

中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

第三名

030419

滾動奇跡

學校名稱：高雄市立五福國民中學

作者： 國二 陳冠羲 國二 吳彥寬 國二 莊智鈞	指導老師： 余尚芸 梁益彰
---	-----------------------------

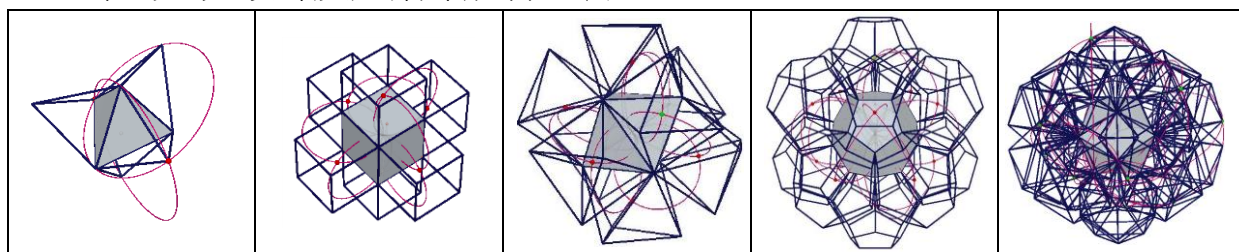
關鍵詞：正多面體、軌跡

摘要

本研究從第 46 屆全國科展「滾滾紅成」延伸，以立體圖形為研究方向，試以「立體一筆畫」方式將兩個多面體互繞，將其中一個不動的多面體作為基準多面體，另一個多面體則沿著基準多面體的邊繞行基準多面體的面，最後繞回起始面，且繞行路徑不重複經過基準多面體的同一面，發現正多面體在接觸面相同時可立體一筆畫互繞詳盡證明之。另外，探討其繞法種類，其中正四繞正四面體為 6 種；正六繞正六面體為 32 種…等，接著求出環繞後的不同旋轉點其對應之旋轉中心變化、對應旋轉半徑、旋轉軌跡圖形及總旋轉軌跡長，其正 m 面體繞正 n 面體旋轉角度公式為

$$360^\circ - \left[\cos^{-1} \left(1 - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \right] - \left[\cos^{-1} \left(1 - \frac{1 - \cos \beta}{\sin^2 \beta} \right) \right],$$

並將研究結果應用至演唱會或 KTV 中的燈光設計及建築節能省電裝置。



壹、研究動機：

從第 46 屆全國中小學科展第三名作品「滾滾紅成」出發，其架構乃以平面一三角形去沿著正方形邊旋轉為研究內容，我們試將其推廣至立體，然立體軌跡探討之困難在於空間圖形無法如平面圖形一樣描繪。於是嘗試使用軟體探討多面體滾動之可行性，並深入求出可滾動之多面體其旋轉時之各種性質，此外，我們試著讓不同多面體來互繞，探討其旋轉步驟數、旋轉中心、旋轉半徑、旋轉角度並利用數學課本第四、五冊幾何單元之相關知識進行研究探討。

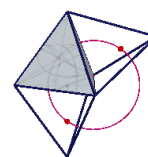
貳、研究目的：

- 一、探討八十種均勻多面體其是否可以互繞，其可互繞之多面體種類及其特性。
- 二、探討均勻多面體互繞時，是否可立體一筆畫？
- 三、探討正多面體立體一筆畫時，其繞法種類為何？
- 四、探討正多面體立體一筆畫互繞時，以多面體中不同旋轉點其對應之旋轉中心變化、對應旋轉半徑、及對應的旋轉軌跡形狀及對應旋轉軌跡長。

參、研究設備及器材：Cabri 3D

肆、名詞釋義：

1. 繞：是指以相同種面體，其中一個為基準多面體，再以另一個多面體沿著面，讓基準多面體一面與另一多面體接觸一次。(如右圖是正四面體繞正四面體)

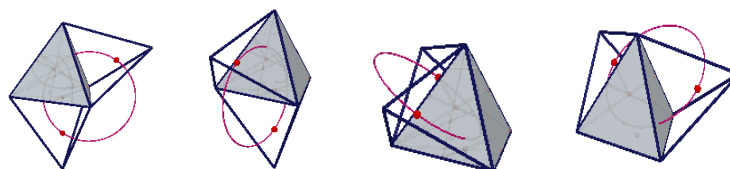
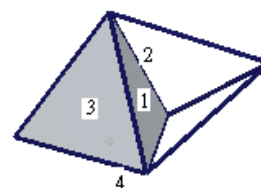


2. 立體一筆畫：以面繞面，由起始面開始繞完基準多面體全部的面，且不繞到重覆的面，最後繞回起始面（其路徑不中斷）。

【舉例】正四面體繞正四面體立體一筆畫

我們將每個面標號(如右圖)以便討論

由此順序(1→4→3→2→1)來繞，即為立體一筆畫。



3. 旋轉軸：旋轉時，由旋轉前、後皆在同一位置的兩點之連線所構成的
4. 旋轉中心：從起始點作一線垂直旋轉軸，該線與旋轉軸交點為旋轉中心
5. 均勻多面體：在幾何學中，均勻多面體是一種具有正多邊形面且頂點可遞的多面體，即等角傳遞它的頂點，可以等距映射任一頂點到任何其他頂點）由此可知該多面體具有具有高度反射和旋轉對稱。

伍、研究過程與結果：

事實上，立體的圖形遠比平面圖形困難許多，主要是立體圖形的軌跡在空間中難以想像，因此我們嘗試使用電腦繪圖軟體 Cabri 3D 輔助研究。

一、探討八十種均勻多面體其是否可以互繞，其可互繞之多面體種類和特性。

(一)探討八十種均勻多面體在其兩者皆同一種多面體時，是否可以互繞，以及其可互繞之多面體種類和特性。

首先針對所有已知多面體去嘗試，可以互繞的記為 O，不能的為 X，整理表格如下：

種類	正四面體	截頂四面體	八面體	八合四面體	四合四面體	扭棱立方體	小立方截半立方體	大立方截半立方體
圖								
互繞	O	O	O	X	X	O	X	X
種類	六合五面體	立方截頂截半立方體	大均勻斜方截半立方體	立方體	截半立方體	截頂八面體	小斜方六面體	星狀截頂六面體
圖								
互繞	X	X	X	O	O	O	X	X
種類	大截頂截半立方體	大斜方六面體	二十面體	十二面體	三十二面體(截半十二面體)	截頂二十面體	截頂十二面體	小二十合三十二面體
圖								
互繞	X	X	O	O	O	O	O	X
種類	小斜方三十二面體	大截頂三十二面體	扭棱十二面體	小雙三斜三十二面體	小二十合扭棱三十二面體	小十二合三十二面體	小星狀十二面體	大十二面體
圖								
互繞	O	O	O	X	X	X	X	X
種類	十二合十二面體	截頂大十二面體	斜方十二合十二面體	小斜方十二面體	扭棱十二合十二面體	雙三斜十二面體	大雙三斜方十二合三十二面體	小雙三斜方十二合三十二面體
圖								
互繞	X	X	X	X	X	X	X	X
種類	截頂立方體	小斜方截半立方體	大斜方截半立方體	三十二合十二面體	二十截頂十二合十二面體	扭棱三十二合十二面體	大三斜三十二面體	大二十合三十二面體
圖								
互繞	O	O	O	X	X	X	X	X
種類	小二十合四面體	小十二合二十面體	小十二合六面體	大星狀十二面體	大二十面體	大三十二面體	大截頂二十面體	斜方二十面體
圖								
互繞	X	X	X	X	X	X	X	X
種類	大扭棱三十二面體	小星狀截頂十二面體	截頂十二合十二面體	反扭棱十二合十二面體	大十二合三十二面體	小十二合十一面體	大十二合二十面體	大扭棱十二合三十二面體
圖								
互繞	X	X	X	X	X	X	X	X
種類	大十二合十	大星狀截頂	均勻大斜方	大截頂三十	大反扭棱三十	大十二合六	大二十合六面	小後扭棱二十

	一面體	十二面體	三十二面體	二面體	二面體	面體	體	合三十二面體
圖								
互繞	X	X	X	X	X	X	X	X
種類	大斜方十二面體	大後扭棱二十合三十二面體	大雙斜方三十二面體	五角柱	五反角柱	五角角柱	五星反角柱	五星交叉反角柱
圖								
互繞	X	X	X	O	O	X	X	X

【研究結果】發現凹均勻多面體都不可互繞，而凸均勻多面體皆可互繞。

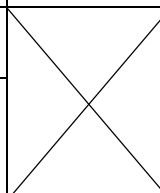
【理由】因為凹多面體的凹面無法接觸，因此不可互繞；凸多面體的面可接觸，因此可以互繞。

(二)探討八十種均勻多面體是兩種不同多面體時是否可以互繞，以及其可互繞之多面體種類和特性。

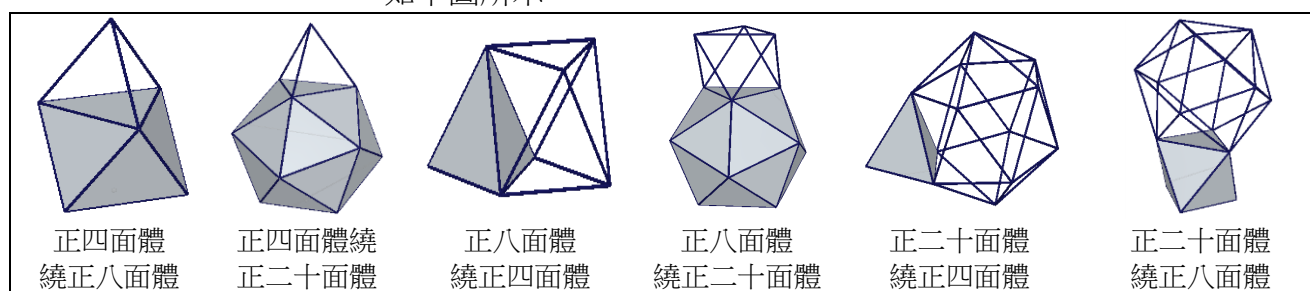
首先，觀察發現多面體間是否可互繞可能和多面體面的種類有關，因此進一步整理，下表中組成邊形表示法 $A(b)$ 代表多面體中組成邊形乃 A 個 b 邊形：

