中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030415

一！二！蹲下！－報數遊戲

學校名稱：臺北市立萬華國民中學

作者：	指導老師：
國一 林靖瑄	陳建華 郭家棋

關鍵詞：報數遊戲、函數、數學歸納法

摘　　要

$G_i(x)$ 遊戲是指「將編號 $1,2,3,\cdots,x$ 號的同學圍成一圈，報數 1,2,1,2,⋯，由 1 號開始報數，報數 i 的站著、報數 $3-i$ 的蹲下」，其中 $i=1,2$ 。假設整個遊戲需要玩 $g_i(x)$ 輪，而最後站立者之編號為 $f_i(x)$ ，則經過我們仔細的觀察、歸納、研究與討論，得到以下的結果：

一. 設有 x 人參與 $1,2,1,2,\cdots$ 報數遊戲 $G_i(x)$ ，其中 $i=1,2$ 。

（1）若 $3\times 2^{n-2}\le x<3\times 2^{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ ，則 $g_1(x)=n$ 。

（2）若 $3\times 2^{n-2}<x\le 3\times 2^{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ ，則 $g_2(x)=n$ 。

同時，我們也得到 $g_1(x)$ 與 $g_2(x)$ 的關係如下：

$$g_1(x)=\begin{cases} g_2(x)+1 & ,\ x=3\times 2^n \\ g_2(x) & ,\ x\neq 3\times 2^n \end{cases}$$ 。

二. 設有 x 人參與 $1,2,1,2,\cdots$ 報數遊戲 $G_i(x)$ ，其中 $i=1,2$ 。

（1）若 $x=2^n$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ ，則 $f_1(x)=1,\ f_2(x)=2^n$ 。

（2）若 $x=2^n+t$ $(t=1,2,\cdots,2^n-1, n=1,2,3,\cdots)$ ，則 $f_i(x)=2t+2-i$ ，其中 $i=1,2$ 。

三. 以上的結果，我們也透過電腦迴圈程式來驗證在 $x\le 10000$ 時都完全正確。

壹、 研究動機

運動會前夕，體育老師使用$1,2,1,2,\cdots$的方式把 20 位元元同學分為奇數、偶數兩組，以便安排大隊接力的棒次，沒想到最後一位同學喊的竟然是 1，令老師困惑不已。原來當時有位同學因忘記帶水壺而跑回教室拿，卻忘了向老師報告，才會報出「20 個人 1 結束」的有趣結果。

某日在家閱讀一本數學遊戲的書，正巧看到這個題目：「有 13 個人圍成一圈，報數$1,2,1,2,\cdots$，凡報 1 者即蹲下(不可再報數)，若最後站著的是 11 號，則應由幾號報起？」這個題目令我感到好奇，覺得最後站立者一定與報數的方式、總人數有密不可分的關係，因此決定著手研究。

貳、 遊戲與名詞介紹

一. **報數遊戲**：

本研究的原始問題為「有 13 個人圍成一圈，報數$1,2,1,2,\cdots$，凡報 1 者即蹲下(不可再報數)，報 2 者站立(可再報數)，若最後站著的是 11 號，則應由幾號報起？」為利本研究的進行，我們將問題稱為$G_i(x)$遊戲：「編號$1,2,3,\cdots,x$號的同學圍成一圈，報數$1,2,1,2,\cdots$，報 i 者站立，則最後站著的是幾號？」，其中$i=1,2$。那麼，原始問題即為$G_2(13)$遊戲的型態。

二. **第 *k* 輪的遊戲**：

(1) $G_1(x)$遊戲：

第 0 輪：將參賽者編號後，$1,2,1,2,\cdots$報數。
第 1 輪：報 1 者繼續站著，報 2 者蹲下，
第 1 輪站立者繼續第 2 輪報數。
對$k=1,2,3,\cdots$，第 k 輪：第$k-1$輪報 1 者繼續報數，
直到剩下一位站立者，遊戲結束。

(2) $G_2(x)$遊戲：

第 0 輪：將參賽者編號後，$1,2,1,2,\cdots$報數。
第 1 輪：報 1 者蹲下，報 2 者繼續站著，
第 1 輪站立者繼續第 2 輪報數。
對$k=1,2,3,\cdots$，第 k 輪：第$k-1$輪報 2 者繼續報數，
直到剩下一位站立者，遊戲結束。

