中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

030418

智力環

學校名稱：臺中市立大甲國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃千祐	王俊祺

關鍵詞：扭結、拓樸學、群論

摘　要

智力環是中國古老的童玩，是前人智慧的累積，已經發展了許多複雜的結構。我在一次偶然的機會之下，接觸了這個有趣的玩意，也發現了他的結構和解法與數學有關。於是我藉著這次的科展，研究這個主題，試著找出他的規則，看看是否可以用數學語言來描述。

在研究過程中，我蒐集了許多市面上常見的智力環，也研究了許多書本上有關的文章。在偶然的機會下，我去鹿港玩，又蒐集到更多不同的智力環。之後我開始討論智力環的結構，並加以分類，再來我研究了一些有關拓樸的書，藉由拓樸的知識可以更加清楚的描述有關扣環的結構。

最後，我歸納出巧環的一些基本原則，並且利用這些基本原則發明了幾個巧環。並提出了幾個實用性的應用。

壹、 研究動機

有一天我看見妹妹在玩智力環，我在旁邊看，看得頭昏腦脹的，於是我便和妹妹借來玩。

一開始我覺得要將兩個鐵環分開根本就不可能，因為怎麼看怎麼轉都解不開，於是我就亂甩，沒想到我就解開了，因為這個巧合開啟了我對智力環的好奇，便買了幾個來玩，但我一直搞不清楚這是什麼原理。我想找出一些淺顯易懂的方式來了解智力環。

貳、 研究目的

1. 從網路上尋找智力環的解法和相關原理。
2. 統整歸納出智力環的種類，並且找出類似種類的類似解法。
3. 把智力環改造和延伸。
4. 利用類似原理發明出類似智力環。

參、 研究設備與器材

紙、筆、相機、智力環、相關性質

肆、 研究過程及方法

一、 研究的重點提示：

針對智力環原理，我先從網路上找了智力環的原理和資料，我了解到智力環有空間和平面的交錯感覺，所以在破解智力環的過程常常會被騙，於是我針對這個方法做了一系列的研究：

首先，我把智力環分門歸類。

再來，找出類似智力環的類似性質。因為這些性質跟拓樸學有關，因此我計畫利用拓樸的分類方式。

除了數學的分類方式，智力環還有許多物理性質的應用，這一點也是我研究的重點。

二、 拓樸學的方法：

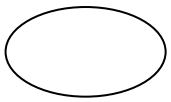
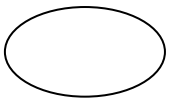
拓樸學是探討點集定性的問題。智力環是由軟質的繩、剛性的環所構成，所以他不全然可以用拓樸學的方法來處理，但拓樸學提供了最底層的探討，先將物理特性抽離，便可將智力環作初步分類，分類後再還原物理的剛性，因此可以變換出許多不同的花樣。

處理智力環問題，首先想到的就是繩結的結構和分類。繩結的結構和分類，已經發展了很久一段時間，但卻還沒有統一的理論來解決它，只能針對個別繩結，用不變量(扭結不變量)來討論。

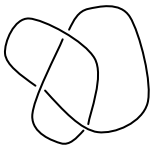
除此之外，智力環和扭結理論還存在許多不同面向，除了物理特性外，智力環一定可以被打開，所以他一定是不能被扭結住(knoted)的那一類，這跟紐結理論探討的是否背道而馳？所幸，物理特性正好提供這方面的連結，例如，因為鐵環的剛性和方向性，所以造成智力環被扭結住，而正巧這是扭結理論要討論的課題。

因此，我研究了一些扭結的理論。要如何分辯兩個繩結的不同？如果一個圓的繩結，不用剪斷再接的辦法，就可以將它擺在平面上如

同一圓，我們說它是不打結的「圓繩結」。同樣地，一個圓繩結，可不經破壞，變動成另一個圓繩結，我們就說這兩個結是等價的。意思是說，這兩個結其實是沒什麼不同的。

結 A  　　結 B 

接下來，出現了另一個繩結，如下圖的結 C，要如何說明結 C 與 A 的不同？

結 C 

在說明如何分別這兩個結之前，有一個地方必需先確認，就是線段為甚麼是封閉的問題；因為開放的繩結一定可以解開，那就沒有討論的必要了，因此扭結理論的繩結必定是封閉的。(這跟智力環有一些不同，我會在後面說明)

現在開始說明兩個繩結的分辯問題：

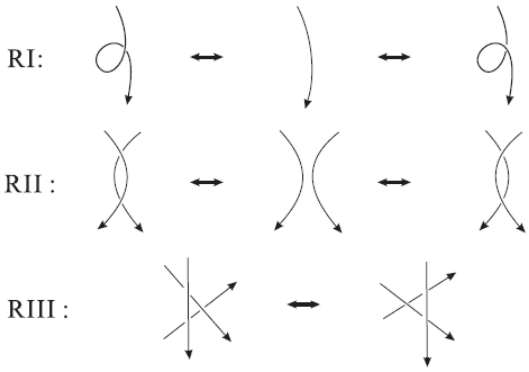
(1) 定義：

一個實數值函數，f:{R^3中之任何結} → R 稱作不變量，若且唯若，f 在任一結的同價類中取同一值。而一結 K 的同價類是由 K 歷經 R^3的運動所得出的所有結所成的集合。

這個定義乍看之下有點不知所云，要如何區分這些等價類呢？我們有以下的引理。

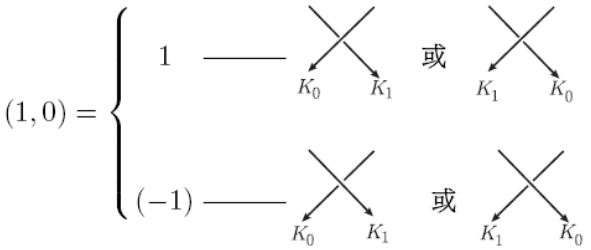
(2) 芮氏形變 (Reidemeister)：

上述定義中的函數 f 是不變量，若且唯若 f 在下面所列的三種運動下是不變的：



這個引理雖是清楚，但不夠具體，因此還需定義出不變量函數，才能用 Reidemeister 引理來檢驗。

(3) 鏈結數 (Gauss Linking number)



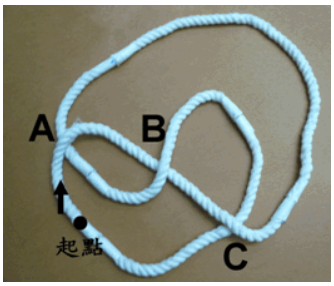
這個定義有很大的限制，它只能計算二分量的結，對三分量之結，並沒有意義。但它提供了第一個初等的方法來解釋不變量的問題，因為它完全滿足芮氏形變引理。

(4) 結的分類

結的理論非常深入廣泛，老師在這方面給我很多引導，讓我看了很多文獻，繩結的問題已經發展了很多種方法，例如解決 Gauss Linking number 發展出高階鏈結數、結群、Jones 多項式等等 …，但要完全理解，可能要花非常多的時間。為了避免問題失焦，我們決定只針對智力環出現的問題來解決。

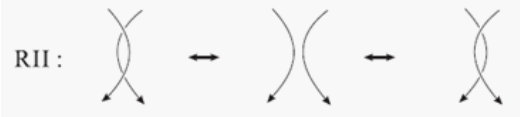
根據扭結不變量的定義，可以將繩結作以下的初步分類。首先，看有幾條分開的繩結，若是只用掉一條繩子是屬於比較簡單問題，只需要針對自己和自己有幾個交錯點便可完成分類(如上頁圖)。