舉例：1. 正四面體 $4(3)$ 代表其由四個正三角形組成。

2. 截頂二十面體 $12(5)$ 、 $20(6)$ 代表由 12 個正 5 邊形和 20 個正六邊形所組成。

多面體種類	正四面體	正八面體	正六面體	正十二面體	正二十面體	截半立方體	三十二面體 (截半十二面體)
組成邊形	$4(3)$	$8(3)$	$6(4)$	$12(5)$	$20(3)$	$8(3)$ 、 $6(4)$	$20(3)$ 、 $12(5)$
多面體種類	截頂四面體	截頂八面體	截頂立方體	截頂十二面體	截頂二十面體	大截頂三十二面體	小斜方截半立方體
組成邊形	$4(3)$ 、 $4(6)$	$8(6)$ 、 $6(4)$	$6(8)$ 、 $8(3)$	$20(3)$ 、 $12(10)$	$12(5)$ 、 $20(6)$	$30(4)$ 、 $20(6)$ 、 $12(10)$	$8(3)$ 、 $18(4)$
多面體種類	正五角柱	正五反角柱	小斜方三十二面體	扭棱十二面體	(大) 斜方截半立方體	扭棱立方體	
組成邊形	$5(4)$ 、 $2(5)$	$10(3)$ 、 $2(5)$	$20(3)$ 、 $30(4)$ 、 $12(5)$	$80(3)$ 、 $12(5)$	$12(4)$ 、 $8(6)$ 、 $6(8)$	$32(3)$ 、 $6(4)$	

【研究結果 1】發現正四面體、正八面體、正二十面體都只由正三角形所組成，故若組成之正三角形大小一樣時，正四、八、二十面體可互繞，如下圖所示：



【研究結果 2】發現由二種或以上多邊形組成的均勻多面體，只要其是由同種類多邊形組成，就可以互繞。

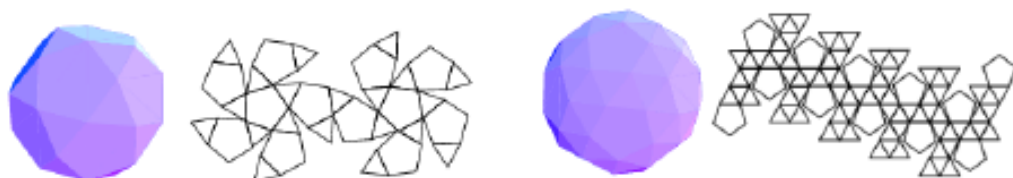
舉例：扭棱十二面體、正五反角柱、三十二面體(截半十二面體)

二、探討均勻多面體互繞時，是否可立體一筆畫？

【研究結果 1】若組成相同之多邊形種類數未成相同整數倍，則無法互繞，因會造成其組成上的差異因此不可立體一筆畫。

舉例：三十二面體(截半十二面體) $20(3)$ 、 $12(5)$ 、扭稜十二面體 $80(3)$ 、 $12(5)$

如下圖所示，三十二面體中的三角形旁邊都是五邊形，但扭稜十二面體中三角形旁最多只有一個五邊形，故當繞完一個五邊形到三角形後，扭稜十二面體就不可再繼續繞下去，故不可立體一筆畫。



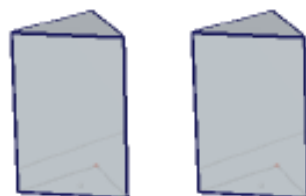
三十二面體(截半十二面體)及其展開圖

扭稜十二面體及其展開圖

【研究結果 2】正多面體繞正多面體可立體一筆畫。

【研究結果 3】非正多面體時，此組成之多邊形種類其分別個數相同時可立體一筆畫。

舉例：正三角柱 $2(3)$ 、 $3(4)$ ，如圖所示。正三角柱與正三角柱可立體一筆畫，因為都是由 2 個正三角型和 3 個長方形組成，其組成方式相同，故可立體一筆畫。



三、探討正多面體立體一筆畫時，其繞法種類為何？

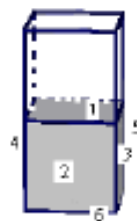
(一)探討兩個相同正多面體互繞時，其繞法種類為何？

1.探討相同正六面體繞正六面體時繞法種類為何？

將正六面體編號，因可在和起始面 1 垂直的四面繞 3 面、2 面、1 面，故以繞幾面後往下繞至面 6 進行討論。

在要繞第一個面時有 4 種選擇，因為繞一面後下後在繞上來時不可繞剩餘 3 面的中間者，故每一種第三個繞到的面有 2 種選擇，故共有 $4 \times 2 = 8$ 種選擇。在要繞第一個面時有 4 種選擇，繞二面後下在繞到第一個面後有向左或向右 2 種選擇，接著在要往上時也有 2 種選擇，故共有 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 種選擇。

在要繞第一個面時有 4 種選擇，繞三面後下時在繞到第一個面後有向左或向右 2 種選擇，接著在要往上時因只剩一個面，故只有 1 種選擇，故共有 $4 \times 2 = 8$ 種選擇。



1→2→6→3→5→4→1	1→2→6→4→5→3→1	1→3→6→2→4→5→1
1→3→6→5→4→2→1	1→4→6→2→3→5→1	1→4→6→5→3→2→1
1→5→6→3→2→4→1	1→5→6→4→2→3→1	1→2→3→6→4→5→1
1→2→3→6→5→4→1	1→2→4→6→3→5→1	1→2→4→6→5→3→1
1→3→2→6→4→5→1	1→3→2→6→5→4→1	1→3→5→6→2→4→1
1→4→5→6→3→2→1	1→4→2→6→3→5→1	1→4→2→6→5→3→1
1→4→5→6→2→3→1	1→4→5→6→3→2→1	1→5→3→6→2→4→1
1→5→3→6→4→2→1	1→5→4→6→2→3→1	1→5→4→6→3→2→1
1→2→3→5→6→4→1	1→2→4→5→6→3→1	1→3→2→4→6→5→1
1→4→2→3→6→5→1	1→3→5→4→6→2→1	1→4→5→3→6→2→1
1→5→3→2→6→4→1	1→5→4→2→6→3→1	

【研究結果】正六面體的繞法總共有 $8+16+8=32$ 種。

2. 探討相同正四面體繞正四面體時繞法種類為何？

仿照上述方法將正四面體編號並繞完，由正四面體轉動路徑比較開始。

起始面為 1 的有：1→2→4→3→1；1→2→3→4→1；

1→3→2→4→1；1→3→4→2→1；

1→4→2→3→1；1→4→3→2→1



【研究結果】根據上述，正四面體的繞法總共有 $2 \times 3 = 6$ 種。

3. 探討相同正八面體繞正多面體時，是否可「立體一筆畫」？若可以「立體一筆畫」正八面體之繞法種類為何？

仿照上述方法將正八面體編號並繞完，由正四面體轉動路徑比較開始。

固定面 2：1→4→5→6→7→8→3→2；1→4→3→8→5→6→7→2

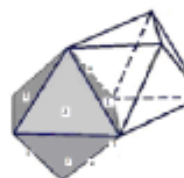
1→6→7→8→5→4→3→2；1→6→5→4→3→8→7→2

固定面 4：1→2→3→8→7→6→5→4；1→2→7→6→5→8→3→4

1→6→5→8→7→2→3→4；1→6→7→2→3→8→5→4

固定面 6：1→2→3→4→5→8→7→6；1→2→7→8→3→4→5→6

1→4→3→2→7→8→5→6；1→4→5→8→3→2→7→6

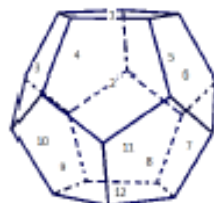


【研究結果】根據上述，正八面體的繞法總共有 $4 \times 3 = 12$ 種。

【理由】因為須繞回原來的面，故至少須留一個和起始面 1 相鄰的面，且正八面體的面皆為三角形，故一開始只有兩種選擇，因為每一面皆為三角形，且一面被固定不能繞，而一條邊與前一面共用，故任一選擇只有 2 種繞法，每固定一面則有兩種繞法，共可固定三面，故正八面體的繞法共有 $4 \times 3 = 12$ 種繞法。

4. 探討相同正十二面體繞正多面體時，是否可「立體一筆畫」？若可以「立體一筆畫」正十二面體之繞法種類為何？

將正十二面體分成四層來討論：第一層一面、第二層五面、第三層五面、第四層一面。接著我們根據層數將繞法分類，例如：第一層繞一面後下，第二層繞四面後下，第三層繞四面後下，第四層繞一面。最後，我們將正十二面體的繞法分成 16 種情況，並算出其繞法種類數。



【研究結果】正十二面體的繞法總共有 1590 種。

5. 探討相同正二十面體繞正多面體時，是否可「立體一筆畫」？若可以「立體一筆畫」正二十面體之繞法種類為何？

將正二十面體分成五層來進行討論，並找出相鄰各面所有可能的路徑，最後統整出正二十面體的繞法種類數。

【研究結果】正二十面體的繞法總共有 42 種



(二) 探討兩個不同正多面體互繞時，其繞法種類為何？

仿照上述作法發現：1. 正四面體繞正八面體的繞法種類有 12 種

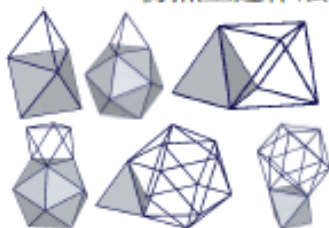
2. 正四面體繞正二十面體的繞法種類有 42 種

3. 正八面體繞正四面體的繞法種類有 6 種

4. 正八面體繞正二十面體的繞法種類有 42 種

5. 正二十面體繞正四面體的繞法種類有 6 種

6. 正二十面體繞正八面體的繞法種類有 6 種



四、探討正多面體立體一筆畫互繞時，以多面體中不同旋轉點其對應之旋轉中心變化、對應旋轉半徑、及對應的旋轉軌跡形狀及對應旋轉軌跡長。

首先，探討旋轉角度的求法

【兩面角公式引理】：

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right) = \cos^{-1}\left(1 - \frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha - \sin^2(\gamma - \beta)}{2 \sin^2 \gamma \sin^2 \beta}\right)$$

【證明】若一立體角由接角 α 、 β 、 γ 三個多邊形的角度所組成，作一兩邊平行稜 v 的四邊形，即可算出 α 角所對之兩面角度數 θ ，如下：

$$x = \frac{\overline{AB}}{\cos(\gamma - 90^\circ)} = \frac{\overline{AB}}{\sin \gamma}, \quad y = \frac{\overline{BC}}{\sin \beta}, \quad \text{-----①}$$

$$\text{當 } \gamma > 90^\circ \text{ 時，} x' = \overline{AB} \tan(\gamma - 90^\circ) = \frac{-\overline{AB}}{\tan \gamma};$$

$$\gamma = 90^\circ \text{ 時，} x' = 0; \quad \gamma < 90^\circ \text{ 時，} x' = \frac{\overline{AB}}{\tan \gamma}。$$

$$\therefore b^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$$

$$\therefore b^2 = \frac{\overline{AB}^2}{\sin^2 \gamma} + \frac{\overline{BC}^2}{\sin^2 \beta} - \frac{2\overline{AB} \times \overline{BC} \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \beta}$$

$$\therefore b^2 = \frac{\overline{AB}^2 \sin^2 \beta + \overline{BC}^2 \sin^2 \gamma - 2\overline{AB} \times \overline{BC} \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha}{\sin^2 \gamma \sin^2 \beta} \quad \text{-----②}$$

$$\text{若令 } \overline{AB} = \overline{BC} = 1, \quad x = \frac{1}{\sin \gamma}, \quad y = \frac{1}{\sin \beta}。$$

