中華民國第54屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030417

內切圓心中的秘密

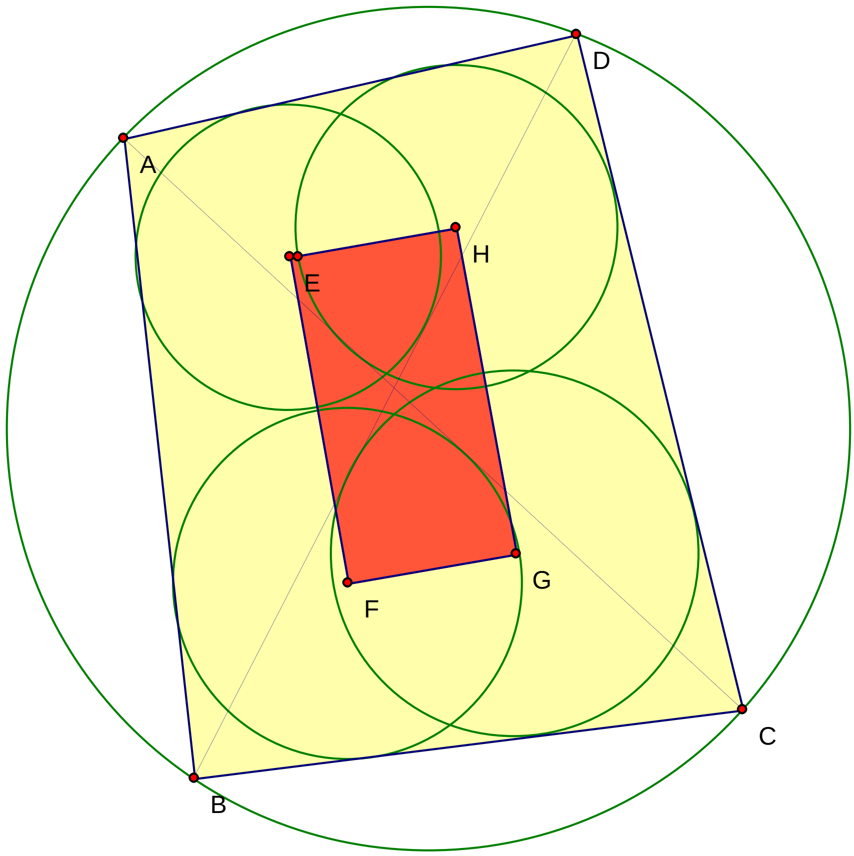
學校名稱：桃園縣立大崗國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳柏叡 國二 林晉暘 國二 黃語萱	彭柏鈞

關鍵詞：圓內接四邊形、內切圓圓心、比值

摘要

給定一個圓，可構作一四邊形 $ABCD$，令其面積為 T，而 $ABCD$ 可由對角線形成的四個三角形，畫出四個內切圓，其圓心連線形成一長方形 $EFGH$，令其面積為 t，本研究目的即在討論 $\dfrac{T}{t}$ 的比值範圍。



$ABCD \approx 55.22$ 平方單位

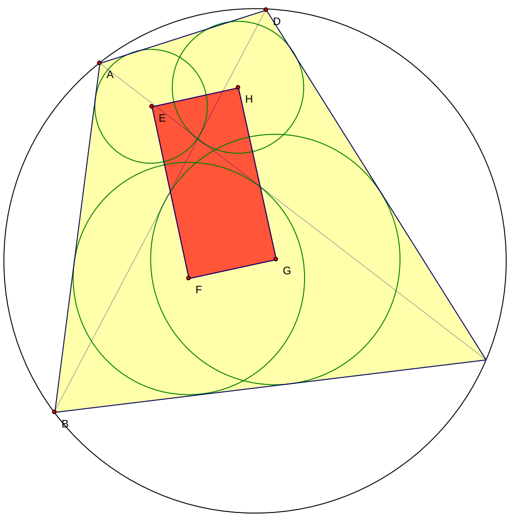
$EFGH \approx 9.16$ 平方單位

$\dfrac{ABCD}{EFGH} \approx 6.03$

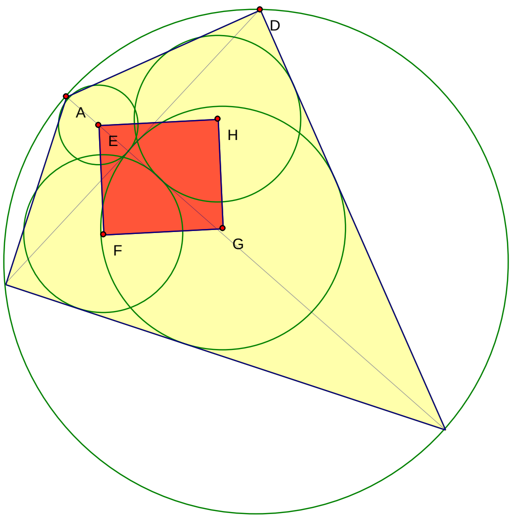
$\angle EFG = \angle FGH = \angle GHE = \angle HEF = 90°$

壹、研究的動機

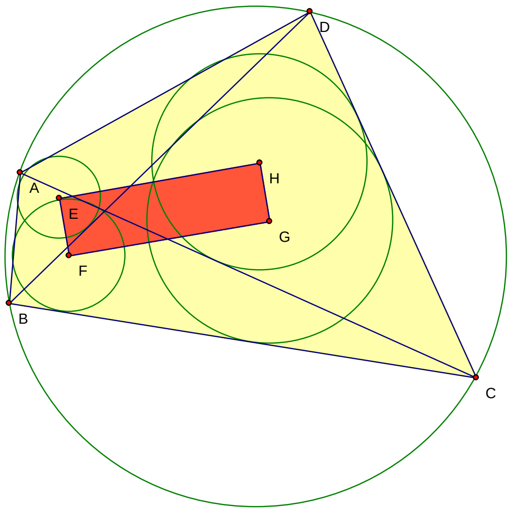
還記得老師教我們算三角形面積，運用了海龍公式，我們也跟著老師一起証明出來，之後我好奇的問老師，那四邊形也有類似的海龍公式嗎？老師回答我當然有啊！但僅限於圓內接四邊形。而剛好老師要我們看一篇圓內接四邊形的文章（**劉步松，數學傳播 34 卷，pp.83~86，圓內接多邊形的性質**），裡面提到圓內接四邊形所構造出了四個內切圓圓心，居然是長方形！我們就在想，既然圓內接四邊形可透過邊長求得，而它們內切圓圓心剛好又是長方形，說不定可以試試去找他們的比值關係。而在研究之前，我們特別用 GSP 繪圖軟體畫幾個圖，並試算他們的比值（圖【1】~圖【4】)。



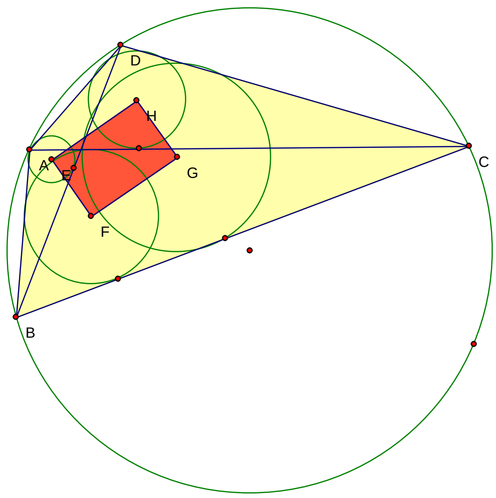
圖【1】



圖【2】



圖【3】



圖【4】

【註】：此四圖之間並無特定比例關係

	T（內接四邊形面積）	t（紅色長方形面積）	$\frac{T}{t}$
圖【1】	93.80	13.45	6.97
圖【2】	42.94	5.92	7.26
圖【3】	45.66	5.67	8.05
圖【4】	27.54	3.34	8.25

表格【一】(表格中的值為近似值)

透過表格【一】發現，這四個不同的圖形之比值雖然不一樣，似乎有一個範圍限制住他們，這就引起我們的好奇，決定要朝這個問題來討論。

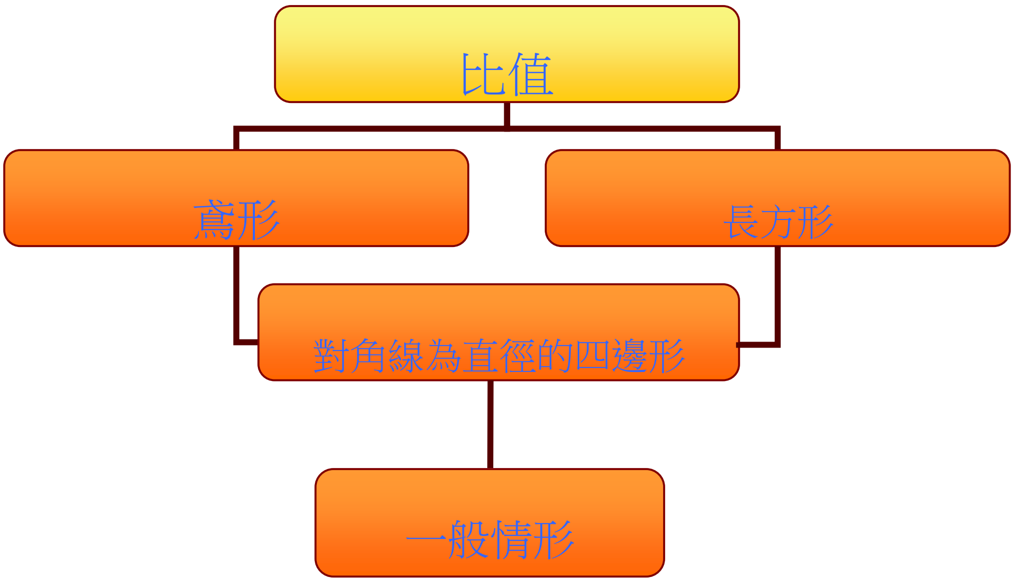
貳、研究的目的

一、討論圓內接特殊四邊形（鳶形）與其四個圓內切圓圓心所形成之長方形，其面積之間的比值與θ的關係。
二、討論圓內接鳶形與圓內接長方形，在我們要討論的面積比值問題上，有什麼樣的關係。
三、討論有條件圓內接四邊形（其中一條對角線為直徑），觀察其比值。
四、討論一般圓內接四邊形在面積比值的範圍，並檢討此結果的優劣性。
五、針對結果做一些應用。