需要注意的是，當單一繩結在進行穿越打結的時候，必須交錯穿越，以單 1 結 3 為例：

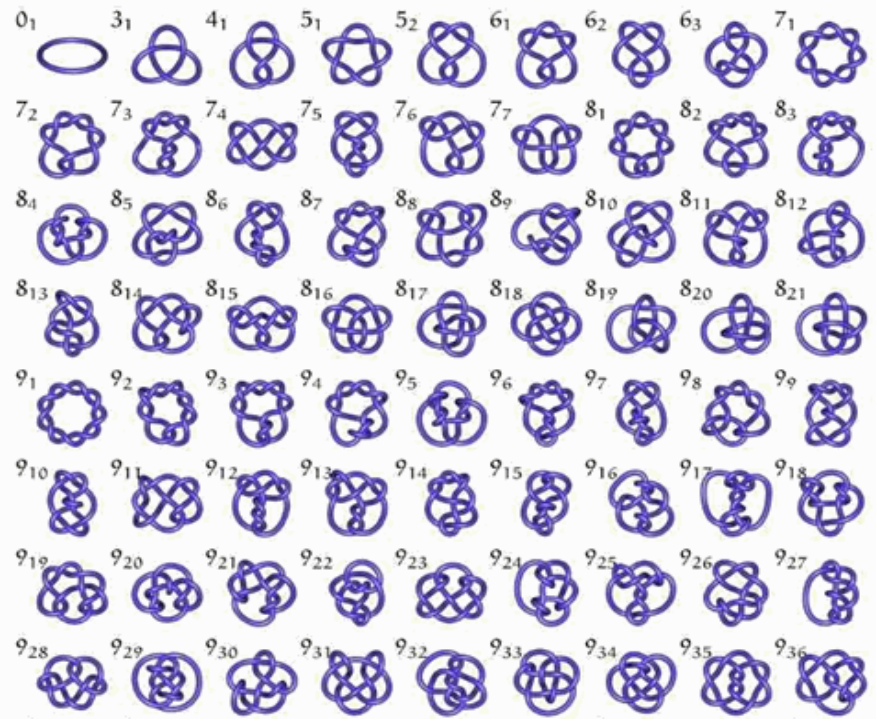


會有 A、B、C 三個穿越點，A 是上穿越，B 是下穿越則 C 一定是上穿越。因為芮氏形變定理告訴我們，如果

不交錯穿越則無法打結。

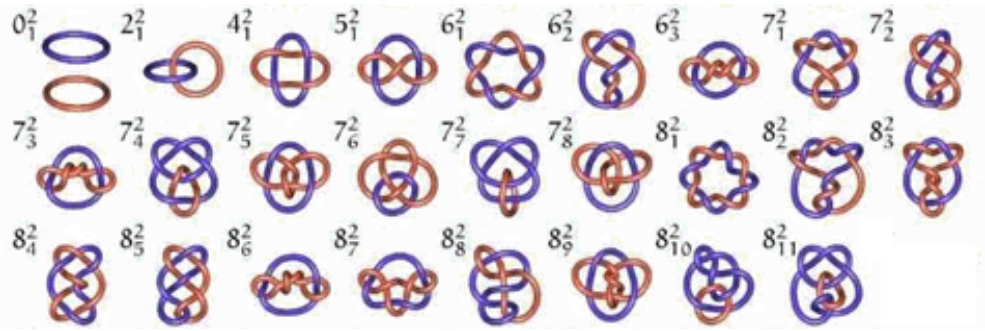


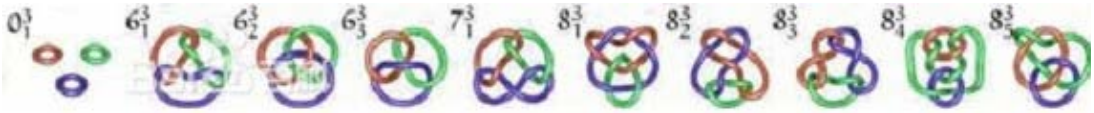
以下是蒐集來有關於單繩結分類的資料：



每個圖中數字較大的部分是指交錯的數量，右方較小的下標的數字是序號，我們可以看出單結 5 有 2 個，單結 6 有三個等等，以此類推。雖然繩結的分類龐大而繁雜，我們卻不用太擔心，因為智力環目前所用到的只是基本的幾個。為了釐清繩結的拓樸結構，我們也製作了一些模型，這些模型在往後的討論中也起了非常關鍵的作用。

接著我們研究雙繩結、三繩結甚至多個繩結的分類。





以上的圖形翻攝自維基百科，使用上圖的原因是因為他寫得很精簡，就智力環的初步拓樸分類中已經足夠了。(註 1)

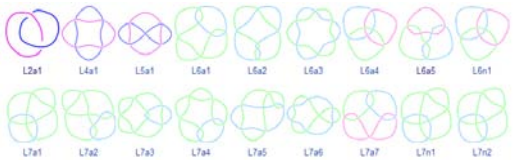
上面每個圖中右上角增加一個上標，代表是雙繩結或三繩結。雙繩結中，沒有結 1 和結 3，三繩結更特別從結 0 後就直接到結 6。研究智力環除了以上的分類外還會用到某兩種圖形的結合，例如：

$0^1 \quad + \quad 2^2_1 \quad \rightarrow \quad 6^3_3$

(註 1)另外我們有找到比台灣維基百科更專門網頁分類的方式：

The Thistlethwaite Link Table，The Thistlethwaite Link Table is a list of all prime links with up to 13 crossings, though we present here only the links with up to 11 crossings. Choose a collection below:
以 Links with up to 7 crossings: All (18) 為例