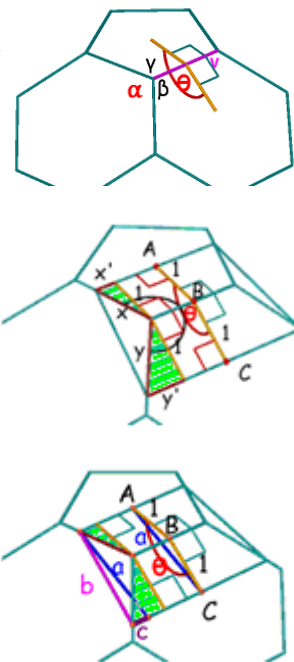
$$\therefore b^2 = \frac{1}{\sin^2 \gamma} + \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{2 \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \beta} = \frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha}{\sin^2 \gamma \sin^2 \beta}$$

$$c = |y^2 - x^2| = \left| \frac{1}{\frac{\tan \beta - 1}{\tan \gamma}} \right| = \left| \frac{\cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \right| = \left| \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin \beta \sin \gamma} \right| \quad \text{-----③}$$

$$a^2 = b^2 - c^2 = \frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha - \sin^2(\gamma - \beta)}{\sin^2 \gamma \sin^2 \beta}$$

$\therefore$ 推得兩面角公式為

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right) = \cos^{-1}\left(1 - \frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha - \sin^2(\gamma - \beta)}{2 \sin^2 \gamma \sin^2 \beta}\right)$$

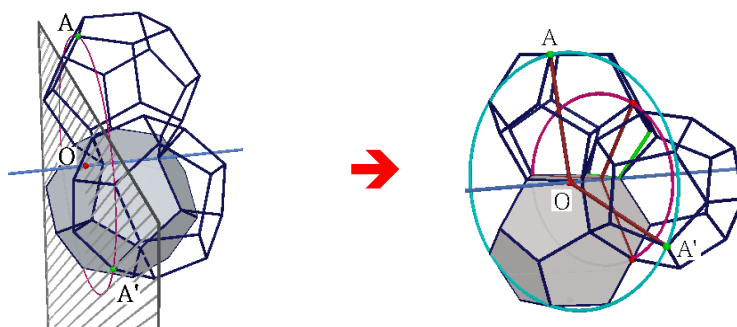


(一)探討相同正多面體立體一筆畫繞相同正多面體時，以多面體中不同旋轉點其對應之旋轉中心變化、對應旋轉半徑、及對應的旋轉軌跡形狀及對應旋轉軌跡長。

接下來，探討**旋轉半徑的求法**

經研究後發現空間中旋轉軌跡與不同旋轉點對應之旋轉半徑有關，而不同對應旋轉半徑與對應之不同旋轉中心及旋轉角度有關，經分析後得到可將旋轉軸延長，做一平面通過此點且垂直旋轉軸，取平面和旋轉軸的交點，此點即為旋轉中心，連接起始點，即為旋轉半徑。

例如：下圖為正十二面體的旋轉半徑製作。



根據【兩面角公式引理】，推得正多面體繞正多面體的兩面角公式：

【正多面體繞正多面體的兩面角公式】

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right) = \cos^{-1}\left(1 - \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2(\alpha - \alpha)}{2 \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha}\right)$$

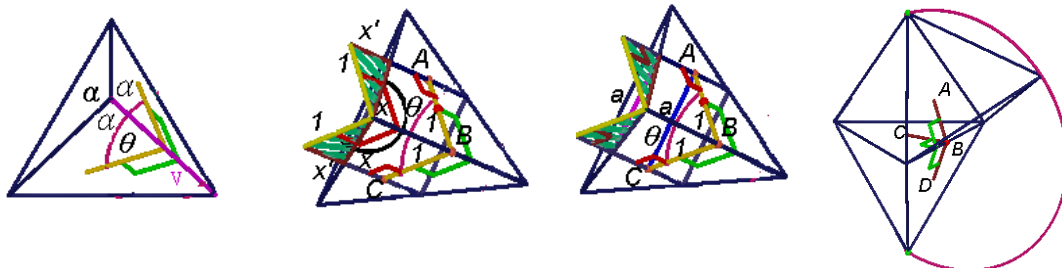
【證明】因為正多面體的正立體角是由三個相同正多邊形的角度 α 所組成，如果根據上述兩面角公式中 $\alpha = \beta = \gamma$ 代入公式化簡後得

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right) = \cos^{-1}\left(1 - \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2(\alpha - \alpha)}{2 \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(1 - \frac{1 + 1 - 2 \cos \alpha - 0}{2 \sin^2 \alpha}\right) = \cos^{-1}\left(1 - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) \end{aligned}$$

∴推得正多面體兩面角公式為

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right) = \cos^{-1}\left(1 - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)$$

【舉例】正四面體中 $\alpha = 60^\circ$ ，故兩面角角度 $= \cos^{-1}\left(1 - \frac{1 - \cos 60^\circ}{\sin^2 60^\circ}\right) \approx 70.53^\circ$



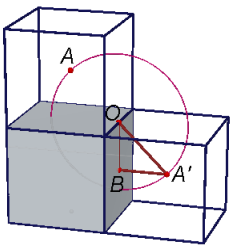
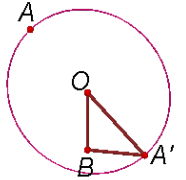
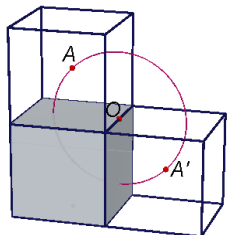
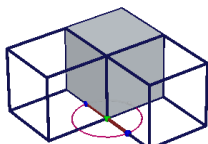
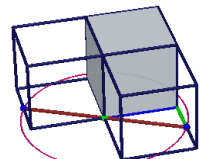
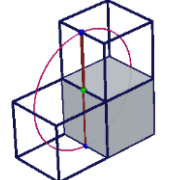
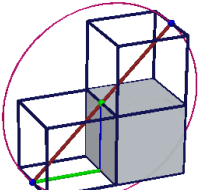
【正多面體繞正多面體的旋轉角度公式】 $360^\circ - 2 \left[\cos^{-1}\left(1 - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) \right]$

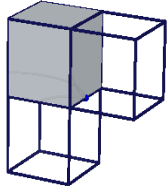
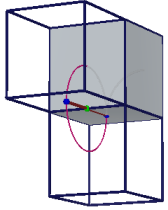
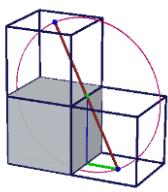
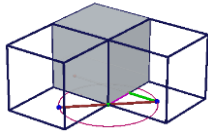
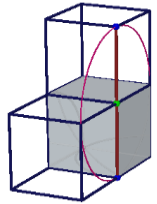
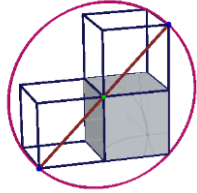
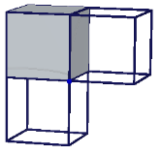
【舉例】正四面體中兩面角角度 $\approx 70^\circ 53'$ ，故正四面體旋轉角度 $\approx 218^\circ 14'$

接下來依序從正六、四、八、十二、二十面體一一探討起。

1. 探討相同正六面體立體一筆畫繞相同正多面體時，以多面體中不同旋轉點其對應之旋轉中心變化、對應旋轉半徑、及對應的旋轉軌跡形狀及對應旋轉軌跡長。

下面所有圖形中藍點為起始和結束點，綠點為旋轉中心，而咖啡色的線段為旋轉半徑。正六面體的旋轉半徑可以由以下步驟求得：

旋轉點	旋轉圖形	旋轉半徑求法步驟
內部中心	  	不失一般性假設正六面體邊長為單位長 $\overline{A'B} = \overline{BO} = \frac{1}{2}$ $\overline{A'B}^2 + \overline{BO}^2 = \overline{AO}^2$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \overline{AO}^2$ $\overline{AO} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\therefore \overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 亦即綠線和藍線皆為正六面體邊長之半(即 $\frac{1}{2}$)，而 $\text{藍線}^2 + \text{綠線}^2 = \text{旋轉半徑}^2，\text{可得旋轉半徑為 } \frac{\sqrt{2}}{2}$ 【發現】 旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \text{邊長}$
邊上中點		即為正六面體邊長之半(即 $\frac{1}{2}$) 【發現】 旋轉半徑為 $\frac{1}{2} \times \text{邊長}$
邊上中點		藍線為正六面體之邊長，綠線為正六面體邊長之半(即 $\frac{1}{2}$)，藍線² + 綠線² = 旋轉半徑²，可得旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 【發現】 旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{5}}{2} \times \text{邊長}$
邊上中點		綠點也為邊上中點，故旋轉半徑為正六面體之邊長(1) 【發現】 旋轉半徑為邊長
邊上中點		藍線與綠線皆為正六面體之邊長(1)，而藍線² + 綠線² = 旋轉半徑²，可得旋轉半徑為 $\sqrt{2}$ 【發現】 旋轉半徑為 $\sqrt{2} \times \text{邊長}$

邊上中點		由面六轉回面三時點並未轉動，因此長度為 0 【發現】旋轉半徑為 0
面上中心		即為正六面體邊長之半(即 $\frac{1}{2}$) 【發現】旋轉半徑為 $\frac{1}{2} \times \text{邊長}$
面上中心		藍線為正六面體之邊長，綠線為正六面體邊長之半(即 $\frac{1}{2}$)，藍線 ² + 綠線 ² = 旋轉半徑 ² ，可得旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 【發現】旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{5}}{2} \times \text{邊長}$
面上中心		綠線和紫線皆為正六面體邊長之半(即 $\frac{1}{2}$)，而紫線 ² + 綠線 ² = 旋轉半徑 ² ，可得旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【發現】旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \text{邊長}$
頂點		即為正六面體邊長(1) 【發現】旋轉半徑為邊長
頂點		即為正六面體的對角線長(即 $\sqrt{2}$) 【發現】旋轉半徑為 $\sqrt{2} \times \text{邊長}$
頂點		由面六轉回面三時點並未轉動，因此長度為 0 【發現】旋轉半徑為 0

【研究結果】發現旋轉半徑的種類對應如下：

1. 旋轉點為「內部中心」時：旋轉半徑有 1 種為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. 旋轉點為「邊上中點」時：不同繞法旋轉半徑有 5 種，分別為 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 、 1 、 $\sqrt{2}$ 、0
3. 旋轉點為「面上中心」時：半徑有 3 種分別為 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. 旋轉點為「頂點」時：半徑有 3 種分別為 1、 $\sqrt{2}$ 、0

接下來探討正六面體旋轉點不同時其旋轉的軌跡為何？

(1)旋轉點為「正方體中心」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正方體中心」時其旋轉步驟如下：

步驟	1	2	3	4	5	6
步驟圖						

【研究結果 2】總軌跡圖如下：

正視圖	俯視圖	斜視圖

【研究結果 3】發現正六面體中 $\alpha=90^\circ$ 度，故兩面角角度

$$= \cos^{-1}\left(1 - \frac{1 - \cos 90^\circ}{\sin^2 90^\circ}\right) = 90^\circ, \text{ 故正六面體旋轉角度} = 180^\circ$$