參、研究設備及器材

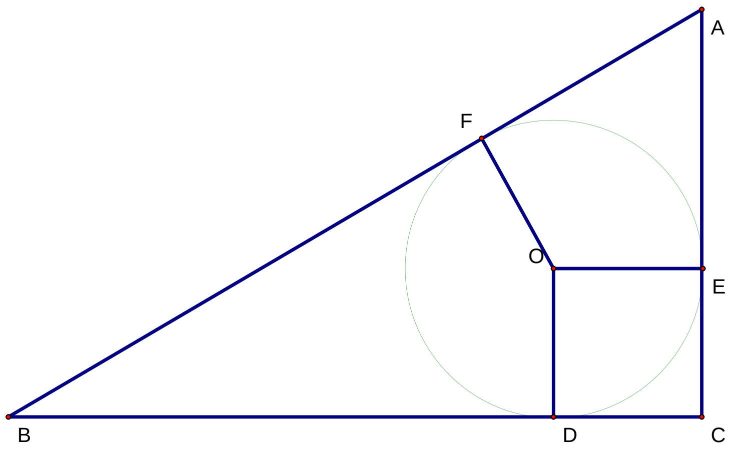
尺、筆、紙、電腦、幾何繪圖軟體(The Geometer's Sketchpad V4，縮寫 GSP)、Maple。

肆、研究過程與方法



接著我們將所需要的預備知識整理如下：
一、直角三角形內切圓半徑與三邊長的關係：

如下圖，圓O內切於ΔABC，並分別切$\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$於D,E,F三點



令$\overline{AB}=c$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=a$，內切圓O半徑$=r$

因為圓O內切於ΔABC，故$\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}=r$

因為$\Delta OBF\cong\Delta OBD$，故$\overline{BD}=\overline{BF}=a-r$

同理可得，$\overline{AE}=\overline{AF}=b-r$

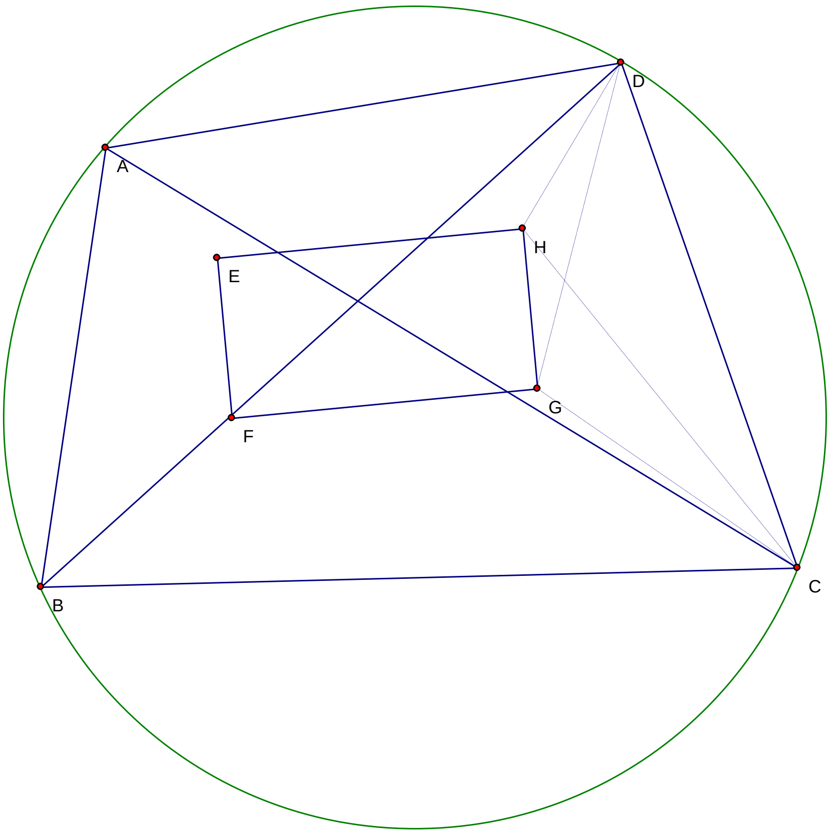
而$c=\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=(a-r)+(b-r)$

故可得$c=(a-r)+(b-r)$

因此，$r=\dfrac{a+b-c}{2}$，亦即給定直角三角形三邊長即可求其內切圓半徑。

接著我們引用劉步松於「數學傳播」的一篇文章的部分內容（**數學傳播 34 卷，pp.83~86，圓內接多邊形的性質**），作為我們主要的預備知識。其內容如下：

二、圓內接四邊形之內切圓性質：
如下圖，$\square ABCD$為圓內接四邊形。而E,F,G,H分別$\Delta ABD,\Delta ABC,\Delta BCD,\Delta ACD$的內心。而$E,F,G,H$形成一個矩形。



【證明】:

如上圖，

$$\angle CGD = 180^\circ - (\angle GCD + \angle GDC)$$

$$= 180^\circ - (\frac{1}{2}\angle BCD + \frac{1}{2}\angle BDC)$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BCD + \angle BDC)$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CBD)$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle CBD$$

同理可知：$\angle CHD = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle CAD$

因為 A, B, C, D 四點共圓，所以 $\angle CBD = \angle CAD$ ，從而 $\angle CGD = \angle CHD$ ，亦即 C, G, H, D 四點共圓。

因為 C, G, H, D 共圓，所以 $\angle HGD = \angle HCD$ ，同理可知 B, F, G, C 共圓，從而也有

$\angle FGB = \angle FCB$，則

$\angle FGH = \angle BGD - (\angle HGD + \angle FGB)$

$= \angle BGD - (\angle HCD + \angle FCB)$

$= [180^\circ - (\frac{1}{2}\angle DBC + \frac{1}{2}\angle BDC)] - (\frac{1}{2}\angle ACD + \frac{1}{2}\angle ACB)$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle DBC + \angle BDC + \angle ACD + \angle ACB)$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle DBC + \angle BDC + \angle BCD)$

$= 180^\circ - \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$

同理，我們也可得到 $\angle EFG = \angle FEH = \angle EHG = 90°$

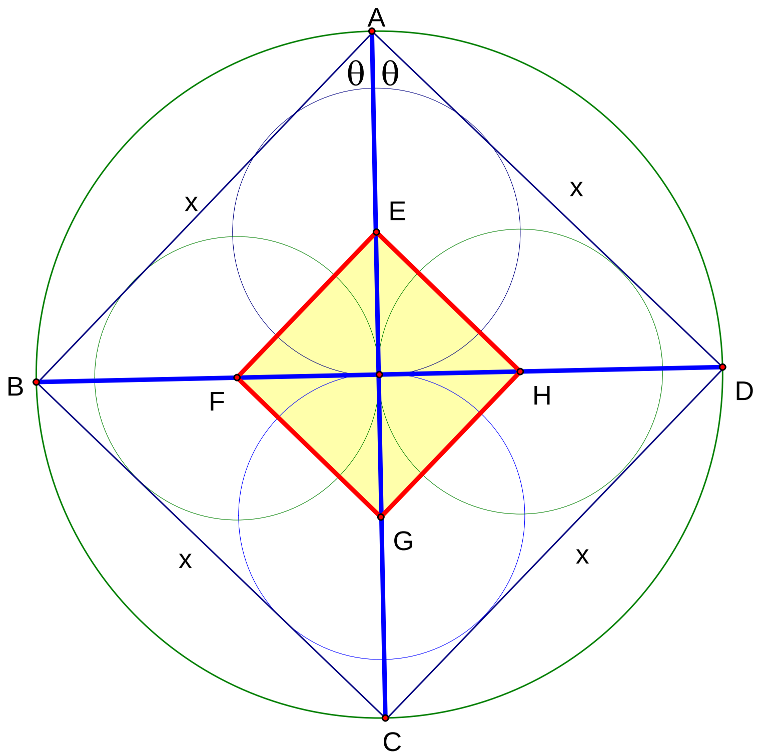
故 E, F, G, H 形成一個矩形。

伍、研究結果

接著我們針對幾個特殊圖形來計算其比值關係：

為了方便起見，我們以 T 表示 $ABCD$ 面積，t 表示 $EFGH$ 面積。

一、$\theta = 45°$：



如圖【5】，當 $\theta = 45°$，內接四邊形為正方形，令正方形邊長為 x

$\because$ 內接正方形 $ABCD$ 其對角線必為直徑，故斜邊長＝直徑長＝$\sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2}x$

所以內切圓半徑$=\dfrac{x+x-\sqrt{2}x}{2}=\dfrac{2x-\sqrt{2}x}{2}$

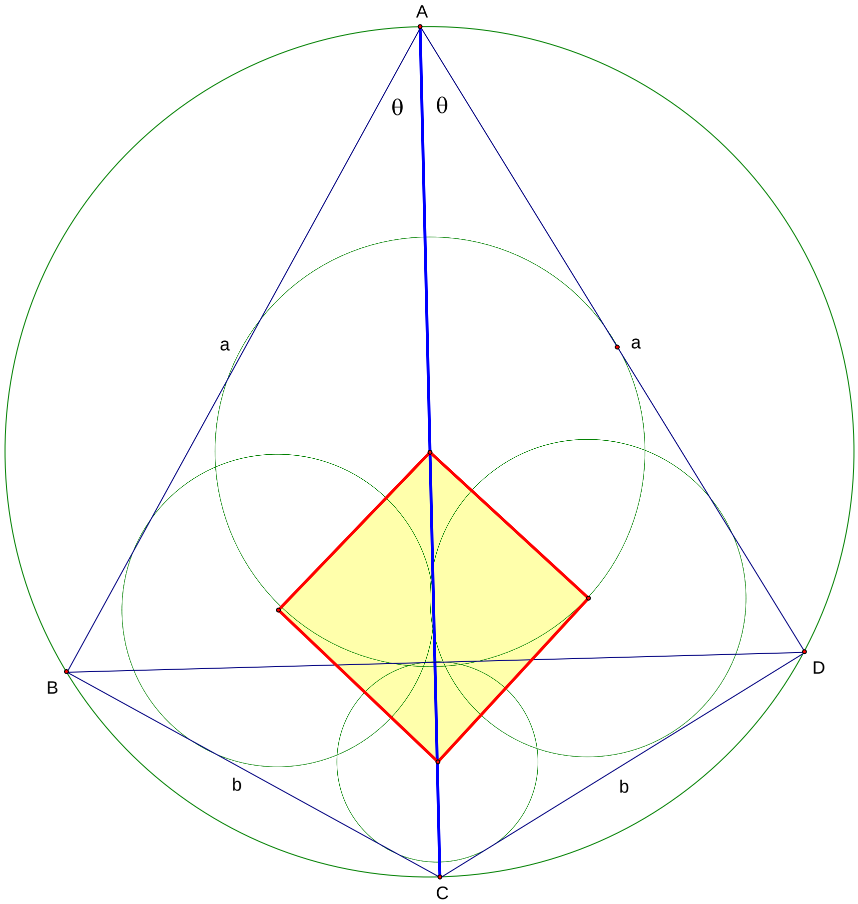
ΔABC，ΔACD其圓心連線為內部矩形的對角線。
又ΔBAD，ΔBCD內切圓的圓心連線亦垂直內部矩形的對角線，