它的分類方式是把二環、三環等所有情形都放在一起討論，但總數是一致的。

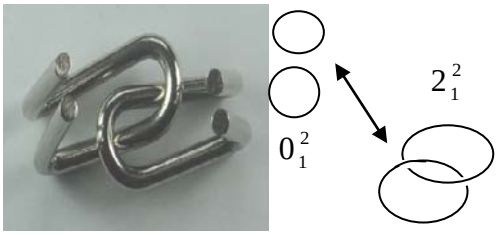


參考網址：http://katlas.math.toronto.edu/wiki/The_Thistlethwaite_Link_Table

三、　智力環的初級分類與研究：

我用數學繩結、拓樸的觀念對於智力環作初級分類，但因為物理因素，會增加解開的難度，我也會一併說明。

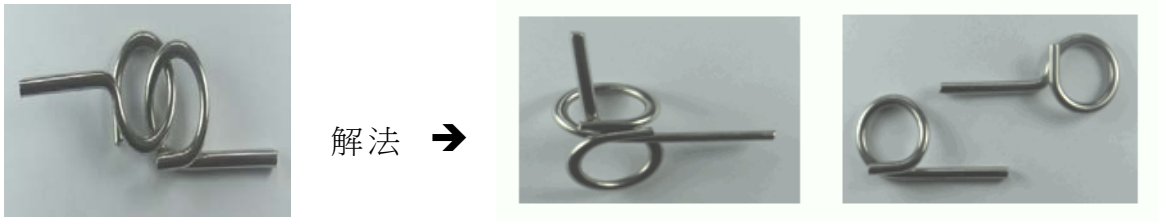
(1) 如下圖，這應該是最簡單的一類。就拓樸的結構而言，



是兩個相扣住的環，但每個環有一個出口，在兩個出口對接處是進出的通道，具有方向性。

A

解開的方法 ➔



解法 ➔

B

以下二個智力環是在書局買到的玩具。它們都和上面的圖形一樣屬於同一類。也就是說出口具有方向性。

解法 ➔

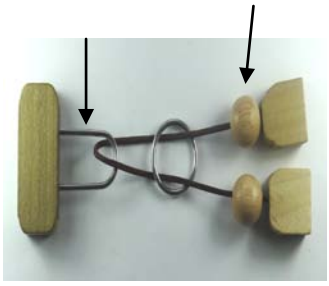
C

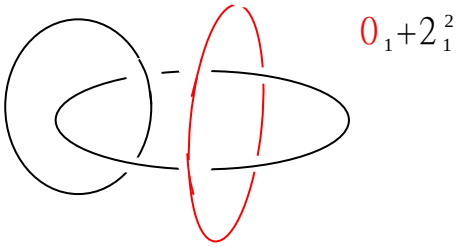
解法 ➔

D

這一類的智力環可以說非常簡單，但為數不少，看似個個不同卻都是同一種原理，環中除的套住部分的結構外，尾部的構造有它的原理，尾部構造可以使得智力環的解法受限，這種狀況在 C、D 圖形非常的明顯。

(2) 下面這一類的智力環稱為卸魚，這是我在鹿港買來的





E

(註 2)

在許多童玩的書上都有記載，用拓樸圖來看，是兩個扣住的環。因為，如上圖，右側箭頭所指的木球一定無法穿過最左邊那個木鐵環。但另一個一直都是游離的，重點在於中間的小鐵還能自由的穿過左邊的木鐵環，因此只要適度的改變環之間的位置便可將其取下。

解法 ➔

(註 2) 關於這個拓樸結構我們有必要在這裡詳加說明：拓樸的環都是扭結住的，以這個圖為例： 紅色的部分代表小鐵環，黑色的部分代表有木頭的鐵環和有木頭的繩結，很合理的我們必需假設拓樸圖是 $0_1+2_1^2$，但是真正的解法並不是將紅色的環往下拉就好，因為還要考慮鐵環的剛性結構。

如上圖，第一個步驟是將中間的鐵環置於左邊木鐵環木頭的底部，如箭頭所示；接著將最旁邊的木塊先穿過木鐵環，這時候只剩下這個木球無法通過木鐵環。第二個步驟是將鐵環順勢往下移動，再順著第二個圖箭頭的方向穿過木鐵環並繞過木球，便可將其取下。

下面兩個智力環是卸魚的變形，差別在物理學上的剛性結構，但解法卻非常的不同。

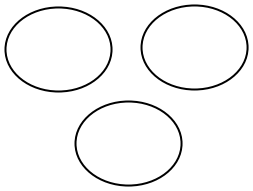
解法 ➔

F

F 型的重點在於小環必須移到心型的凹處，才能讓凸型鐵環有出來的空間。

G

拓樸圖 ➔

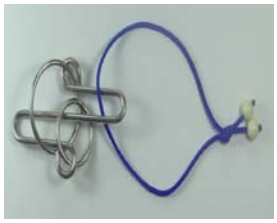


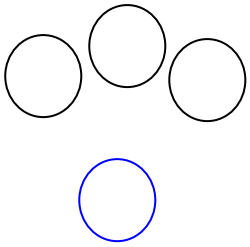
0^3_1

G 型智力環的拓樸圖形和卸魚不太一樣但可以看做 是卸魚的變型，原因是因為解法相同，必須將第一個洞的結順勢繞過第二個洞並穿過木球。

解法 ➔

H





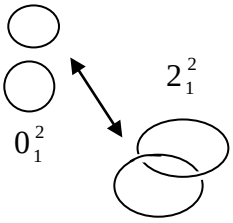
$0_1^3 + 0_1$

H 型從拓樸圖來看，是三個分開的鐵環，藍色的絲線只要找到正確的位置就能將其分離。

解法 ➔

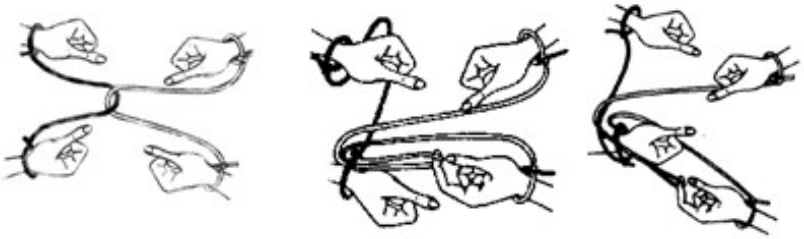
以上的解法讓我們想到另一個智力遊戲，常提供來當作魔術的場景：

I



兩人一組，依圖中先生與小姐的方式纏繞。試著將兩條繩子分開，但是不能解開繩結，也不可切斷繩子。

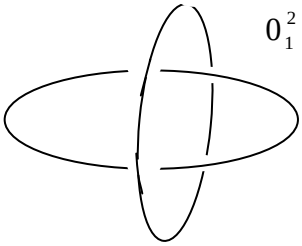
解法 ➔



用右手拿著綁住自己那條繩子的中間部分塞過對方右手腕那個繩套的空隙，然後再以左手將已塞過的部份拉出（圖二），並將這部分的繩圈，套過對方的右手腕(圖三)。最後，你只要用左右手將繩子一撐直，繩子就自然脫困而出了。

(3) 下面這一類的智力環稱為變形

J

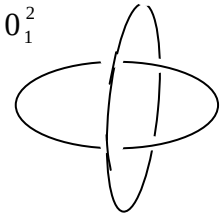


J 型用拓樸圖來看，是兩個分開的環，是靠物理的特性暫時扣住。從平面來看，暫時無法解開，但只要改變大環的位置就可以解開。

解法 ➔

這個解法也讓我們連想到另外一個數學智力遊戲：如下圖有一張只有一個一塊錢大小的紙，如何將十塊錢通過這張紙而不破壞這張紙。

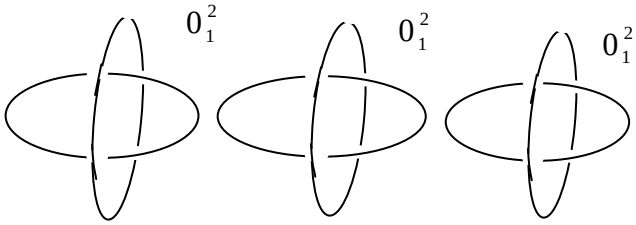
K



初看到這個問題，有看到不破壞紙一定覺得不可能，我們的解法入下圖：將紙對折後向洞的兩側拉開便可將十元。

其中紙會被折到
但不會被破壞。

L

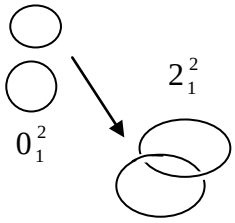


L 型從拓樸圖來看，是三組 J 型圖，而三個圖之間是用小環連結所以也沒有扣住，解法當然要用 J 型的解法。關鍵在於左側的兩個 U 型環必須疊在一起，右側的兩個 U 型環也必須疊在一起。