【研究結果 4】對應上面所求之旋轉半徑，可得其總軌跡長為 $\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \times 6 = 3\sqrt{2}\pi$

【研究結果 5】因不會有點在旋轉軸上的因素，而不會出現旋轉而沒有軌跡的狀況，因此不同繞法不會對總軌跡有影響。

(2)旋轉點為「正方體邊上中點」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正方體邊上中點」時其旋轉步驟如下：

步驟	1	2	3	4	5	6
步驟圖						

【研究結果 2】總軌跡圖如下：

正視圖	俯視圖	斜視圖

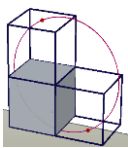
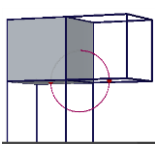
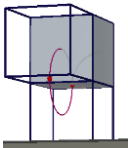
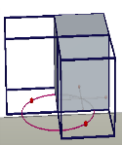
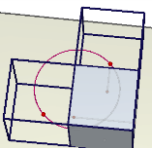
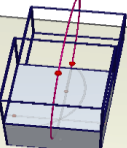
【研究結果 3】旋轉角度 $= 180^\circ$

【研究結果 4】對應上面所求之旋轉半徑，可得其總軌跡長為 $\frac{3+3\sqrt{5}}{2} \pi$

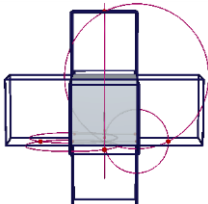
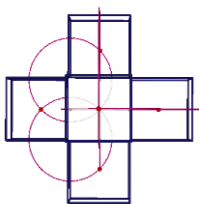
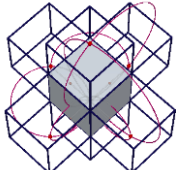
【研究結果 5】因不會有點在旋轉軸上的因素，而不會出現旋轉而沒有軌跡的狀況，因此不同繞法不會對總軌跡有影響。

(3)旋轉點為「正方體面上中點」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正方體面上中點」時其旋轉步驟如下：

步驟	1	2	3	4	5	6
步驟圖						

【研究結果 2】總軌跡圖如下：

正視圖	俯視圖	斜視圖
		

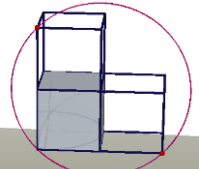
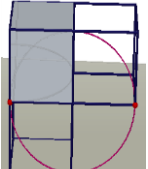
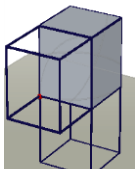
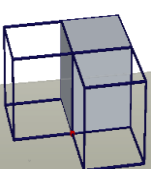
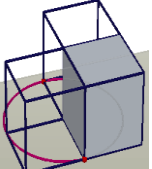
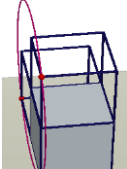
【研究結果 3】旋轉角度=180°

【研究結果 4】對應上面所求之旋轉半徑，可得其總軌跡長為 $\pi + \sqrt{2}\pi + \sqrt{5}\pi$

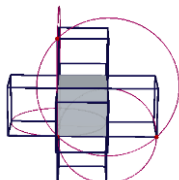
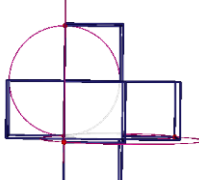
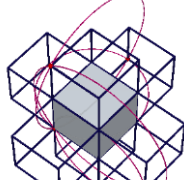
【研究結果 5】因不會有點在旋轉軸上的因素，而不會出現旋轉而沒有軌跡的狀況，因此不同繞法不會對總軌跡有影響。

(4)旋轉點為「正方體頂點」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正方體頂點」時其旋轉步驟如下：

步驟	1	2	3	4	5	6
步驟圖						

【研究結果 2】總軌跡圖如下：

正視圖	俯視圖	斜視圖
		

【研究結果 3】旋轉角度=180°

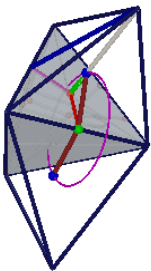
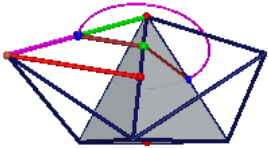
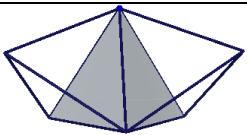
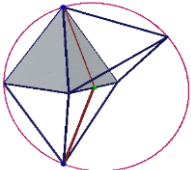
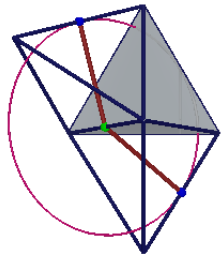
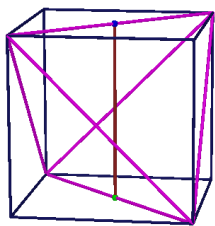
【研究結果 4】對應上面所求之旋轉半徑，可得其總軌跡長為 $2\sqrt{2}\pi + 2\pi$

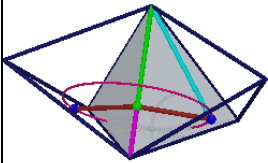
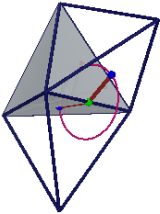
【研究結果 5】其總旋轉軌跡長會因不同繞法而有不同結果，故其圖片為示意圖，這是其中一種轉動路徑:1→2→6→4→5→3→1

2.探討正四面體立體一筆畫繞相同正多面體時，以多面體中不同旋轉點其對應之旋轉中心變化、對應旋轉半徑、及對應的旋轉軌跡形狀及對應旋轉軌跡長。

經研究後發現空間中旋轉軌跡與不同旋轉點對應之旋轉半徑有關，而不同對應旋轉半徑與對應之不同旋轉中心及旋轉角度有關，經分析後得到正四面體的旋轉半徑可以由以下方法求得：

下面所有圖形中藍點為起始和結束點，綠點為旋轉中心，而咖啡色的線段為旋轉半徑。

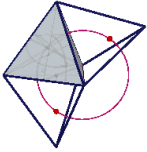
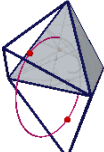
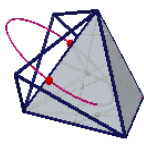
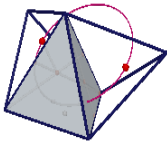
旋轉點	旋轉圖形	旋轉半徑求法步驟
內部中心		設灰線+綠線=r，藍線² = 紫線² + r^2 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + r^2, r = \frac{\sqrt{6}}{3} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ 設綠線為 x，$\left(\frac{\sqrt{6}}{3} - x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$，$x = \frac{\sqrt{6}}{12}$ 旋轉半徑² = $\left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$，可得旋轉半徑長為 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 【發現】旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{2}}{4} \times \text{邊長}$
邊上中點		紅色線段為正三角形的中垂線，紅線與咖啡線互為平行。因此綠線:綠線+紫線=旋轉半徑:紅線 $\frac{1}{2}:1 = \text{旋轉半徑}:\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{可得旋轉半徑為}\frac{\sqrt{3}}{4}$ 【發現】旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \text{邊長}$
頂點		由面三轉回面一時點並未轉動，因此長度為 0 【發現】旋轉半徑為 0
頂點		即為正四面體上正三角形的高($\frac{\sqrt{3}}{2}$) 【發現】旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{邊長}$
邊上中點		另一圖之紫線為正四面體，由圖得旋轉半徑為正四面體邊長的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍，可得 旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【發現】旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \text{邊長}$ 

面上中心		因為藍點和綠點在同一平面上，因此綠線:紫線=2:1，綠線= $\frac{2}{3}$ ，紫線= $\frac{1}{3}$ ，藍線 ² = 綠線 ² + 旋轉半徑 ² $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \text{旋轉半徑}^2$ ，可得旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 【發現】 旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{2}}{3} \times \text{邊長}$
面上中心		因藍點為面上重心，其到點距離為到邊的 2 倍，而重心是三中線的交點，正三角形的中線也是其高，長度為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，可得旋轉半徑長為 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 【發現】 旋轉半徑為 $\frac{\sqrt{3}}{6} \times \text{邊長}$

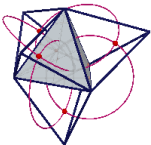
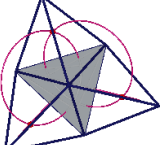
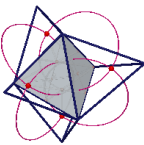
接下來探討正四面體旋轉點不同時其旋轉的軌跡為何？

(1)旋轉點為「正四面體中心」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】 發現旋轉點為「正四面體中心」時其旋轉步驟如下：

步驟	1	2	3	4
步驟圖				

【研究結果 2】 總軌跡圖如下：

正視圖	俯視圖	斜視圖
		

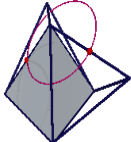
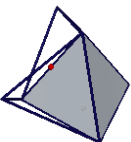
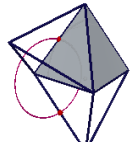
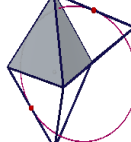
【研究結果 3】 旋轉角度 $\approx 218^\circ 14'$

【研究結果 4】 對應上面所求之旋轉半徑，可得其總軌跡長為 $\frac{11\sqrt{2}}{36} \pi$

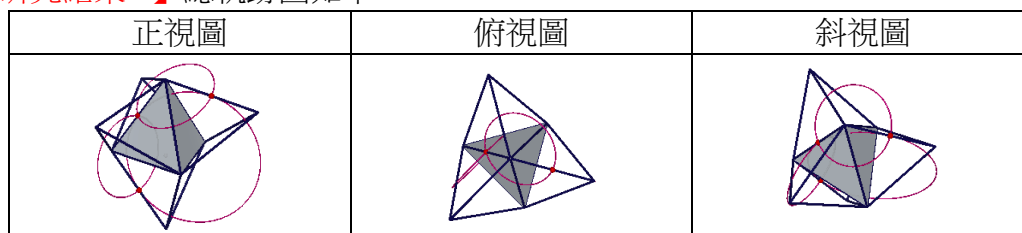
【研究結果 5】 因不會有點在旋轉軸上的因素，而不會出現旋轉而沒有軌跡的狀況，因此不同繞法不會對總軌跡有影響。

(2)旋轉點為「正四面體邊上中點」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】 發現旋轉點為「正四面體邊上中點」時其旋轉步驟如下：