三. **符號 $g_i(x)$ 與 $f_i(x)$ 的定義**：

在 $G_i(x)$ 遊戲中，「編號 $1,2,3,\cdots,x$ 號的同學圍成一圈，報數 1,2,1,2,…，由 1 號開始報數，報 i 的站著」，需玩 $g_i(x)$ 輪，最後站立者之編號為 $f_i(x)$ ，其中 $i=1,2$ 。
例如：有 7 個人參與此遊戲，報 2 的站著，共需玩 3 輪，如下所示：

第 0 輪： $1,2,1,2,1,2,1$

第 1 輪： 2 1 2

第 3 輪： 1 2

最後站立者之編號為 6，則表示在 $G_2(7)$ 的遊戲中， $g_2(7)$=3， $f_2(7)$=6 。

四. 二進位表示法：

將一正整數 n 表成 $n=b_m\times2^m+b_{m-1}\times2^{m-1}+\cdots+b_1\times2^1+b_0\times2^0$ ，其中 $b_k\in\{0,1\}$ ，則可記為 $n=(b_mb_{m-1}\cdots b_0)_2$ ，此式稱為 n 的**二進位表示法**。 例如: $7=1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$ ，我們可以把 7 寫成二進位表示法為 $(111)_2$ 。

五. 數學歸納法：

對於一個與正整數 n 有關的數學命題 $P(n)$ ，只要滿足下面兩件事：

1. 驗算 $n=1$ 時命題 $P(1)$ 成立，
2. 設 $n=k$ 時命題 $P(k)$ 成立，可推得 $n=k+1$ 時命題 $P(k+1)$ 亦成立。

即能證明此命題 $P(n)$ 對於所有正整數 n 都成立

參、 研究目的

- ✓ 報數遊戲需玩的輪數。
- ✓ 報數遊戲最後站立者之編號。
- ✓ 各種報數遊戲的結果。
- ✓ 推廣加深報數遊戲。

肆、 研究設備及器材

紙、筆、電腦

伍、　研究過程或方法

一、先討論 $G_2(x)$ 的遊戲

「編號 $1,2,3,\cdots,x$ 號的同學圍成一圈，報數 1,2,1,2,…，由 1 號開始報數，**報 1 即蹲下**，則最後站著的是幾號？」最後站著的是 $f_2(x)$ 號，遊戲需玩 $g_2(x)$ 輪。

(一) $g_2(x)$ 的研究

觀察 $g_2(x)$ 的值並分析 x 由 2 漸漸增加的情形，以小的結果去推廣到大。

1. 討論 x=9 的情形
   也就是將編號 1,2,3,4,5,6,7,8,9 的人，1,2 報數，報”1”的人蹲下
   第一輪剩下 2,4,6,8　(1,3,5,7,9 號蹲下)
   第二輪剩下 2,6　(4,8 號蹲下)
   第三輪剩下 2　(6 號蹲下)
   $\therefore$ 共需三輪，即 $g_2(9)=3$。

2. 將 $x=2,3,4,\cdots,33$ 的各種情形，表列如下:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$g_2(x)$	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5

很明顯的，因為每次報數，蹲下的人數約為前一輪剩下數的一半，所以先考慮 $x=2^n$ 人參與遊戲的情形:

第 1 輪遊戲結束時，剩下 $2^{n-1}(=\dfrac{2^n}{2})$ 人，

第 2 輪遊戲結束時，剩下 $2^{n-2}(=\dfrac{2^{n-1}}{2})$ 人，

第 n 輪剩下之人數為 $\dfrac{2^n}{2^n}=1$ 人。

根據上面的討論，可以推測以下的結論，並証明。

【引理 1-1】若 $x=2^n$ 人參與遊戲，則需 n 輪結束，即 $g_2(x)=n$ 。。

(證明)

