182494048721	5243952439	$11\times41\times1379\times9091$	
22619988402494048721	4756047561	$3^2\times271\times1949999$	
95181439600237953600	9756097560	$2^3\times3^2\times5\times11\times9091\times271$	
59488400237953600	243902440	$2^3\times5\times41\times148721$	

二、 雷霆數的定義：將一個數斷開後，相減再平方，依然會回到自己

$$\underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\cdots\square}_{B(m位)}=10^m A+B \quad (A,B\in\mathbb{N})$$

$$10^m A+B=(A-B)^2$$

$$\begin{cases} A=(B+5\times10^{m-1})\pm n \\ n^2=(10^m+1)B+(5\times10^{m-1})^2 \end{cases}$$

$$\because n^2=(10^m+1)b+(5\times10^{m-1})^2$$

$$\therefore b=\frac{n^2-(5\times10^{m-1})^2}{(10^m+1)}$$

$$\because\ 10^m>b\geq1$$

$$\therefore 10^m>\frac{n^2-(5\times10^{m-1})^2}{(10^m+1)}\geq1$$

$$\sqrt{10^m(10^m+1)+(5\times10^{m-1})^2}>n\geq\sqrt{(10^m+1)+(5\times10^{m-1})^2}$$

$$10^m A+B=(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$$

$$A^2-(2B+10^m)+(B^2-B)=0$$

$$A=\frac{(2B+10^m)\pm\sqrt{(2B+10^m)^2-4(B^2-B)}}{2}$$

$$A=(B+5\times10^{m-1})\pm\sqrt{(10^m+1)B+(5\times10^{m-1})^2}$$

$$Let \quad n^2=(10^m+1)B+(5\times10^{m-1})^2$$

$$A=(B+5\times10^{m-1})\pm n$$

(一) 末一位的雷霆數

$$m=1$$

$$10A+B=(A-B)^2 \quad => \quad B=\frac{n^2-5^2}{11} \quad => \quad \sqrt{135}>n\geq\sqrt{36}$$

$$\begin{cases} A=(B+5)\pm n \\ n^2=11B+5^2 \end{cases} \qquad 10>B\geq1 \qquad 11.6\cdots>n\geq6$$

$$\because B=\frac{n^2-5^2}{11}\in\mathbb{N} \quad \therefore n^2-5^2\equiv0\ (\bmod 11)$$

則 $n^2\equiv5^2\ (\bmod 11)$ 單一性和對稱性 $=> \quad n=\begin{cases}11k+5\\11k+6\end{cases} \quad => \quad \begin{matrix} n=6 \\ B=1 \\ A=12\ or\ 0\end{matrix}$

$n\equiv5\ or\ 6\ (\bmod 11)$

(二) 末二位的雷霆數

$$m=2$$

$$100A+B=(A-B)^2 \quad => \quad B=\frac{n^2-50^2}{101} \quad => \quad \sqrt{12600}>n\geq\sqrt{2601}$$

$$\begin{cases} A=(B+50)\pm n \\ n^2=101B+50^2 \end{cases} \qquad 100>B\geq1 \qquad 112.2\cdots>n\geq51$$

$$\because B=\frac{n^2-50^2}{101}\in\mathbb{N} \quad \therefore n^2-50^2\equiv0\ (\bmod 101)$$

則 $n^2\equiv50^2\ (\bmod 101)$ 單一性和對稱性 $=> \quad n=\begin{cases}101k+50\\101k+51\end{cases} \quad => \quad \begin{matrix} n=51 \\ B=01 \\ A=102\ or\ 0\end{matrix}$