步驟	1	2	3	4
步驟圖				

【研究結果 2】總軌跡圖如下：



【研究結果 3】旋轉角度 $\approx 218^{\circ}14'$

【研究結果 4】對應上面所求之旋轉半徑，

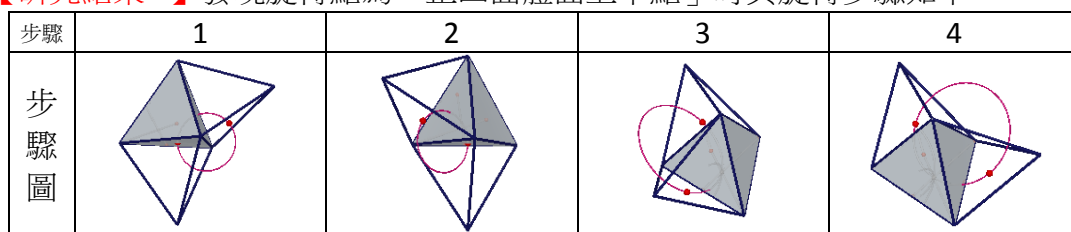
$$\text{可得其總軌跡長為 } \frac{11}{9}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{11(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{18}\pi$$

【研究結果 5】旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

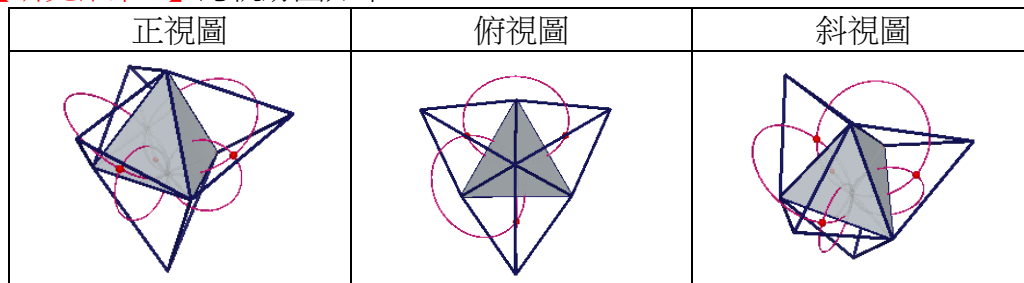
其總旋轉軌跡長會因不同繞法而有不同結果，故其圖片為示意圖
這是其中一種轉動路徑：1→2→3→4→1

(3) 旋轉點為「正四面體面上中點」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正四面體面上中點」時其旋轉步驟如下：



【研究結果 2】總軌跡圖如下：



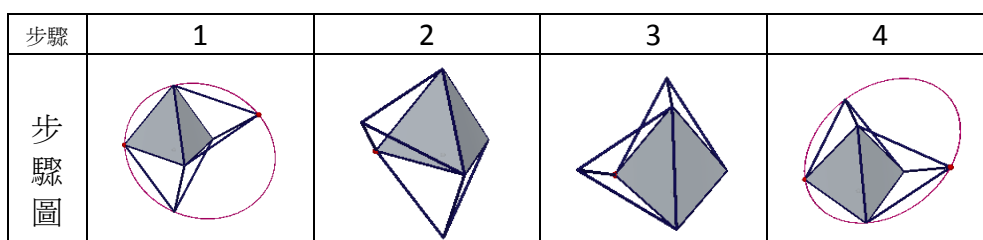
【研究結果 3】旋轉角度 $\approx 218^{\circ}14'$

【研究結果 4】對應上面所求之旋轉半徑，可得其總軌跡長為 $\frac{11(2\sqrt{2} + \sqrt{3})}{27}\pi$

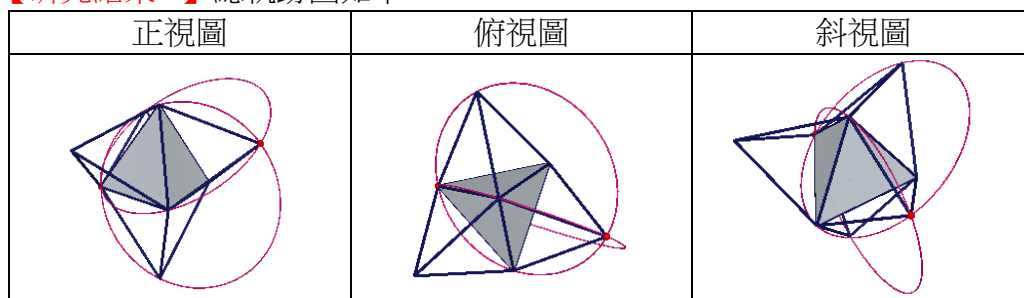
【研究結果 5】因不會有點在旋轉軸上的因素，而不會出現旋轉而沒有軌跡的狀況，因此不同繞法不會對總軌跡有影響。

(4) 旋轉點為「正四面體頂點」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正四面體頂點」時其旋轉步驟如下：



【研究結果 2】總軌跡圖如下：



【研究結果 3】旋轉角度 $\approx 218^{\circ}14'$

【研究結果 4】對應上面所求之旋轉半徑，可得其總軌跡長為 $\frac{11\sqrt{3}}{9}\pi$

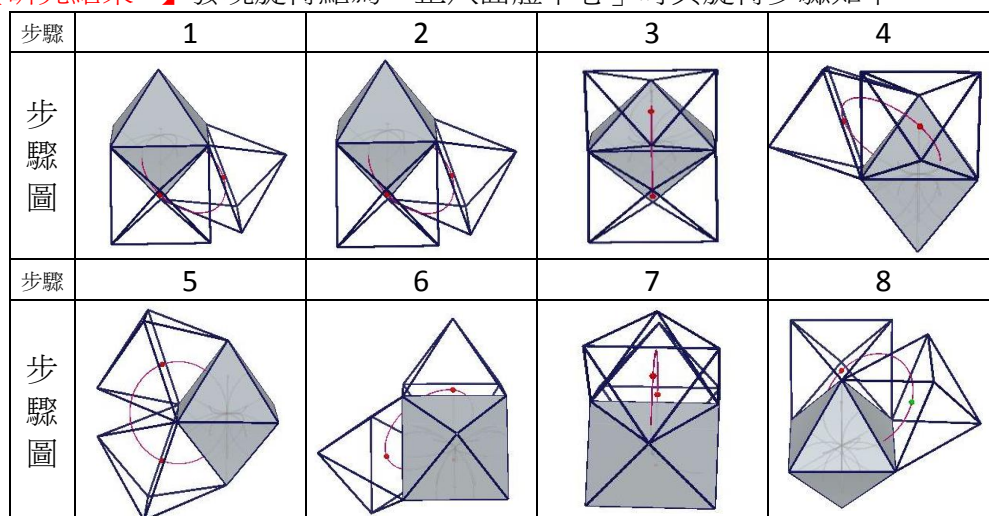
【研究結果 5】其總旋轉軌跡長會因不同繞法而有不同結果，故其圖片為示意圖

3.探討正八面體立體一筆畫繞相同正多面體時，以多面體中不同旋轉點其對應之旋轉中心變化、對應旋轉半徑、及對應的旋轉軌跡形狀及對應旋轉軌跡長。

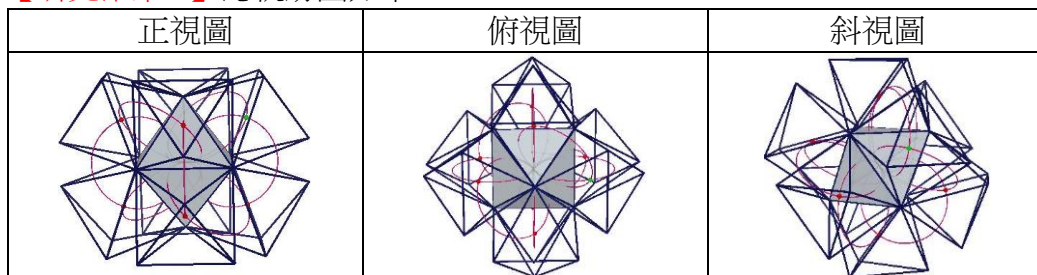
接下來探討正八面體旋轉點不同時其旋轉的軌跡為何？

(1)旋轉點為「正八面體中心」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正八面體中心」時其旋轉步驟如下：



【研究結果 2】總軌跡圖如下：



【研究結果 3】旋轉角度為 $360^{\circ} - 2 \left[\cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) \right] \approx 360^{\circ} - 2 \times 109^{\circ}28' \approx 141^{\circ}4'$

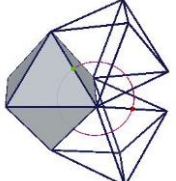
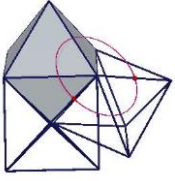
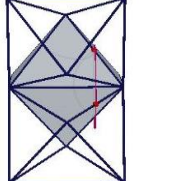
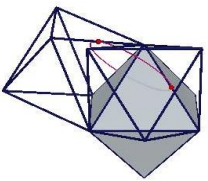
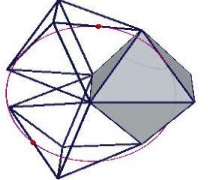
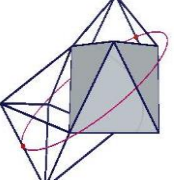
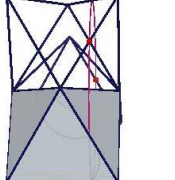
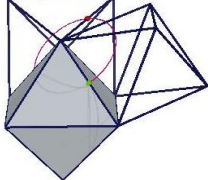
【研究結果 4】對應上面所求之旋轉半徑，可得其總軌跡長如正四面體及正六面體之求法雷同，但因內容更龐大複雜，請詳見手稿說明。

【研究結果 5】因不會有點在旋轉軸上的因素，而不會出現旋轉而沒有軌跡的狀況，因此不同繞法不會對總軌跡有影響。

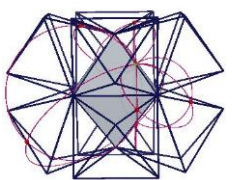
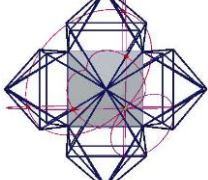
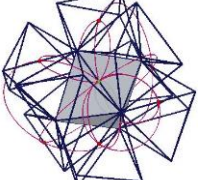
●以下其他研究及正十二面體和正二十面體之研究結果 4，5 皆可以此類推，因版面有限不再重複。

(2)旋轉點為「正八面體邊上中點」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正八面體邊上中點」時其旋轉步驟如下：

步驟	1	2	3	4
步驟圖				
步驟	5	6	7	8
步驟圖				

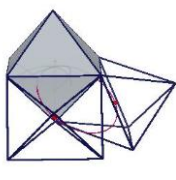
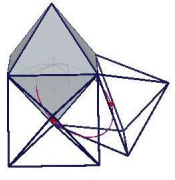
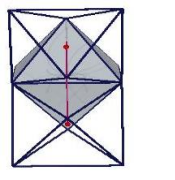
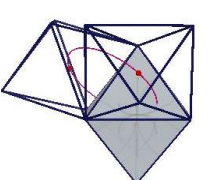
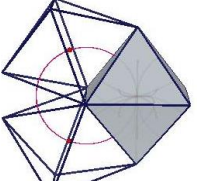
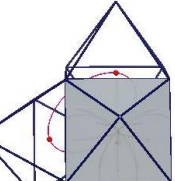
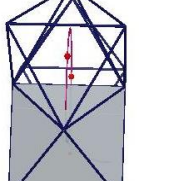
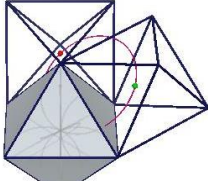
【研究結果 2】總軌跡圖如下：

