中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030416

旋圓轉方

－由四邊形壓縮過程分析邊長組合與軌跡位置

學校名稱：臺中市立漢口國民中學

作者：	指導老師：
國二 馬維彥 國二 陳淨蓮	馬應智

關鍵詞：四邊形、面積、位置

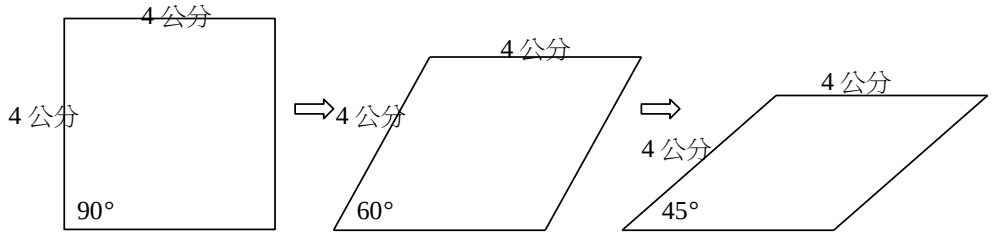
摘　要

利用曾學過的面積與距離公式、面積變換、相似多邊形、比例及二次函數及未接觸過的三角函數及總和公式(Σ)等觀念，利用逐步推導的方式探索不同邊長比的多邊形在壓縮退化過程中面積變化的狀況，在不同的壓縮角度下，各頂點會有不同的位置，隨著頂點位置的不同，面積會有不同的變化(如下圖 2 所示)，而且在壓縮過程中，由於邊長的比例不同，可能遭遇到頂點位置產生共軛的情況(如下圖 3 所示)，這將會影響多邊形面積求算的結果，過程中透過 Microsoft Excel 及繪圖軟體的運算分析來互相驗證上述的導證結果。

壹、 研究動機

在閱讀國中三年級的數學時，有個題目是這麼寫道：「如下圖1所示，邊長4公分的正方形ABCD：(1)∠B若變為60°時，面積會變成多少？($8\sqrt{3}$ 平方單位) 面積是原來正方形的若干倍？($\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍，約0.866倍) (2)∠B若變為30°時，面積會變成多少？($8\sqrt{2}$ 平方單位) 面積是原來正方形的若干倍？($\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍，約0.707倍)，面積呈現逐漸變小的情況。

我們覺得這個題目既簡單又有趣，於是想將此正方形連續壓縮，並逐一探討面積的變化情形，更想知道若不是正方形，不同邊長比的四邊形或多邊形如果也作如此壓縮時，是否也有面積變化的公式？ 因為以上的問題，我們才一起研究，思考如何解答這個問題。



貳、 研究過程與方法

一. 文獻回顧

找出四邊形可能存在之組合型態的過程稱為分支辨識（Branch identification），多年來許多學者致力於各類多邊形的分支辨識。像是Waldron(1976, 1977, 1979)利用圖解法探討分支的構成原理與幾何特徵，提出分支的代數判別式；然而當機構的分支方程式較複雜時，這個法則便無法使用；所以Yan和Chiou(1987)應用位置分析閉合解的形式進行分支辨識。Krishnamurty和Turcic(1988)運用分支限制條件中，矩陣行列式值的正負號，作為判斷平面多邊形的分支指標，但是這個方法只適用於能以解析法推導出位置分析閉合解的圖形。車(1991)藉由將平面多邊形的鄰接頂點拆開形成頂點路徑，探討多邊形指定輸入各邊位置後最大可能的分支數目。Waldron 和Sreennivasan(1996)，針對八邊形，拆開它的某些特定頂點，在不同邊長運動路徑之交點數，預測最大可能的分支數目；Ting和Dou(1996)利用兩不同邊長組合間同一頂點的可旋轉性(Rotatability)，進行平面六邊形之分支辨識。張(2000)利用連續法(Continuation method)先求得多邊形不能再旋轉之死點，再於被死點所分割之區間進行位置分析，以完成機構完整的迴路分析，接著再進行分支辨識。

上面數學家先後提出的理論對我們的研究目的而言，可能陳義過高，我們的目的是要從面積變化中找出邊長的組合形態，因為**在實體結構中，面積可能含有能量的意義，而良好的邊長配合可將這些能量加以適當的釋放或貯存**，因此上述研究對我們後續的分析過程確有指導性的影響，以下我們將利用多邊形的壓縮過程實際地來鑑別多邊形的邊長組合與旋轉死點。

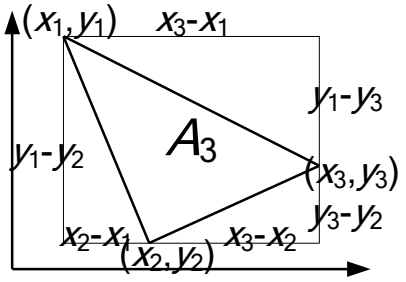
二. 任意多邊形的面積

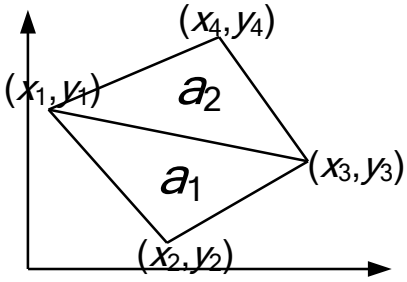
根據上述我們的研究目的，多邊形面積的求取是我們的主要目的，所以我們在這裡先導證出封閉面積公式，封閉面積的主要已知數是四個頂點的座標，在座標已知的情況下，可利用此公式求得面積的大小。

首先我們導出三角形的面積公式如下：設一平面上的三頂點座標為(x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3)，所以封閉面積的三角形A = 大長方形 − 三個小三角形。

大長方形長 = 最右邊的x座標 − 最左邊的x座標

大長方形寬 = 最上面的y座標 − 最下面的y座標





1. 三角形面積：參照左上圖可知，中央三角形的面積應為矩形扣除左下、右下及右上三角形面積：

$$A_3=(x_3-x_1)(y_1-y_2)-\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_1-y_2)+(x_3-x_2)(y_3-y_2)+(x_3-x_1)(y_1-y_3)]$$

$$=x_3y_1-x_3y_2-x_1y_1+x_1y_2-\frac{1}{2}[x_2y_1-\boxed{x_2y_2}-x_1y_1-x_1y_2+\boxed{x_3y_3}-x_3y_2-x_2y_3+\boxed{x_2y_2}+x_3y_2-\boxed{x_3y_1}-x_1y_1+x_1y_3]$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16)

$$=\frac{1}{2}x_1y_2+\frac{1}{2}x_3y_1+0-\frac{1}{2}x_3y_2-\frac{1}{2}x_2y_1+0+0+\frac{1}{2}x_2y_3-x_1y_1$$

$\boxed{(4)(8)}$ $\boxed{(1)(13)}$ $\boxed{(3)(7)(15)}$ $\boxed{(2)(10)}$ $\boxed{(5)}$ $\boxed{(6)(12)}$ $\boxed{(9)(14)}$ $\boxed{(11)}$ $\boxed{(16)}$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

2. 四邊形面積：參照右上圖可知，四邊形的面積應為上、下兩三角形的面積組合而成，故有：

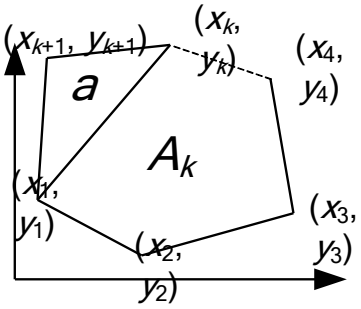
$$A_4=a_1+a_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3)+\frac{1}{2}(x_1y_3+x_3y_4-x_4y_1-x_3y_1-x_4y_3-x_1y_4)$$

$$=\frac{1}{2}(\underset{(1)}{x_1y_2}+\underset{(2)}{x_2y_3}+\underset{(5)}{x_3y_4}+\underset{(6)}{x_4y_1}-\underset{(3)}{x_2y_1}-\underset{(4)}{x_3y_2}-\underset{(7)}{x_4y_3}-\underset{(8)}{x_1y_4})=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

3. 利用k邊形面積推測$(k+1)$邊形面積

觀察三角形與四邊形的面積公式後，我們可以推測：所有 n 邊形的面積公式，都是與上面的行列式形態相同，具有繞乘周邊頂點行列式值的一半之形式，所以利用數學歸納法來證明我們的想法。



假設 k 邊形面積：

$$A_k=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{k-1} & x_k & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{k-1} & y_k & y_1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\,|\,x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+\ldots+x_{k-1}y_k+x_ky_1-x_2y_1-x_3y_2-x_4y_3-\ldots-x_ky_{k-1}-x_1y_k\,|$$

則$(k+1)$邊形面積：

$$A_{k+1}=A_k+a=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{k-1} & x_k & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{k-1} & y_k & y_1 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_k & x_{k+1} & x_1 \\ y_1 & y_k & y_{k+1} & y_1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\,|\,x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+\ldots+x_{k-1}y_k+x_ky_1-x_ky_1+x_ky_{k+1}+x_{k+1}y_1$$
$$-x_2y_1-x_3y_2-x_4y_3-\ldots-x_ky_{k-1}-x_1y_k+x_1y_k-x_{k+1}y_k-x_1y_{k+1}\,|$$

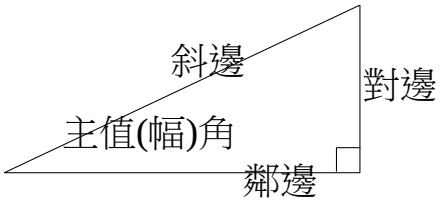
$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{k-1} & x_k & x_{k+1} & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{k-1} & y_k & y_{k+1} & y_1 \end{vmatrix}$$

歸納上述推測可得：任意 n 邊形的面積大小皆為 $A_n = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$ 。

三. 轉動角度與頂點位置

要研究轉動角度跟位置的關係，我們必須要用到三角函數，三角函數是定義於直角三角形中，由於參考角的斜邊、對邊、鄰邊三邊所形成之比例有六個，因此也有六個三角函數：

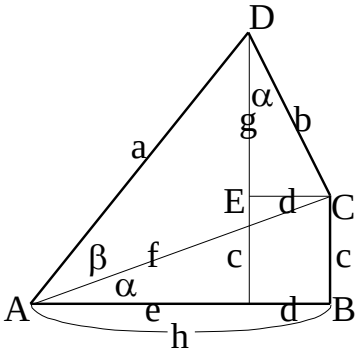
$$\sin A=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}；\cos A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}；\tan A=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}；\cot A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}；\sec A=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}；\csc A=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$$

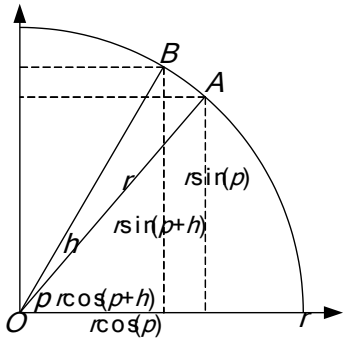


因為我們想知道當角度增加一點點的時候，位置會跑到甚麼地方，所以我們也會用到角度和的三角函數：

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{g+c}{a} = \frac{b}{a}\times\frac{g}{b} + \frac{f}{a}\times\frac{c}{f} = \sin\beta\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{h-d}{a} = \frac{f}{a}\times\frac{h}{f} + \frac{b}{a}\times\frac{d}{b} = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$





將等邊多邊形的某個邊，繞其頂點作旋轉，如圖，如果原來與參考座標的角度是 p，因此，OA 線段即為這個邊的瞬間位置，A 點之座標為：

$A(r\cdot\sin p, r\cdot\cos p)$

將這個邊繞頂點 O 旋轉角度 h 後，OB 線段此時即為這個邊的瞬間位置，因此，B 點之座標為：

$B(r\cdot\sin(p+h), r\cdot\cos(p+h))$

兩者由於旋轉角度 h 所引起的位置差變成

$$\overline{AB} = r\sqrt{(\sin(p+h)-\sin p)^2 + (\cos(p+h)-\cos p)^2}$$

這樣的結果可以讓我們求得繞旋轉點最近的第一個頂點位置，但對於第二個頂點位置就沒那麼好求得了!

參考左下圖所示，我們可以將△ABC 切割成兩個直角△ABD 與△ACD，將 ∠B 與 ∠C 之餘弦以邊長表出，可得：

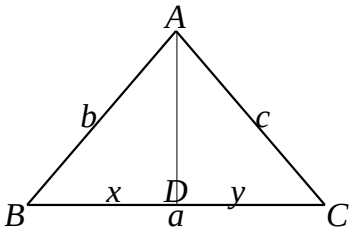
$$\left.\begin{array}{l}\cos B = \dfrac{x}{c} \Rightarrow x = c\cdot\cos B \\ \cos C = \dfrac{y}{b} \Rightarrow y = b\cdot\cos C\end{array}\right] \Rightarrow a = b\cdot\cos C + c\cdot\cos B，$$

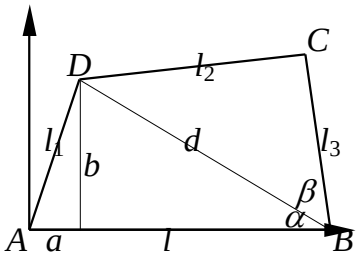
同理可得：$b = a\cdot\cos C + c\cdot\cos A$；$c = a\cdot\cos B + b\cdot\cos A$

$$\begin{array}{rll} a = b\cdot\cos C + c\cdot\cos B & (\times a) \\ +)\ b = a\cdot\cos C + c\cdot\cos A & (\times b) \\ -)\ c = a\cdot\cos B + b\cdot\cos A & (\times c) \\ \hline a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cdot\cos C & \end{array}$$

當我們要求第三邊時，可將上式改成 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C$

當我們要求第三角時，可將上式改成 $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$





如右上圖，在給予 $\angle A$ 的大小後，首先必須要能從$|AB|=l$、$|AD|=l_1$ 已知的條件下，求得第三邊 $|BD|=d$ 的長度，利用「餘弦定理」恰可解決這個問題，我們將 $\angle A$ 視為輸入的條件，在 $\angle A$ 已知的情況下，我們可以求得 BD 長度 d 與 $\angle\alpha$，即：

$$d^2 = l^2 + l_1^2 - 2\cdot l\cdot d\cdot\cos A$$

$$\cos\alpha = \frac{l^2 + d^2 - l_1^2}{2ld}$$

求得 BD 長度 d 與 $\angle\alpha$ 後，以相同方法求得 $\angle\beta$，即：

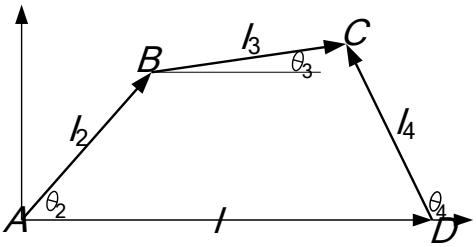
$$\cos\beta = \frac{l_3^2 + d^2 - l_2^2}{2l_3 d}$$

因此，我們可對四個頂點定位如下：

當原點為 $A(0, 0)$時，$D(a, b) = D(l_1\cos A, l_1\sin A)$，$B$ 點座標為 $B(l, 0)$，而 D 點之座標為 $D(l-l_3\cos(\alpha+\beta), l_3\sin(\alpha+\beta))$。

也許，這樣的答案是差強人意的，因為每一步驟都需依靠前面所求出的解來代入，這樣雖然在公式的導證上很方便，但是實際上，卻不能由開始的條件，直接求出最後目的變數的值，因此，我們想到利用下面方法開始求解。

如圖之平面四邊形，在角度 θ_2 固定後，各頂點位置是呈現確定性的：



我們觀察到 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 可形成一個封閉的形狀，這意味著 x 座標從 A 點出發後，最

後又回到 A 點，y 座標也是這樣，因此：

將各頂點 x 座標的進退表成：$l_2\cos\theta_2 + l_3\cos\theta_3 - l_4\cos\theta_4 - l = 0$

y 座標的進退表成：$l_2\sin\theta_2 + l_3\sin\theta_3 - l_4\sin\theta_4 = 0$

將 x 座標寫成：$l_3\cos\theta_3 = l + l_4\cos\theta_4 - l_2\cos\theta_2$

將 y 座標寫成：$l_3\sin\theta_3 = l_4\sin\theta_4 - l_2\sin\theta_2$

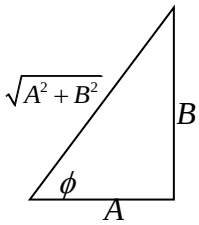
將兩式平方相加後可得：

$$l_3^2 - l_4^2 - l_2^2 - l^2 + 2ll_2\cos\theta_2 = 2l_4(l - l_2\cos\theta_2)\cos\theta_4 + (-2l_2l_4\sin\theta_2)\sin\theta_4$$

因為 θ_2 為已知，故可將 $A \equiv 2l_4(l - l_2\cos\theta_2)$；$B \equiv -2l_2l_4\sin\theta_2$；$C \equiv l_3^2 - l_4^2 - l_2^2 - l^2 + 2ll_2\cos\theta_2$

則原式變為：$A\cos\theta_4 + B\sin\theta_4 = C$，將全式同除以 $\sqrt{A^2+B^2}$

$$\Rightarrow \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\theta_4 + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\theta_4 = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



參考右圖可化為：$\cos\phi\cos\theta_4 + \sin\phi\sin\theta_4 = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$\Rightarrow \cos(\theta_4 - \phi) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ ，其中 $\phi = \tan^{-1}\dfrac{B}{A}$