故內部矩形為正方形，其邊長$=\dfrac{2x-\sqrt{2}x}{2}\times 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}x-x$

內部矩形面積即為$(\sqrt{2}x-x)^2=(3-2\sqrt{2})x^2$

所以$\dfrac{T}{t}=\dfrac{x^2}{(3-2\sqrt{2})x^2}=3+2\sqrt{2}$

二、$\theta=30^\circ$：
（一）箏形情形：



如圖【6】，根據三角形邊長比例，可令$a=\sqrt{3}x$，$b=x$，直徑$=2x$

故 ΔABC 內切圓半徑 $=\Delta ACD$ 內切圓半徑 $=\dfrac{(1+\sqrt{3}-2)x}{2}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)x}{2}$

故內部矩形對角線長度 $=(\sqrt{3}-1)x$

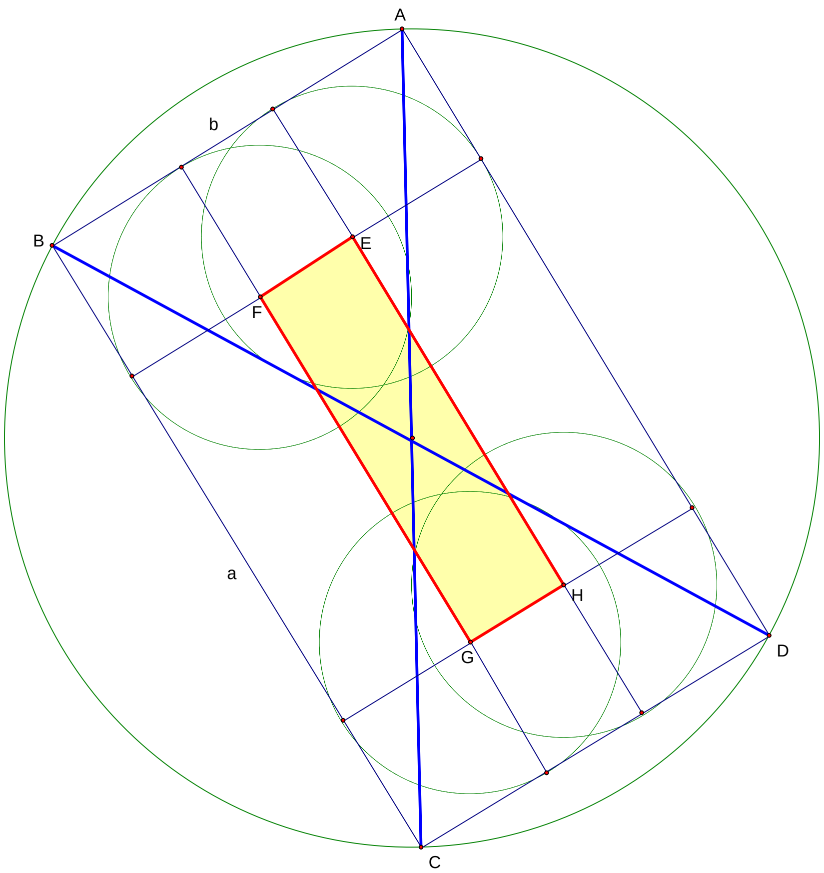
又 ΔABD 與 ΔBCD 內心連線所形成的對角線垂直 ΔABC 與 ΔACD 內心所形成的對角線，故內部矩形為正方形

其邊長 $=(\sqrt{3}-1)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

故內部矩形面積 $=[(\sqrt{3}-1)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}x]^2=(2-\sqrt{3})x^2$

所以 $\dfrac{T}{t}=\dfrac{\sqrt{3}x^2}{(2-\sqrt{3})x^2}=3+2\sqrt{3}\approx 6.46$

（二）長方形情形：



將圖【6】中 ΔABC 上下翻轉，顯然地，可形成一個內接矩形（如圖【7】），ΔABC、ΔACD、ΔABD、ΔBCD 全等，故所形成的內切圓半徑皆為 $\dfrac{(\sqrt{3}-1)x}{2}$

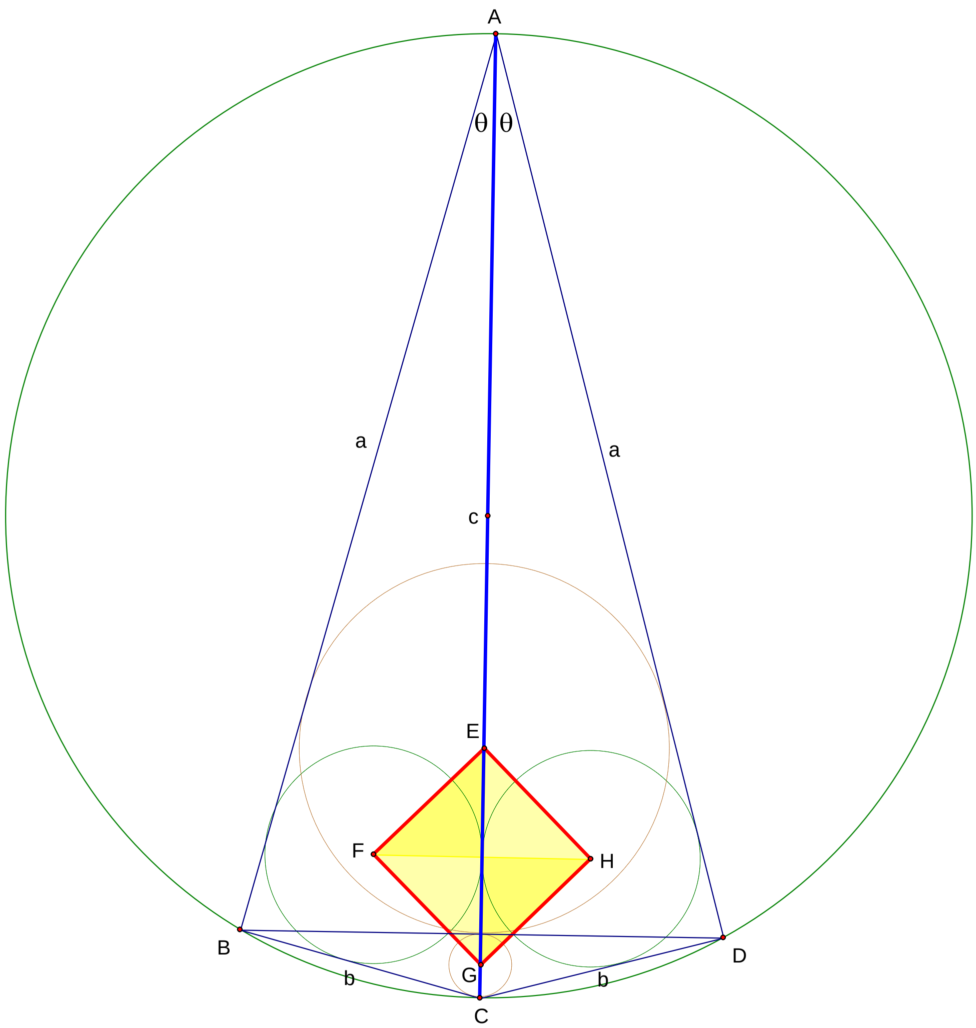
如圖【7】，在內接四邊形為矩形的情況下，其內切圓圓心連線所形成的內部矩形 $EFGH$ 面積為 $[\sqrt{3}x-2\times(\frac{\sqrt{3}-1}{2})x][x-2\times(\frac{\sqrt{3}-1}{2})x]=(2-\sqrt{3})x$

所以 $\frac{T}{t}=\frac{\sqrt{3}x^2}{(2-\sqrt{3})x^2}=3+2\sqrt{3}\approx 6.46$

與鳶形情形一致。

三、$\theta=15°$：

（一）鳶形情形：



如圖【8】，根據三角形邊長比例關係，令 $a=(2+\sqrt{3})x$ ，$b=x$ ，$c=(\sqrt{2}+\sqrt{6})x$

故 ΔABC ，ΔACD 的內切圓半徑 $=\frac{[(2+\sqrt{3})+1-(\sqrt{2}+\sqrt{6})]x}{2}$

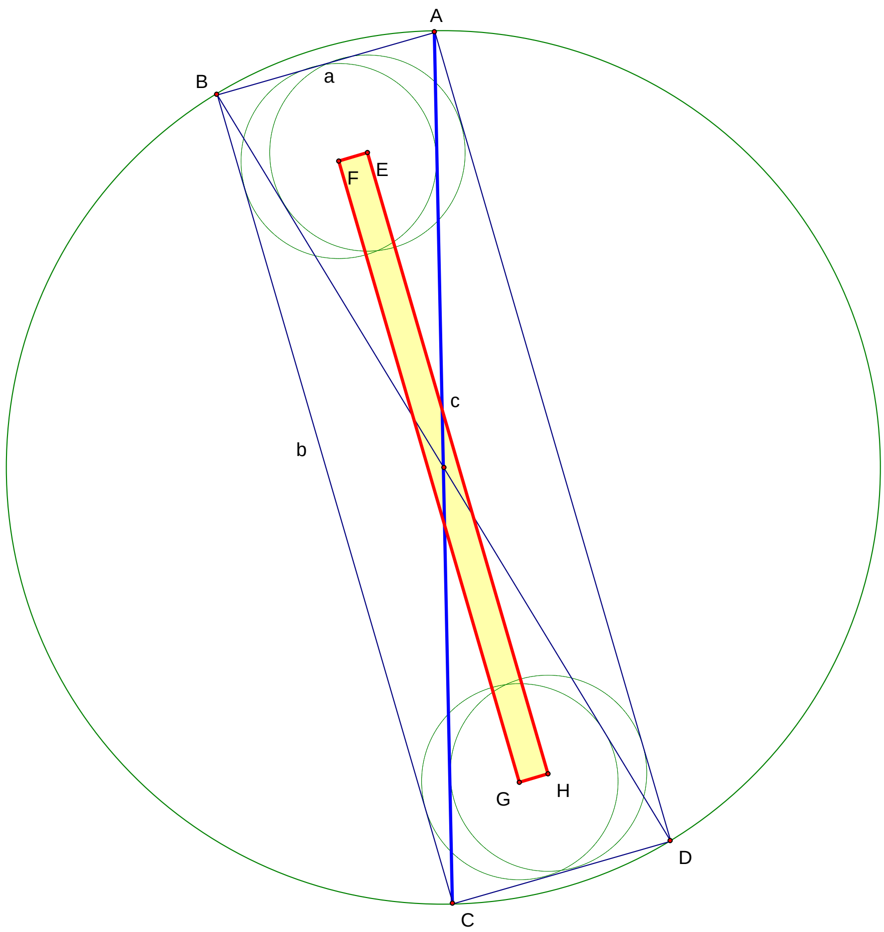
同前面討論一樣，內部矩形為正方形，其邊長

$$=\frac{[(2+\sqrt{3})+1-(\sqrt{2}+\sqrt{6})]x}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times[3+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6})]x$$