(i) 當 $n=1$ 時，有 2 人參與遊戲，只需 1 輪結束，命題成立。

(ii) 設 $n=k$ 時，命題成立，即 $x=2^k$ 人參與遊戲，則需 k 輪結束。

當 $n=k+1$ 時，有 2^{k+1} 人参與遊戲，

第一輪結束時只剩 2^k 人，還需 k 輪遊戲才結束

$\therefore 2^{k+1}$ 人参與遊戲共需 k+1 輪遊戲結束。命題亦成立。

故由數學歸納法得知， $x=2^n$ 人参與遊戲，需 n 輪結束。

3. 觀察 x 人到 $2x$ 人的數據，以下列為例

x	5	10	20	40
$g_2(x)$	2	3	4	5

可以推測下面的結論，並証明。

【引理 1-2】若 x 人参與遊戲需 n 輪結束，則 $2x$ 人参與遊戲需 $n+1$ 輪結束，即 $g_2(2x)=g_2(x)+1$。

(證明)

$2x$ 人参與遊戲第一輪結束剩下 x 人，還需 n 輪才結束，

故 $2x$ 人参與遊戲，需 $n+1$ 輪結束，得證。

4. 觀察輪數增加時之數據，以下列為例

x	3	4	6	7	12	13	24	25
$g_2(x)$	1	2	2	3	3	4	4	5

其中 $6=3\times 2$ ， $12=3\times 2^2$ ， $24=3\times 2^3$

進一步觀察，可以得到下面兩個引理的結果：

【引理 1-3】若 $x=3\times 2^n$ 人参與遊戲，則需 $n+1$ 輪結束，即 $g_2(3\times 2^n)=n+1$。

(證明)

(i)當 $n=0$ 時，有 3 人参與遊戲，則需 1 輪結束，命題成立。

(ii)設 $n=k$ 時，命題成立，即 $x=3\times 2^k$ 人参與遊戲，則需 $k+1$ 輪結束。

當 $n=k+1$ 時，有 $3\times 2^{k+1}$ $(=3\times 2^k\times 2)$ 人参與遊戲，

由【引理 1-2】得知， $2x(=3\times 2^n\times 2)$ 人参與遊戲，需 $n+1$ 輪結束。

故由數學歸納法得知，若 $x=3\times 2^n$ 人参與遊戲，則需 $n+1$ 輪結束。

【引理 1-4】人數愈多的，遊戲結束所需之輪數也愈多；特別的，若 $a\le x\le b$，$g_2(a)=g_2(b)=n$ 時，則 $g_2(x)=n$ 。

根據觀察討論的數據與以上的引理，可以推得以下一般的結論。

【**定理 1-5**】若 x 人參與遊戲，且 $3\times 2^{n-2} < x \le 3\times 2^{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，則需 n 輪結束，即 $g_2(x)=n$ 。

(證明)

當 $x=3\times 2^{n-1}$ 人參與遊戲，由【引理 1-3】得知：需 n 輪結束。

只要證明 $x=3\times 2^{n-2}+1$ 人參與遊戲，需 n 輪結束，則定理成立。

$3\times 2^{n-2}$ 人參與遊戲，需 n-1 輪結束，且最後一輪剩下的 3 人報數為 1,2,1。

若人數增加 1 人，即 $x=3\times 2^{n-2}+1$ 人參與遊戲，則

第一輪結束後剩下 $3\times 2^{n-3}$ 人且第一輪的最後一人報數為 1，

所以下一輪從 2 開始報數。

到剩下 3 人的那一輪報數為 2,1,2，

還需再一輪才能結束，故需 $(n-1)+1=n$ 輪。

因此，由【引理 1-4】知：$3\times 2^{n-2} < x \le 3\times 2^{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 時，$g_2(x)=n$ 。

註： 由 $3\times 2^{n-2}=\dfrac{2^n+2^{n-1}}{2}$ 而 $3\times 2^{n-1}=\dfrac{2^{n+1}+2^n}{2}$，可以看到 $g_2(x)$ 的值是以 $1,2,4,8,16,\cdots$ 的中心點為臨界點作分界。

5.透過模擬報數的電腦程式，可得 $g_2(37)=5$ (如附錄 2)，

由【定理 1-5】與 $3\times 2^3 < 37 \le 3\times 2^4$ 知 $g_2(37)=5$ ，兩者相互輝映。

透過模擬報數的電腦程式 雖可求得 $g_2(8190)=13$ ，但列表卻需八千多列。

若考慮 $3\times 2^{11} < 8190 \le 3\times 2^{12}$ ，即可得 $g_2(8190)=13$ 。

(二) 觀察 $G_2(x)$ 遊戲中最後站立者的編號 $f_2(x)$

1. 討論 x=9 的情形

   也就是將編號 1,2,3,4,5,6,7,8,9 的人，1,2 報數，報”1”的人蹲下

   第一輪剩下 2,4,6,8 (1,3,5,7,9 號蹲下)