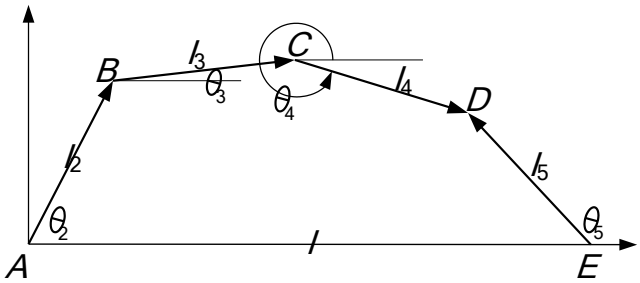
故求得 $\theta_4 = \phi \pm \cos^{-1}\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ，代入 x 與 y 座標式，可求得：$\theta_3 = \tan^{-1}\dfrac{l_4\sin\theta_4 - l_2\sin\theta_2}{l + l_4\cos\theta_4 - l_2\cos\theta_2}$ ，至此所有端點均可確定。

在邊長皆已確定為 r 的正方形之情況下，上面兩個角度將演變成下面的形式：

$$\theta_4 = \phi \pm \cos^{-1}\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\ (A = 2r^2(1-\cos\theta_2)；B = -2r^2\sin\theta_2；C = 2r^2(\cos\theta_2 - 1))$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\frac{\sin\theta_4 - \sin\theta_2}{1 + \cos\theta_4 - \cos\theta_2}$$

對於如下圖的平面五邊形，我們也能利用上述的方法求解，但這樣的方程式需要更多的已知條件，正五邊形的面積變化通常需要兩個已知，若將 θ_2 固定，則 B、C、D、E 就能形成四邊形，θ_3 角若設定為已知條件，C、D 兩點位置即可依據上述四邊形的方法確定之。

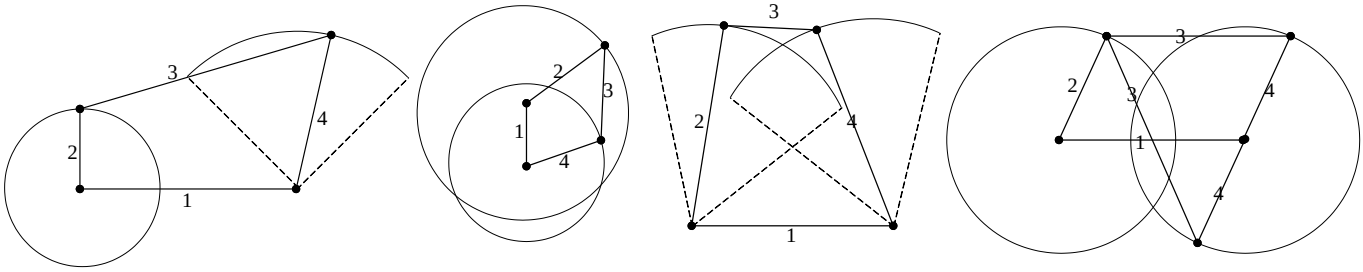


四. 四邊形可轉動性的探討

四邊形是否可旋轉，端視各邊長的比例而言，對於四邊形而言，根據機械工學中的葛拉索準則：

1. 當最短邊與最長邊的和小於其他兩邊的和時，則至少存在一個邊可作完整的旋轉運動：
   (1) 若將鄰近最短邊之邊長固定，利用最短邊旋轉，可形成曲柄搖桿形式之轉動。
   (2) 若直接將最短邊固定，利用其它邊旋轉，可形成雙曲柄形式之旋轉。
2. 當最短邊與最長邊的和大於其他兩邊的和時，則無任何一邊可作完整的旋轉運動，如此將形成雙搖桿形式之擺動。

3. 變點四邊形：當最短邊與最長邊的和等於其他兩邊的和時，無論四邊形任一邊固定，皆可讓其它邊長旋轉，並可將面積壓縮至0。



曲柄搖桿　　雙曲柄　　雙搖桿　　變點四邊形

五. 多邊形壓縮旋轉的轉動假設

在四邊形的案例中，各邊之間所形成的夾角是確定的，即：

$$\theta_2：\theta_3：\theta_4 = \theta_2：(\tan^{-1}\frac{l_4\sin\theta_4 - l_2\sin\theta_2}{l + l_4\cos\theta_4 - l_2\cos\theta_2})：(\phi \pm \cos^{-1}\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}})$$

但在多邊形案例中，若已知條件給的不夠，各邊夾角變成不能確定，此時必須給定足夠的角度限制，否則將形成混沌擺模式之多邊形。

基於以上的問題，對於一個具有n個未知數的n邊形，我們每次給定(n–3)個已知條件，便可求解其它未知數，例如：四邊形有4個未知的待求變數—B點座標、C點座標、θ_3、θ_4，我們只需給定1個已知條件—θ_2，便可求解其它未知數；五邊形有5個未知的待求變數—B點座標、C點座標、D點座標、θ_4、θ_5，我們需給定2個已知條件—θ_2、θ_3，才能求解其它未知數。

在假設過程中，當給定條件造成求出之根為虛數時，表示頂點無法走到這個位置上，這樣不同的給定條件將可形成此多邊形在壓縮過程的可行區域，並配合得到不同的面積。

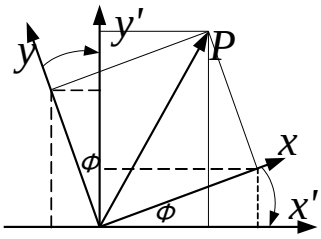
六. 四邊形旋轉邊長上任意點的位置軌跡

為了更快速地得到四邊形頂點位置，在這裡我們加入利用矩陣所作成的「座標移動」及「座標轉動」方法。

在二維平面的情況，座標的移動可藉由3×3的「移動矩陣」來完成，當一點$P(x, y)$欲平移到$P'(x+a, y+b)$時，可將「移動矩陣」之形式表現如下：

$$T(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如此座標矩陣後之位置可寫成：$P' = T(a,b)\cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix}$，其中，第三列是虛列座標，提供加入移動量常數之用。



相對於「移動矩陣」，「轉動矩陣」是比較複雜的，在二維平面的情況下，一點$P(x, y)$對z-軸逆時針轉動ϕ角，轉動矩陣可表達成：

$$R(\phi)=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$$

若有一點 $P(x, y)$欲對 z-軸逆時針轉動 ϕ 角時，可視為座標軸順時針轉動 ϕ 角，旋轉形式表現如下：

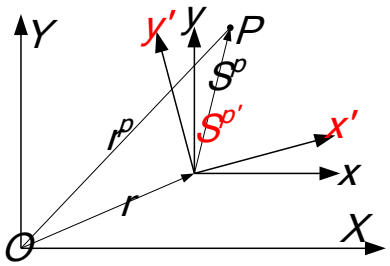
$$P'=R(\phi)\cdot P=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\phi-y\sin\phi\\ x\sin\phi+y\cos\phi\end{bmatrix}$$

為使「轉動矩陣」及「移動矩陣」能同時作用，轉動矩陣需更改成為 3 列 3 行的型態，故座標系逆時針旋轉 ϕ 角，轉動矩陣變為： $R(\phi)=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

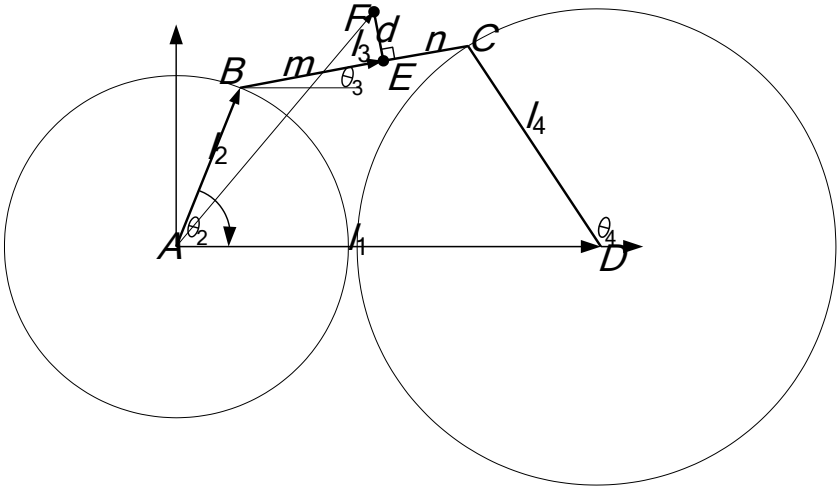
為使平面上的任意點皆能在任何座標系統中變換，我們必須建立一套利用上面「移動矩陣」，「轉動矩陣」所作成的變換通用數學式。

如圖，固定在移動座標系上特定點 P 的位置，其位置描述為：$r^P = r+S^P$，即點 P 在大座標系統(X-Y)的位置 r^P 等於在小座標系統(x-y)的位置 S^P 再加上小座標系統相對於大座標系統的位置 r。

上述的小座標系統(x-y)對於大座標系統(X-Y)是沒有旋轉的，當小座標系統轉動至新座標系統(x'-y')時，位置轉換式將描述為：$r^P = r+R(\phi)S'^P$，即點 P 在相對座標系(x-y)的位置 S^P 等於在後來旋轉座標系(x'-y')中的位置 S'^P 經由轉動矩陣 $R(\phi)$轉換而來。



有了上述的「工具」後，我們試圖來分析四邊形上任意一點在壓縮過程的位置軌跡，參考下圖可知，第1邊l_1是固定不動的，第2與第4邊若能全圓旋轉，則邊上任意點的軌跡將呈現繞著A、D兩點作圓周運動的型式，唯一可能造出「非基本圖形軌跡」的動態點應該位在第三邊上。



將個點座標表示如下：$A(0, 0)$、$B(l_2\cos\theta_2, l_2\sin\theta_2)$、$C(l_2\cos\theta_2+l_3\cos\theta_3, l_2\sin\theta+l_3\sin\theta_3)$、$D(l_1, 0)$，因為$E$點為$B$、$C$兩點上之分點，以分點公式可求出其座標為：

$$E\left(\frac{m(l_2\cos\theta_2+l_3\cos\theta_3)+n\cdot l_2\cos\theta_2}{m+n},\frac{m(l_2\sin\theta_2+l_3\sin\theta_3)+n\cdot l_2\sin\theta_2}{m+n}\right)\equiv(E_x,E_y)$$，其中

$$\theta_3=\tan^{-1}\frac{l_4\sin\theta_4-l_2\sin\theta_2}{l+l_4\cos\theta_4-l_2\cos\theta_2}$$

$$\theta_4=\phi\pm\cos^{-1}\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$，$A\equiv 2l_4(l_1-l_2\cos\theta_2)$；$B\equiv -2l_2l_4\sin\theta_2$；$C\equiv l_3^2-l_4^2-l_2^2-l_1^2+2l_1l_2\cos\theta_2$

垂直衍生點F點可利用座標系統變換求得：

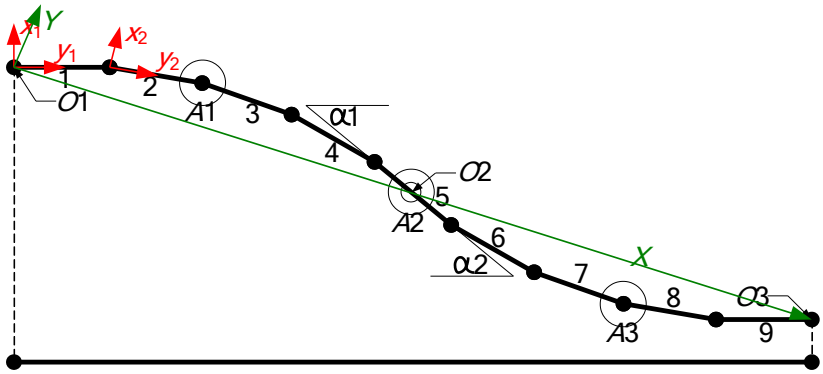
$$F=T(-d\sin\theta_3,d\cos\theta_3)E=T(0,d)T\left(\frac{ml_3}{m+n}\cos\theta_3,\frac{ml_3}{m+n}\sin\theta_3\right)B$$

$$F=\begin{bmatrix}1&0&-d\sin\theta_3\\0&1&d\cos\theta_3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&\frac{ml_3}{m+n}\cos\theta_3\\0&1&\frac{ml_3}{m+n}\sin\theta_3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_2\cos\theta_2\\l_2\sin\theta_2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{m(l_2\cos\theta_2+l_3\cos\theta_3)+n\cdot l_2\cos\theta_2}{m+n}-d\sin\theta_3\\\frac{m(l_2\sin\theta_2+l_3\sin\theta_3)+n\cdot l_2\sin\theta_2}{m+n}+d\cos\theta_3\\1\end{bmatrix}$$

如此固定於第三邊垂直方向上的衍生點亦可隨四邊形的壓縮運轉產生特定之運轉軌跡。

七. 端點固定開放多邊形任意點的位置軌跡

平面上端點固定開放等邊多邊形，邊長由初始段轉換到目最終段是利用前後兩段的側向轉動所達成，在實體上，考慮如圖之端點固定開放等邊多邊形，在兩端$O1$到$O3$兩端固定之下，各邊以緊張、漸進、最大定量轉折的方式聯結，如果固定於兩端之節段彼此夾角為0，則曲線的中央點可看作是反曲點，若是左端節段沒有回正，那麼反曲點將向左端靠近，反之亦然。



若邊數為奇數，最中央邊中點即為反曲點，但因該段為直線，故圖面上呈現最大斜率狀態；相反地，若邊數為偶數，則反曲點為中央點。

上述兩種情況，皆可利用「轉動矩陣」及「移動矩陣」，找到各節頂點的位置，我們假設第一邊固定端為原點，向另一端為 x_1 軸，垂直軸向為 y_1 軸，為了轉換至第二邊左端點，必須將座標系向右移動一個節距 p，即：

$$S_2=T(p)S_1=\begin{bmatrix}1&0&p\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}_{\text{虛列}}=\begin{bmatrix}p\\0\\1\end{bmatrix}$$，故第二節原點在$(p,0)$

欲轉移至第三邊，須先將座標系順時針旋轉一個角度 θ，因其為順時針旋轉，故旋轉角應為$-\theta$，然後再將座標系向右移動一個邊長 p，即：

$$S_3=T(p)R(-\theta)S_2=\begin{bmatrix}1&0&p\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-\theta)&-\sin(-\theta)&0\\\sin(-\theta)&\cos(-\theta)&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\cos\theta+p\\-p\sin\theta\\1\end{bmatrix}$$

以此類推，可逐節找出各頂點座標，在找出最終固定點後，再以原來出發固定點與末固定點作成廣義座標系統(如上圖中所示)，將各點對此廣義座標軸加以旋轉，便可求到各頂點在廣義座標系統之座標。

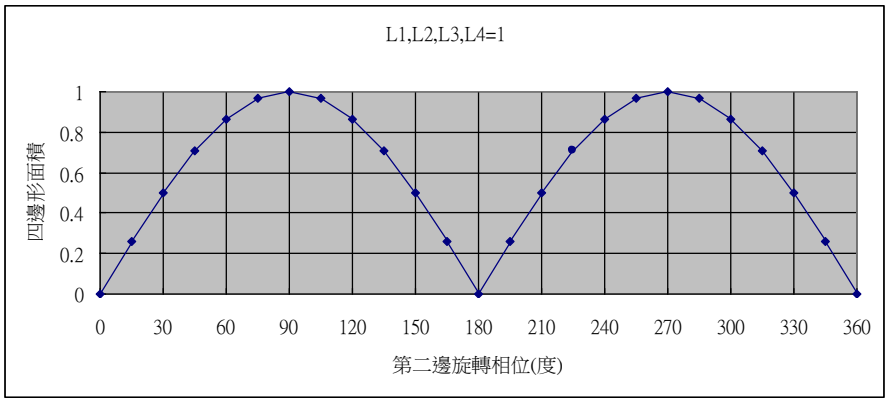
參、 研究結果

一、 正四邊形(正方形)的面積變化

正方形四邊長度相同，依據葛拉索準則，最短邊與最長邊的和等於其他兩邊和，無論固定四邊形任一邊，皆可讓其它邊長旋轉，並可將面積壓縮至0，屬於可作雙曲柄形式旋轉之變點四邊形。