解法 ➔

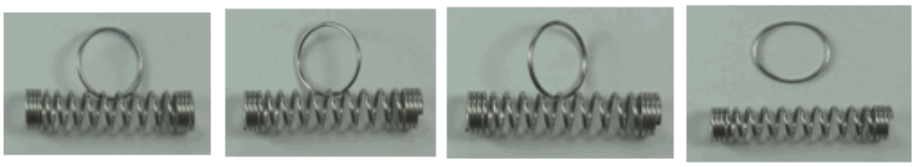
這個解法我們可以發現，解法難度的提升可以靠圖形的複雜度和增加程序性的難度。

M



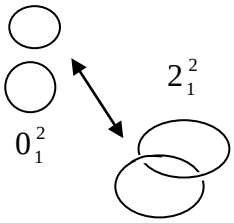
M 型從拓樸圖來看，是兩個分開的環，因為彈簧是半剛性的所以扣住的時候會給人打不開的感覺。事實上，只要扭轉小環的方向就可以扣住或分離開來。

解法 ➔



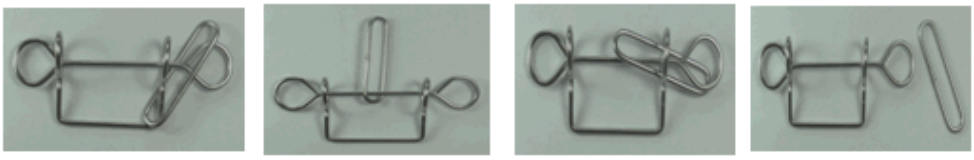
(4) 下面這一類的智力環稱為穿越

N

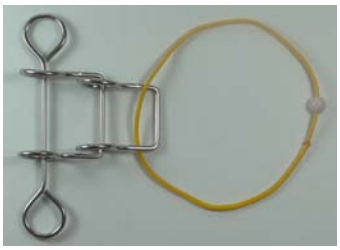


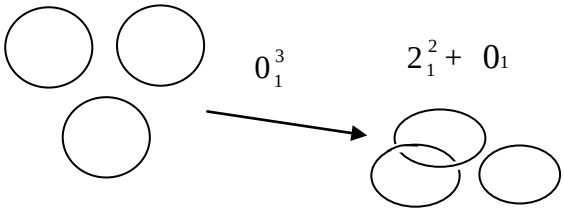
N 型用拓樸圖來看，是兩個分開的環，從平面來看，暫時無法解開，但只要讓圓形鐵環移動到上面的橫桿，便可利用橫桿穿越出去。

解法 ➔



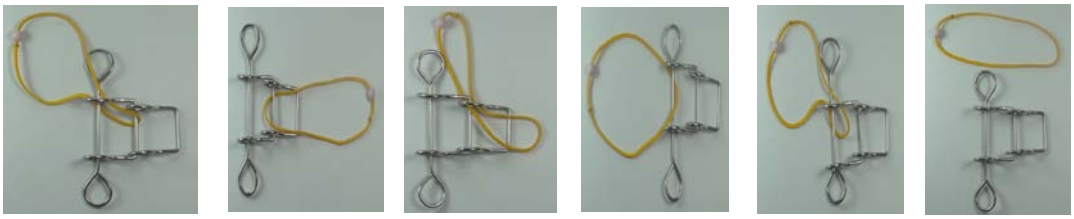
O



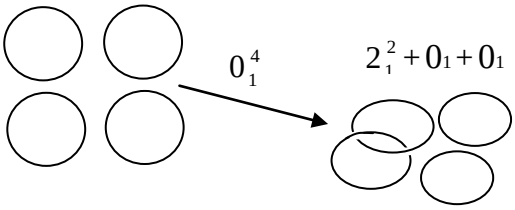


O 型用拓樸圖來看，是三個分開的環，和 N 的原理類似，不同的是 O 是柔性的繩子，可以利用相接的鐵圈進行穿越，最後也是利用橫桿穿出，另外還加上一個程序性的步驟。

解法 ➔



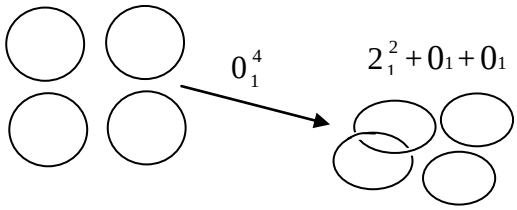
P



M 型用拓樸學來看，是四個分開的環，和 L 型的原理類似，但是結構更加複雜，差別是要注意到繩子的方向性，為了要改變繩子的方向，還需要利用接連處的鐵圈來改變方向，最後也是移動到橫桿，並且利用橫桿穿出。

解法 ➔

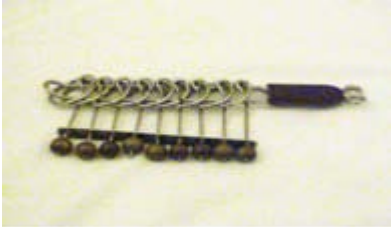
Q

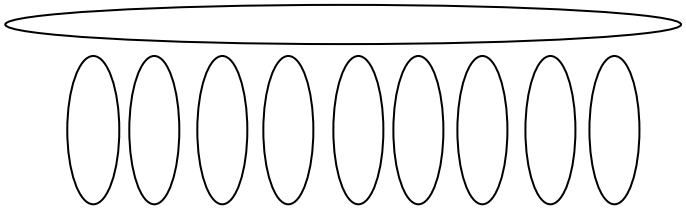


Q 型用拓樸學來看，是四個分開的環，要解開這個環有兩個重點，1.必需用小圓環穿越穿出大圓環上的小缺口，總共穿越四次，2.第一個 U 型環一定要用仔窄處套在大鐵環上，且第二個 U 型環一定要用寬處套在第一個 U 型環上。

解法 ➔

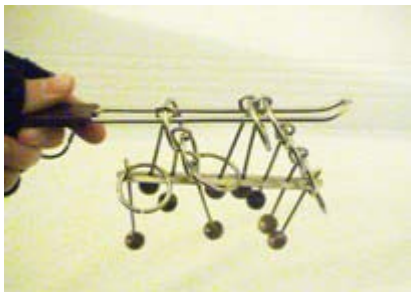
R

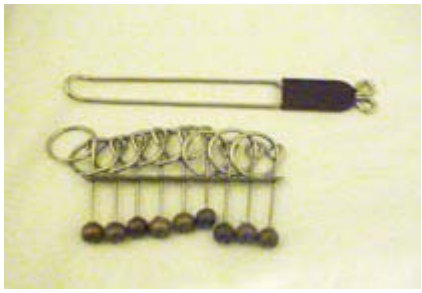




Q 型(九連環)，用拓樸圖來看，是十個分開的環，也可以套用 N 型進行穿越，但有一個規定，就是除了第一個環可以任意拿起、放下之外，其他環要拿起、放下時前面只能有一個環。並且以此類推。

解法 ➔





因為完成步驟太多需要 256 個太多，所以只有過程和完成的圖，而把解法改成數字

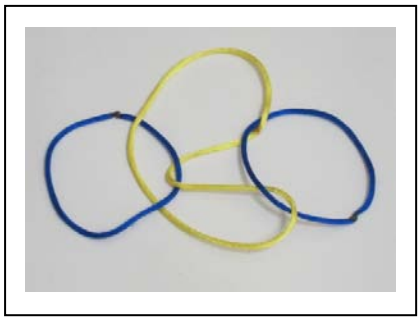
為方便說明下面我們用 1~9 分別代表從刀尖數起的九個環 下面的每個數字即操作該環（卸下或裝上，「0」為前兩個）

1310501310401310701310401310501310401310601310401310501310401310(剩兩環) 9013104013105013104013106013104013105013104013107013104013105013 1（剩前八環）