故面積$[\frac{\sqrt{2}}{2}\times(3+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6})x]^2=\frac{1}{2}\times(3+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6})^2x^2$

所以$\frac{T}{t}=\frac{(2+\sqrt{3})x^2}{\frac{1}{2}\times(3+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6})^2x^2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{20+10\sqrt{3}-8\sqrt{6}-12\sqrt{2}}\approx 9.8989$

（二）長方形情形：



將圖【8】ΔABC上下翻轉，即拼成一個圓內接矩形。(如圖【9】)

ΔABC、ΔACD、ΔABD、ΔBCD所形成的內切圓半徑皆為

$$\frac{[(2+\sqrt{3})+1-(\sqrt{2}+\sqrt{6})]x}{2}$$

$$=\frac{(3+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6})x}{2}$$

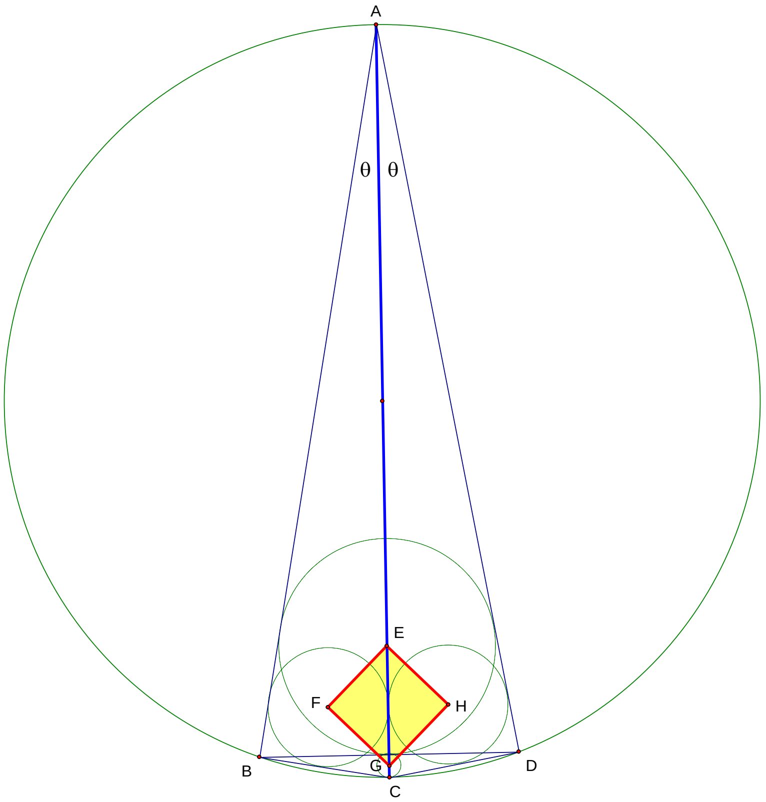
故內部矩形面積

$$=[(2+\sqrt{3})x-(3+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6})x][x-(3+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6})x]$$
$$=(2+\sqrt{3}-3-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6})(1-3-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6})x^2$$
$$=(\sqrt{2}+\sqrt{6}-1)[(\sqrt{2}+\sqrt{6})-2-\sqrt{3}]x^2$$
$$=(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{6})-(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{6})+(2+\sqrt{3})$$
$$=8+4\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-\sqrt{6}+2+\sqrt{3}$$
$$=10+5\sqrt{3}-4\sqrt{6}-6\sqrt{2}$$

所以 $\dfrac{T}{t}=\dfrac{(2+\sqrt{3})x^2}{(10+5\sqrt{3}-4\sqrt{6}-6\sqrt{2})x^2}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{10+5\sqrt{3}-4\sqrt{6}-6\sqrt{2}}\approx 9.8989$

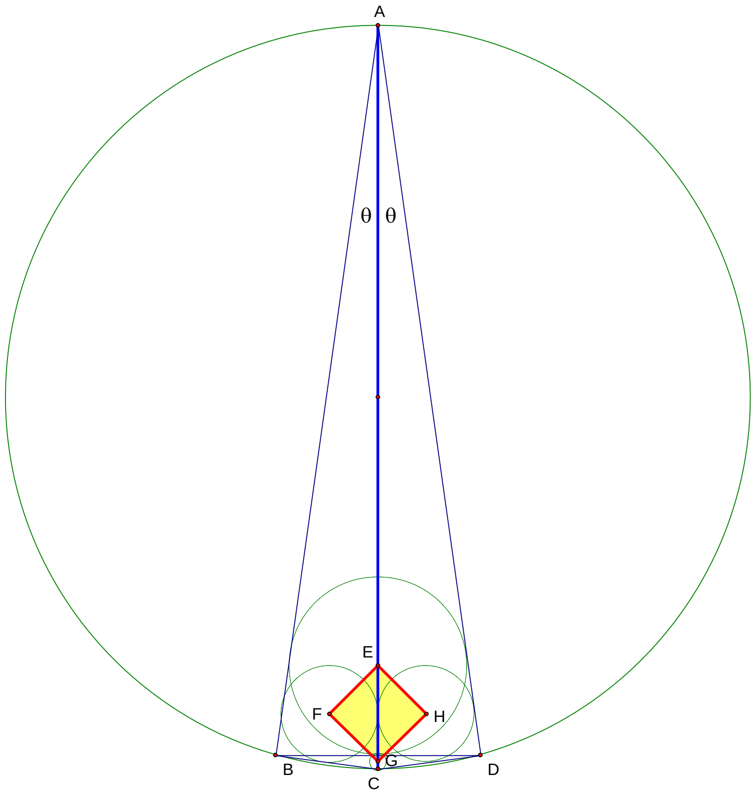
與鳶形的情形一致。

到這裡我們發現，隨著θ越來越小，$\dfrac{T}{t}$有越來越大的趨勢，為了更進一步驗證這情形，我們再將θ縮小，透過GSP來驗證$\theta=10^\circ$（圖【10】）以及$\theta=8^\circ$（圖【11】)。



$$\frac{T}{t}=13.60$$

圖【10】



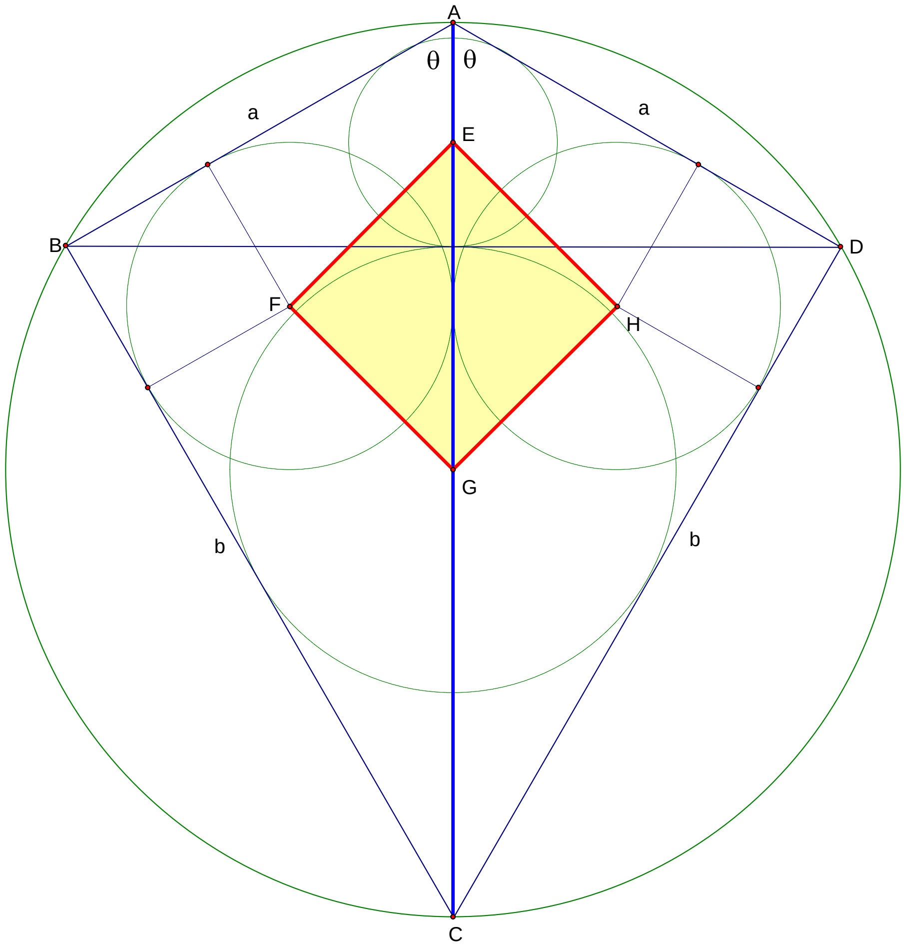
$$\frac{T}{t}=16.45$$

圖【11】

陸、討論

我們將研究結果中的情形一般化：

一、鳶形情形：



圖【12】

如圖【12】，ΔABC 、 ΔACD的內切圓半徑$=\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

其內心連線即為對角線長度$=\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}\times 2=a+b-\sqrt{a^2+b^2}$