令正四邊形邊長為1，從第1邊與第2邊垂直的狀態開始，固定第1邊後，繞著A點作旋轉，各頂點座標位置與面積變化如下圖表所示：

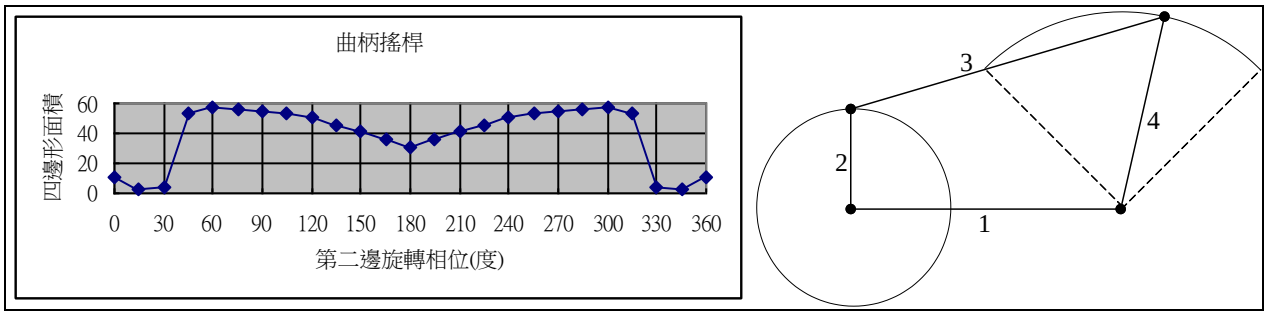
θ_2	x_1	y_1	l_1	l_2	l_3	l_4	A	B	C	θ_4	θ_3	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	*area*
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	#DIV/0!	#DIV/0!	1	0	#DIV/0!	#DIV/0!	1	0	#DIV/0!
15	0	0	1	1	1	1	0.06815	-0.5176	-0.0681	15	-2E-14	0.96593	0.25882	1.96593	0.25882	1	0	0.25882
30	0	0	1	1	1	1	0.26795	-1	-0.2679	30	-6E-15	0.86603	0.5	1.86603	0.5	1	0	0.5
45	0	0	1	1	1	1	0.58579	-1.4142	-0.5858	45	0	0.70711	0.70711	1.70711	0.70711	1	0	0.70711
60	0	0	1	1	1	1	1	-1.7321	-1	60	-6E-15	0.5	0.86603	1.5	0.86603	1	0	0.86603
75	0	0	1	1	1	1	1.48236	-1.9319	-1.4824	75	0	0.25882	0.96593	1.25882	0.96593	1	0	0.96593
90	0	0	1	1	1	1	2	-2	-2	90	0	6.1E-17	1	1	1	1	0	1
105	0	0	1	1	1	1	2.51764	-1.9319	-2.5176	105	6.4E-15	-0.2588	0.96593	0.74118	0.96593	1	0	0.96593
120	0	0	1	1	1	1	3	-1.7321	-3	120	-1E-14	-0.5	0.86603	0.5	0.86603	1	0	0.86603
135	0	0	1	1	1	1	3.41421	-1.4142	-3.4142	135	0	-0.7071	0.70711	0.29289	0.70711	1	0	0.70711
150	0	0	1	1	1	1	3.73205	-1	-3.7321	150	2.2E-14	-0.866	0.5	0.13397	0.5	1	0	0.5
165	0	0	1	1	1	1	3.93185	-0.5176	-3.9319	165	-3E-14	-0.9659	0.25882	0.03407	0.25882	1	0	0.25882
180	0	0	1	1	1	1	4	-2E-16	-4	180	0	-1	1.2E-16	0	1.2E-16	1	0	1.2E-16
195	0	0	1	1	1	1	3.93185	0.51764	-3.9319	195	2.5E-14	-0.9659	-0.2588	0.03407	-0.2588	1	0	0.25882
210	0	0	1	1	1	1	3.73205	1	-3.7321	210	0	-0.866	-0.5	0.13397	-0.5	1	0	0.5
225	0	0	1	1	1	1	3.41421	1.41421	-3.4142	225	0	-0.7071	-0.7071	0.29289	-0.7071	1	0	0.70711
240	0	0	1	1	1	1	3	1.73205	-3	240	2.5E-14	-0.5	-0.866	0.5	-0.866	1	0	0.86603
255	0	0	1	1	1	1	2.51764	1.93185	-2.5176	255	0	-0.2588	-0.9659	0.74118	-0.9659	1	0	0.96593
270	0	0	1	1	1	1	2	2	-2	270	0	-2E-16	-1	1	-1	1	0	1
285	0	0	1	1	1	1	1.48236	1.93185	-1.4824	285	0	0.25882	-0.9659	1.25882	-0.9659	1	0	0.96593
300	0	0	1	1	1	1	1	1.73205	-1	300	0	0.5	-0.866	1.5	-0.866	1	0	0.86603
315	0	0	1	1	1	1	0.58579	1.41421	-0.5858	315	0	0.70711	-0.7071	1.70711	-0.7071	1	0	0.70711
330	0	0	1	1	1	1	0.26795	1	-0.2679	330	0	0.86603	-0.5	1.86603	-0.5	1	0	0.5
345	0	0	1	1	1	1	0.06815	0.51764	-0.0681	345	0	0.96593	-0.2588	1.96593	-0.2588	1	0	0.25882
360	0	0	1	1	1	1	0	4.9E-16	0	#DIV/0!	#DIV/0!	1	-2E-16	#DIV/0!	#DIV/0!	1	0	#DIV/0!



二、 特殊的面積模態

(1) 最短邊旋轉(曲柄搖桿形式)：曲柄搖桿形式的四邊形，可以作全周的面積解析，但是因第四邊只作搖擺式的運動故有一段行程(45°~120°)面積變化不大，但當第二邊由 30°附近(三角形)拉開成 45°(四邊形)時，面積會有一個劇烈增加量，在半周內，面積呈現一谷一峰值的現象。此外，若第四邊搖擺範圍在第一邊下方，則其面積將與 180°前完全相同。

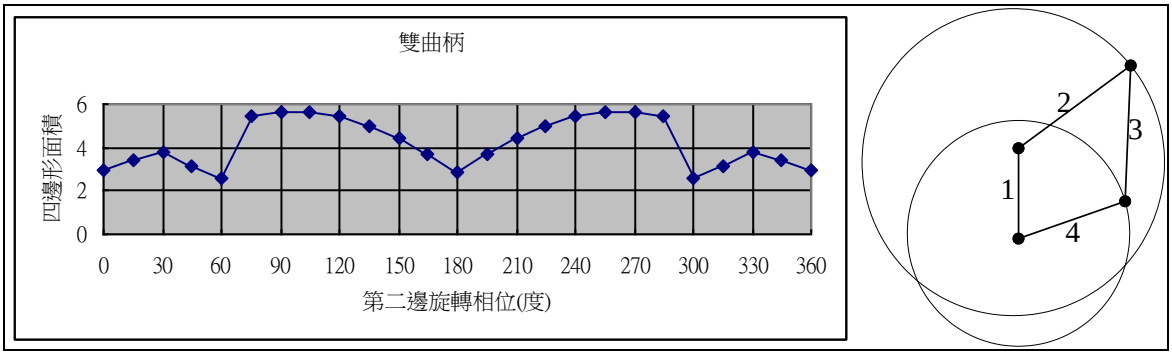
θ_2	x_1	y_1	l_1	l_2	l_3	l_4	θ_4	θ_3	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	*area*
0	0	0	10	6	9	12	145.3778	-34.6222	6	0	13.40625	-5.11346	10	0	10.22692
15	0	0	10	6	9	12	120.3	-52.1116	5.795555	1.552914	11.32268	-5.54996	10	0	2.875678
30	0	0	10	6	9	12	102.3995	-80.3849	5.196152	3	6.699413	-5.87357	10	0	4.058743
45	0	0	10	6	9	12	95.29807	55.20544	4.242641	4.242641	9.378361	11.63347	10	0	53.38355
60	0	0	10	6	9	12	95.04568	17.52284	3	5.196152	11.58237	7.905926	10	0	57.76263
75	0	0	10	6	9	12	98.63094	2.20401	1.552914	5.795555	10.54626	6.141675	10	0	56.50033
90	0	0	10	6	9	12	104.353	-2.37645	3.68E-16	6	8.99226	5.626814	10	0	55.11085
105	0	0	10	6	9	12	111.2305	-2.15832	-1.55291	5.795555	7.440701	5.456608	10	0	53.08136
120	0	0	10	6	9	12	118.642	0.651512	-3	5.196152	5.999418	5.298489	10	0	50.02713
135	0	0	10	6	9	12	126.1476	5.134722	-4.24264	4.242641	4.721242	5.048122	10	0	45.96456
150	0	0	10	6	9	12	133.4063	10.87596	-5.19615	3	3.642189	4.698151	10	0	41.16019
165	0	0	10	6	9	12	140.1473	17.68231	-5.79555	1.552914	2.779243	4.286564	10	0	36.01229
180	0	0	10	6	9	12	146.1737	25.4586	-6	7.35E-16	2.126065	3.868729	10	0	30.94983
195	0	0	10	6	9	12	219.8527	-17.6823	-5.79555	-1.55291	2.779243	-4.28656	10	0	36.01229
210	0	0	10	6	9	12	226.5937	-10.876	-5.19615	-3	3.642189	-4.69815	10	0	41.16019
225	0	0	10	6	9	12	233.8524	-5.13472	-4.24264	-4.24264	4.721242	-5.04812	10	0	45.96456
240	0	0	10	6	9	12	241.358	-0.65151	-3	-5.19615	5.999418	-5.29849	10	0	50.02713
255	0	0	10	6	9	12	248.7695	2.158317	-1.55291	-5.79555	7.440701	-5.45661	10	0	53.08136
270	0	0	10	6	9	12	255.647	2.376454	-1.1E-15	-6	8.99226	-5.62681	10	0	55.11085
285	0	0	10	6	9	12	261.3691	-2.20401	1.552914	-5.79555	10.54626	-6.14167	10	0	56.50033
300	0	0	10	6	9	12	264.9543	-17.5228	3	-5.19615	11.58237	-7.90593	10	0	57.76263
315	0	0	10	6	9	12	264.7019	-55.2054	4.242641	-4.24264	9.378361	-11.6335	10	0	53.38355
330	0	0	10	6	9	12	257.6005	80.38488	5.196152	-3	6.699413	5.873568	10	0	4.058743
345	0	0	10	6	9	12	239.7	52.11161	5.795555	-1.55291	11.32268	5.549962	10	0	2.875678
360	0	0	10	6	9	12	214.6222	34.62216	6	-1.5E-15	13.40625	5.113459	10	0	10.22692



(2) 最短邊固定(雙曲柄形式)：雙曲柄形式的四邊形壓縮過程，通常是以最短邊作為固定邊，下圖例中，是以第一邊為固定邊，其邊長設定為 1，是所有邊長中最小的，這種形式的壓縮過程，面積不容易壓縮為 0，因為四個邊要重疊在一起的機會很小，因此面積值大多維持某一水準之上(以本例而言，面積值皆大於 2)，除非與鄰近邊長之總和恰與另兩邊相等，在半周內，面積呈現兩個峰值的現象。

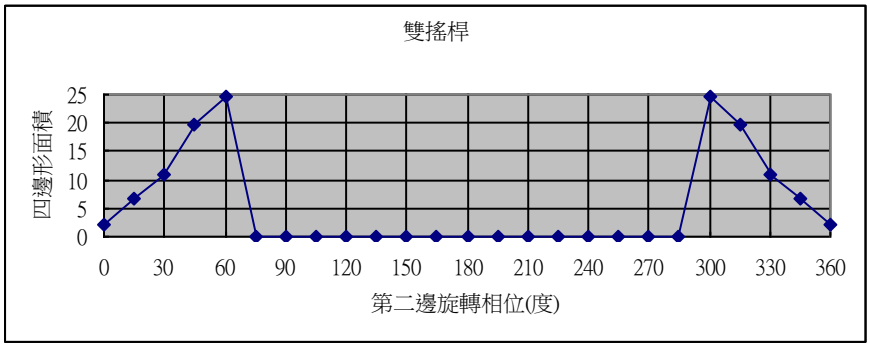
θ_2	x_1	y_1	l_1	l_2	l_3	l_4	θ_4	θ_3	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	*area*
0	0	0	1	3	3	2	82.81924	82.81924	3	0	3.375	2.97647	1	0	2.97647
15	0	0	1	3	3	2	106.6852	-70.10171	2.897777	0.776457	3.918832	-2.044438	1	0	3.461346
30	0	0	1	3	3	2	131.9048	-24.58301	2.598076	1.5	5.326155	0.251966	1	0	3.793285
45	0	0	1	3	3	2	156.6652	26.44374	2.12132	2.12132	4.807437	3.457277	1	0	3.160699
60	0	0	1	3	3	2	180	60	1.5	2.598076	3	5.196152	1	0	2.598076
75	0	0	1	3	3	2	21.6593	-19.66006	0.776457	2.897777	3.601573	1.888461	1	0	5.429355
90	0	0	1	3	3	2	41.71868	-10.84363	1.84E-16	3	2.946433	2.435612	1	0	5.637455
105	0	0	1	3	3	2	60.32479	-3.168139	-0.776457	2.897777	2.218958	2.731979	1	0	5.641644
120	0	0	1	3	3	2	77.58795	3.690068	-1.5	2.598076	1.49378	2.791154	1	0	5.42942
135	0	0	1	3	3	2	93.55268	10.03002	-2.12132	2.12132	0.83283	2.643813	1	0	5.009442
150	0	0	1	3	3	2	108.2053	16.15169	-2.598076	1.5	0.28351	2.334544	1	0	4.412566
165	0	0	1	3	3	2	121.5052	22.36157	-2.897777	0.776457	-0.123373	1.917808	1	0	3.689696
180	0	0	1	3	3	2	133.4325	28.95502	-3	3.68E-16	-0.375	1.452369	1	0	2.904738
195	0	0	1	3	3	2	238.4948	-22.36157	-2.897777	-0.776457	-0.123373	-1.917808	1	0	3.689696

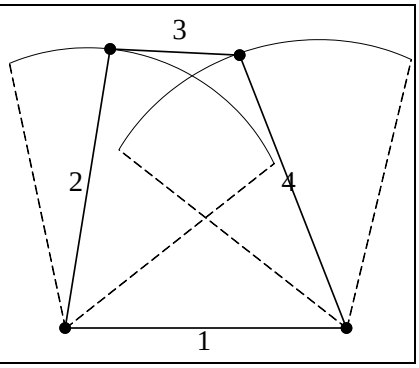
210	0	0	1	3	3	2	251.7947	-16.15169	-2.598076	-1.5	0.28351	-2.334544	1	0	4.412566
225	0	0	1	3	3	2	266.4473	-10.03002	-2.12132	-2.12132	0.83283	-2.643813	1	0	5.009442
240	0	0	1	3	3	2	282.412	-3.690068	-1.5	-2.598076	1.49378	-2.791154	1	0	5.42942
255	0	0	1	3	3	2	299.6752	3.168139	-0.776457	-2.897777	2.218958	-2.731979	1	0	5.641644
270	0	0	1	3	3	2	318.2813	10.84363	-5.51E-16	-3	2.946433	-2.435612	1	0	5.637455
285	0	0	1	3	3	2	338.3407	19.66006	0.776457	-2.897777	3.601573	-1.888461	1	0	5.429355
300	0	0	1	3	3	2	180	-60	1.5	-2.598076	3	-5.196152	1	0	2.598076
315	0	0	1	3	3	2	203.3348	-26.44374	2.12132	-2.12132	4.807437	-3.457277	1	0	3.160699
330	0	0	1	3	3	2	228.0952	24.58301	2.598076	-1.5	5.326155	-0.251966	1	0	3.793285
345	0	0	1	3	3	2	253.3148	70.10171	2.897777	-0.776457	3.918832	2.044438	1	0	3.461346
360	0	0	1	3	3	2	277.1808	-82.81924	3	-7.35E-16	3.375	-2.97647	1	0	2.97647



(3) 長短邊和大於另兩邊和(雙搖桿形式)：雙搖桿形式的四邊形壓縮過程，通常在局部區域內才有面積值，在本圖例中，75°至 285°間，由於第三邊受到拉扯後，無法到達定位，除非第三邊斷裂，因此，此角度間並無面積值，在半周內，這種壓縮過程呈現單一崖峰的模態，以下圖圖例而言，第二邊旋轉至 60°時即告拉緊，無法在計算面積。

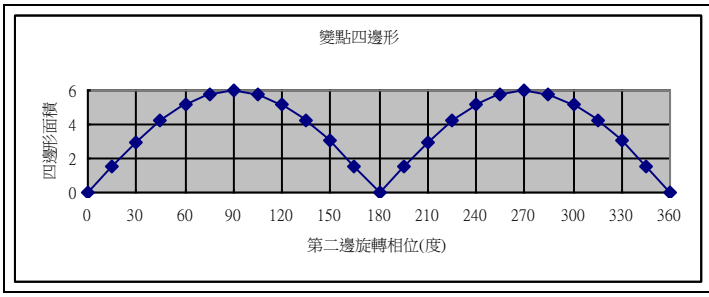
θ_2	x_1	y_1	l_1	l_2	l_3	l_4	θ_4	θ_3	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	*area*
0	0	0	5	7	3	4	133.4325	-46.56746	7	0	9.0625	-2.178553	5	0	2.178553
15	0	0	5	7	3	4	177.2688	12.34591	6.761481	1.811733	9.692105	2.453173	5	0	6.619146
30	0	0	5	7	3	4	207.2593	51.76003	6.062178	3.5	7.919047	5.856276	5	0	10.74813
45	0	0	5	7	3	4	53.28588	6.057479	4.949747	4.949747	7.932997	5.266326	5	0	19.76549
60	0	0	5	7	3	4	80.93193	10.46597	3.5	6.062178	6.450089	6.607132	5	0	24.50614
75	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	1.811733	6.761481	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
90	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	4.29E-16	7	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
105	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	-1.811733	6.761481	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
120	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	-3.5	6.062178	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
135	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	-4.949747	4.949747	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
150	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	-6.062178	3.5	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
165	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	-6.761481	1.811733	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
180	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	-7	8.58E-16	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
195	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	-6.761481	-1.811733	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
210	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	-6.062178	-3.5	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
225	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	-4.949747	-4.949747	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
240	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	-3.5	-6.062178	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
255	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	-1.811733	-6.761481	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
270	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	-1.29E-15	-7	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
285	0	0	5	7	3	4	#NUM!	#NUM!	1.811733	-6.761481	#NUM!	#NUM!	5	0	#NUM!
300	0	0	5	7	3	4	279.0681	-10.46597	3.5	-6.062178	6.450089	-6.607132	5	0	24.50614
315	0	0	5	7	3	4	306.7141	-6.057479	4.949747	-4.949747	7.932997	-5.266326	5	0	19.76549
330	0	0	5	7	3	4	152.7407	-51.76003	6.062178	-3.5	7.919047	-5.856276	5	0	10.74813
345	0	0	5	7	3	4	182.7312	-12.34591	6.761481	-1.811733	9.692105	-2.453173	5	0	6.619146
360	0	0	5	7	3	4	226.5675	46.56746	7	-1.72E-15	9.0625	2.178553	5	0	2.178553

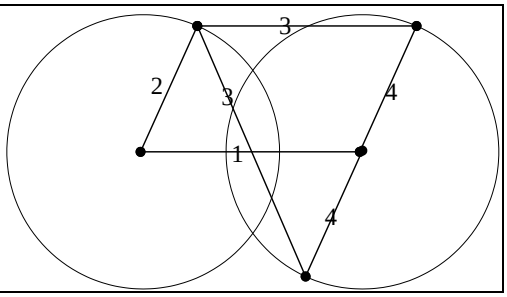




(4) 長短邊和等於另兩邊和(變點四邊形)：變點四邊形在全周轉動中有兩個面積為 0 的機會，分別發生在前半周與後半周的最終時(180°與 360°)，在運轉過程中，面積變化式平滑順暢的，且前後半周各具有一個單峰，只是在變點處，第三邊通常有兩種模式可持續運轉，但方向的選擇通常靠運動的慣性方向決定，這種變點四邊形的產生有賴四個邊長的組合恰當才能達到。