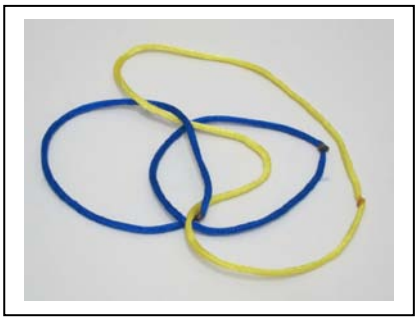
0401310601310401310501310401310801310401310501310401310601310 40（剩前七個）

1310501310401310701310401310501310401310601310401310501310401310 1310（完成）

在結束這個部分之前，我跟老師討論了以下這一個問題：下面這兩個圖形提供魔術師耍花樣的基礎。取兩個可開可合的圓環按左圖的樣子穿一線然後將其端點結紮使成圈子。這時的線圈在兩圓環上的扭結。只要把 B 環打開而將 A 環塞進使勾串，這構形就能被改變成右圖的樣子。在這流形裡線圈以非扭結而可被抽出圓環，使觀眾驚訝。

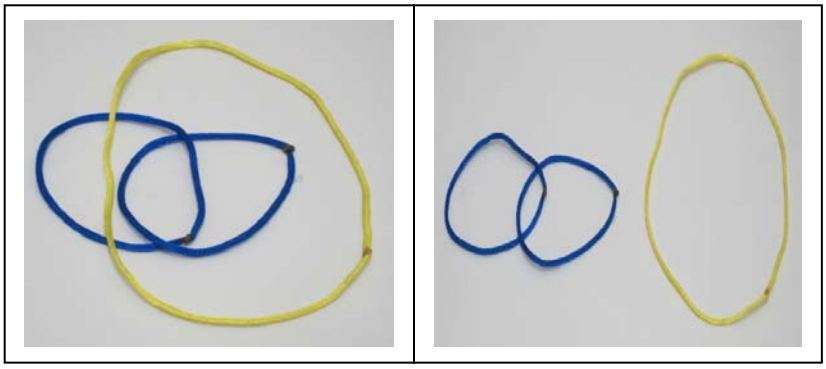


無法解開



可以解開

解法 ➔



伍、 研究結果

一、 蒐集來的智力環在研究過程的初級討論中，我一共將其分成四大類

分類的規則是甚麼呢？因為是初級分類所以都是以形狀類似(第一類)、解法雷同(第二、三、四類)為分類的標準。但這樣的分類是粗淺而危險的，例如第四類的穿越和第二類的卸魚就有相同的技巧，所以有繼續討論的必要。

因此我在初級分類之外又增加了 A、B、C、D ...等等各品項的標註，也就是在接下來的結果，我會以性質來分類，但難免某一種性質會在不同種智力環上出現，所以智力環的分類不會是獨立的，而是會跟其他的分類有交集的情況。

二、 作為解法的確實分類

(一)利用剛性方向：

這一類擺明著是打開的，但一時之間卻又打不開，原來是要走到對的位置才能打開。

A、B、C、D 等，屬於基礎分類第一類的這四個一定是利用剛性方向，我在坊間許多地方都看得到他的蹤跡，也是最容易破解的一例。

F，屬於基礎分類第二類的只有這一個，它是三個剛性物體的結合，原先屬於卸魚那一類的原因是因為形狀和物件數量與卸魚相似，其實它比卸魚簡單，只要圓形的物件走到心型的轉彎處便可以卸下。

原第三類的形變並沒有利用剛性方向的現象，因為形變重點在於環與環之間的相對位置的改變，與剛性方向討論的重點不同。

N、Q，屬於基礎分類第四類，他很顯然是利用剛性方向，但帶有程序性，比一般的利用剛性方向稍難一些。R，是有名的九連環，完

全是剛性物質，利用程序型的原理使問題變困難。

(二)利用柔性方向：

這一類會給人錯覺，會誤以為圖形是鏈結住的，事實上是打開的。與剛性方向的解法恰巧給人相反的感覺。

原第一類因未全部是剛性物質所以並沒有利用性方向的現象。

原第二類的 E(卸魚)、G、H，整個過程中柔性物質扮演了很重要的角色，尤其是 G 的情形，都是靠繩子的穿越動作。I 放在原第二類也是因為繩子穿越的關係。

原第三類的形變，有點像是魔術的手法，看起來是剛性物質卻都利用關節讓他們呈現柔性物質的特性，但意義不同**不可以**歸納為柔性物質，為什麼呢？因為它其實是用剛性物質給人錯覺，以 M 形為例，彈簧的組成物是鋼鐵，但它卻是能曲能彎的物質，基本上只要看透這點，比柔性物質的方向性簡單很多。

O、P 這兩項，屬於原第四類的確是利用柔性方向，到目前為止，真正的難題，其實是屬於柔性方向。剛性方向或者形變看起來像魔術的手法，了解的人很快就能破解。

(三)利用形變：

這一類需要改變環與環之間的相對位置，有些看上去是剛性的，但因為接合點可以轉動，所以轉動一下接合點的方位就可以打開。

原第一類的環皆沒有用到形變的特性。

原第二類的環也沒有用到形變的特性。

J、K、L、M，這四個第三類的環完全用到形變的特性。

原第四類的環也沒有用到形變的特性。

(四)利用程序性的解法：

這一類基本上還是利用以上的方法，但是變化複雜的程序，使難度增加。現在有一個問題，要怎樣的複雜度才能歸類成為程序性的問題？基本上有兩道工序還不足以說是程序性的解法，例如某些剛性的解法就需要兩個步驟，像 F、N、Q 等，所以我們至少也要三個步驟以上或複合兩個解法以上才能說是程序性的解法。

E(卸魚)，需要四道工序，是程序性的解法。

L，是三組 J 型圖的組成，過程繁複，絕對是程序性的解法。

O，類似兩個 N 形的結合，是比較簡單的程序性解法。

P，增加難度的 O，的確是利用程序性步驟增加難度。

R，九連環的問題，從解法的複雜度來看，沒有人會懷疑他是程序性的解法。

三、 分類表

由以上結果，我們歸納出以下的分類表，也就是說：所有智力環的解法可用歸納的四種方法解決。

方法	智力環的種類
(1) 剛性方向	A、B、C、D、F、N、Q、R
(2) 柔性方向	E、G、H、I、O、P
(3) 形變	J、K、L、M
(4) 程序性	E、L、O、P、Q、R

四、 拓樸性質的作用

從拓樸的結構來看，智力環所使用的繩結結構都是最簡單的。基本上，單一繩結就是一門非常深奧的理論。正因為智力環所使用的繩結都是最簡單的，因此我們更可以觀察出它的可解性；而且因為他的結構簡單卻又難解，才饒富趣味性。

這邊我歸納出一些基礎的拓樸特性，可做為接下來研究發展的基礎，可以改造智力環及其應用。

智力環皆是用兩環以上的結合

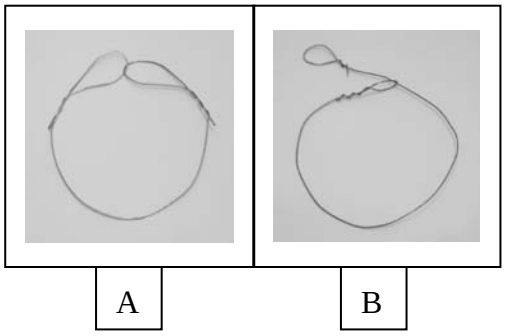
使用雙環結構的有 8 種(A、B、C、D、I、J、K、M)，大部分是結 0 到結 2 的改變。使用三環結構的有 4 種(E、F、G、O)，是結 0 到結 6 的改變。使用四環以上的結構有 4 種(H、L、P、Q)，這部分用繩結的分類比較難描述。