此對角線被直徑垂直平分

又由於 ΔABD 、 ΔBCD之內心連線在直徑 $\overline{AC}$ 上，表示此矩形對角線互相垂直，故

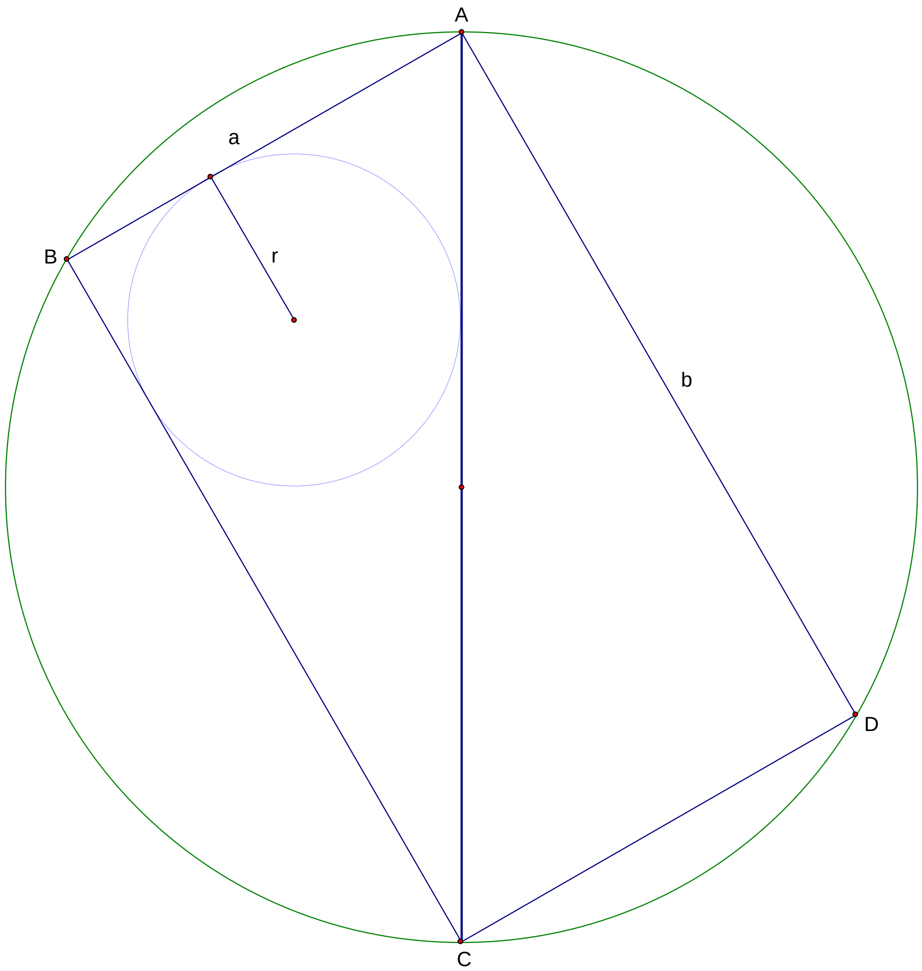
內部矩形 $EFGH$ 為正方形，其邊長$(a+b-\sqrt{a^2+b^2})\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

所以面積

$$=[(a+b-\sqrt{a^2+b^2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}]^2=\frac{1}{2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2})^2$$
$$=\frac{1}{2}[(a+b)^2-2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+a^2+b^2]$$
$$=\frac{1}{2}[a^2+b^2+2ab-2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+a^2+b^2]$$
$$=a^2+b^2+ab-(a+b)\sqrt{a^2+b^2}$$

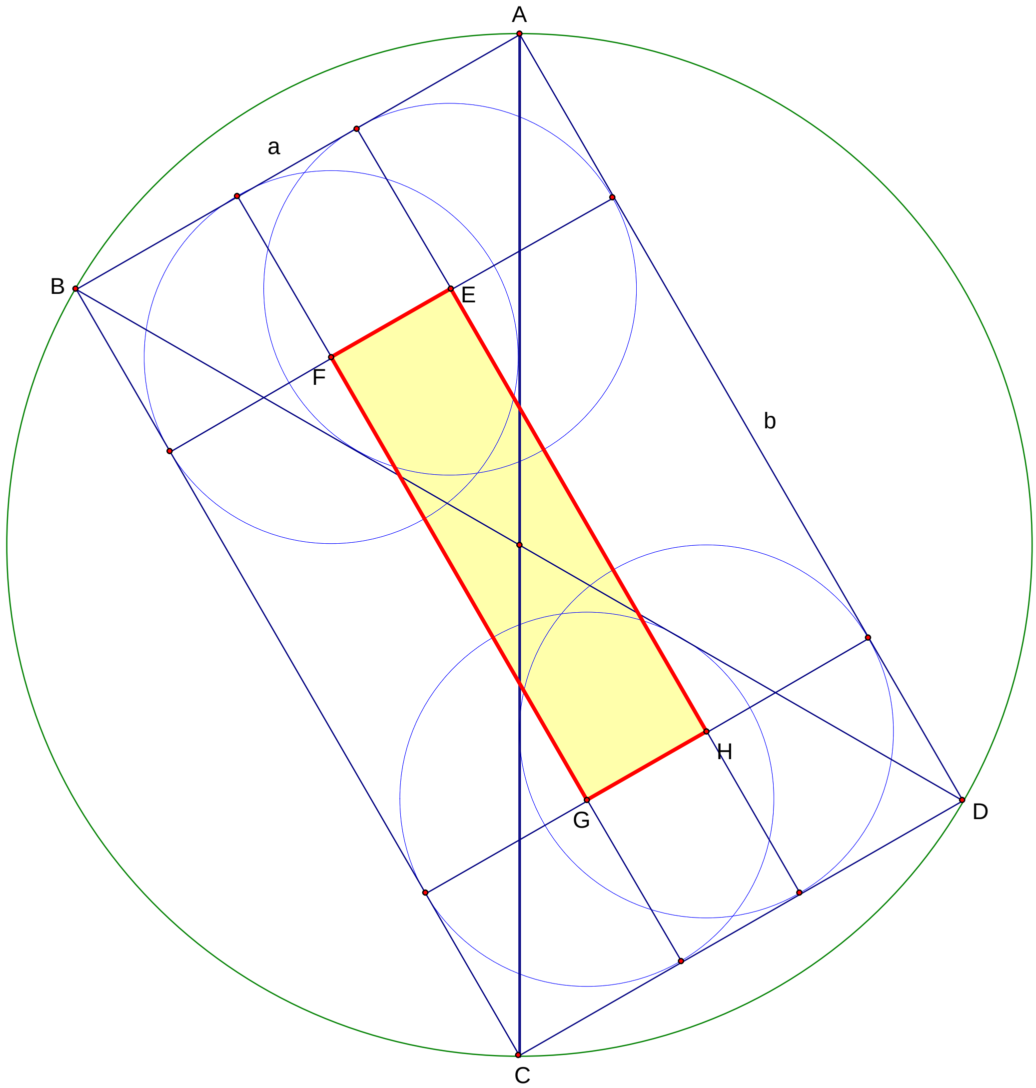
二、長方形情形：

將圖【12】ΔACD 上下翻轉，即可得一圓內接矩形 $ABCD$，如圖【13】



圖【13】

其內切圓半徑 $r=\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$



圖【14】

故內部矩形 $EFGH$ 面積可由圖【14】得知

$$ABCD=[a-2(\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2})][b-2(\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2})]$$

$$=(\sqrt{a^2+b^2}-b)(\sqrt{a^2+b^2}-a)$$

$$=a^2+b^2-(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+ab$$

故無論是鳶形或是長方形，其內部矩形 $EFGH$ 面積皆相等。

令$T = ABCD$面積，$t = EFGH$面積

接著討論$\dfrac{T}{t}$的情形，即$\dfrac{ab}{a^2+b^2+ab-(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$

為了方便計算上的處理，我們討論$\dfrac{a^2+b^2+ab-(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$的關係

$$\frac{t}{T}=\frac{a^2+b^2+ab-(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$
$$=1+\frac{a^2+b^2-(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

在此，我們令$\angle BAC=\theta$，故$a=2R\cos\theta$，$b=2R\sin\theta$
所以式子可寫為

$$1+\frac{4R^2-4R^2(\sin\theta+\cos\theta)}{4R^2\sin\theta\cos\theta}$$
$$=1+\frac{1-(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

由於$0<\theta<90°$，故$1<\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{2}$

而

$$\frac{1-(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1-(\sin\theta+\cos\theta)}{\frac{1}{2}[(\sin\theta+\cos\theta)^2-1]}$$
$$=\frac{2[1-(\sin\theta+\cos\theta)]}{[(\sin\theta+\cos\theta)+1][(\sin\theta+\cos\theta)-1]}$$
$$=\frac{-2}{\sin\theta+\cos\theta+1}$$

故

$$-1<\frac{1-(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\le\frac{-2}{\sqrt{2}+1}=2-2\sqrt{2}$$

所以

$$0<\frac{t}{T}\le 3-2\sqrt{2}$$

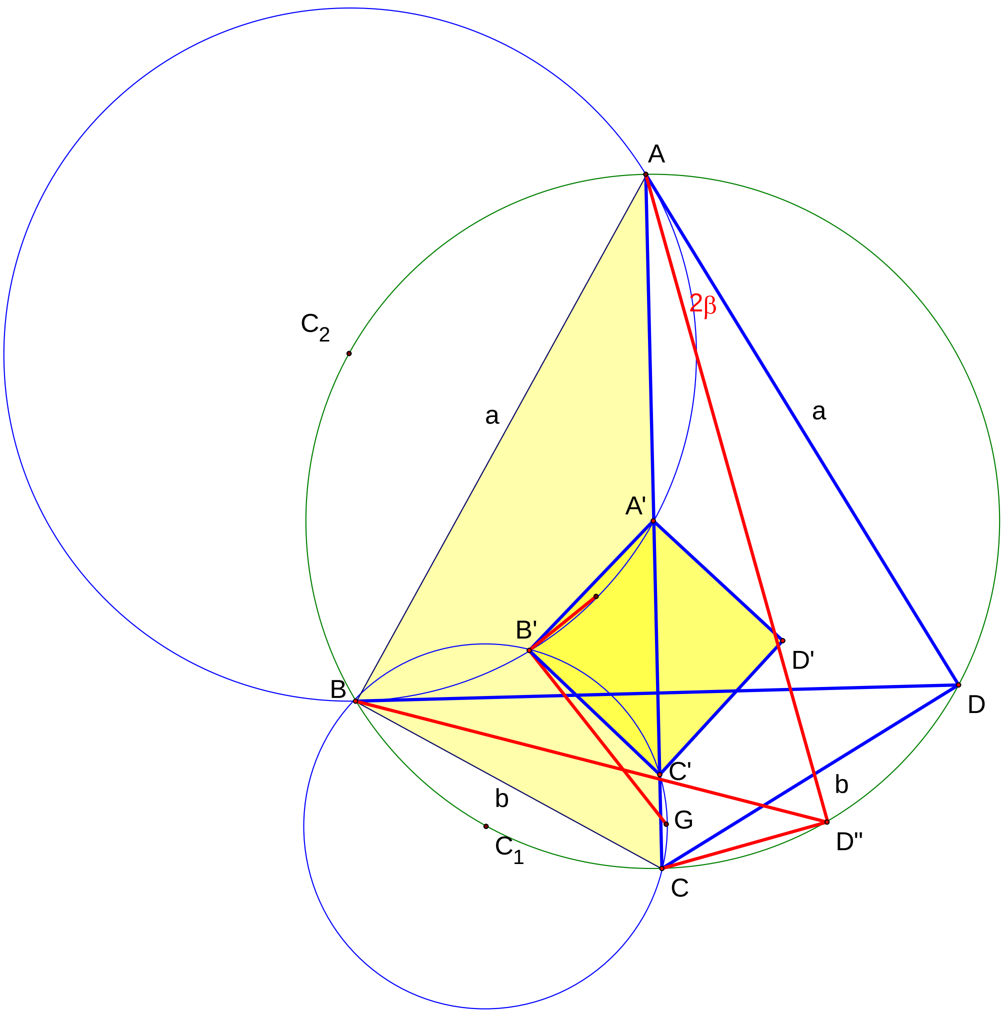
因此，$\dfrac{T}{t} \geq \dfrac{1}{3-2\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2}$，當$\theta = 45°$，等號成立。