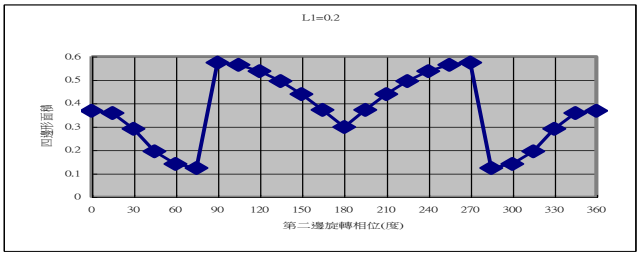
θ_2	x_1	y_1	l_1	l_2	l_3	l_4	θ_4	θ_3	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	*area*
0	0	0	3	2	3	2	0	0	2	0	5	0	3	0	0
15	0	0	3	2	3	2	15	-1.3E-14	1.931852	0.517638	4.931852	0.517638	3	0	1.552914
30	0	0	3	2	3	2	30	-6.4E-15	1.732051	1	4.732051	1	3	0	3
45	0	0	3	2	3	2	45	-1.3E-14	1.414214	1.414214	4.414214	1.414214	3	0	4.242641
60	0	0	3	2	3	2	60	-6.4E-15	1	1.732051	4	1.732051	3	0	5.196152
75	0	0	3	2	3	2	75	-6.4E-15	0.517638	1.931852	3.517638	1.931852	3	0	5.795555
90	0	0	3	2	3	2	90	0	1.23E-16	2	3	2	3	0	6
105	0	0	3	2	3	2	105	0	-0.51764	1.931852	2.482362	1.931852	3	0	5.795555
120	0	0	3	2	3	2	120	0	-1	1.732051	2	1.732051	3	0	5.196152
135	0	0	3	2	3	2	135	1.91E-14	-1.41421	1.414214	1.585786	1.414214	3	0	4.242641
150	0	0	3	2	3	2	150	2.23E-14	-1.73205	1	1.267949	1	3	0	3
165	0	0	3	2	3	2	165	-2.5E-14	-1.93185	0.517638	1.068148	0.517638	3	0	1.552914
180	0	0	3	2	3	2	180	0	-2	2.45E-16	1	2.45E-16	3	0	7.35E-16
195	0	0	3	2	3	2	195	2.54E-14	-1.93185	-0.51764	1.068148	-0.51764	3	0	1.552914
210	0	0	3	2	3	2	210	4.13E-14	-1.73205	-1	1.267949	-1	3	0	3
225	0	0	3	2	3	2	225	0	-1.41421	-1.41421	1.585786	-1.41421	3	0	4.242641
240	0	0	3	2	3	2	240	0	-1	-1.73205	2	-1.73205	3	0	5.196152
255	0	0	3	2	3	2	255	0	-0.51764	-1.93185	2.482362	-1.93185	3	0	5.795555
270	0	0	3	2	3	2	270	0	-3.7E-16	-2	3	-2	3	0	6
285	0	0	3	2	3	2	285	0	0.517638	-1.93185	3.517638	-1.93185	3	0	5.795555
300	0	0	3	2	3	2	300	0	1	-1.73205	4	-1.73205	3	0	5.196152
315	0	0	3	2	3	2	315	0	1.414214	-1.41421	4.414214	-1.41421	3	0	4.242641
330	0	0	3	2	3	2	330	0	1.732051	-1	4.732051	-1	3	0	3
345	0	0	3	2	3	2	345	0	1.931852	-0.51764	4.931852	-0.51764	3	0	1.552914
360	0	0	3	2	3	2	360	0	2	-4.9E-16	5	-4.9E-16	3	0	1.47E-15

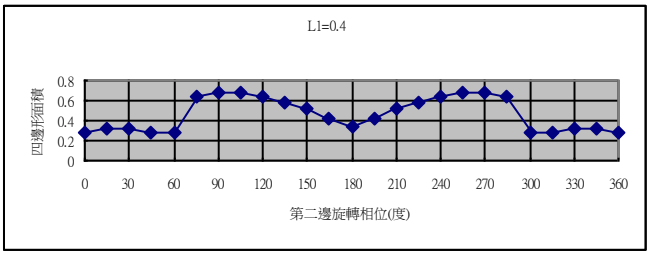


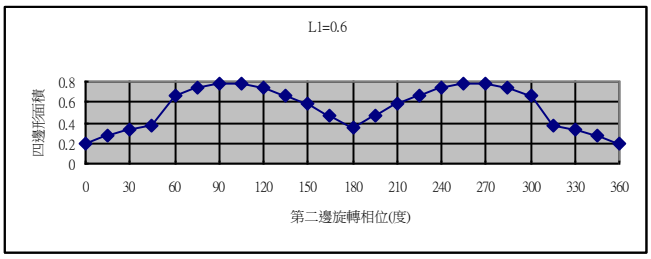


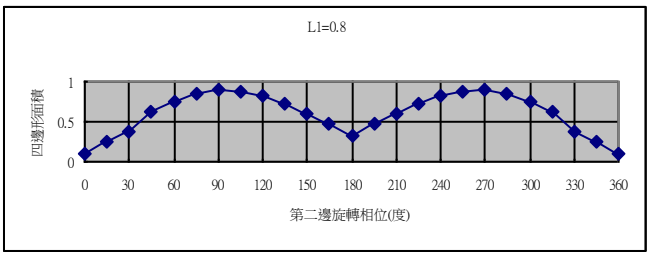
三、 四邊形的面積變化

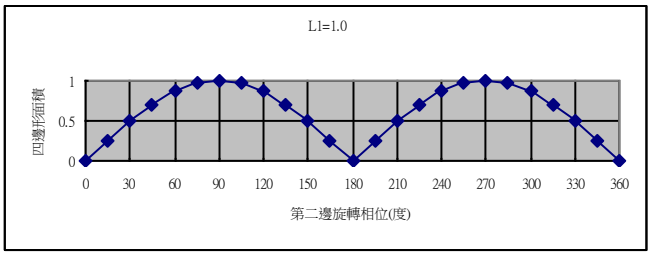
1. 第一邊長為0.2、0.4、0.6、0.8、1.0、1.2、1.4、1.6、1.8、2.0、2.2、2.4、2.8，其餘邊長為1時四邊形的面積變化：第一邊是固定邊，當第一邊甚短時，會形成雙曲柄狀態(如L1=0.2圖)，之後變化成為曲柄搖桿模式，再變成變點四邊形(如L1=1.0圖)，最後形成雙側互相拉扯的雙搖桿模式，當長度到達L1=3.0，其它三邊將完全貼於第一邊上無法動彈，故此時面積恆為0，顯而易見地，從L1=1.2~ L1=2.8的過程中，死點在中央區域逐漸擴大，終至於完全無法轉動。

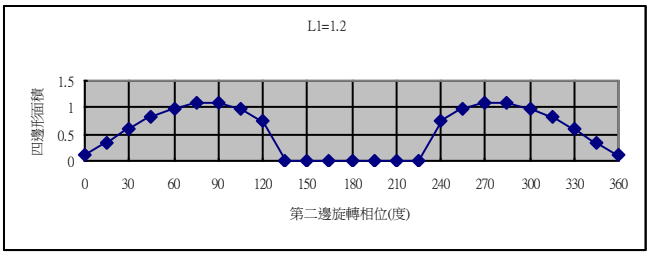


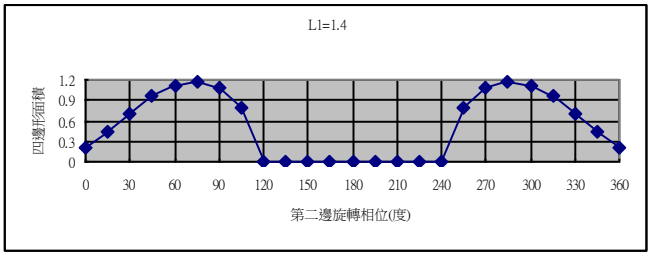


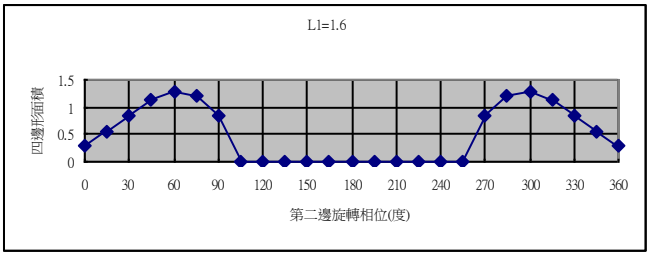


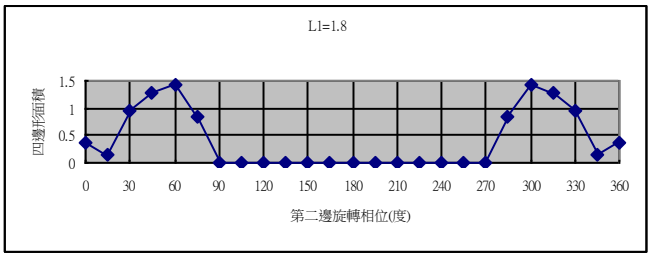


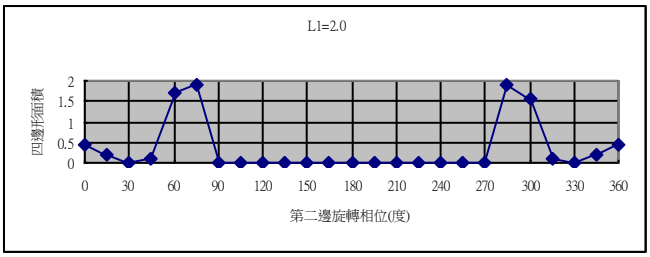


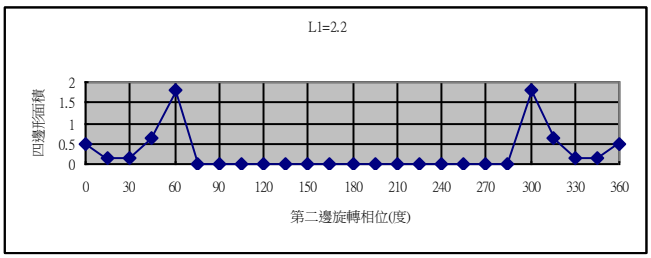


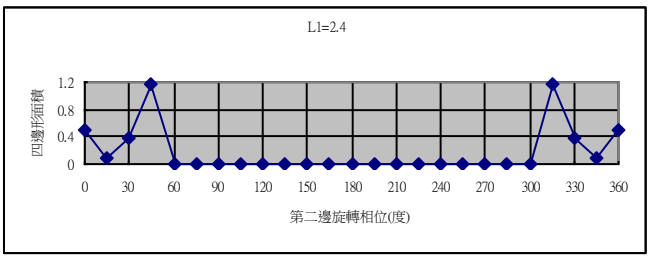


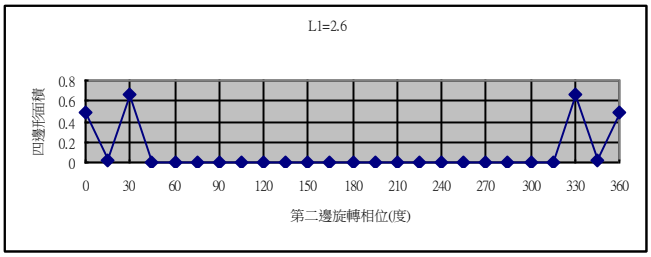


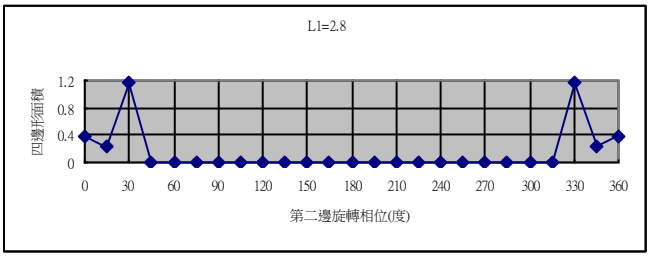




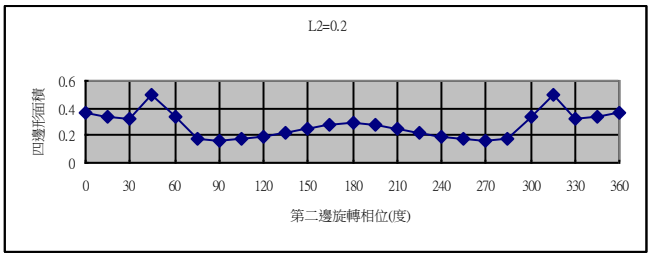


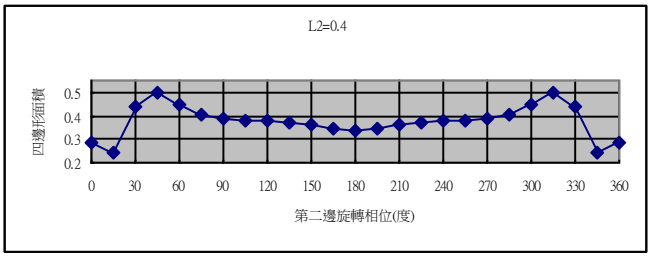


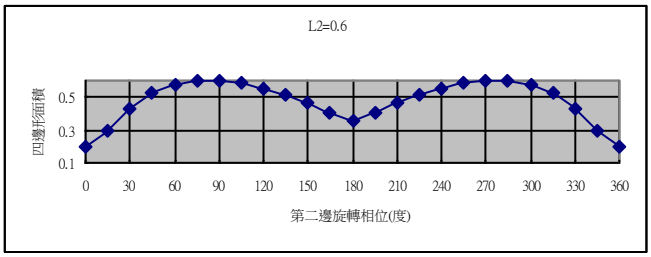


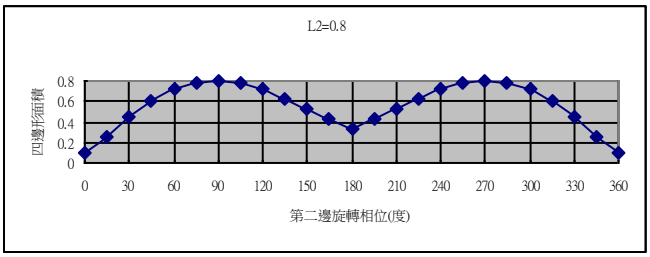


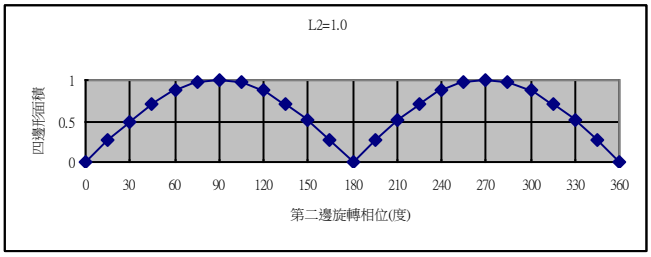
2. 第二邊長為0.2、0.4、0.6、0.8、1.0、1.2、1.4、1.6、1.8、2.0、2.2、2.4、2.8，其餘邊長為1時四邊形的面積變化：相對於第一邊的變化過程，第二邊的變化是較為和緩的，因為第二邊是主動的旋轉邊，在邊長小於1.0的情況下，大多能完成全周的面積分析，而且中央區域的面積變化亦不大，但當邊長大於1.0時，情況就與第一邊相去不遠了，只不過兩側的可轉動區域較第一邊之圖形稍大一些。