智力環都用到了拓樸錯覺的技巧

以右邊 2 個圖為例：

A 型在拓樸學上是扭結住的，

B 型在拓樸學上是打開的。



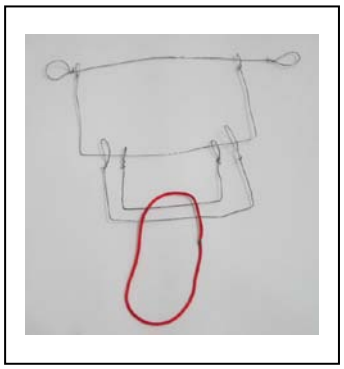
陸、 討論

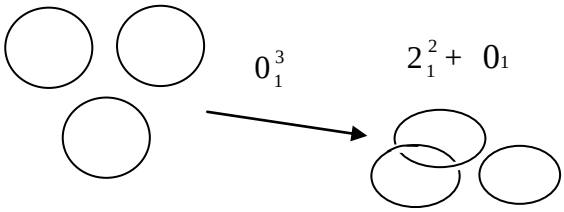
經過研究之後發現有四類不同的結構和解法，而拓樸學的部分提供我們更清楚的認知，因此我打算運用歸納出來的原理設計一些智力環以及生活上的實用工具。

一、 運用找到的規則設計新型智力環

了解原理後，我們利用柔性原理，發明出了一些智力環，而我們會選擇柔性原理來發明智力環，是因為柔性原理不需像鋼性原理一樣注重方向性，柔性原理可以用細鐵絲做出外型，再搭配繩子就成了智力環，但是鋼性原理為了注重方向性，必須用粗鐵絲來維持外型，製作不易，所以我們才選擇用柔性原理來發明智力環。

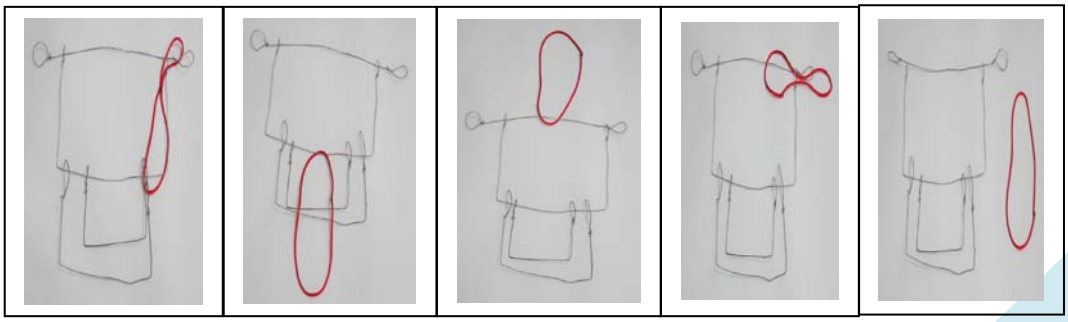
S

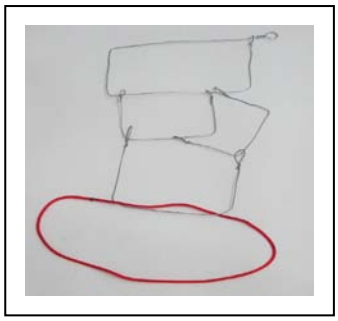


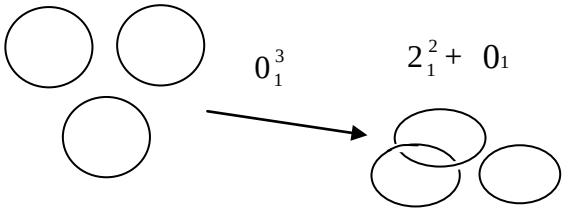


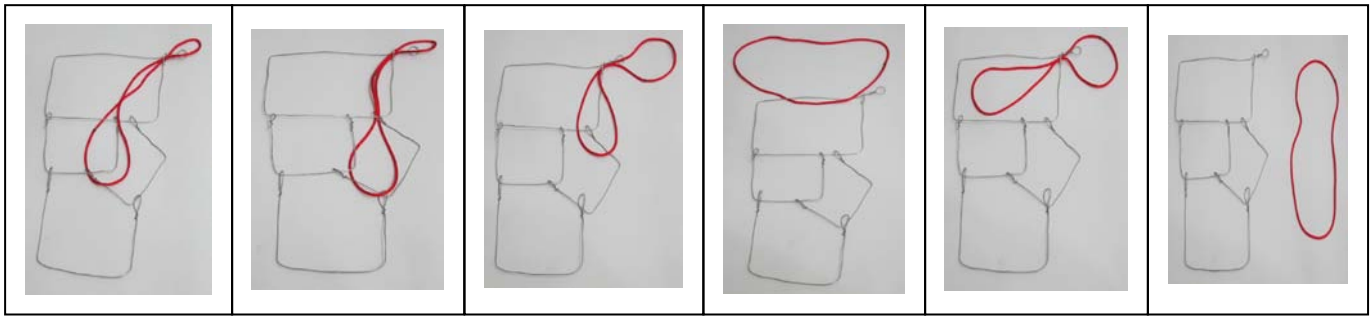
S 型用拓樸圖來看，是三個分開的環，和 O 的原理類似，但是 S 型比 O 型多了一個鐵圈包覆住，所以使 S 型比 O 型多了一個步驟才能解開。