正視圖	俯視圖	斜視圖
		

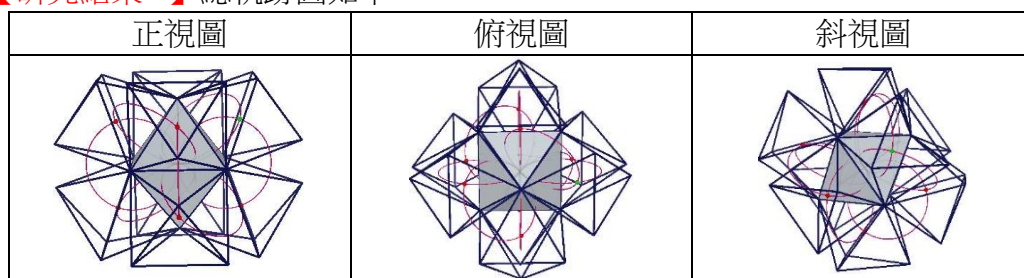
【研究結果 3】旋轉角度 $\approx 141^\circ 4'$

(3)旋轉點為「正八面體面上中點」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正八面體面上中點」時其旋轉步驟如下：

步驟	1	2	3	4
步驟圖				
步驟	5	6	7	8
步驟圖				

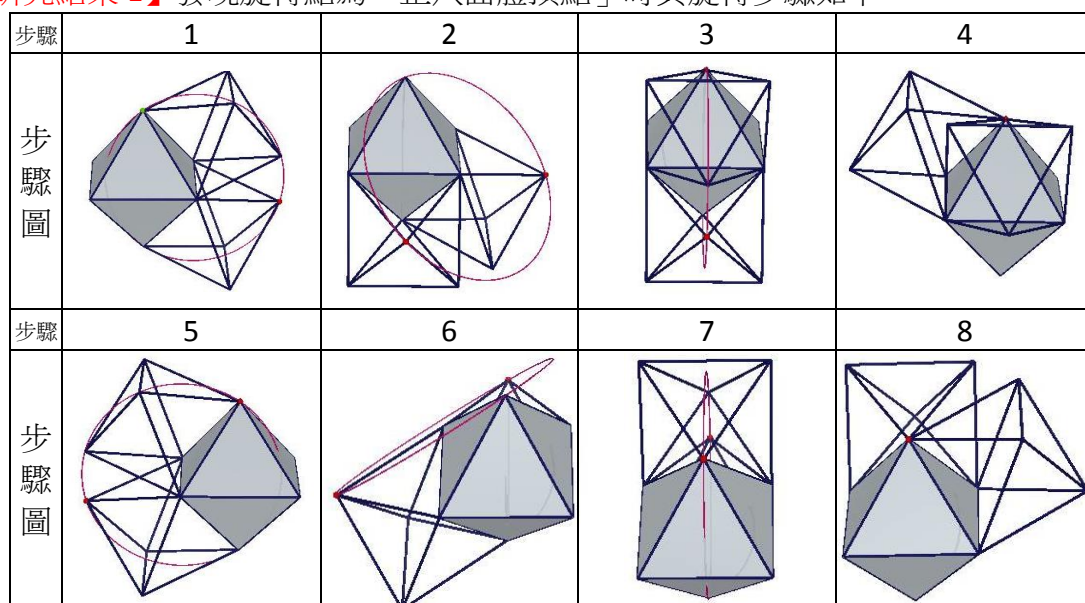
【研究結果 2】總軌跡圖如下：



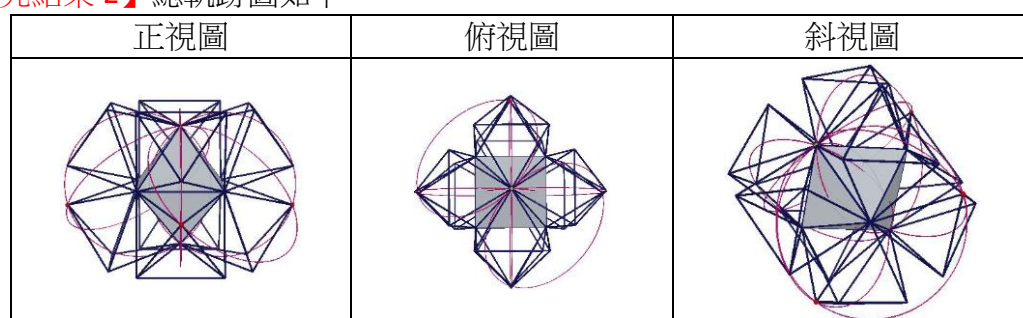
【研究結果 3】旋轉角度 $\approx 141^{\circ}4'$

(4)旋轉點為「正八面體頂點」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正八面體頂點」時其旋轉步驟如下：



【研究結果 2】總軌跡圖如下：



【研究結果 3】旋轉角度 $\approx 141^{\circ}4'$

4.探討正十二面體立體一筆畫繞相同正多面體時，以多面體中不同旋轉點其對應之旋轉中心變化、對應旋轉半徑、及對應的旋轉軌跡形狀及對應旋轉軌跡長。

接下來探討正十二面體旋轉點不同時其旋轉的軌跡為何？

(1)旋轉點為「正十二面體中心」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正十二面體中心」時其旋轉步驟如下：

步驟	1	2	3	4
步驟圖				
步驟	5	6	7	8
步驟圖				
步驟	9	10	11	12
步驟圖				

【研究結果 2】總軌跡圖如下：

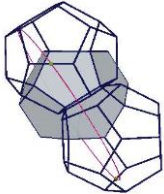
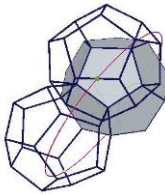
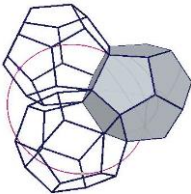
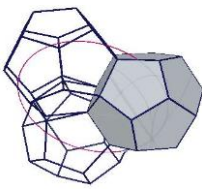
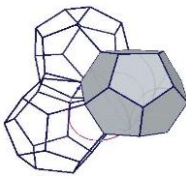
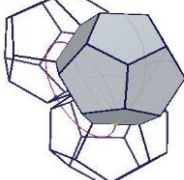
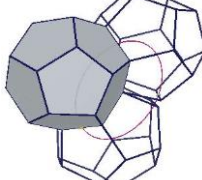
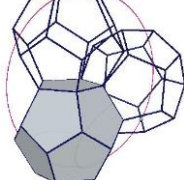
正視圖	俯視圖	斜視圖

【研究結果 3】旋轉角度為 $360^\circ - 2 \left[\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right] \approx 360^\circ - 2 \times 116^\circ 57' \approx 126^\circ 6'$

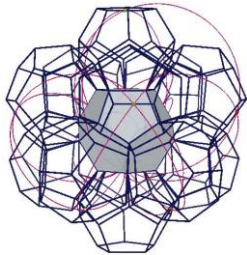
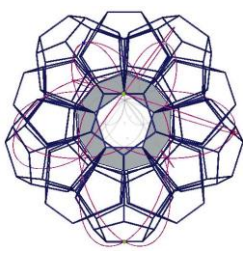
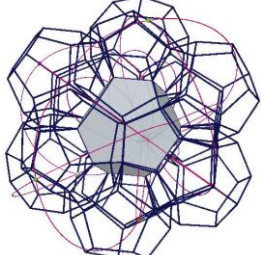
(2)旋轉點為「正十二面體邊上中點」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正十二面體邊上中點」時其旋轉步驟如下：

步驟	1	2	3	4
步驟圖				

步驟	5	6	7	8
步驟圖				
步驟	9	10	11	12
步驟圖				

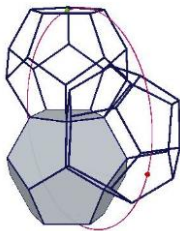
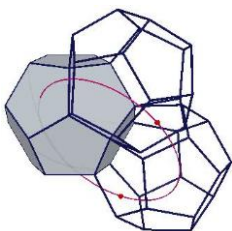
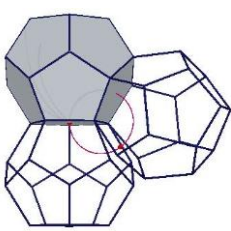
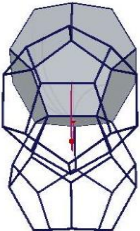
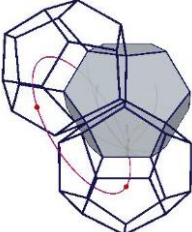
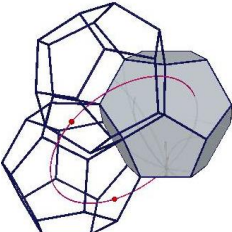
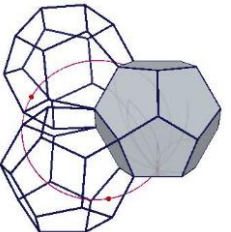
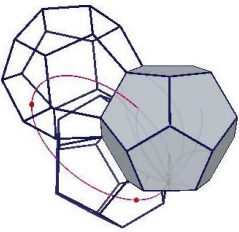
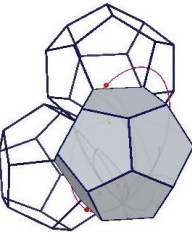
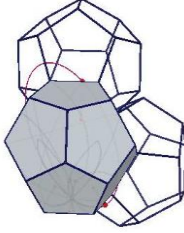
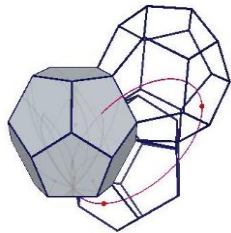
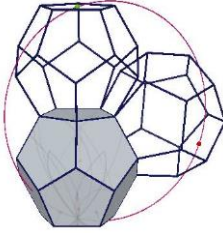
【研究結果 2】總軌跡圖如下：

正視圖	俯視圖	斜視圖
		

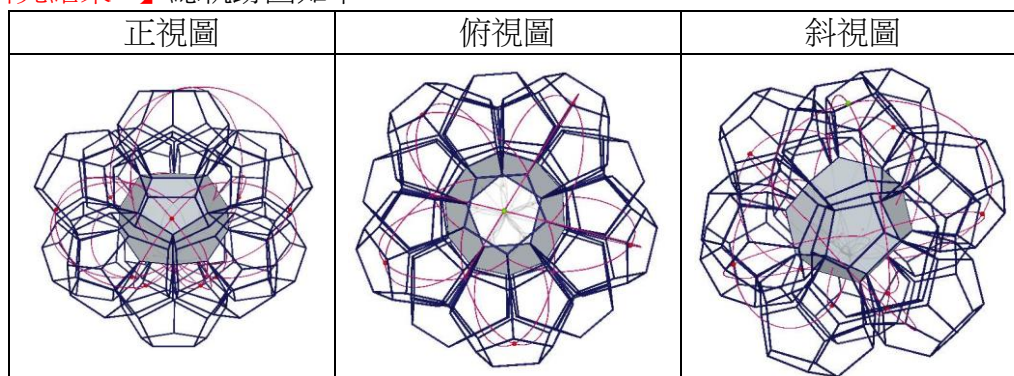
【研究結果 3】旋轉角度 $\approx 126^{\circ}6'$

(3)旋轉點為「正十二面體面上中點」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正十二面體面上中點」時其旋轉步驟如下：