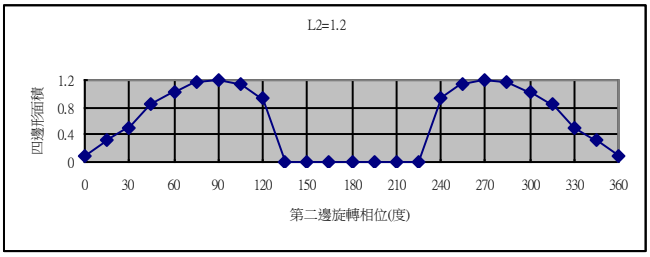


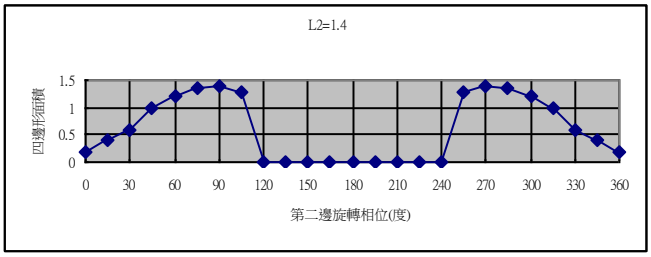


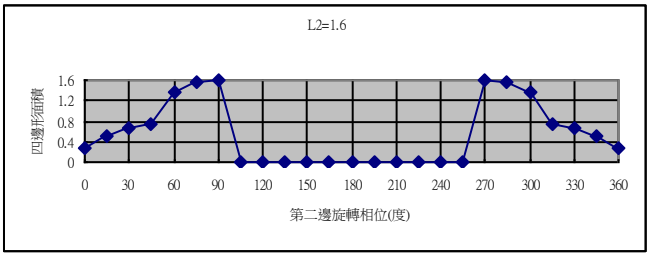


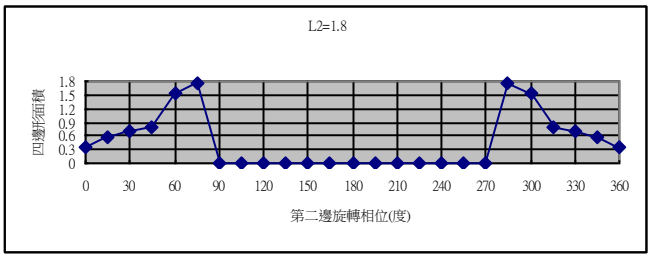


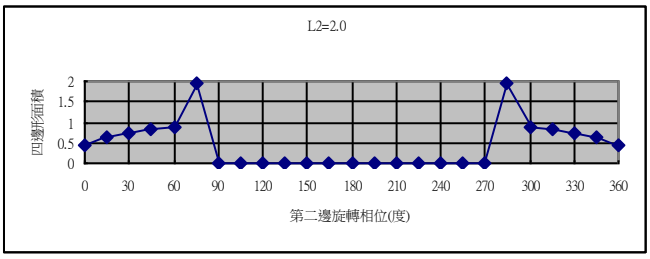


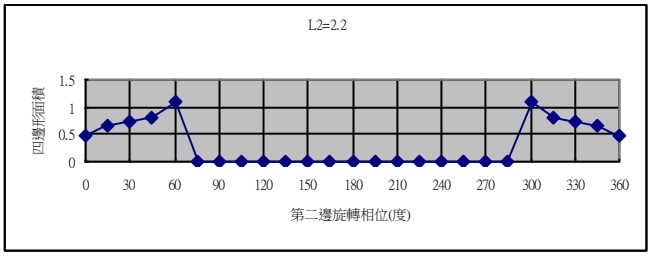


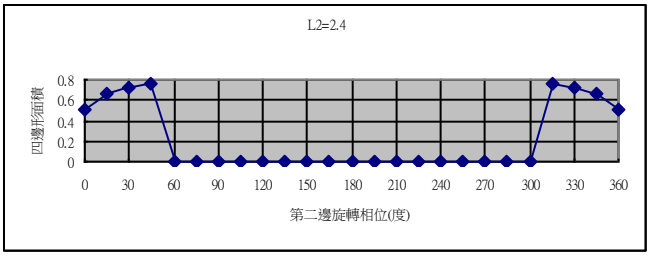


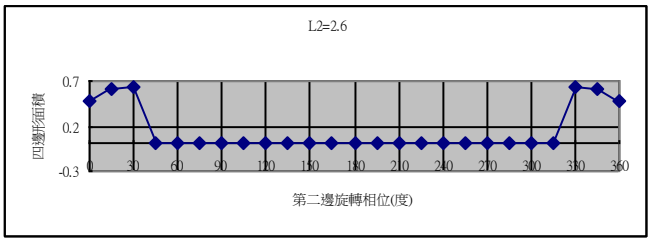


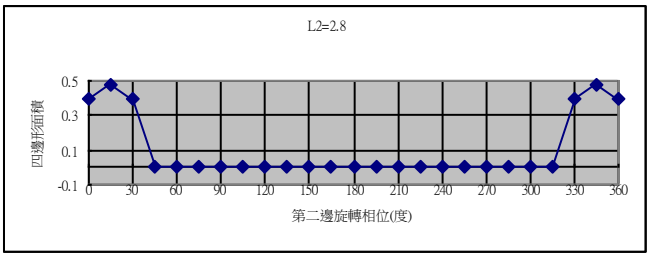




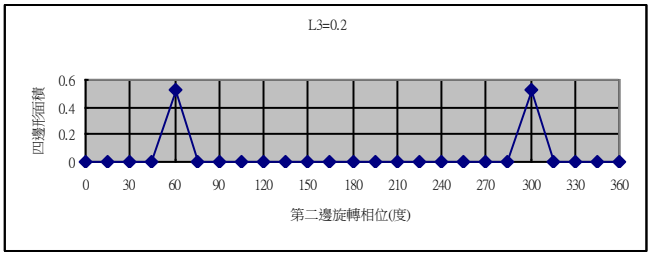


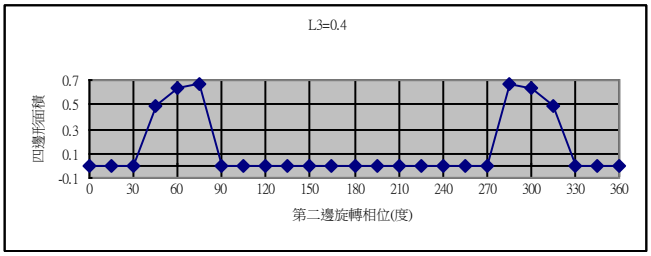


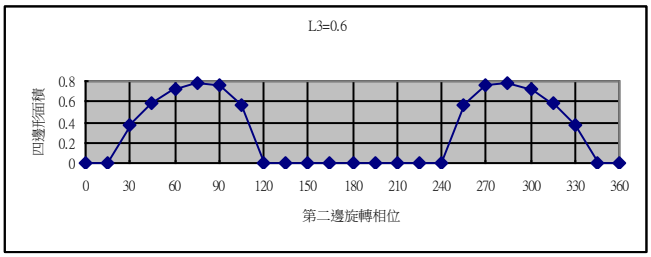


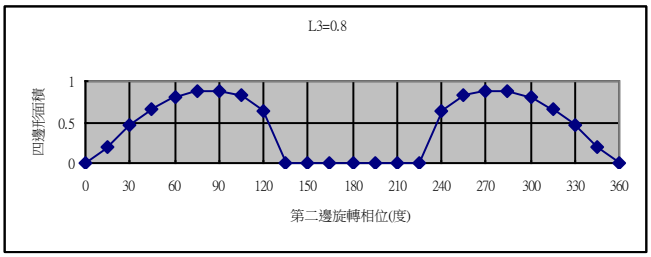


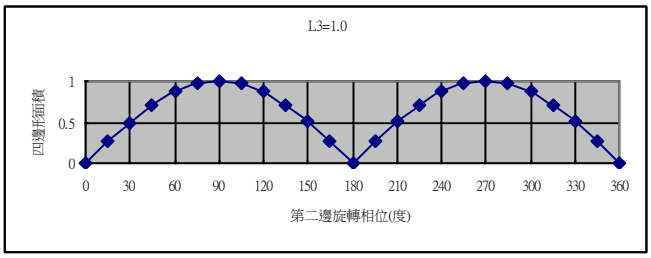
3. 第三邊長為0.2、0.4、0.6、0.8、1.0、1.2、1.4、1.6、1.8、2.0、2.2、2.4、2.8，其餘邊長為1時四邊形的面積變化：第三邊的變化是相當特殊的，當其甚短時，兩側形成可拉動區域甚小的雙搖桿狀態，然後此區漸漸擴大，而後才連接成為變點四邊形，之後變成曲柄搖桿狀態，長度增加至1.4時，漸漸過渡成兩側無法到達之雙搖桿。

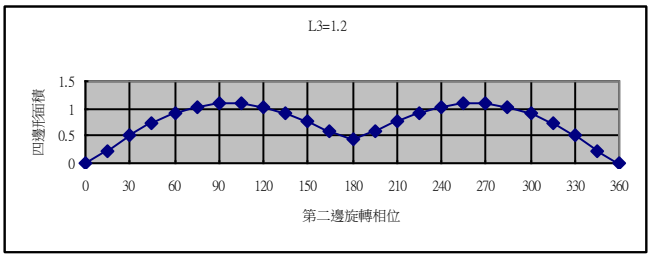


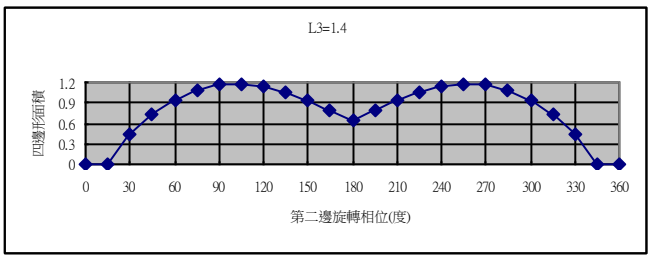


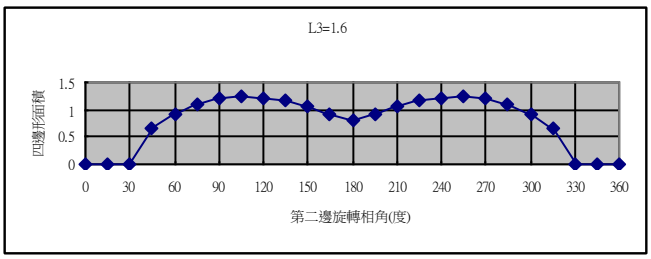


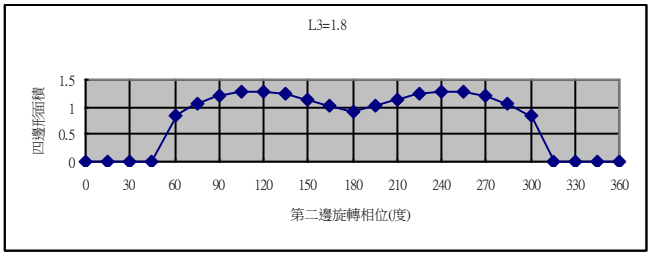


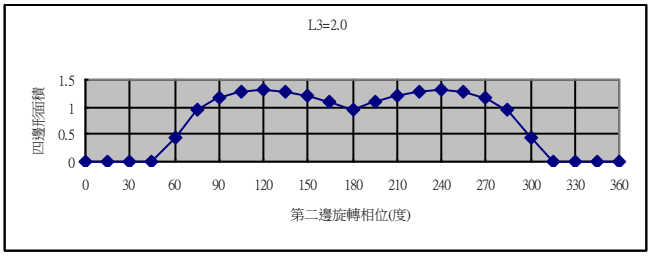


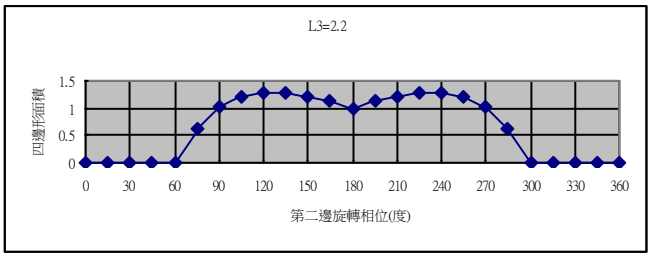


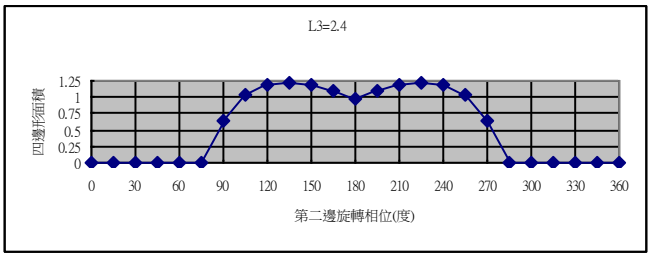


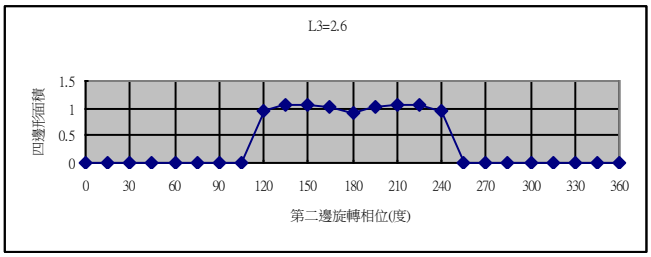


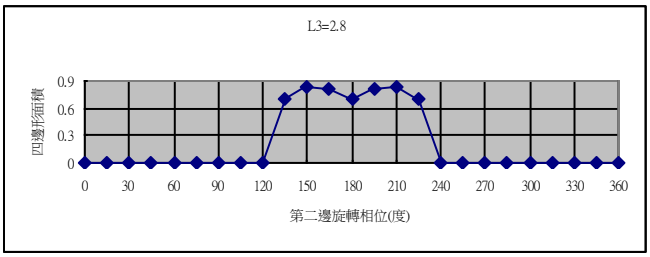




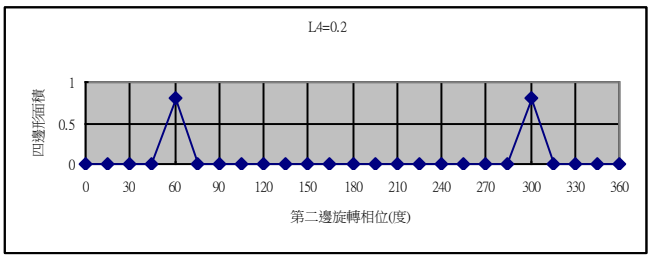


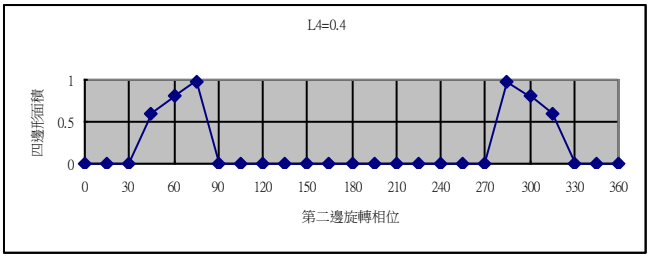


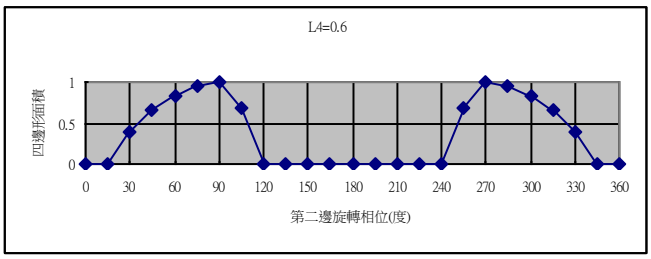


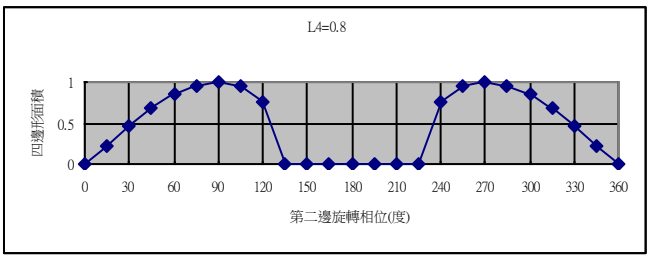


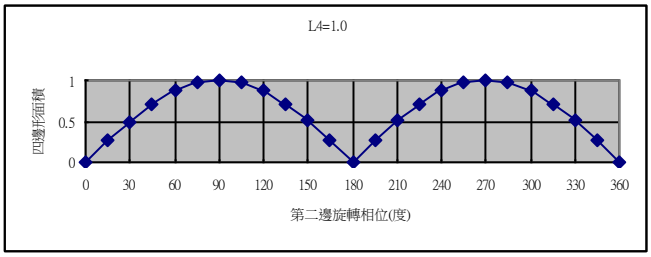
4. 第四邊長為0.2、0.4、0.6、0.8、1.0、1.2、1.4、1.6、1.8、2.0、2.2、2.4、2.8，其餘邊長為1時四邊形的面積變化：第四邊長的變化對面積的影響，與第三邊長甚為相似，於此不再贅述。