而當$\theta \to 0°$或$\theta \to 90°$，$\dfrac{t}{T}$會越接近0，表示$\dfrac{T}{t}$會越來越大。

由此我們可發現，圓內接長方形與圓內接鳶形，在比值問題上的結果一樣。

接著，我們根據鳶形的基礎，試著將圓內接鳶形再作推廣。

三、其中一條對角線為直徑的四邊形：



如圖，我們將鳶形的$\overline{AD}$向左偏移2β，即$\overline{AD''}$，則G、F分別為$\Delta BCD''$、$\Delta ABD''$的內切圓圓心。

由於 B,B',C,C' 四點共圓且 B,B',C,G 四點共圓，故 B,B',C,C',G 五點共圓。
同理可知， A,A',B,B',F 五點共圓。

$\overline{B'F}$ 、 $\overline{B'G}$ 為圓的弦，亦即為內部矩形的長與寬。接著我們要求 $\overline{B'F}$ 、 $\overline{B'G}$ 的長度。

求 $\overline{B'F}$ 、 $\overline{B'G}$ 的長度前，我們先求 $\overline{B'G}$ 與 $\overline{B'C'}$ 的夾角。

$\angle DAC = \angle DBC = \theta$ ，由於 C' 為 ΔBCD 內心，故 $\angle C'BC = \angle C'B'C = \dfrac{\theta}{2}$

$\angle D''AC = \angle D''BC = \theta - 2\beta$ ，由於 G 為 $\Delta BCD''$ 內心，故 $\angle GBC = \angle GB'C = \dfrac{\theta}{2} - \beta$

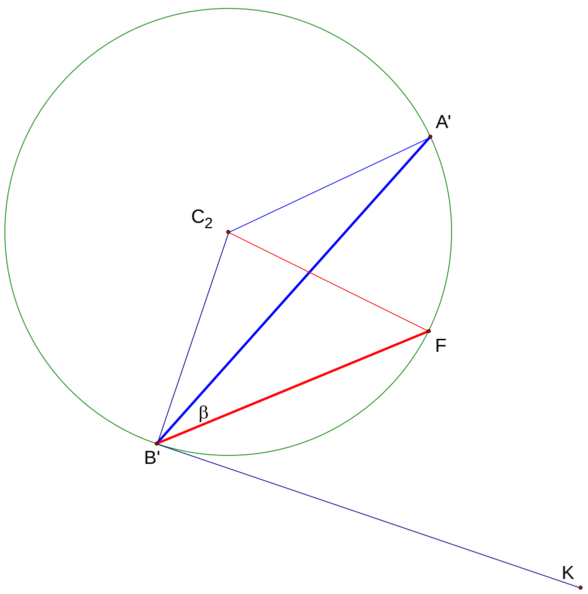
故 $\angle GB'C' = \angle CB'C' - \angle CB'G = \dfrac{\theta}{2} - (\dfrac{\theta}{2} - \beta) = \beta$ ，所以 $\overline{B'G}$ 與 $\overline{B'C'}$ 夾角為 β ，又因為

$\angle A'B'C' = \angle FB'G = 90°$ ，故 $\overline{A'B'}$ 與 $\overline{B'F}$ 夾角亦為 β 。

令 B,B',C,C',G 與 A,A',B,B',F 所形成的圓半徑分別為 r_1 與 r_2 ，接著我們分別來求 $\overline{B'F}$ 、 $\overline{B'G}$ 的長度。

$\overline{B'F}$ 長度：

為了方便觀察，我們將圓 C_2 獨立出來如圖所示。



令 B' 為切點，$\because 0 \le \beta < \dfrac{\theta}{2}$，故 $\angle A'B'K = \dfrac{\theta}{2}$，根據弦切角的性質，我們可以知道 $\angle A'C_2B' = \theta$ 。

而 $\angle FB'K = \dfrac{\theta}{2} - \beta$ ，同理可得 $\angle FC_2B' = \theta - 2\beta$

由餘弦定理可知，

$\overline{A'B'}^2 = r_2^{\ 2} + r_2^{\ 2} - 2r_2r_2\cos(\theta)$ ， $\overline{B'F}^2 = r_2^{\ 2} + r_2^{\ 2} - 2r_2r_2\cos(\theta - 2\beta)$

故可得

$\overline{B'F}^2 = \overline{A'B'}^2 \dfrac{1-\cos(\theta-2\beta)}{1-\cos(\theta)}$ ，即 $\overline{B'F} = \overline{A'B'}\sqrt{\dfrac{1-\cos(\theta-2\beta)}{1-\cos\theta}} = \overline{A'B'}\dfrac{\sin(\frac{\theta}{2}-\beta)}{\sin\frac{\theta}{2}}$

而

$$\overline{A'B'} = \sqrt{2}R(\cos\theta + \sin\theta - 1) = \sqrt{2}R(\cos(2\bullet\frac{\theta}{2}) + \sin(2\bullet\frac{\theta}{2}) - \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})$$

$$= \sqrt{2}R(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})$$

$$= 2\sqrt{2}R\sin\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2})$$

將 $\overline{A'B'} = 2\sqrt{2}R\sin\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2})$ 代入可得

$$\overline{B'F} = 2\sqrt{2}R(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2} - \beta)$$

$\overline{B'G}$ 長度：

令 $\overline{C_1B'}$ 與 $\overline{B'C}$ 夾角為 λ ，則

$\dfrac{\overline{B'C'}}{2} = r_1\cos(\frac{\theta}{2}+\lambda)$ ， $\dfrac{\overline{B'C}}{2} = r_1\cos(\lambda)$ ， $\dfrac{\overline{B'G}}{2} = r_1\cos(\frac{\theta}{2}+\lambda-\beta)$

故 $\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{B'C}} = \dfrac{\cos(\frac{\theta}{2}+\lambda)}{\cos(\lambda)} = \dfrac{\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\lambda) - \sin(\frac{\theta}{2})\sin(\lambda)}{\cos(\lambda)}$

$$= \cos(\frac{\theta}{2}) - \sin(\frac{\theta}{2})\tan(\lambda)$$

得 $\tan(\lambda) = \dfrac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} - \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{B'C}\sin(\frac{\theta}{2})}$

又 $\dfrac{\overline{B'G}}{\overline{B'C}} = \dfrac{\cos(\frac{\theta}{2}+\lambda-\beta)}{\cos(\lambda)}$ ，故可得

$$\overline{B'G}=\frac{\cos(\frac{\theta}{2}+\lambda-\beta)}{\cos(\lambda)}\overline{B'C}=[\frac{\cos(\frac{\theta}{2}+\lambda)\cos(\beta)+\sin(\frac{\theta}{2}+\lambda)\sin(\beta)}{\cos(\lambda)}]\overline{B'C}$$

$$=[\frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'C}}\cos(\beta)+\frac{\sin(\frac{\theta}{2}+\lambda)}{\cos(\lambda)}\sin(\beta)]\overline{B'C}$$

$$=\overline{B'C'}\cos(\beta)+\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\beta)\overline{B'C}+\tan(\lambda)\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\beta)\overline{B'C}$$

將 $\tan(\lambda)=\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}-\frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'C}\sin(\frac{\theta}{2})}$ 代入可得

$$\overline{B'C'}\cos(\beta)+\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\beta)\overline{B'C}+\tan(\lambda)\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\beta)\overline{B'C}$$

$$=\overline{B'C'}\cos(\beta)+\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\beta)\overline{B'C}+[\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}-\frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'C}\sin(\frac{\theta}{2})}]\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\beta)\overline{B'C}$$

$$=\overline{B'C'}\cos(\beta)+\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\beta)\overline{B'C}+\frac{\cos^2(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}\sin(\beta)\overline{B'C}-\frac{\overline{B'C'}}{\sin(\frac{\theta}{2})}\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\beta)$$

而

$$\overline{B'C'}=\overline{A'B'}=2\sqrt{2}R\sin(\frac{\theta}{2})[\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2})]$$

$$\overline{B'C}=2R\sqrt{1-\cos(\theta)}=2\sqrt{2}R\sin(\frac{\theta}{2})$$

故

$$\overline{B'G}=\overline{B'C'}\cos(\beta)+\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\beta)\overline{B'C}+\frac{\cos^2(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}\sin(\beta)\overline{B'C}-\frac{\overline{B'C'}}{\sin(\frac{\theta}{2})}\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\beta)$$

$$=2\sqrt{2}R[(\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2}))\sin(\frac{\theta}{2}-\beta)+\sin(\beta)]$$

故

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{\frac{1}{2}(2R\cos\theta 2R\sin\theta)+\frac{1}{2}[2R\cos(\theta-2\beta)2R\sin(\theta-2\beta)]}{\overline{B'G}\times\overline{B'F}}$$

$$=\frac{\sin 2\theta+2\sin(\theta-2\beta)\cos(\theta-2\beta)}{8\sin(\frac{\theta}{2}-\beta)(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})[(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2}-\beta)+\sin\beta]}=f(\theta,\beta)$$