步驟	1	2	3	4
步驟圖				
步驟	5	6	7	8
步驟圖				
步驟	9	10	11	12
步驟圖				

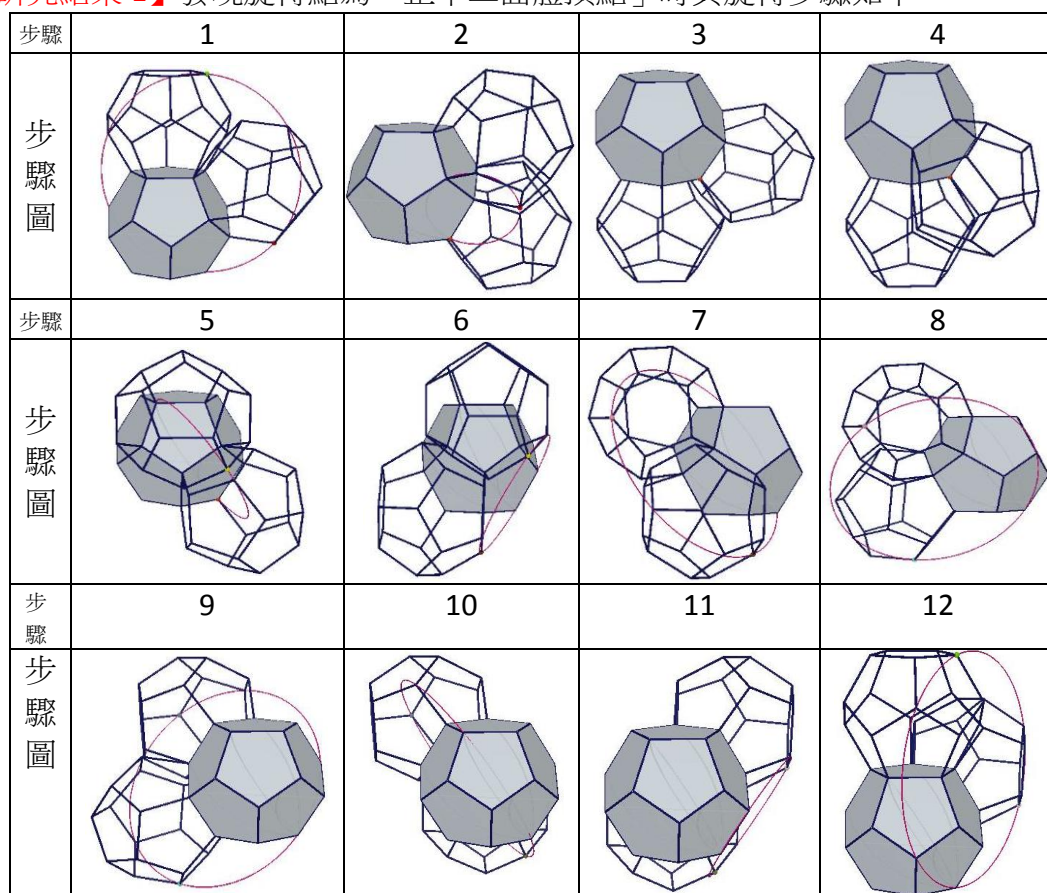
【研究結果 2】總軌跡圖如下：



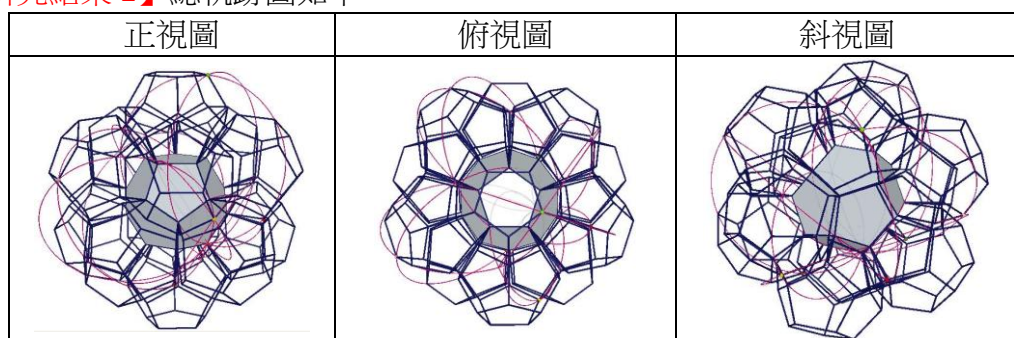
【研究結果 3】旋轉角度 $\approx 126^{\circ}6'$

(4) 旋轉點為「正十二面體頂點」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正十二面體頂點」時其旋轉步驟如下：



【研究結果 2】總軌跡圖如下：



【研究結果 3】旋轉角度 $\approx 126^{\circ}6'$

5.探討正二十面體立體一筆畫繞相同正多面體時，以多面體中不同旋轉點其對應之旋轉中心變化、對應旋轉半徑、及對應的旋轉軌跡形狀及對應旋轉軌跡長。

接下來探討正二十面體旋轉點不同時其旋轉的軌跡為何？

(1)旋轉點為「正二十面體頂點」時，探討旋轉步驟及其旋轉中心、旋轉半徑、旋轉軌跡長

【研究結果 1】發現旋轉點為「正二十面體頂點」時其旋轉步驟如下：

步驟	1	2	3	4
步驟圖				
步驟	5	6	7	8
步驟圖				
步驟	9	10	11	12
步驟圖				
步驟	13	14	15	16
步驟圖				
步驟	17	18	19	20
步驟圖				

【研究結果 2】總軌跡圖如下：

正視圖	俯視圖	斜視圖

【研究結果 3】旋轉角度為 $360^\circ - 2 \left[\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{5}}{3} \right) \right] \approx 360^\circ - 2 \times 138^\circ 19' \approx 83^\circ 22'$

●其他總軌跡圖形及相關研究結果因版面有限請詳見手稿。

(二)探討正多面體立體一筆畫繞不同正多面體時，以多面體中不同旋轉點其對應之旋轉中心變化、對應旋轉半徑、及對應的旋轉軌跡形狀及對應旋轉軌跡長。

首先，我們先找出其**旋轉角度公式**

假設正 m 面體繞正 n 面體，正 m 面體所對應之立體角度數為 α ，正 n 面體所對應之立體角度數為 β ，再根據【**兩面角公式引理**】可推得旋轉角度公式：

【**正多面體繞不同正多面體的旋轉角度公式**】

$$360^\circ - \left[\cos^{-1} \left(1 - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \right] - \left[\cos^{-1} \left(1 - \frac{1 - \cos \beta}{\sin^2 \beta} \right) \right]$$

故推得旋轉角度為

$$\textcircled{1} \text{ 正四繞正八面體： } 360^\circ - \left[\cos^{-1} \left(1 - \frac{1 - \cos 60^\circ}{\sin^2 60^\circ} \right) \right] - \left[\cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) \right] \approx 179^\circ 39'$$

$$\text{正八繞正四面體： } 360^\circ - \left[\cos^{-1} \left(1 - \frac{1 - \cos 60^\circ}{\sin^2 60^\circ} \right) \right] - \left[\cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) \right] \approx 179^\circ 39'$$

$$\textcircled{2} \text{ 正四繞正二十面體： } 360^\circ - \left[\cos^{-1} \left(1 - \frac{1 - \cos 60^\circ}{\sin^2 60^\circ} \right) \right] - \left[\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right]$$

$$\text{正二十繞正四面體： } 360^\circ - \left[\cos^{-1} \left(1 - \frac{1 - \cos 60^\circ}{\sin^2 60^\circ} \right) \right] - \left[\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right] \approx 150^\circ 48'$$

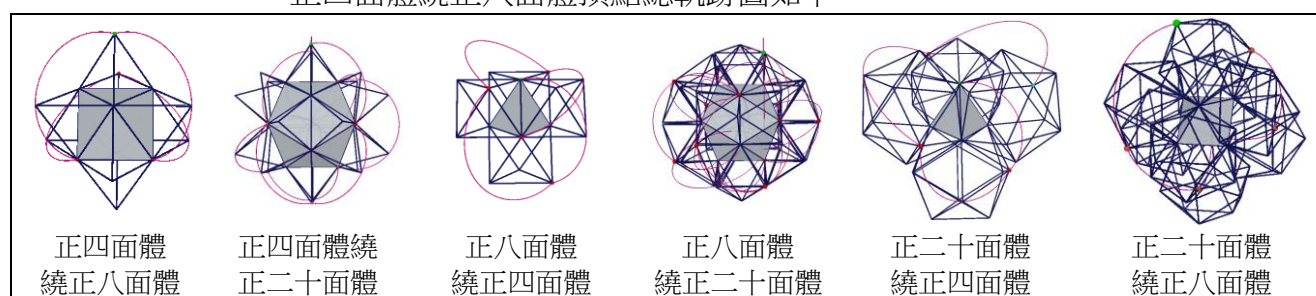
$$\textcircled{3} \text{ 正八繞正二十面體： } 360^\circ - \left[\cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) \right] - \left[\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right] \approx 112^\circ 13'$$

$$\text{正八繞正二十面體： } 360^\circ - \left[\cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) \right] - \left[\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right] \approx 112^\circ 13'$$

接下來，因版面有限，僅列出正四面體繞正八面體各種旋轉半徑及頂點總軌跡圖，其餘結果詳見手稿：

旋轉點	內部中心	面上中心	面上中心	頂點	頂點	邊上中點	邊上中點	邊上中點
軌跡圖								
旋轉半徑	$\frac{\sqrt{2}}{4} \times \text{邊長}$	$\frac{\sqrt{3}}{6} \times \text{邊長}$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \times \text{邊長}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{邊長}$	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \text{邊長}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \text{邊長}$