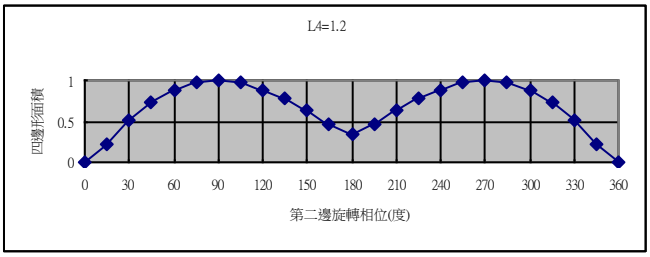


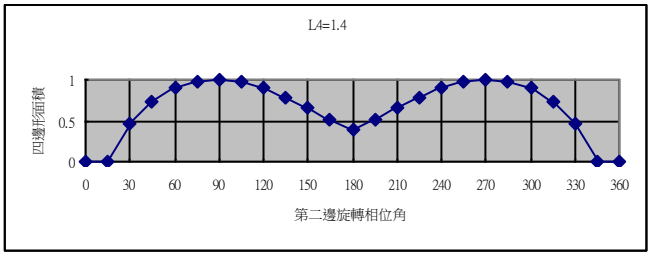


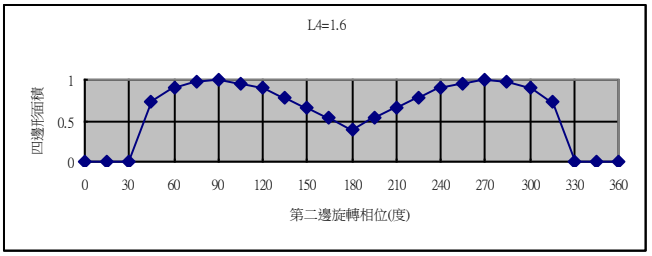


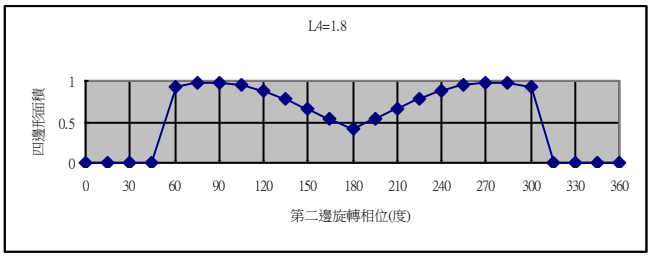


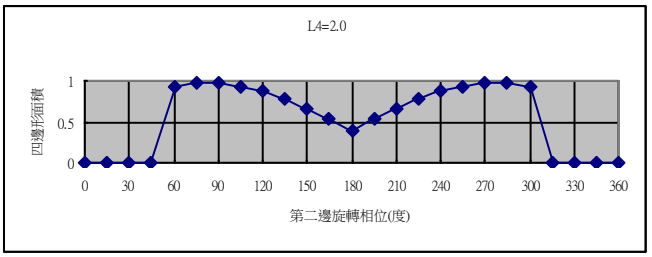


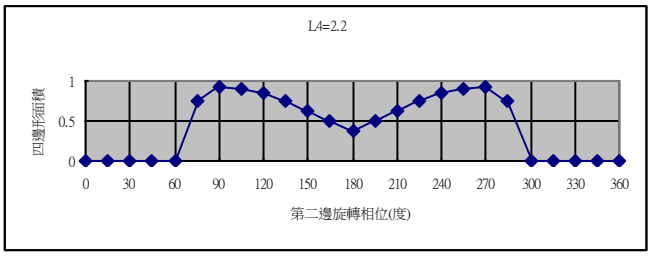


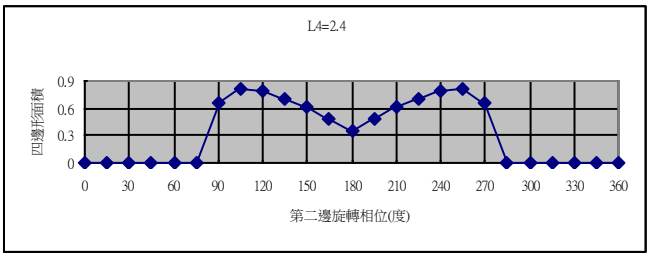


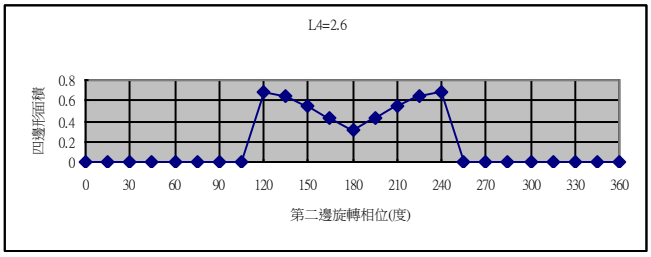


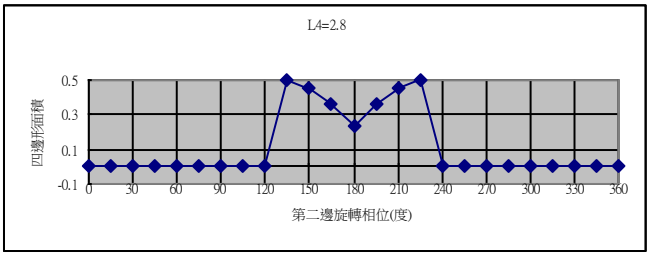






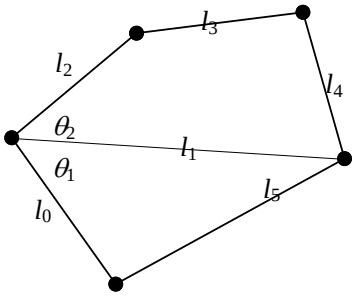






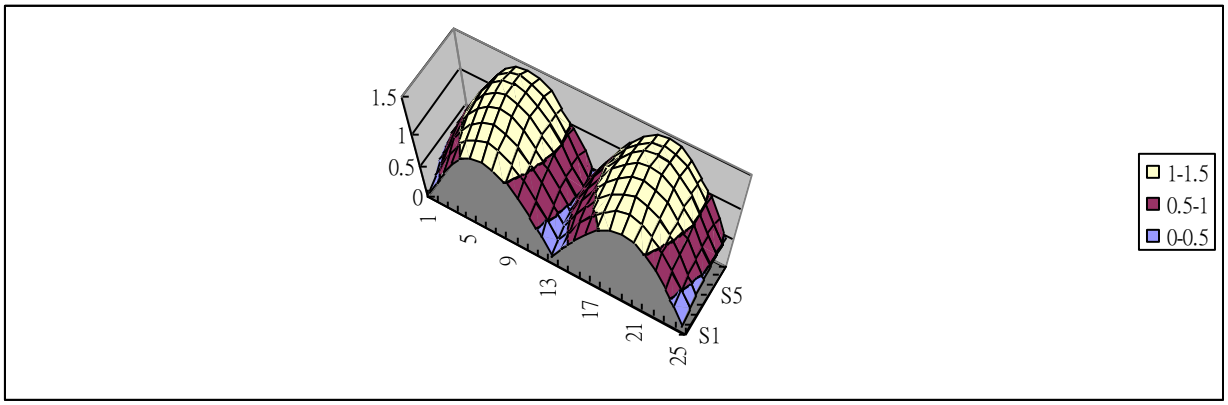
四、 五邊形的壓縮面積變化

為了解五邊形的壓縮面積變化是否與四邊形有某種關係，我們將五邊形的各邊設定如下圖，並將五邊形的各邊長度假設為1(讓第5邊長度由角θ_1的閉合程度決定)時，這時候的控制變數需要兩個，一個是控制第2、3、4邊的角θ_2，另一個是控制第0、5邊的角θ_1，將各種可能的角度自變數值配合置於兩軸，並將求出面積值當作高度應變量。

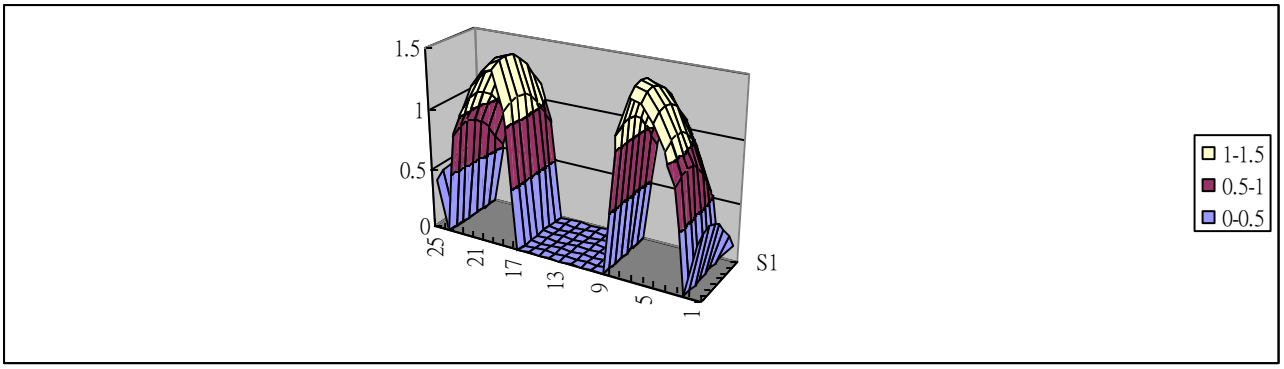


我們利用Excel的曲面圖功能作圖後可發現如下趨勢：若固定角θ_1時，則面積變化呈現與上述四邊形有相同模式，即呈現兩個凸峰；從另一個角度來看，當固定角θ_2時，角θ_1的變化使得面積值亦有由小而大，再返還變小的情形發生，但是在本例中，因第0、2、3、4邊之邊長皆設定為1，因而沒有面積拉扯導致鎖死的現象發生，各配合的面積詳細數值如下表所示：

θ_2/θ_1	15	30	45	60	75	90	105	120
0	0.12941	0.25	0.353553	0.433013	0.482963	0.5	0.482963	0.433013
15	0.388229	0.508819	0.612372	0.691832	0.741782	0.758819	0.741782	0.691832
30	0.62941	0.75	0.853553	0.933013	0.982963	1	0.982963	0.933013
45	0.836516	0.957107	1.06066	1.140119	1.19007	1.207107	1.19007	1.140119
60	0.995435	1.116025	1.219579	1.299038	1.348988	1.366025	1.348988	1.299038
75	1.095335	1.215926	1.319479	1.398939	1.448889	1.465926	1.448889	1.398939
90	1.12941	1.25	1.353553	1.433013	1.482963	1.5	1.482963	1.433013
105	1.095335	1.215926	1.319479	1.398939	1.448889	1.465926	1.448889	1.398939
120	0.995435	1.116025	1.219579	1.299038	1.348988	1.366025	1.348988	1.299038
135	0.836516	0.957107	1.06066	1.140119	1.19007	1.207107	1.19007	1.140119
150	0.62941	0.75	0.853553	0.933013	0.982963	1	0.982963	0.933013
165	0.388229	0.508819	0.612372	0.691832	0.741782	0.758819	0.741782	0.691832
180	0.12941	0.25	0.353553	0.433013	0.482963	0.5	0.482963	0.433013
195	0.388229	0.508819	0.612372	0.691832	0.741782	0.758819	0.741782	0.691832
210	0.62941	0.75	0.853553	0.933013	0.982963	1	0.982963	0.933013
225	0.836516	0.957107	1.06066	1.140119	1.19007	1.207107	1.19007	1.140119
240	0.995435	1.116025	1.219579	1.299038	1.348988	1.366025	1.348988	1.299038
255	1.095335	1.215926	1.319479	1.398939	1.448889	1.465926	1.448889	1.398939
270	1.12941	1.25	1.353553	1.433013	1.482963	1.5	1.482963	1.433013
285	1.095335	1.215926	1.319479	1.398939	1.448889	1.465926	1.448889	1.398939
300	0.995435	1.116025	1.219579	1.299038	1.348988	1.366025	1.348988	1.299038
315	0.836516	0.957107	1.06066	1.140119	1.19007	1.207107	1.19007	1.140119
330	0.62941	0.75	0.853553	0.933013	0.982963	1	0.982963	0.933013
345	0.388229	0.508819	0.612372	0.691832	0.741782	0.758819	0.741782	0.691832
360	0.12941	0.25	0.353553	0.433013	0.482963	0.5	0.482963	0.433013



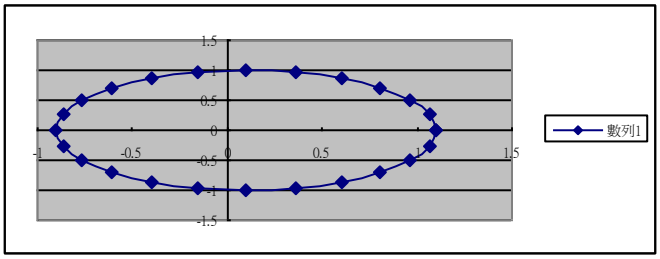
若將第4邊改為長度0.4時，上述各自變數所造成的面積值，將變成如下圖趨勢，顯而易見的是：中間區域發生鎖死無法求算面積的現象，當固定角θ_2時，角θ_1的變化雖亦使得面積值亦有由小而大，再返還變小的情形發生，但前後方的對稱性較差。

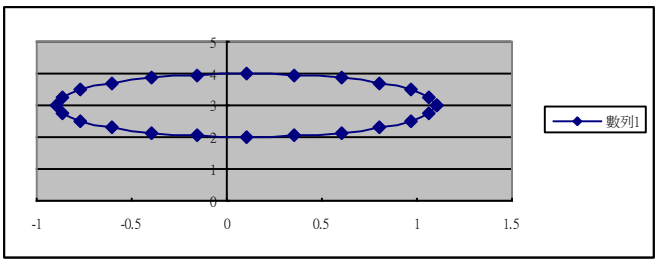


五、 四邊形任意點的軌跡位置

因最短邊固定(雙曲柄形式)與長短邊和等於另兩邊和(變點四邊形)可座全圓周運動，因此本節將以此二型式之四邊形，在第三邊長上之分點及分點上之垂直衍生點為討論主題。

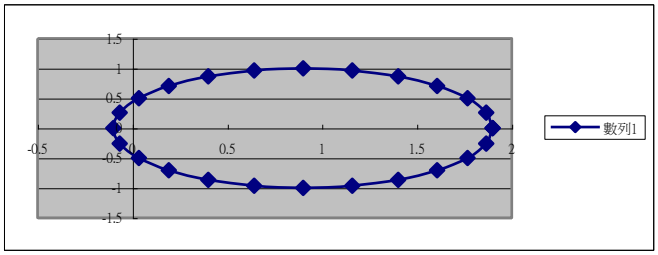
1. (1)正方形(四邊邊長節為1)第三邊分點m：n=1：9(點E)與衍生點(d=3點F)的動態軌跡

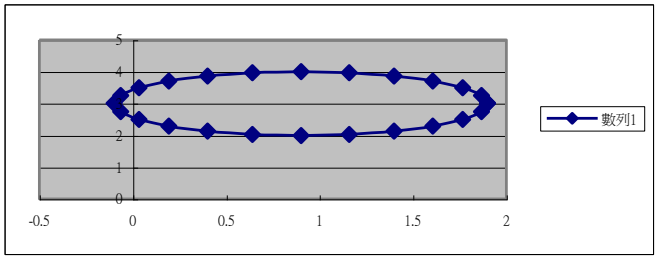




因正方形的變點效果，分點與衍生點的動態軌跡呈現完整的圓周運動。

(2)正方形(四邊邊長節為1)第三邊分點m：n=9：1(點E)與衍生點(d=3點F)的動態軌跡

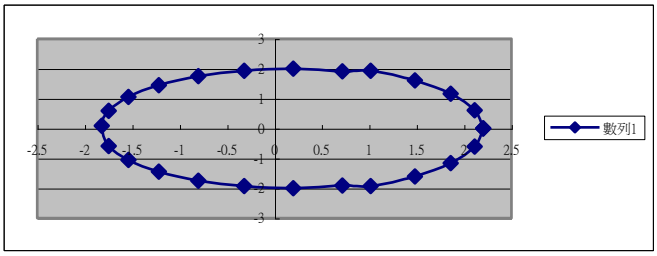


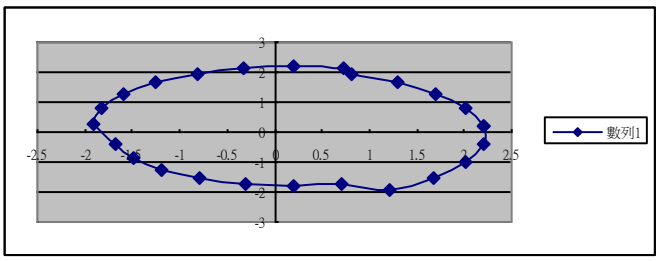


在本圖中，分點與衍生點的動態軌跡亦呈現完整的圓周運動，但因取樣參考點偏向右邊，分點位置因而右移。

2. (l_1, l_2, l_3, l_4) = (1, 2, 2, 3)梯形的第三邊分點與衍生點之動態軌跡

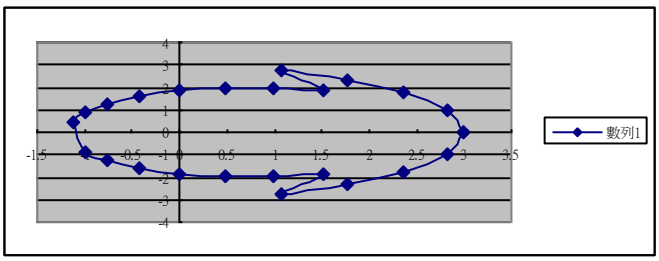
(1) (l_1, l_2, l_3, l_4) = (1, 2, 2, 3)，第三邊分點1：9(點E)與衍生點(d=0.2點F)的動態軌跡

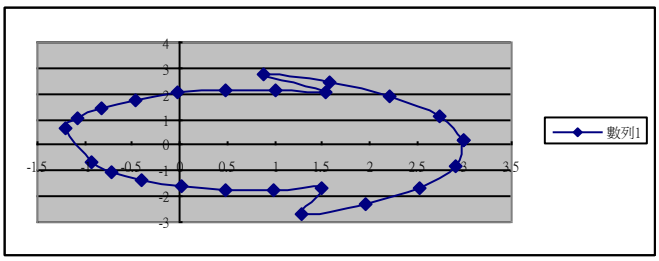




分點位置靠左，接近左端圓形運轉軌跡，但衍生點在中央上下方開始呈現凹陷現象。

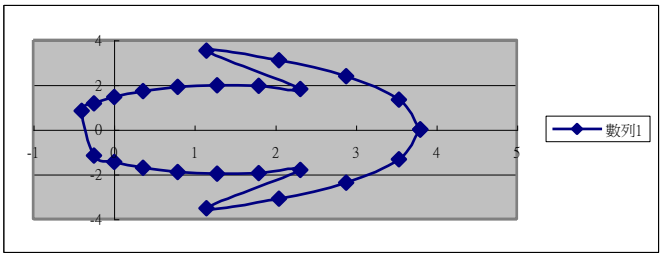
(2) (l_1, l_2, l_3, l_4) = (1, 2, 2, 3)，第三邊分點1：1(點E)與衍生點(d=0.2點F)的動態軌跡

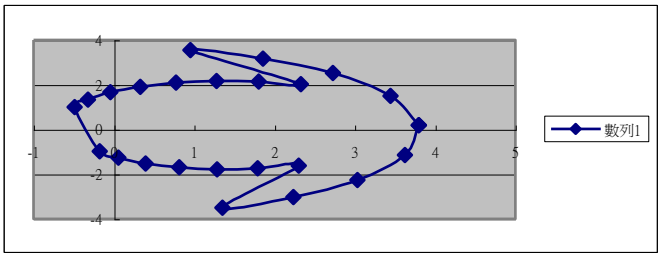




分點位置在中央時，軌跡是上下對稱的(雖然在上下方長出尖銳的突出軌跡)，衍生點則因高度在上方，產生上突點狹細，下突點較寬短的現象。

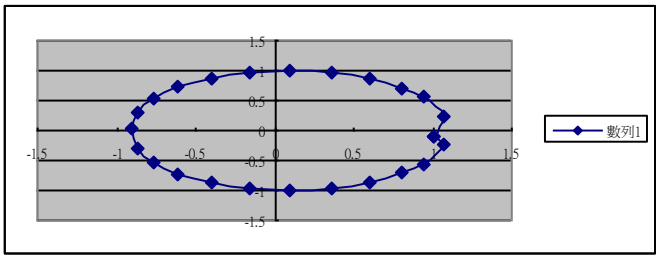
(3) (l_1, l_2, l_3, l_4) = (1, 2, 2, 3)，第三邊分點9：1(點E)與衍生點(d=0.2點F)的動態軌跡