$n\equiv50\ or\ 51\ (\bmod 101)$ $\qquad 112.2\cdots>n\geq51$

(三) 末三位的雷霆數

$m=3$

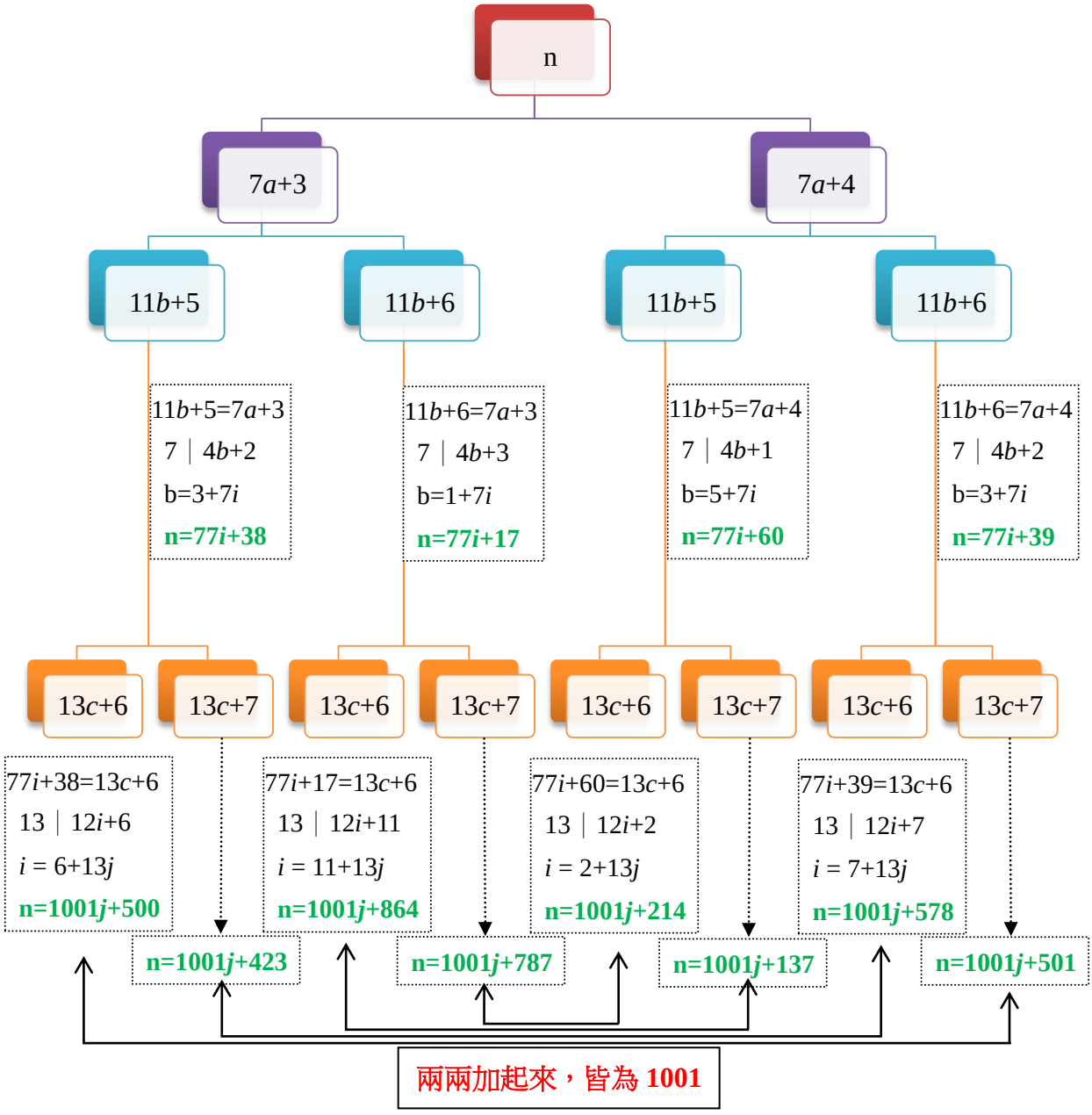
$1000\mathrm{A}+\mathrm{B}=(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2$ => $\mathrm{B}=\dfrac{n^2-500^2}{1001}$ => $1118.4\cdots>n\geq 501$

$\begin{cases}\mathrm{A}=(\mathrm{B}+500)\pm n\\ n^2=1001\mathrm{B}+500^2\end{cases}$ $\quad 1000>\mathrm{B}\geq 1$

$\because \mathrm{B}=\dfrac{n^2-500^2}{1001}\in\mathbb{N}\quad \therefore n^2-500^2\equiv 0\ (\bmod 1001)$

$\because 1001=7\times 11\times 13$

則 $\begin{cases} n^2\equiv 500^2\ (\bmod 7)\ \Rightarrow\ n\equiv 3\ or\ 4\ \Rightarrow\ n=7a+3\ ;7a+4\\ n^2\equiv 500^2\ (\bmod 11)\ \Rightarrow\ n\equiv 5\ or\ 6\ \Rightarrow\ n=11b+5\ ;11b+6\\ n^2\equiv 500^2\ (\bmod 13)\ \Rightarrow\ n\equiv 6\ or\ 7\ \Rightarrow\ n=13c+6\ ;13c+7\end{cases}$