解法 ➔

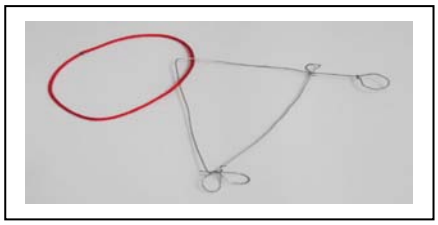


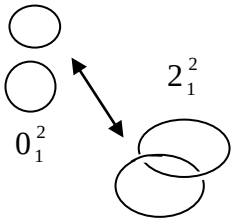






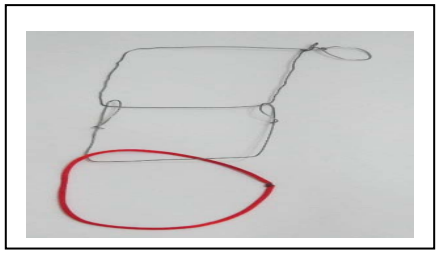
T

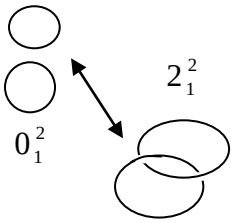


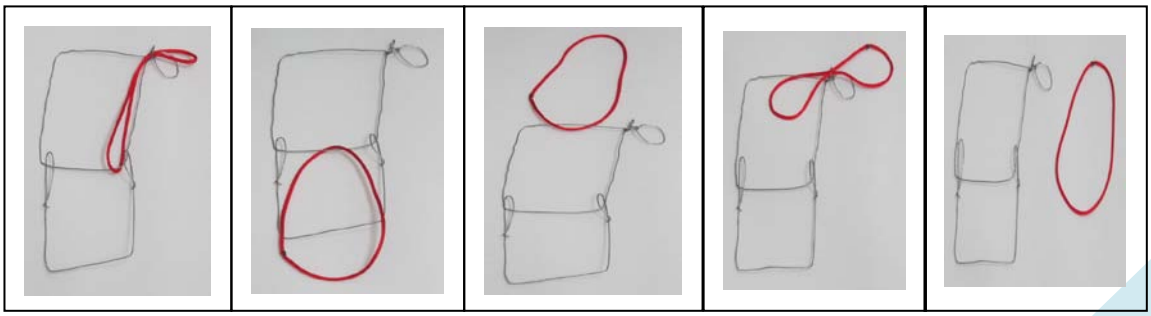


T 型用拓樸圖來看，是兩個分開的環，從平面來看，就像兩個套在一起的圓一樣，好像解不開，但是只要利用連接處的鐵圈進行穿越，便可解出。

解法 ➔







二、　智力環的實際應用

了解完智力環的原理後，我發現其實要解開智力環並不容易，尤其是還不懂事的小朋友，因為常識不足，應該無法解開智力環，想到這個限制性，讓我想到我們可以把危險的物品用智力環鎖起來讓小朋友不易取用。

如圖：可將剪刀將此智力環固定住，不易被隨意取走。

解法 ➔

也可以製作有設計感跟巧思的吊架吊掛物品，不容易被小朋友取走，亦可培養生活的情趣和巧思。

如圖：

解法 ➔

三、 進階智力環的討論

現在開始討論進階智力環原理，我發現要增加智力環的難度必須從程序性的步驟著手，而許多的智力遊戲也跟程序性的步驟有關：

(1) 九連環，如同前面的步驟，其實不難，而且解法固定。

(2) 河內塔，解法更簡單，我們常用它來討論遞迴數列。

根據一個古老的故事，在遠東的某處有一個寺院，裏面有一堆六十四個由大到小純金打造的盤子。有一回，這些盤子被疊在一起，最大的盤子放在最底層。每一個盤子被穿了一個孔，放在寶石的針上。它們可以根據底下的規則由一個位置搬移到另外一個位置：

◎一次只能移動一個盤子。

◎大盤子永遠不能放在小盤子的上面。

◎這一疊盤子可以藉由另外一個外加的暫時位置從某個位置移到另外一個位置。

魔術方塊，也是利用程序性的步驟還原，其中也包含了一些代數學的原理。

(3) 華榮道，這套滑塊類遊戲的源頭可追溯到中國古代的『重排九宮』。

遊戲規則

1. 透過移動不同人物，包括：曹操、關羽、張飛、馬超、黃忠、趙雲及四個卒。
2. 過程中可經過若干次的移動，最終目的是讓曹操逃出，也就是移至盒子下方中間位置。
3. 把曹操移至出口，使他逃離華容道遊戲就結束。

以上這些遊戲皆和程序的解法有關，也都相當引人入勝，我要論述的是，透過程序的操弄可以讓遊戲更有深度，當然這些遊戲的設計也是可遇不可求的。

四、 拓樸圖形應用

根據以上的討論，我認為智力環可以用現有的規則跟繩結做結合，除了增加難度以外，也很有趣，以下是我的另一個設計：

我將雙環拓樸圖形其中一個環設計有開口(也就是 22 頁的 B 形結構)，是利用(2)柔性方向類型智力環的方式，並且利用穿越開口來增加拓樸圖形的交點，其種類分為兩種：

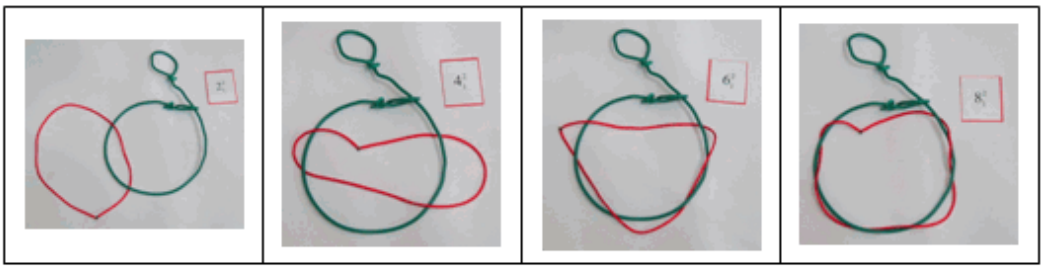
（一） 兩個沒有成結的環互相穿越：

兩個沒有成結的環互相穿越時，我利用開口進行穿越，但是隨著交點數越來越多，我們可以分為兩種解開方式：

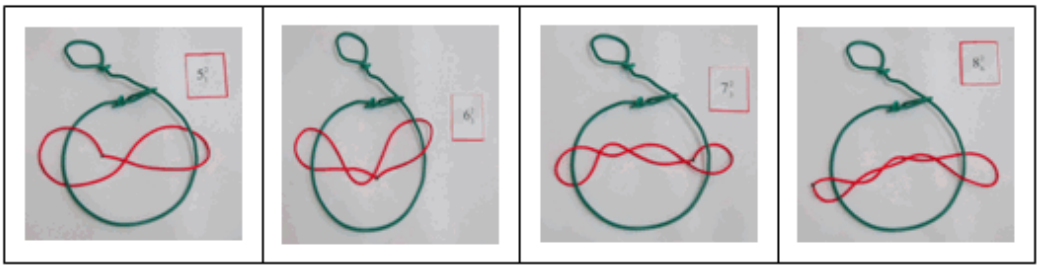
1. 重複穿越開口來改變交點數：

一開始我先利用開口的穿越來增加交點，我發現每個雙環拓樸圖形都可以利用穿越開口穿越出來，並且不同交點數的雙環拓樸圖形會具有關連性，這表示每個有開口的雙環拓樸圖形都可以是一個智力環，隨著交點數的增加，困難度會急遽的升高。