於是，我們將面積的比值關係表示成θ、β的關係式。由於

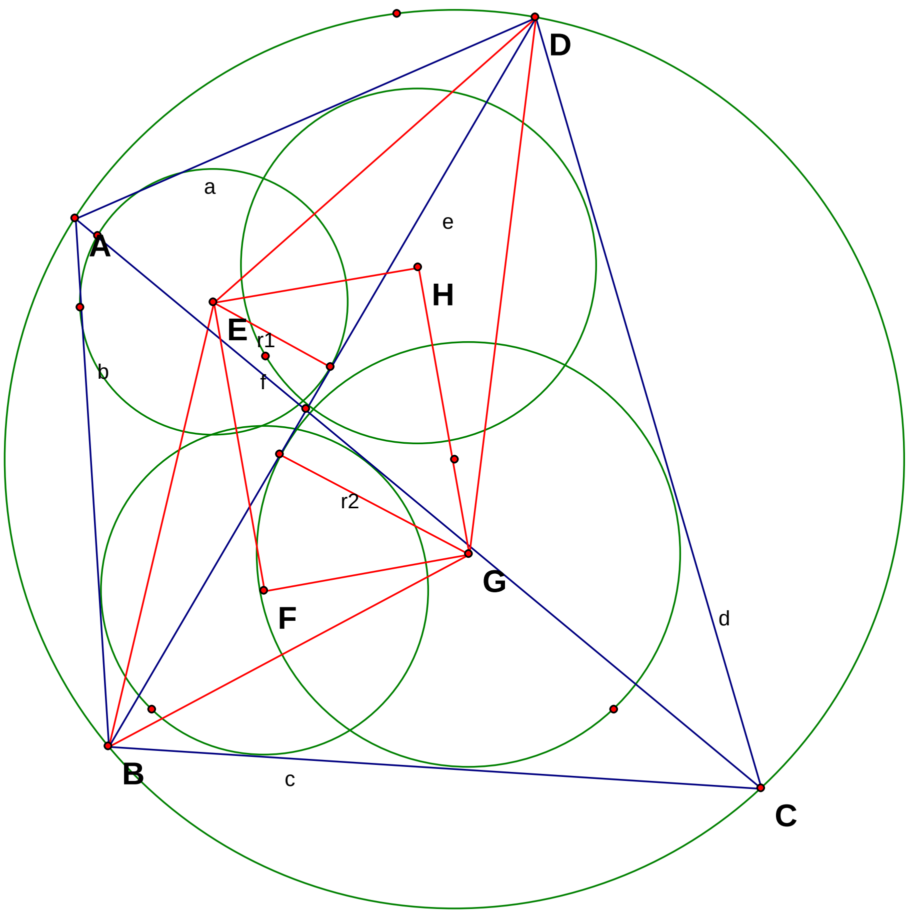
$$\frac{\sin 2\theta+2\sin(\theta-2\beta)\cos(\theta-2\beta)}{8\sin(\frac{\theta}{2}-\beta)(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})[(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2}-\beta)+\sin\beta]}$$

$$>\frac{\sin 2\theta}{8\sin(\frac{\theta}{2}-\beta)(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})[(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})+1]}$$

若將θ視為定數，隨著β越來越接近$\frac{\theta}{2}$，可知道整個比值會越來越大，故可知$f(\theta,\beta)$的最小值依然為$3+2\sqrt{2}$。

四、一般化的情形：

再來，我們討論一般化圓內接四邊形的情形：



如圖【15】，

令$\square ABCD = T$（$ABCD$四邊形面積），$\square EFGH = t$（$EFGH$四邊形面積），

$\overline{BD} = e$，$\overline{AC} = f$

則$\dfrac{T}{t} = \dfrac{(\overline{AB}r_1 + \overline{BD}r_1 + \overline{AD}r_1)\times\dfrac{1}{2} + (\overline{BD}r_2 + \overline{BC}r_2 + \overline{CD}r_2)\times\dfrac{1}{2}}{t}$

$\because \overline{AB} + \overline{AD} > \overline{BD}$且$\overline{BC} + \overline{CD} > \overline{BD}$

故$\dfrac{\dfrac{r_1}{2}(\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{AD}) + \dfrac{r_2}{2}(\overline{BD}+\overline{BC}+\overline{CD})}{t} > \dfrac{\dfrac{r_1}{2}(\overline{BD}+\overline{BD}) + \dfrac{r_2}{2}(\overline{BD}+\overline{BD})}{t}$

$= \dfrac{\overline{BD}(r_1+r_2)}{t} > \dfrac{\overline{BD}(r_1+r_2)}{\Delta BED + \Delta GBD}$

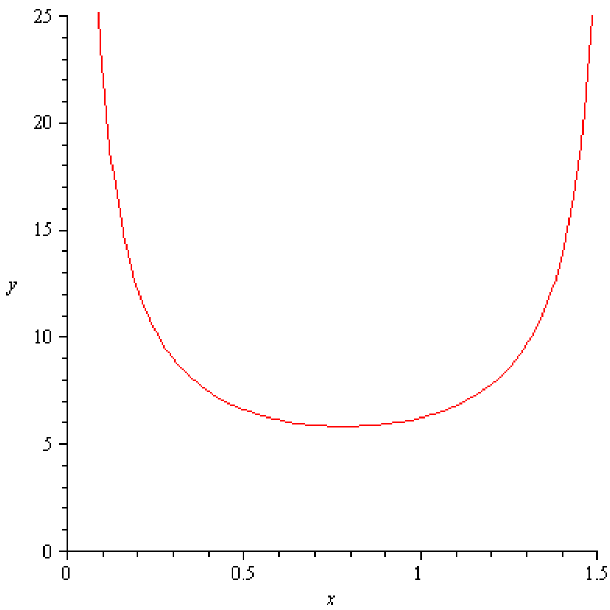
$= \dfrac{\overline{BD}(r_1+r_2)}{\dfrac{\overline{BD}r_1}{2} + \dfrac{\overline{BD}r_2}{2}} = \dfrac{\overline{BD}(r_1+r_2)}{\dfrac{1}{2}\overline{BD}(r_1+r_2)} = 2$

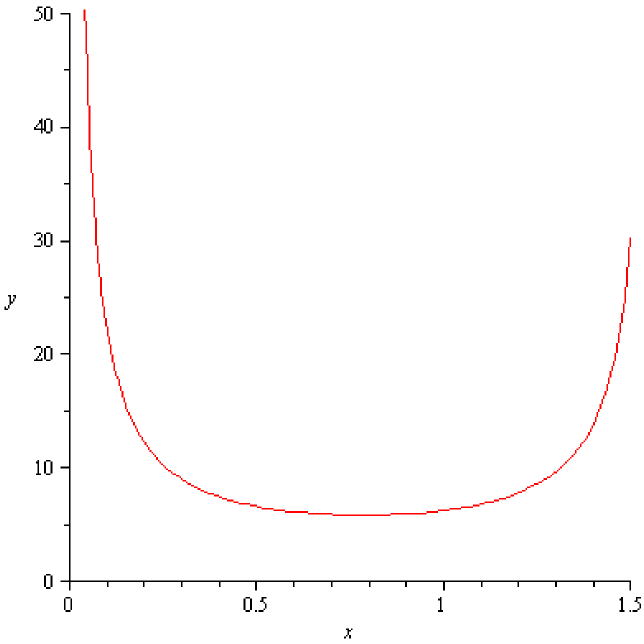
所以$\dfrac{T}{t} > 2$

柒、結論

一、由研究結果與討論，我們將其整理如下表格，並利用Maple作圖觀察其趨勢：

角度	$\theta = 45°$	$\theta = 30°$	$\theta = 15°$	$\theta = 10°$	$\theta = 8°$
比值關係（近似值）	5.83	6.46	9.90	13.60	16.45



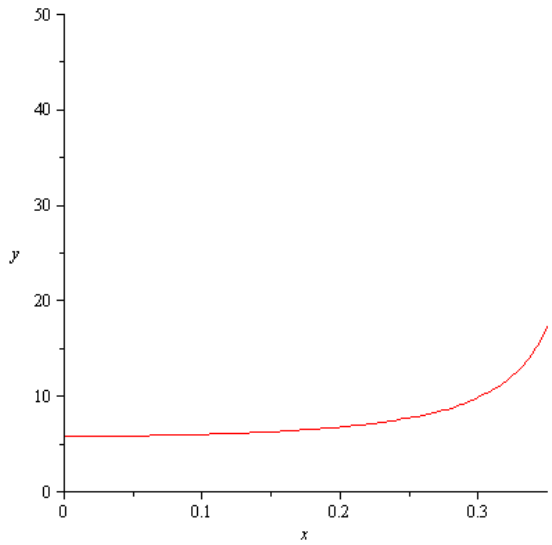


表格【二】

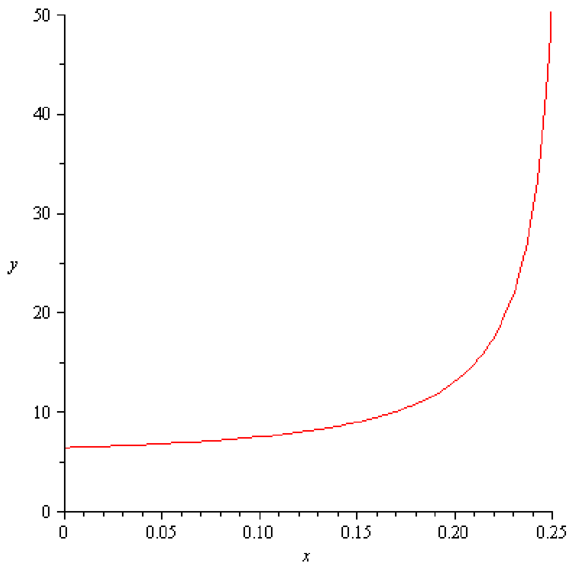
二、當$\theta \to 0°$（或$\theta \to 90°$），其比值有越來越大的趨勢，而我們最後討論也證實這個結果。而鳶形可透過切割翻轉拼成一個長方形，所以圓內接鳶形以及長方形，都適用我們的結果。

三、我們將鳶形的情形其中一邊內縮2β，我們將其面積比值關係利用數學軟體（Maple）計算結果如下，並利用繪圖觀察趨勢：

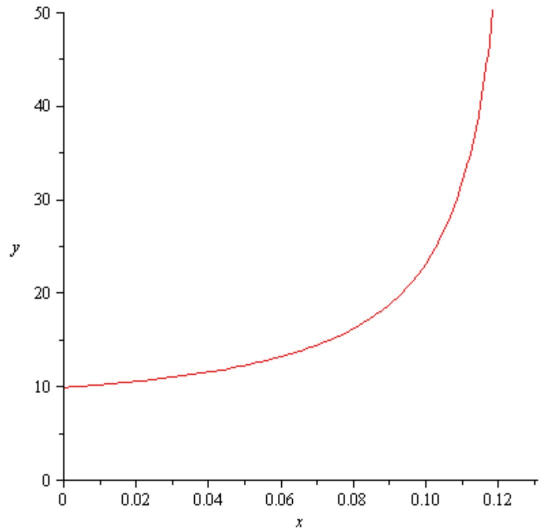
	$2\beta = 0°$	$2\beta = 20°$	$2\beta = 30°$	$2\beta = 40°$
$\theta = 45°$	5.83	6.48	8.06	16.997