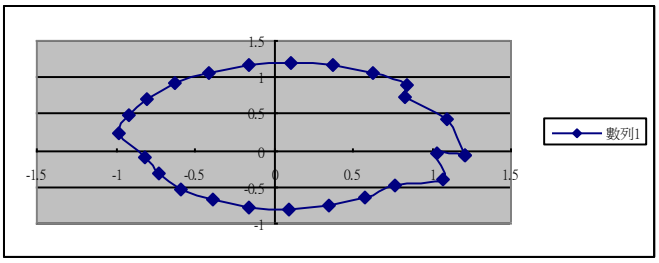




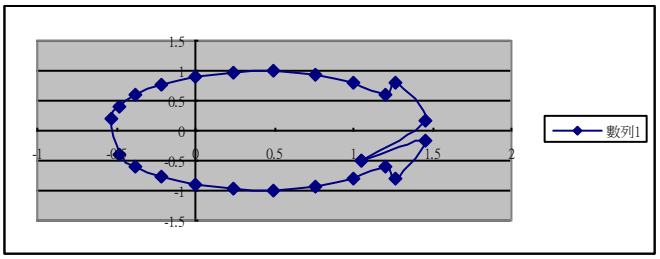
分點位置在右側時，軌跡亦是上下對稱的，但上下方尖銳突點之軌跡更形狹長，衍生點則因高度在上方，產生上下不對稱的現象。

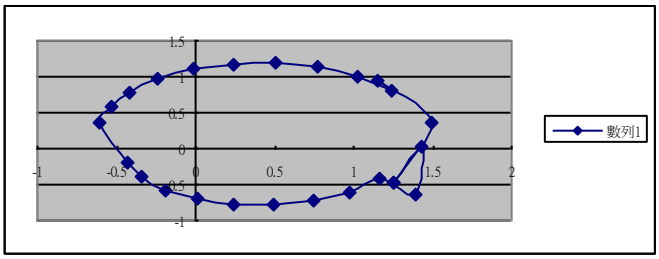
3. (1)第一邊為0.8，其餘邊為1，第三邊分點m：n=1：9(點*E*)與衍生點(*d*=0.2點*F*)的動態軌跡



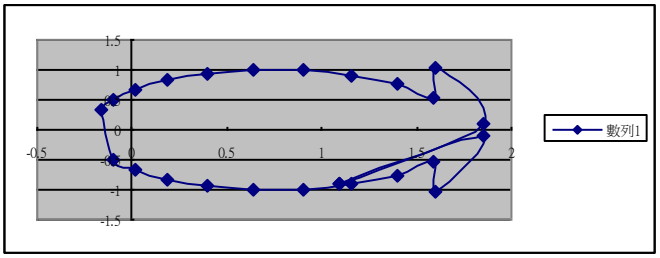


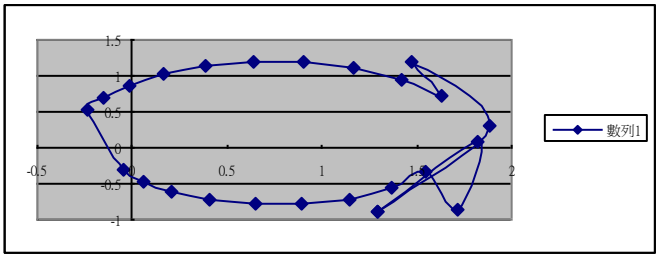
(2)第一邊為0.8，其餘邊為1，第三邊分點m：n=1：1(點*E*)與衍生點(*d*=0.2點*F*)的動態軌跡



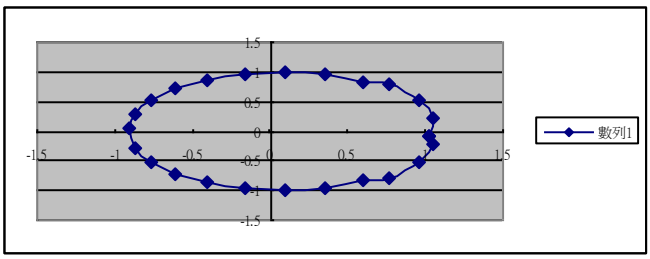


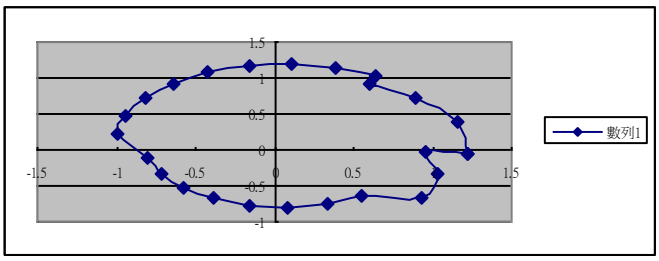
(3)第一邊為0.8，其餘邊為1，第三邊分點m：n=1：9(點*E*)與衍生點(*d*=0.2點*F*)的動態軌跡



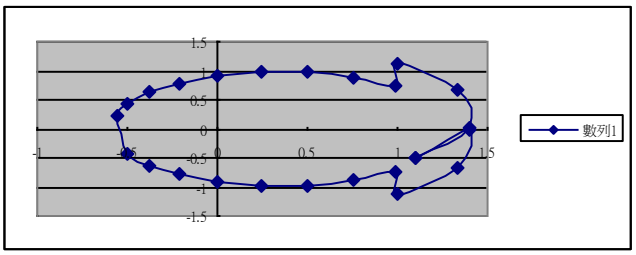


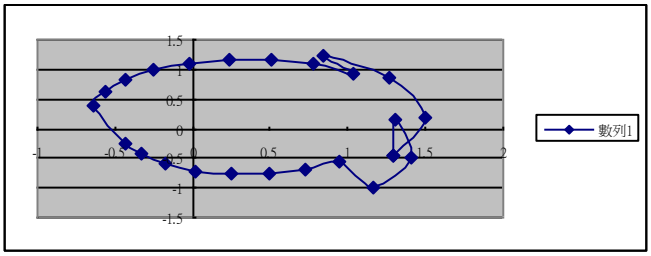
4. (1)第一邊為0.6，其餘邊為1，第三邊分點m：n=1：9(點*E*)與衍生點(*d*=0.2點*F*)的動態軌跡



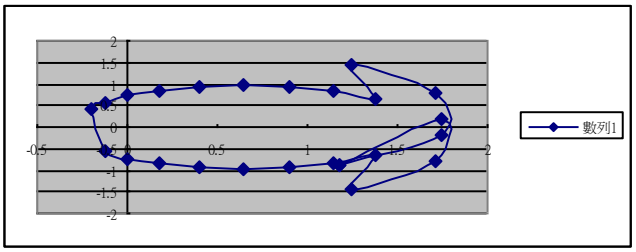


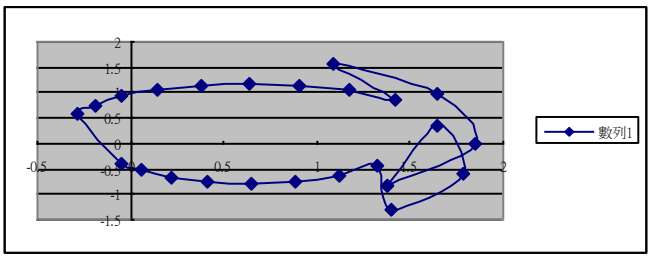
(2)第一邊為0.6，其餘邊為1，第三邊分點m：n=1：1(點*E*)與衍生點(*d*=0.2點*F*)的動態軌跡



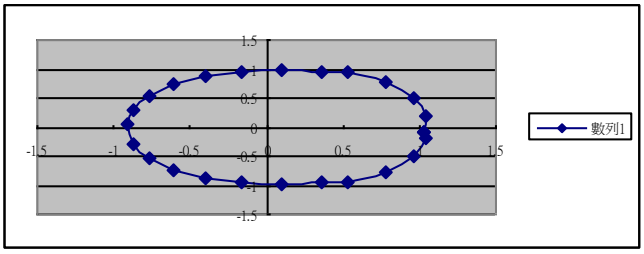


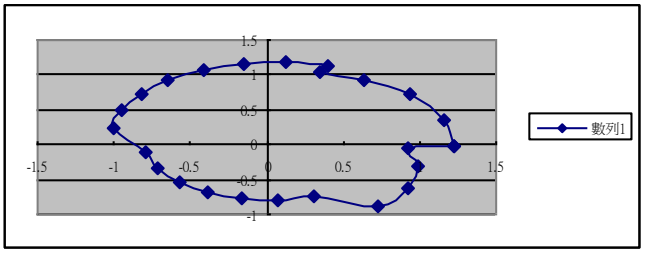
(3)第一邊為0.6，其餘邊為1，第三邊分點m：n=1：9(點*E*)與衍生點(*d*=0.2點*F*)的動態軌跡



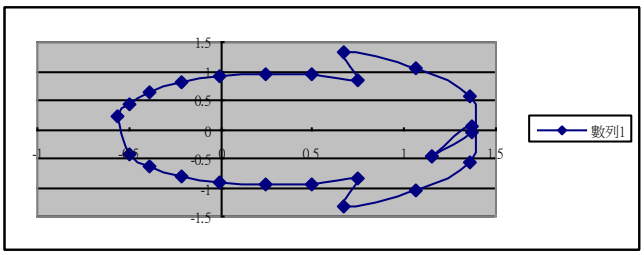


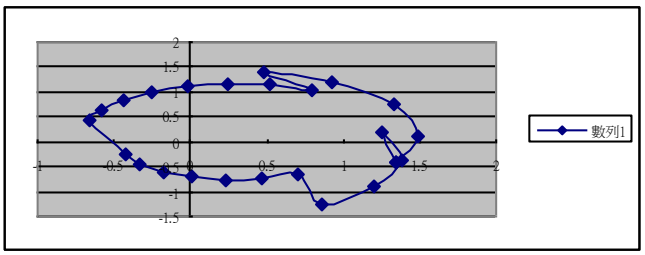
5. (1)第一邊為0.4，其餘邊為1，第三邊分點m：n=1：9(點*E*)與衍生點(*d*=0.2點*F*)的動態軌跡



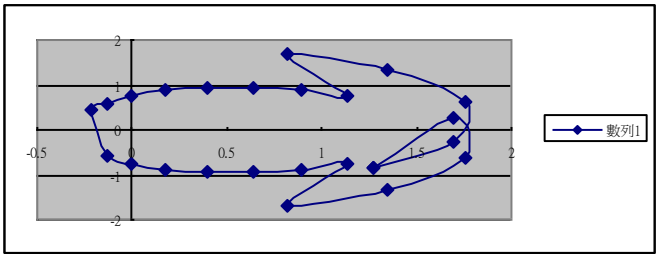


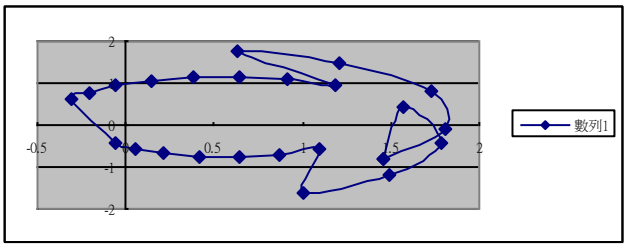
(2)第一邊為0.4，其餘邊為1，第三邊分點m：n=1：1(點*E*)與衍生點(*d*=0.2點*F*)的動態軌跡



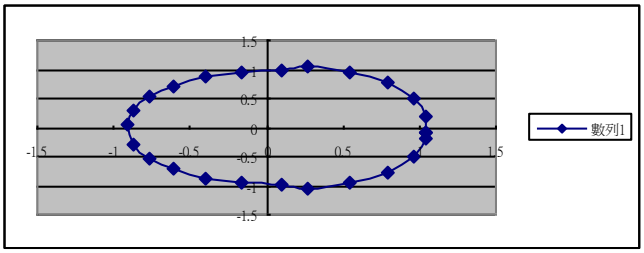


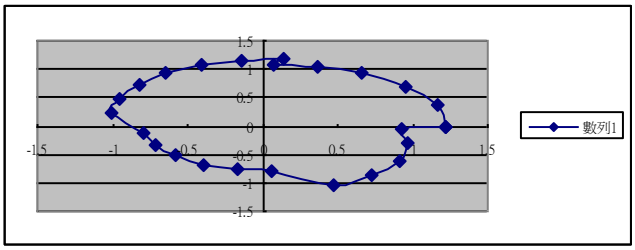
(3)第一邊為0.4，其餘邊為1，第三邊分點m：n=1：9(點*E*)與衍生點(*d*=0.2點*F*)的動態軌跡



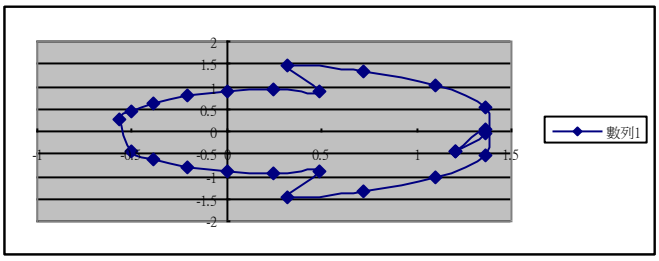


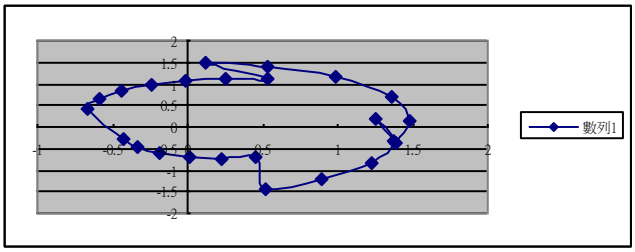
6. (1)第一邊為0.2，其餘邊為1，第三邊分點m：n=1：9(點*E*)與衍生點(*d*=0.2點*F*)的動態軌跡



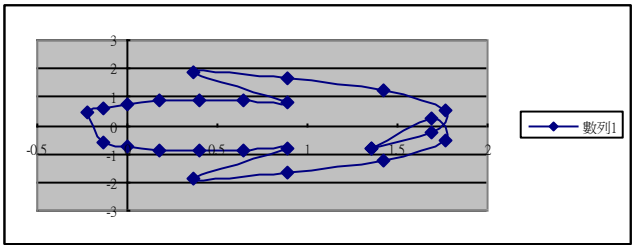


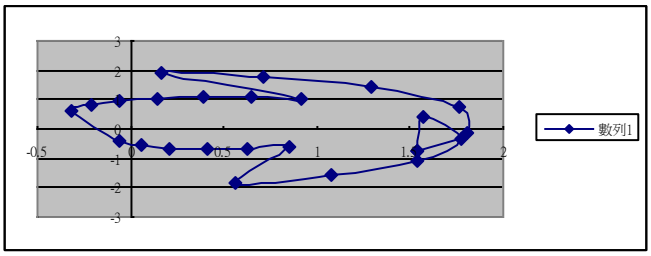
(2)第一邊為0.2，其餘邊為1，第三邊分點m：n=1：1(點*E*)與衍生點(*d*=0.2點*F*)的動態軌跡





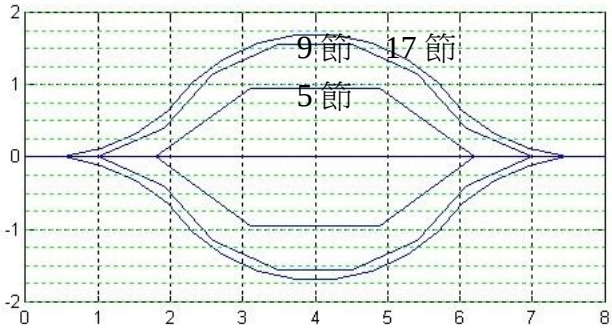
(3)第一邊為0.2，其餘邊為1，第三邊分點m：n=1：9(點*E*)與衍生點(*d*=0.2點*F*)的動態軌跡





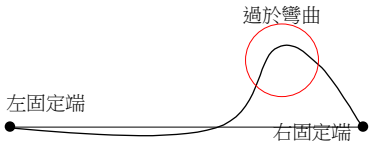
六、 端點固定開放多邊形任意點的軌跡位置

利用上述的公式，我們設定固定跨距為 8 單位，利用每節 1.8 單位共 5 節、每節 1 單位共 9 節與每節 9/17 單位共 17 節之三類多節體作測試，發現三類多節體的鎖死角度隨機選取定為 29.926、23.905 及 12.1 度時，可以達到最大的包絡區域，兩類多節體其頂點分布如下圖所示：



端點固定開放多邊形有非常多的彎曲模態，如 S 型、U 型、multi-S 型，我們選擇繪出此種多節體模態的原因是：特別是受限於某種鎖死角度的限制，多邊形在有限距離中，不能產生過多的彎曲模態，況且，一旦產生彎曲後，多節體的頂點分布，將更偏向兩個固定點連接成之中央線，因此，單 U 型線便成為其他曲線模態的外廓包絡線了。

直行多邊形自一固定端出發快至另一固定端才轉折，其路徑是無法突破此包絡線的，我們可以注意到，這將會產生「劇烈彎曲」而超越鎖死角度，因此，包絡線區域外是不可能有任何頂點軌跡的存在。



邊數的設定是依照 $a_n=3+2(2^n-1)$而得，將 5 邊、9 邊、17 邊所形成的端點列成如下三表格，實際上，我們可將任意節數配合任意鎖死角所形成的頂點位置繪製出。

座標	初始頂點	第 2 頂點	第 3 頂點	第 4 頂點	第 5 頂點	第 6 頂點
x	0	1.80	3.10	4.90	6.20	8.00
y	0	0	0.957684584460672	0.957684584460672	0	0