$1118.4\cdots > n \geq 501$ =>

$n=864$	$n=787$	$n=578$	$n=501$
$B=496$	$B=369$	$B=084$	$B=001$
$A=\begin{cases}1860\\132\end{cases}$	$A=\begin{cases}1656\\82\end{cases}$	$A=\begin{cases}1162\\6\end{cases}$	$A=\begin{cases}1002\\1\end{cases}$

雷霆數：

拆末 m 位	$10^m \times A+B$	$(A-B)^2$	質因數分解	質因數個數	雷霆數的個數
1	121	11^2	11^2	1	**1** (扣除 1)
	1	1^2	1^2		
2	10201	101^2	101^2	1	**1** (扣除 1)
	1	1^2	1^2		
3	1002001	1001^2	$(7\times11\times13)^2$	3	**7** (扣除 1)
	1	1^2	1^2		
	1162084	1078^2	$(2\times7^2\times11)^2$		
	6084	78^2	$(2\times3\times13)^2$		
	1656369	1287^2	$(3^2\times11\times13)^2$		
	82369	287^2	$(7^2\times41)^2$		
	1860496	1364^2	$(2^2\times11^2\times31)^2$		
	132496	364^2	$(2^2\times7\times13)^2$		
4	100020001	10001^2	$(73\times137)^2$	2	**3** (扣除 1)
	1	1^2	1^2		
	123121216	11096^2	$(2^3\times19\times73)^2$		
	1201216	1096^2	$(2^3\times137)^2$		

5	10000200001	100001^2	$(11\times9091)^2$	2	**3** (扣除 1)
	1	1^2	1^2		
	13967221489	118183^2	$(13\times9091)^2$		
	330621489	18183^2	$(3\times19\times29\times11)^2$		

三、 平方和再現數：將一個數斷開後，先平方再相加，依然會回到自己

$$\underbrace{\square}_{A}\underbrace{\square\square\cdots\square}_{B(m位)}=10^m A+B \quad (A,B\in\mathbb{N}\ ；且A可以為0)$$

$$10^m A+B=A^2+B^2$$

$$A^2-10^m A+(B^2-B)=0$$

$$A=\frac{10^m\pm\sqrt{(-10^m)^2-4(B^2-B)}}{2} = (5\times10^{m-1})\pm\sqrt{(5\times10^{m-1})^2-(B^2-B)}$$

(一) 末一位的平方和再現數

m=1 $\quad A=5\pm\sqrt{25-B^2+B}$

(二) 末二位的平方和再現數

m=2 $\quad A=50\pm\sqrt{50^2-B^2+B}$

(三) 末三位的平方和再現數

m=3 $\quad A=500\pm\sqrt{500^2-B^2+B}$

(四) 末四位的平方和再現數

m=4 $\quad A=5000\pm\sqrt{5000^2-B^2+B}$

(五) 末五位的平方和再現數

m=5 $\quad A=50000\pm\sqrt{50000^2-B^2+B}$

拆末 m 位	$10^m \times A+B$	質因數 分解	質因數 個數	平方和再現數 個數
1	101	101	1	**1** (扣除 1)
	1	1^2		
2	10001	73×137	1	**3** (扣除 1)
	1	1^2		
	8833	11^2×73		
	1233	3^2×137		
3	1000001	101×9901	3	**3** (扣除 1)
	1	1^2		
	990100	2^2×5^2×9901		
	10100	2^2×5^2×101		
4	100000001	17×5882353	2	**3** (扣除 1)
	1	1^2		
	94122353	13^2×17×32761		
	5882353	5882353		
5	10000000001	101×3541×27961	2	**3** (扣除 1)
	1	1^2		
	7416043776	101×2541×20736		
	2584043776	27961×92416		

伍、 研究結果及結論

結論一：卡布列克怪數必為 9 的倍數或者除以 9 餘 1

因為卡布列克怪數為 $\boxed{a}\boxed{b}=(a+b)^2$ ，而不管是原本的數或者把數字前後拆開再加在一起，這兩種皆不會改變其數字和。

(*ex*：123456 數字和 1+2+3+4+5+6=21；123+456=579 數字和 5+7+9=21)

而判別 3 或 9 的倍數正好是利用數字和，同時數字和也可以計算除以 3 或 9 的餘數。

證明：

$\boxed{a}\boxed{b}$ 數字和	$(a+b)^2$ 數字和
$3k+0\equiv0$	$(3k+0)^2\equiv0^2\equiv0$
$3k+1\equiv1$	$(3k+1)^2\equiv1^2\equiv1$
$3k+2\equiv2$	$(3k+2)^2\equiv2^2\equiv1$