	$2\beta=0°$	$2\beta=10°$	$2\beta=18°$	$2\beta=20°$
$\theta=30°$	6.46	7.32	9.34	10.41



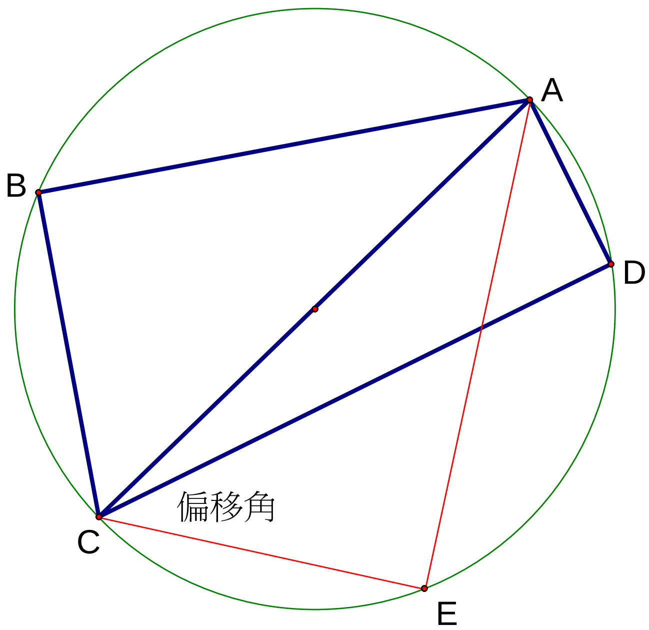
	$2\beta=0°$	$2\beta=4°$	$2\beta=10°$	$2\beta=12°$
$\theta=15°$	9.90	11.28	17.98	26.39



表格【三】

如此一來，$2\beta=0°$ 的情形即為鳶形的情形，同時也發現偏移角度越大，整個面積比值越大。

更進一步的說，我們將圓內接四邊形推廣到更一般的情況。也就是說圓內接四邊形其中一條對角線是直徑，皆適用我們的結果。



舉例來說，如圖，給定一個其中對角線為直徑的內接四邊形 $ABCD$，我們只要將 D 移到 E，使 $ABCE$ 為圓內接鳶形，就可知道其偏移角度，便可利用我們得到的比值函數關係將角度代入，即可知道比值關係。簡單來說，只要計算 $\angle ACB$ 、 $\angle ACD$ 的差，比值便可求出來。

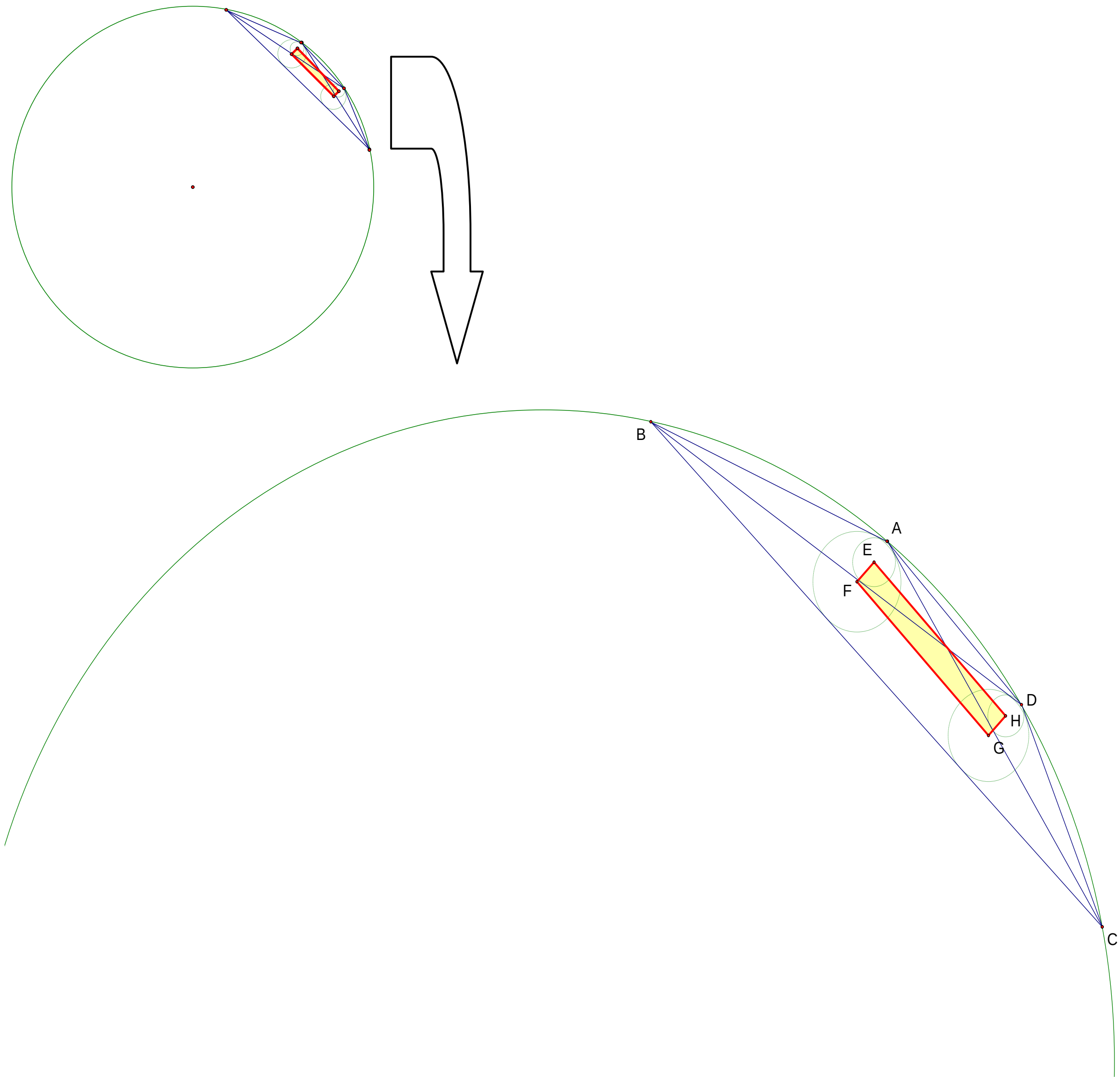
而我們的結果也有日常生活的應用：
一個圓形庭院，欲在圓形庭院建造一個矩形泳池，而泳池外邊希望舖設一塊圓內接四邊形的防滑區域，基於特殊需求，希望此防滑區域（含泳池），與泳池的比例希望是 $8:1$，請問可以如何設計這泳池與防滑區域？
【設計方法】

我們可以依據 $f(\theta,\beta)=\dfrac{\sin 2\theta+2\sin(\theta-2\beta)\cos(\theta-2\beta)}{8\sin(\frac{\theta}{2}-\beta)(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})[(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2}-\beta)+\sin\beta]}$

這個函數來設計。參考表格【三】我們可知道，在 $\theta=15°$ 時，比值絕對超過 8，但是在 $\theta=30°\sim45°$ 時，包含比值 8 的情形。故我們可以先固定 θ （ $\theta=30°\sim45°$ ），再去找 β 值，找出的這對 θ,β，便可利用尺規作圖將其畫出。當然這對 θ,β 並不唯一，可依照客戶的需求來做不同的設計。（當然更快的方法就是丟到Maple去計算）

然而我們的比值有個限制，那就是要大於 $3+2\sqrt{2}$ 。

另外，從函數式子也可觀察到 2β 越接近 θ，整個比值會趨近於無窮大，也就是說其中一點越靠值近的端點，比值會無窮大。但是若為四個點越靠近似乎就沒有這樣的趨勢（如圖【16】）。關於這一點，我們尚未能夠證明。



$$\frac{T}{t}=\frac{ABCD}{EFGH}=7.91$$

圖【16】

四、至於任意四邊形，透過表格【一】，似乎也有比值關係。我們試著透過圓內接四邊形的海龍公式及任意三角形的內切圓公式來討論：

如圖【15】，由任意三角形內切圓半徑公式以及圓內接四邊形海龍公式可得

$$r_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-e)(b+e-a)(a+e-b)}{a+b+e}}$$

$$r_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c+d-e)(d+e-c)(c+e-d)}{c+d+e}}$$

$$T=\sqrt{\frac{a+b+c-d}{2}\times\frac{b+c+d-a}{2}\times\frac{a+b+d-a}{2}\times\frac{a+c+d-b}{2}}$$

而 $r_1r_2 < EFGH$ ，故

$$\frac{T}{t} < \frac{\sqrt{\frac{a+b+c-d}{2} \times \frac{b+c+d-a}{2} \times \frac{a+b+d-a}{2} \times \frac{a+c+d-b}{2}}}{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(a+b-e)(b+e-a)(a+e-b)(c+d-e)(d+e-c)(c+e-d)}{(a+b+e)(c+d+e)}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c-d)(b+c+d-a)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(a+b+e)(c+d+e)}{(a+b-e)(b+e-a)(a+e-b)(c+d-e)(d+e-c)(c+e-d)}}$$

而這個式子在處理上，我們遭遇到許多處理上的困難，且並非所有內接四邊形都 $r_1r_2 < EFGH$ 的關係。

五、由討論的第三個部分，對於任意內接四邊形，皆有 $\frac{T}{t} > 2$ 。然而在做式子的處理上，已經用到兩次不等關係，導致最後的結果不是那麼好。而GSP計算的結果以及我們針對鳶形與對角線為直徑的四邊形的討論結果，也驗證了其算出的比值幾乎都跟 2 有很大的差距。

故目前還在嘗試其他更好的方法。所以針對任意多邊形，尚未有一個好的結果。

捌、參考資料及其他

一、劉步松，圓內接多邊形的一個性質，數學傳播34卷4期, pp .83~86

二、高中數學第三冊，翰林版，第一章三角

三、國中數學第四冊，翰林版，第三章三角形的基本性質

#【評語】030417

本研究分別探討在特定角度下圓內接鳶形、矩形與其所構出的四個內切圓心所形成四邊形的邊長比值關係。未來若能接續探討其他常見的特殊四邊形，或許會有意外收穫。