正四面體繞正八面體頂點總軌跡圖如下：



陸、討論：

一、探討為何多面體可互繞或不可互繞的原因。

(一) 探討為何凹多面體都不可互繞，而凸多面體皆可互繞

【理由】這是因為兩個凹面體的凹面無法接觸，若凹面體的凸面和凹面接觸，將無法繼續繞下去。

(二) 探討為何 5 種正多面體當其面為相同正多邊形組成時可以互繞

【理由】因為每種正多面體的面皆為正多邊形，其角度皆相同，故都可以互繞。

二、證明相同正多面體繞正多面體時為何可「立體一筆畫」。

到底如何確定立體一筆畫的正確性？我們試從平面的一筆畫去思考，一般而言將平面圖中所有的點分成奇點及偶點。

【引理】平面可一筆畫之條件：1.若一個圖中所有頂點皆為偶點，則可一筆畫。

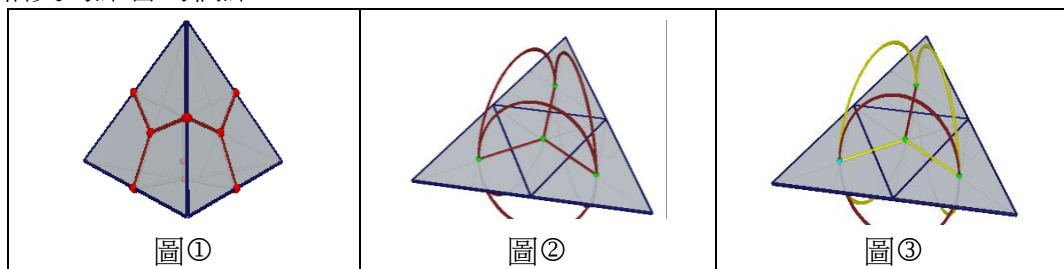
2.若一個圖中存在超過兩個奇點，則無法一筆畫。

(一)證明相同正多面體繞正多面體時可「立體一筆畫」。

【證明】將每個面中心點(代表那一個面)與相鄰面的中心點連接，再將多面體展開，發現依據我們對立體一筆畫的定義，所有相交點皆為偶頂點，故可立體一筆畫。

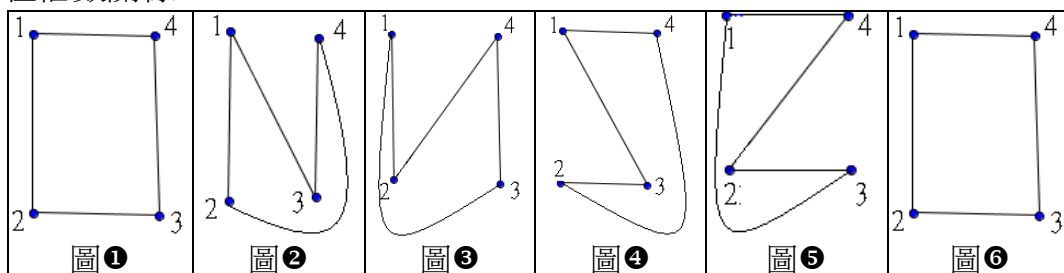
【舉例】以正四面體面上中心為例，首先先將點與其他可能連接的三個點連接起來，再將此面體展開。根據我們對立體一筆畫的定義，起始點一開始會先繞出而最後會繞回而其餘的點則是會先被繞進然後繞出，因此每個點必定只為被兩線相交的點被兩線相交的點。故只要像圖③以藍點為起始點，黃線為所繞的方向，製造出使所有點為被兩線相交的點，發現所有被兩線相交的點皆為偶點，故可立體一筆畫。

圖①②③④⑤⑥為正四面體所有繞法奇偶點的示意圖，由下頁圖中可看出所有相交的點皆為偶點。



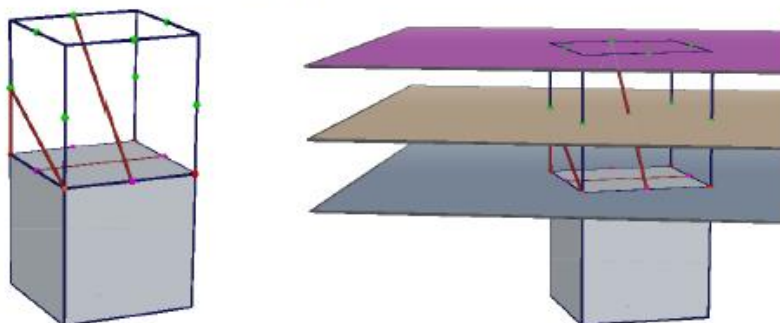
(二)證明不同正多面體繞正多面體之繞法種類數與平面多邊形種類數求法的相關性。

我們可將正多面體的面看作平面多邊形的邊，而正多面體面數即為平面多邊形的邊數，發現不同正多面體互繞和平面多邊形互繞一樣，存在倍數關係。



三、探討旋轉半徑種類之快速求法。

以正六面體的邊上中點為例：



先把所有的邊上中點標示出來，而正六面體在繞一次時有三種選擇，將所有的邊上中點套入三種狀況時即代表所有可能的旋轉半徑。綠點是邊上中點紅點是可能的旋轉中心，紫點既是邊上中點也是可能的旋轉中心。

又此為對稱的立體圖形，發現在同一平面上，其中一點所有可能的半徑種類及長度都和其他三點相同。因此只要將正六面體分成三層平面，各取一點來做出其可能的半徑種類及長度後再比對是否有長度重複者，即可求出正六面體邊上中點的所有旋轉半徑種類為 5 種。其他點及其他正多面體皆可適用於此方法。

柒、結論：

一、針對研究一探討八十種均勻多面體其是否可以互繞，其可互繞之多面體種類及其特性，發現：

(一)80 種多面體中所有凹多面體都不可互繞，而凸多面體皆可互繞。

(二)均勻多面體，只要其是由同種類多邊形組成，就可以互繞。

二、針對研究二探討均勻多面體互繞時，是否可立體一筆畫，發現：若組成相同之多邊形種類數成相同整數倍時可立體一筆畫互繞。

三、針對研究三探討正多面體立體一筆畫時，其繞法種類為何，發現：

(一)相同正多面體繞正多面體時，繞法種類正四面體為 6 種；正六面體為 32 種；正八面體為 12 種；正十二面體為 640 種；正二十面體為 30 種。

(二)不同正多面體繞正多面體時，繞法種類正四繞正八面體 12 種；正四繞正二十面體 42 種；正八繞正四面體 6 種；正八繞正二十面體 42 種；正二十繞正四面體 6 種；正二十繞正八面體 6 種。

三、針對研究四探討正多面體立體一筆畫繞相同及不同正多面體時，以多面體中不同旋轉點其對應之旋轉中心變化、對應旋轉半徑、及對應的旋轉軌跡形狀及對應旋轉軌跡長，發現正多面體立體一筆畫繞相同正多面體時：

(一) 正 m 繞正 n 面體旋轉角度公式為 $360^\circ - \left[\cos^{-1} \left(1 - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \right] - \left[\cos^{-1} \left(1 - \frac{1 - \cos \beta}{\sin^2 \beta} \right) \right]$

旋轉之正多面體旋轉角度之近似值分別為

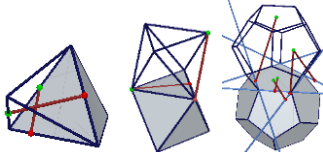
4 繞 4	6 繞 6	8 繞 8	12 繞 12	20 繞 20	4 繞 8	8 繞 4	4 繞 20	20 繞 4	8 繞 20	20 繞 8
218°14'	180°	141°4'	126°6'	83°22'	179°39'		150°48'		112°13'	

(二)以多面體中不同旋轉點其對應旋轉中心的做法為：起始點和旋轉軸做垂直線，或是結束點和旋轉軸做垂直線，所得的交點。

(三)旋轉軌跡長：對應的旋轉軌跡長公式為： $2 \times \text{旋轉半徑長} \times \pi \times \frac{\text{旋轉角度}}{360}$ 。

(四)對應旋轉半徑的做法為作通過該多面體之旋轉中心與起始點且垂直旋轉軸的

切面，接著再將切面上起始點的位置與旋轉中心作連線，該線段即為旋轉半徑。而旋轉半徑種類對應如下：

正多面體	旋轉點種類	對應旋轉半徑種類	正多面體	旋轉點種類	對應旋轉半徑種類
正六面體繞 正六面體	內部中心	1	正四面體繞 正八面體	內部中心	1
	邊上中點	5		邊上中點	3
	面上中心	3		面上中心	2
	頂點	3		頂點	2
正四面體繞 正四面體	內部中心	1	正四面體繞 正二十面體	內部中心	1
	邊上中點	3		邊上中點	3
	面上中心	2		面上中心	2
	頂點	2		頂點	2
正八面體繞 正八面體	內部中心	1	正八面體繞 正四面體	內部中心	1
	邊上中點	5		邊上中點	5
	面上中心	3		面上中心	3
	頂點	3		頂點	3
正十二面體繞 正十二面體	內部中心	1	正八面體繞 正二十面體	內部中心	1
	邊上中點	9		邊上中點	5
	面上中心	5		面上中心	3
	頂點	7		頂點	3
正二十面體繞 正二十面體	內部中心	1	正二十面體繞 正四面體	內部中心	1
	邊上中點	9		邊上中點	9
	面上中心	7		面上中心	7
	頂點	5		頂點	5
			正二十面體繞 正八面體	內部中心	1
				邊上中點	9
				面上中心	7
				頂點	5

捌、應用：

為改善現有演唱會或 KTV 固定不動、甚至只有一種旋轉方式的燈光設計(如下圖)，可採用本研究結果，先將正多面體的各個面塗上各種不同顏色，如此只要在正多面體的內部裝上一個光源，便可以達到多種色光的絢麗效果。接著再以正多面體繞正多面體的方式，並搭配以不同種的繞法，便可以達到更令人驚艷的視覺效果。例如：若使用正十二面體的設計，就可以有多達 640 種的變化。



另外，利用本研究不同種多面體進行互繞繞法種類及兩面角之研究結果可應用至特殊面體組成的建築物，例如構造如富勒烯之建築，將一可用來繞建築物面之多面體進行太陽能板安裝，接著，在建築物表面隨著太陽的位置改變轉動，並利用無線充電技術將電能導入建築物中，當多面體的面數越多時，兩面角角度就越大，同

時旋轉角度也會變小，做為繞與被繞的基體，以接近球體的類球狀多面體為架構最佳，不但可以節省能源，還可更精確的隨太陽光角度的變化進行調整。



玖、參考資料：

- 1.正多面體—維基百科
<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94>
- 2.溫家宜、許峻彰(2010)。架構「類球狀多面體」的理論與實務。2010 年臺灣國際科學展覽會數學科大會獎三等獎作品。
<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2010/pdf/010037.pdf>
- 3.陳秋語、王麗珍、陳怡如(2004)。迷宮的十字路口——筆畫探密。中華民國第四十四屆中小學科學展覽會高中組數學科作品說明書。
<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/44/E/040416.pdf>
- 4.薛丞洋、張聿民、陳思罕、劉恩權(2006)。滾滾紅成。中華民國第四十六屆中小學科學展覽會國中組數學科第三名暨最佳創意獎作品說明書。
<file:///C:/Documents%20and%20Settings/user/My%20Documents/Downloads/95024.pdf>

【評語】 030419

本研究透過兩面角公式求得正多面體繞正多面體旋轉角度與旋轉軌跡長，並巧妙運用 Cabri 3D 清楚展示多面體繞多面體的軌跡圖形，生動有趣。團隊於報告過程中亦展現出良好的科學態度，值得鼓勵。