5 節多節體最外廓頂點分布座標

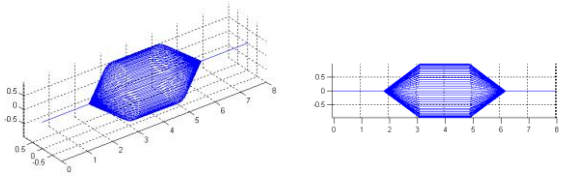
座標	初始頂點	第 2 頂點	第 3 頂點	第 4 頂點	第 5 頂點	第 6 頂點	第 7 頂點	第 8 頂點	第 9 頂點	第 10 頂點
x	0	1	1.914218596	2.585809881	3.500028477	4.500028477	5.414247074	6.085838358	7.000056955	8.000056955
y	0	0	0.405221369	1.146143191	1.55136456	1.55136456	1.146143191	0.405221369	0	0

9 節多節體最外廓頂點分布座標

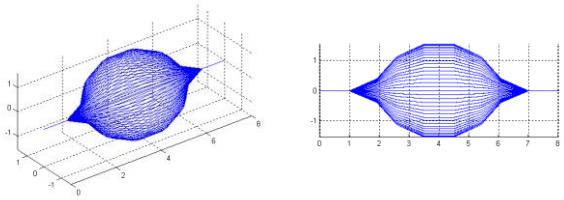
座標	初始頂點	第 2 頂點	第 3 頂點	第 4 頂點	第 5 頂點	第 6 頂點	第 7 頂點	第 8 頂點	第 9 頂點
x	0	0.529411765	1.047061714	1.529948834	1.956616748	2.308107096	2.73477501	3.21766213	3.735312079
y	0	0	0.110974533	0.32799261	0.641411352	1.037304458	1.3507232	1.567741277	1.67871581
座標	第 10 頂點	第 11 頂點	第 12 頂點	第 13 頂點	第 14 頂點	第 15 頂點	第 16 頂點	第 17 頂點	第 18 頂點
x	4.264723844	4.782373793	5.265260913	5.691928827	6.043419175	6.470087089	6.95297421	7.470624158	8.000035923
y	1.67871581	1.567741277	1.3507232	1.037304458	0.641411352	0.32799261	0.110974533	0	0

17 節多節體最外廓頂點分布座標

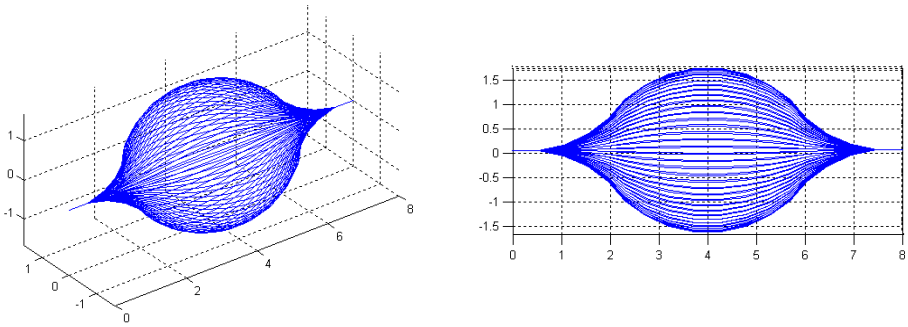
對於三維空間的包絡線，其繪製的原則與上述二維的平面是相同的，只是將平面的圖形對固定軸旋轉一圈而以，以下是各種不同邊長數的多邊形所做出的包絡範圍：



開放五邊形空間頂點包絡線圖

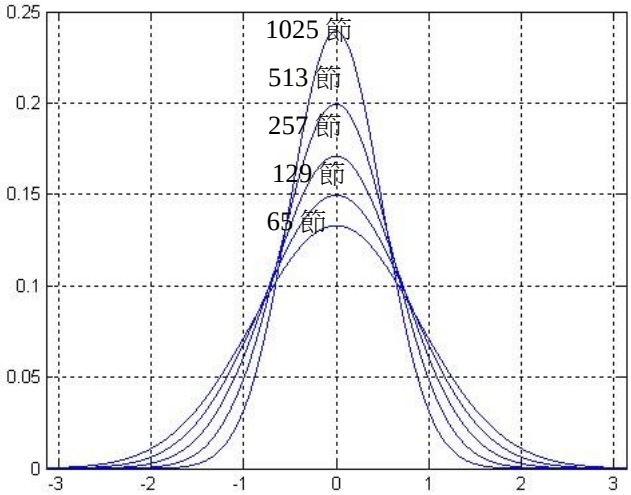


開放九邊形空間頂點包絡線圖



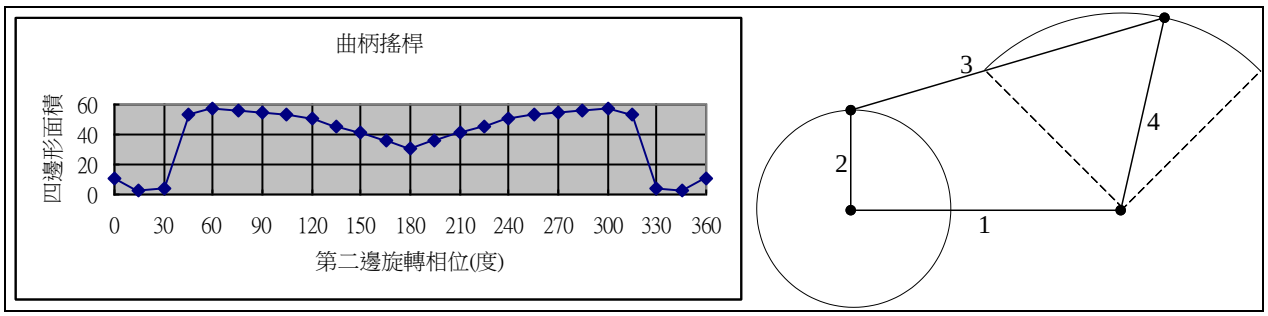
開放十七邊形空間頂點包絡線圖

接著利用高度線(如 y=−0.25~0.25)來限制頂點所在區域，即尋找在兩高度線內的隨機頂點數，當多邊形呈現無窮多節的狀態時，整條多節體為一軟繩狀態，故軟繩輪廓線與兩高度線所夾面積除以整體輪廓線面積即為節點出現機率，將高度線逐漸外推，發現高度線的涵蓋面積變化將近似常態分配，而不同節數面積變化若重疊在一起時，也近似統計學中的 *t* 分配，其面積占有的百分率變化如下圖所示：

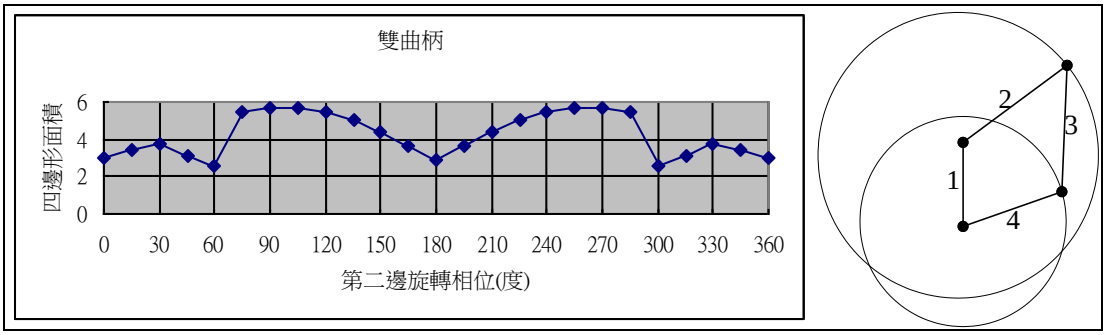


肆、 結果與討論

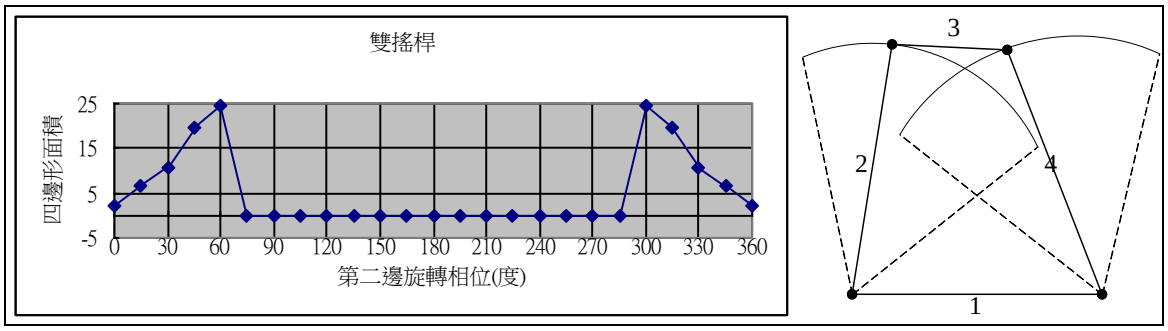
我們從四種形態的面積變化可以了解：曲柄搖桿型式的四邊形，它的面積變化是具有對稱的「高原區」與「低谷區」的，這個低谷區的面積值幾乎接近 0，過渡的地方會產生劇烈變化，並在中央 180°處產生一面積稍低點。



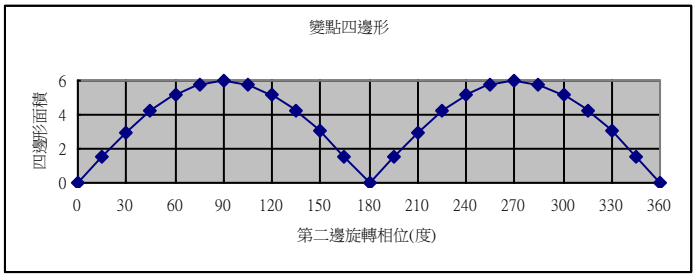
雙曲柄型式的四邊形，特徵是面積與0水準相差很大，甚至約略等於中央的凹點高度，而且它的低谷區較短，通常只有短短幾度的角度範圍，因此整體說來，由於雙曲柄可以作全圓運動，因此，面積的變化百分比通常不大，這可以解釋為何谷點的高度還有最高點的一半之現象。

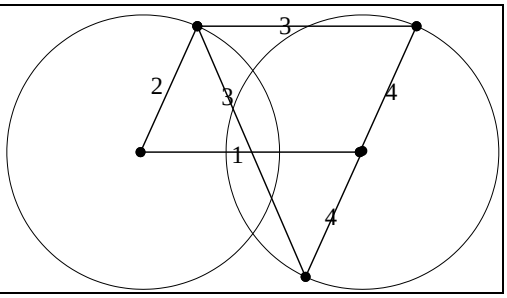


至於雙搖桿型式的四邊形，在壓縮過程中，「高原區」已然消失，取而代之的是兩個尖峰值，過了尖峰值靠近中央角度處，面積因拉扯而急速進入無法計算的區域，兩旁則呈現近似直線的遞減狀態。



最後，可變點四邊形則呈現非常完美的雙峰形態，並在左端、中間及右端產生面積為0的現象，這是因為變點四邊形的最長邊與最短邊之和恰等於另兩邊的和，因此可讓面積達到完全壓縮的狀態。





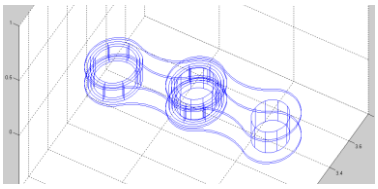
另外，由於邊長差異產生的面積曲線變化，通常發生在中央角度上，若差異過大時，中央角度區域會發生鎖死的現象，而且這種現象會隨著差異量的增加而漸漸顯著。

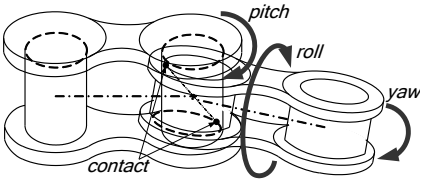
我們完成這個小部份的研究後，認為這個研究應可再擴及若邊長延伸出頂點時，各邊可在平面上的掃掠範圍，因為面積的能量意義若存在，那更長的邊長可能始掃過的面積亦需耗用原始形內面積的能量，而這種能量的分配將隨著不同的延伸邊長而有不同的狀態。

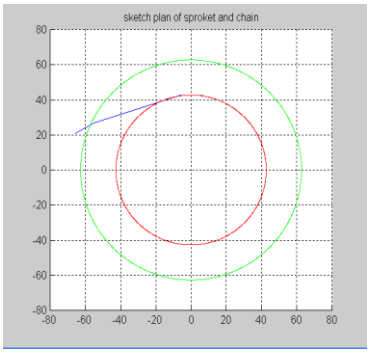
此外，延伸邊長的頂點軌跡也是我們有興趣的地方，它可能「跑」出我們無法想像的圖形，如果可以善用這些軌跡，在許多機器必須作特殊運動的情況下，必能選擇出所需的邊長及各邊延伸量組合。

伍、 應用實例

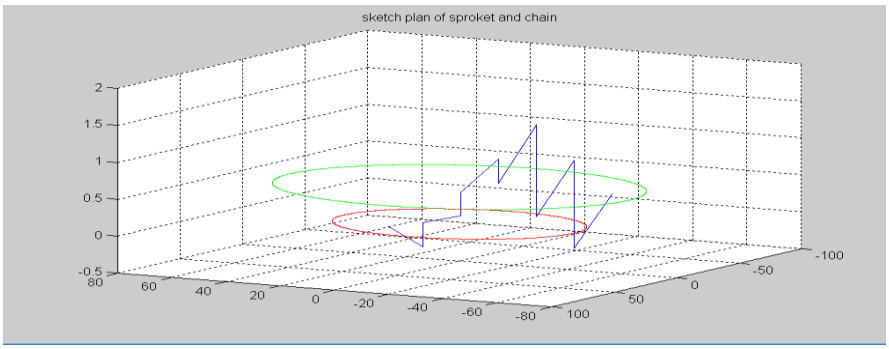
為了得到速度切換或功能更迭的目的，在機械操作的過程中，換檔是不可或缺的作動程序，這種動作的達成，有賴傳動系統與動力輸出機構的設計與相互搭配，這些機構包括了鏈輪組與鏈條的配合。以鏈條與鏈輪齒換檔時的嚙合情況為例，首要重點即在鏈條上下檔時鏈齒的切削情況，我們利用了上述介紹的作標變換，可將練自行車鏈條從小鏈輪爬升到大鏈條的路徑求算出來，首先了解，鏈節與鏈節間的干涉限制(如下圖所示)，使得各方向的鎖死角皆可求得，接著便可應用這些鎖死角求得鏈條的最佳換檔路徑。





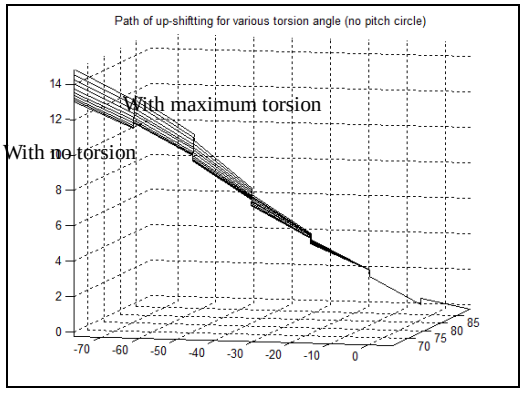


小輪鏈條爬上大輪路徑(上視圖)



小輪上的鏈條爬上大輪的路徑(側視圖)

將不同扭轉角之各路徑的空間分佈繪於下圖，可了解鏈條在三軸向上的變化，尤其是在Z方向上(圖中的高度方向上)側偏量的多寡，顯而易見地，扭轉量較大時，擁有較大的側偏能力。



去除各聯結端的滑移情形，實際上鏈條各節的側偏能力，將如下圖所示，圖中明顯表出，在第五節前，因各節位於撥鏈桿受力節之前，側偏量的增加呈現遞增趨勢，這是因為該段處於S型扭曲的前段；至受力之第六節時，鏈條則呈現回返的現象，故側偏增量近乎線性；至鏈條末端時，因已近S型扭曲末端，故受張力之曳引，呈現側偏量遞減的情形。

陸、 參考文獻

1. 「單自由度平面多邊形的迴路與分支」, Chase, T. R. and Mirth, J. A.,機械設計期刊(*Journal of Mechanical Design*) 115期 第223-230頁, 1993。
2. 「平面多迴路多邊形分支消除與決定的通用方法」, Krishnamurty, S. and Turcic, D. A., 機構期刊(*ournal of Mechanisms*) 110期 第412-422頁, 1988。
3. 「非平面多迴路多邊形的分支消除方法」, Krishnamurty, S. and Turcic, D. A., 機構期刊(*ournal of Mechanisms*) 114期 第245-250頁, 1992。
4. 「N邊形的分支與旋轉死點問題」, Ting, K. L., 設計自動化發展期刊(*Advances in Design Automation*)2期 第459-465頁, 1993。
5. 「六邊形的分支辨認與分類」,Ting, K. L. and Dou, X., 機構與機械原理期刊(*Mechanism and Machine Theory*), 31期第3輯 第283-295頁, 1996。
6. 「圖形化的柏密斯特多邊形合成四有限分割位置時的分之問題與消除」, Waldron, K. J., 工業工程期刊(*Journal of Engineering for Industry*)97期第176-182頁, 1976。
7. 「多迴路多邊形(例如8字多邊形)位置問題的可解性之研究」, Waldron, K. J. and Sreenivasan, S. V., 機械設計期刊(*Journal of Mechanical Design*)118期第390-395頁, 1996。
8. 「最佳化複數衍生函數之演算法」, Yan, H. S. and Chiou, S. T.,工程最佳化期刊(*Engineering Optimization*) 12期 第75-88頁, 1987。
9. 「平面六連桿與空間四連桿機構分支問題之研究」, 車慧中, 碩士論文,國立成功大學機械工程研究所, 1991。
10. 「平面連桿機構之迴路分析」, 張敬宏, 碩士論文, 國立成功大學機械工程研究所, 2000。

【評語】030416

本作品乃考慮邊長固定的菱形，內角改變所造成的面積的變化。但作品陳述及推導，均略複雜。其後雖推廣前述問題，因未能以較基本的工具來推導，使作品不是那麼清晰可讀，有些可惜。