$\boxed{a}\boxed{b}$ 數字和	$(a+b)^2$ 數字和
$9k+0\equiv0$	$(9k+0)^2\equiv0^2\equiv0$
$9k+1\equiv1$	$(9k+1)^2\equiv1^2\equiv1$
$9k+2\equiv2$	$(9k+2)^2\equiv2^2\equiv4$
$9k+3\equiv3$	$(9k+3)^2\equiv3^2\equiv0$
$9k+4\equiv4$	$(9k+4)^2\equiv4^2\equiv7$
$9k+5\equiv5$	$(9k+5)^2\equiv5^2\equiv7$
$9k+6\equiv6$	$(9k+6)^2\equiv6^2\equiv0$
$9k+7\equiv7$	$(9k+7)^2\equiv7^2\equiv4$
$9k+8\equiv8$	$(9k+8)^2\equiv8^2\equiv1$

所以經由上表可以發現卡布列克怪數只有 $9k$ 和 $9k+1$ 時會和自己同餘(3 的倍數就不討論因為除了整除就是餘 1 並沒有意義)，所以卡布列克怪數必為 9 的倍數或者除以 9 餘 1。

結論二：

(1) 拆末 m 位的卡布列克怪數答案中，我們發現這些數通常是一組一組的出現，而且每一組 $\sqrt{\text{卡布列克怪數}}$ 的和為 10^m 。

(2) 拆末 m 位的雷霆數答案中，我們發現這些數通常是一組一組的出現，而且每一組 $\sqrt{\text{雷霆數}}$ 的差絕對值為 10^m 。

末一位	(1) $\begin{cases}81=(8+1)^2=(9)^2\\1=1^2\end{cases}$ ⇨ 10	末二位	(1) $\begin{cases}3025=(30+25)^2=(55)^2\\2025=(20+25)^2=(45)^2\end{cases}$ (2) $\begin{cases}9801=(98+01)^2=(99)^2\\1=1^2\end{cases}$ ⇨ 100
末三位	(1) $\begin{cases}494209=(494+209)^2=(703)^2\\88209=(88+209)^2=(297)^2\end{cases}$	(2) $\begin{cases}998001=(988+001)^2=(999)^2\\1=1^2\end{cases}$ ⇨ 1000	

末四位	(1) $\begin{cases} 25502500=(2550+2500)^2=(5050)^2 \\ 24502500=(2450+2500)^2=(4950)^2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 52881984=(5288+1984)^2=(7272)^2 \\ 7441984=(\ 744+1984)^2=(2728)^2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 60481729=(6048+1729)^2=(7777)^2 \\ 4941729=(\ 494+1729)^2=(2223)^2 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 99980001=(9998+0001)^2=(9999)^2 \\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 1^2 \end{cases}$ 10000
末五位	(1) $\begin{cases} 6049417284=(60494+17284)^2=(77778)^2 \\ 493817284=(\ 4938+17284)^2=(22222)^2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 6832014336=(68320+14336)^2=(82656)^2 \\ 300814336=(\ 3008+14336)^2=(17344)^2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 9048004641=(90480+04641)^2=(95121)^2 \\ 23804641=(\ 2380+04641)^2=(4879)^2 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 9999800001=(99998+00001)^2=(99999)^2 \\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 1^2 \end{cases}$ 100000

證明：

(1) 卡布列克怪數會一組一組的出現是因為一加一減，所以會有兩個。

拆末 m 位：

$$10^m A+B=(A+B)^2$$
$$n=(5\times10^{m-1})^2-(10^m-1)B$$
$$A=\ (5\times10^{m-1}-B)\pm n$$

每一組為

$$\begin{cases} A=(5\times10^{m-1}-B)+n \ ；B\Rightarrow\sqrt{卡布列克怪數}=\sqrt{\boxed{A}\boxed{B}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =\sqrt{(A+B)^2}=A+B=5\times10^{m-1}+n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow 和：10^m \\ A=(5\times10^{m-1}-B)-n \ ；B\Rightarrow\sqrt{卡布列克怪數}=\sqrt{\boxed{A}\boxed{B}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =\sqrt{(A+B)^2}=A+B=5\times10^{m-1}-n \end{cases}$$