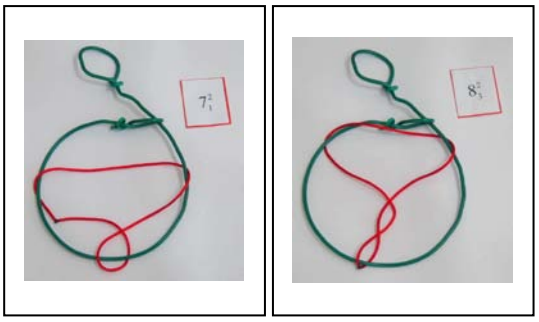
A



B



C



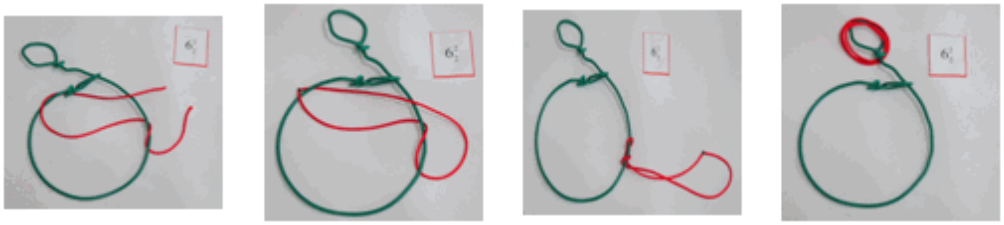
2. 將結打完後一次穿越：

當我在進行穿越打結並解開時，我發現可以一次取出，因為開口夠大，因此可以利用將結打完後一次穿越的方法。步驟依序是：

A. 利用一條繩子來繞有開口的環來完成雙環拓樸圖形

B. 將雙環拓樸圖形拉成結，並且將結全部一起拉出開口

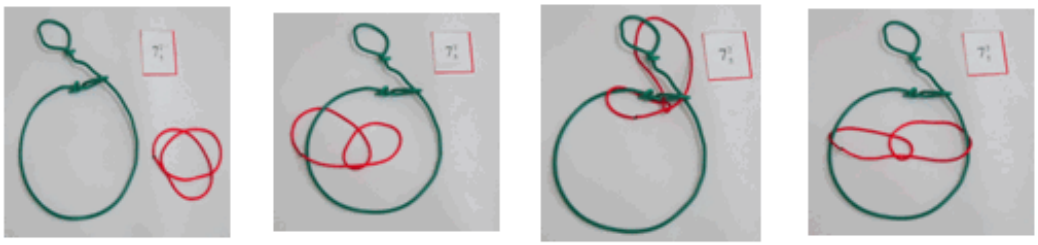
C. 研究每種雙環拓樸圖形的結，以後就可以先打好結在全部一起穿越進去。



做到這裡，我們會想：這樣的智力環是不是可以很容易解開呢？答案是肯定的，只要開口夠大，難度在於拓樸結的打法。但這邊有一個解決方法：如果將有開口相扣的小環部分縮小，只容許一次通過一條紅繩，那難度又會增加許多。

（二） 一個有成結的環和一個沒成結的環互相穿越：

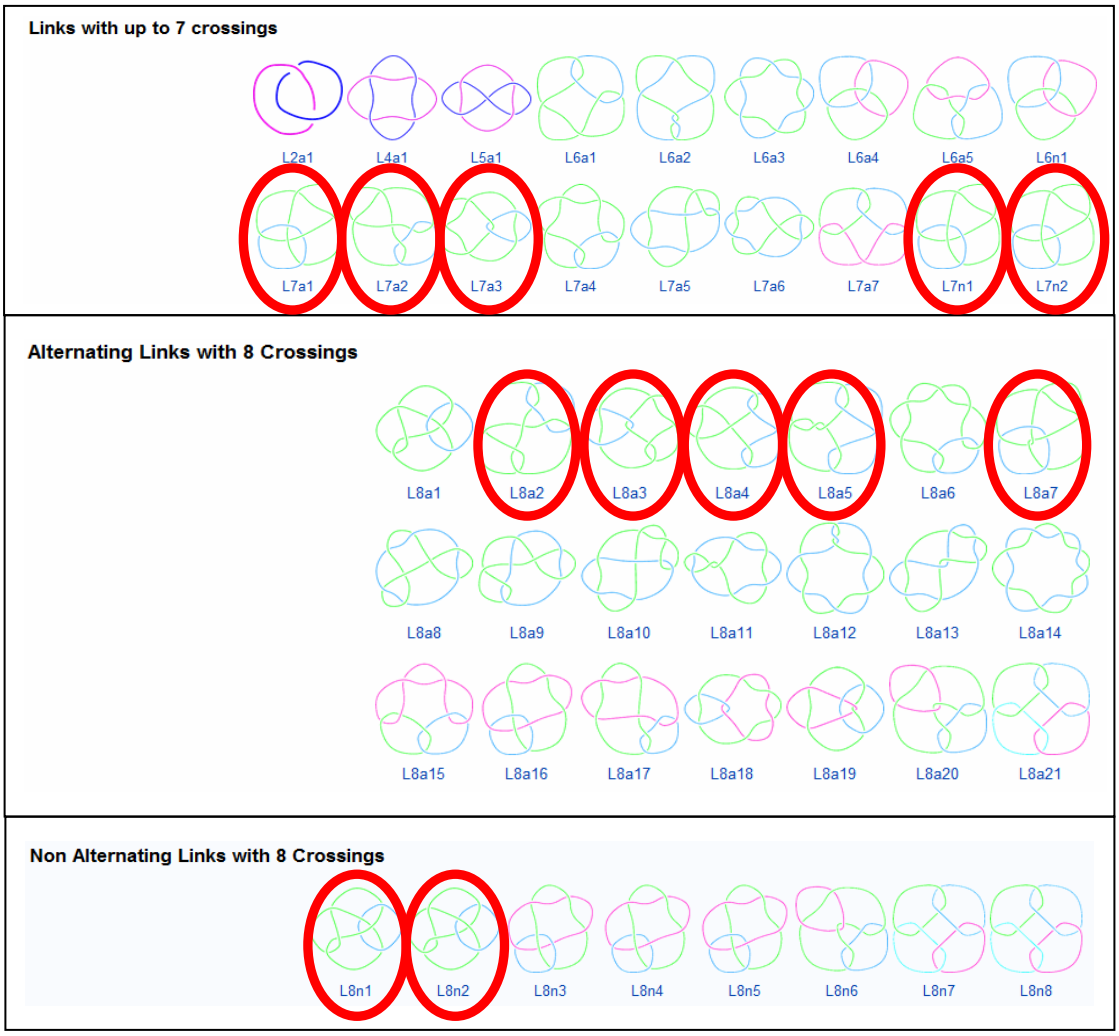
如果當雙環拓樸圖形其中一方已經成結時，那一開始就要用結來穿越，但是方法和兩個沒有成結的環互相穿越類似。



(註：圖中的紅色環已經成結，已成結的環開始進行穿越跟不成結的環開始穿越絕對是不同的類型，如下頁圖所示)

○代表一個有成結的環和一個沒成結的環互相穿越的情

形其他則為兩個或三個沒成結的環互繞



柒、 結論

1. 我們從鄉土的童玩、常見的智力環出發，並利用拓　　類的方法看出智力環的基本運作原理為以下四點：
   （1） 利用剛性方向
   （2） 利用柔性方向
   （3） 利用形變
   （4） 利用程序性的解法

   其中前面三點我們已經清楚掌握，也可以變化其中奧妙，有所創新。但第四點，正如同前面討論到的，變化其複雜性卻又不能降低其吸引力是操作程序性步驟最難得的一面，也因此，世界上有名的玩具很多都是這樣產生的。
2. 因此我覺得智力環的創新和應用還有很多空間值得繼續研究，尤其是結合繩結、拓樸和程序步驟部分的精進。
3. 討論部份因為考量到材料，所以我們以創新柔性方向的智力環為主，如果能克服材料的問題，我也希望能創造剛性方向或利用形變的智力環。
4. 以上提供這幾點希望可提供給以後做科展的同學、藝術創作者、生活創意家、魔術師參考。

捌、 參考資料及其它

1.國中數學第四冊_康軒出版社。

2.臺中市科展_位相學基本概念的探討_盧建智等六人

3.數學趣味遊戲__高學師範大學數學系_柳賢教授

4.結_Louis H. Kauffman 著· 謝春忠譯

5."結"論—非結論_數學傳播第 30 卷第 3 期 民國 95 年 9 月 80~86 頁_謝春忠

6.鹿港童玩

7.參考網站

http://katlas.math.toronto.edu/wiki/The_Thistlethwaite_Link_Table_L8a1-L8a21

【評語】030418

自古以來，民間即有很多益智玩具，其中環類玩具相當多元。本研究運用拓樸觀念描述該等玩具的結構，並探討出一些相關解法。作者進一步利用研究心得，開發出新的智力環，具創意，值得鼓勵。目前作品使用的數學方法略嫌簡單，日後可朝進一步運用紐結理論探討智力環的數學性質。