(2) 雷霆數會一組一組的出現也是因為一加一減，所以會有兩個。

$$10^m A + B = (A-B)^2$$

拆末 m 位： $n^2 = (10^m+1)B + (5\times 10^{m-1})^2 \quad \Rightarrow (5\times 10^{m-1})^2 \ \geq \ n^2$

$A = \ (B + 5\times 10^{m-1}) \pm n \qquad 5\times 10^{m-1} \ \geq \ n$

每一組為

$$\begin{cases} A = (B+5\times 10^{m-1}) + n \ ；B \Rightarrow \sqrt{雷霆數} = \sqrt{\boxed{A}\boxed{B}} \\ \qquad\qquad = \sqrt{(A-B)^2} = A - B = 5\times 10^{m-1} + n \\ A = (B+5\times 10^{m-1}) - n \ ；B \Rightarrow \sqrt{雷霆數} = \sqrt{\boxed{A}\boxed{B}} \\ \qquad\qquad = \sqrt{(A-B)^2} = |A-B| \\ \qquad\qquad = \left| 5\times 10^{m-1} - n \right| = n - 5\times 10^{m-1} \end{cases} \Rightarrow 差：10^m$$

結論三：

9^2 、99^2 、999^2 、9999^2 、99999^2 、 … 、$999\ldots 9^2$ 皆為卡布列克怪數。

11^2 、101^2 、1001^2 、10001^2 、100001^2 、…、$100\ldots 01^2$ 皆為雷霆數。

1、101、10001 、1000001、100000001、…、$1\underbrace{00\cdots 0}_{2k+1}1$ 皆為平方和再現數。

卡布列克怪數：

$$\underbrace{99\cdots 9}_{n}{}^2 = (1\underbrace{00\cdots 0}_{n}-1)^2 = 1\underbrace{00\cdots 0}_{n}\underbrace{00\cdots 0}_{n} - 2\underbrace{00\cdots 0}_{n} + 1$$

$$= \underbrace{99\cdots 98}_{n}\underbrace{00\cdots 01}_{n} = (\underbrace{99\cdots 9}_{n-1}8 + \underbrace{00\cdots 0}_{n-1}1)^2$$

雷霆數：

$$1\underbrace{00\cdots 0}_{n}1^2 = (1\underbrace{00\cdots 0}_{n}+1)^2 = 1\underbrace{00\cdots 0}_{n}\underbrace{00\cdots 0}_{n} + 2\underbrace{00\cdots 0}_{n} + 1$$

$$= 1\underbrace{00\cdots 02}_{n}\underbrace{00\cdots 01}_{n} = (1\underbrace{00\cdots 02}_{n} - \underbrace{00\cdots 01}_{n})^2$$

平方和再現數：

$$1\underbrace{00\cdots 0}_{2n-1}1 = 1\underbrace{00\cdots 0}_{n}\underbrace{00\cdots 01}_{n} = 1\underbrace{00\cdots 0}_{n}\underbrace{00\cdots 0}_{n} + 1$$

$$= 1\underbrace{00\cdots 0}_{n}{}^2 + 1^2$$

結論四：

(1) 拆末 m 位的卡布列克怪數個數與 99⋯9 (m 位數)的質因數個數的排列組合個數相同，而且這些卡布列克怪數正是由質因數任意組合而成的數值的倍數。

(2) 拆末 m 位的雷霆數個數與 100⋯01 (m+1 位數)的質因數個數的排列組合個數相同，而且這些雷霆數正是由質因數任意組合而成的數值的倍數。

(3) 拆末 m 位的平方和再現數個數與 100⋯01 (2m+1 位數)的質因數個數的排列組合個數相同，而且這些卡布列克怪數正是由質因數任意組合而成的數值的倍數。

舉例：

末三位	(1) $494209=(494+209)^2=(703)^2=(19\times37)^2$ $88209=(88+209)^2=(297)^2=(11\times3^3)^2$ → C_1^2 (2) $998001=(988+001)^2=(999)^2=(37\times3^3)^2$ → C_2^2 $1=1^2$ (不列入此分類)	每一組皆由 999 的質因數 3 和 37 去排列組合。
末四位	(1) $25502500=(2550+2500)^2=(5050)^2=(2\times5^2\times101)^2$ $24502500=(2450+2500)^2=(4950)^2=(2\times5^2\times11\times3^2)^2$ (2) $52881984=(5288+1984)^2=(7272)^2=(2^3\times101\times3^2)^2$ $7441984=(744+1984)^2=(2728)^2=(2^3\times31\times11)^2$ (3) $60481729=(6048+1729)^2=(7777)^2=(7\times11\times101)^2$ $4941729=(494+1729)^2=(2223)^2=(13\times19\times3^2)^2$ → C_2^3 (4) $99980001=(9998+0001)^2=(9999)^2=(101\times11\times3^2)^2$ → C_3^3 $1=1^2$ (不列入此分類)	每一組皆由 9999 的質因數 3、11 和 101 去排列組合。

(1) 卡布列克怪數

拆末 m 位		質因數分解	質因數個數	利用質因數個數去排列組合出卡布列克怪數	個數
1	9^2	$9=3^2$	1	$C_1^1=1$	**1**
2	99^2	$99=3^2\times11$	2	$C_2^2+C_1^2=1+2=3$	**3**

3	999^2	$999=3^2\times37$	2	$C_2^2+C_1^2=1+2=3$	**3**
4	9999^2	$9999=3^2\times11\times101$	3	$C_3^3+C_2^3+C_1^3=1+3+3=7$	**7**
5	99999^2	$99999=3^2\times41\times271$	3	$C_3^3+C_2^3+C_1^3=1+3+3=7$	**7**
6	999999^2	$999999=3^3\times7\times11\times13\times37$	5	$C_5^5+C_4^5+C_3^5+C_2^5+C_1^5=1+5+10+10+5=31$	**31**
7	9999999^2	$9999999=3^2\times239\times4649$	3	$C_3^3+C_2^3+C_1^3=1+3+3=7$	**7**
8	99999999^2	$99999999=3^2\times11\times73\times101\times137$	5	$C_5^5+C_4^5+C_3^5+C_2^5+C_1^5=1+5+10+10+5=31$	**31**
9	99999999^2	$999999999=3^4\times37\times333667$	3	$C_3^3+C_2^3+C_1^3=1+3+3=7$	**7**
10	9999999999^2	$9999999999=3^2\times11\times41\times271\times9091$	5	$C_5^5+C_4^5+C_3^5+C_2^5+C_1^5=1+5+10+10+5=31$	**31**

(2) 雷劈數

拆末 m 位		質因數分解	質因數個數	利用質因數個數去排列組合出卡布列克怪數	個數
n=1	11^2	11	1	$C_1^1=1$	**1**
n=2	101^2	101	1	$C_1^1=1$	**1**
n=3	1001^2	$1001=7\times11\times13$	3	$C_3^3+C_2^3+C_1^3=1+3+3=7$	**7**
n=4	10001^2	$10001=73\times137$	2	$C_2^2+C_1^2=1+2=3$	**3**
n=5	100001^2	$100001=13\times9091$	2	$C_2^2+C_1^2=1+2=3$	**3**

(3) 平方和再現數

拆末 n 位			質因數個數	利用質因數個數去排列組合出卡布列克怪數	個數
n=1	101	101	1	$C_1^1=1$	**1**
n=2	10001	73×137	2	$C_2^2+C_1^2=1+2=3$	**3**
n=3	1000001	101×9901	2	$C_2^2+C_1^2=1+2=3$	**3**
n=4	100000001	17×5882353	2	$C_2^2+C_1^2=1+2=3$	**3**
n=5	10000000001	101×3541×27961	2	$C_2^2+C_1^2=1+2=3$	**3**

陸、 參考資料及其他

一、 中村義作(2003)。數學謎題 20 種解法。臺北市：益智工房。

二、 一萬以內的質數表 http://fm.u41.tw/2009/11/blog-post_7646.html

三、 分和累乘再現數 www.dwhs.tnc.edu.tw/~cgj/science/4th/doc/SA4-298_final.pdf

柒、 未來研究

一、尋找卡布列克怪數的相關應用。

二、嘗試找尋不同的再現數(數字斷開成 n 部分，求其和或差的 m 次方後會回到原數)的關聯性。

【評語】030420

Kaprekar number 這類數字的特性非常的有趣。作者們充分掌握了生成這樣一個數字的要件，藉由簡單的分析、討論，給出了二十位數內這些數字的完整列表，並利用相同的方式，討論了具有類似性質的特殊數字(雷霆數、平方和再現數)。能掌握問題的核心，並藉由基礎的分析技巧得到完整的答案，是很不錯的結果，比較可惜的是，可能由於事前資料蒐集的不夠多，作者並未注意到這個問題其實已經有結果了。如果在研究問題前能多做一些資料蒐集的工作，研究的方向或許會有不同，結果也應該會更好。