   第二輪剩下 2,6 (4,8 號蹲下)

   第三輪剩下 2 (6 號蹲下)

   $\therefore$ 最後站立者的編號為 $f_2(9)=2$ 。

2. 將 $x=2,3,4,\cdots,33$ 各種情形結果列表如下:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f_2(x)$	2	2	4	2	4	6	8	2	4	6	8	10	12	14	16	2

x	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$f_2(x)$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	2

很明顯的可以發現發現，奇數一定在第一輪就要蹲下，所以 $f_2(x)$ 一定為偶數。
因此，我們得到以下的引理：

【引理 2-1】 $f_2(x)$ 一定為偶數。

3. 觀察 $f_2(x)=x$ 的數據：

x	2	4	8	16	32
$f_2(x)$	2	4	8	16	32

由檢查推導的過程，猜測以下的結果，並証明

【定理 2-2】 若 $x=2^n, n=0,1,2,3,\cdots$，則 $f_2(x)=x$。

(證明)
(i)當 $n=1$ 時，有 2 人參與遊戲，則最後站立者編號為 2，命題成立。
(ii)設 $n=k$ 時，命題成立，即 $x=2^k$ 人參與遊戲，最後站立者編號為 2^k。
當 $n=k+1$ 時，有 $x=2^{k+1}=2\times2^k$ 人參與遊戲，
編號:$1,2,3,\cdots,a,\cdots,2^k,2^k+1,2^k+2,2^k+3,\cdots,2^k+a,\cdots,2^k+2^k$。
每輪最後站著的有編號 a，就有編號 2^k+a，
所以最後一輪剩下編號 2^k，2^k+2^k。
知最後站立者為 $2^k+2^k=2^{k+1}$，命題成立。

故由數學歸納法得知，$f_2(2^n)=2^n$。

4. 透過電腦老師與生科老師在課堂上教了二進位法的計算，我嘗試以二進位表示數字，來觀察其關聯性。

(1)以 x=9 的情形為例
也就是將編號 1,2,3,4,5,6,7,8,9 的人，
以二進位表示$(1)_2$, $(10)_2$, $(11)_2$, $(100)_2$, $(101)_2$, $(110)_2$, $(111)_2$, $(1000)_2$, $(1001)_2$,報數，報”1”的人蹲下
第一輪蹲下就是二進位的 2^0 位為 **1** 之號碼，
繼續站著的一定是二進位的 2^0 位為 **0** 之號碼，共 **4** 人
且第一輪最後一人報數為 1。
$\Rightarrow$第二輪蹲下就是二進位的 2^1 位為 0 之號碼，
也就是繼續站著的一定是二進位的 2^1 位為 **1** 之號碼，共 2 人
且第 2 輪最後一人報數為 1。
$\Rightarrow$第三輪蹲下就是二進位的 2^2 位為 1 之號碼，
也就是繼續站著的一定是二進位的 2^2 位為 **0** 之號碼。

$\therefore\ f(9)=0\times 2^0+1\times 2^1+0\times 2^2=2$ 。

(2)以 x=13 的情形為例：

第一輪蹲下就是二進位的 2^0 位為 1 之號碼，
繼續站著的一定是二進位的 2^0 位為 **0** 之號碼，共 **6** 人，
且第一輪最後一人報數為 1。
⇒第二輪蹲下就是二進位的 2^1 位為 0 之號碼，
也就是繼續站著的一定是二進位的 2^1 位為 **1** 之號碼，共 3 人，
且第 2 輪最後一人報數為 1。
⇒第三輪蹲下就是二進位的 2^2 位為 1 之號碼，
也就是繼續站著的一定是二進位的 2^2 位為 **0** 之號碼，
$\therefore\ f(13)=0\times 2^0+1\times 2^1+0\times 2^2+1\times 2^3=10$ 。

依上面討論可以歸納出以下的結果：

【引理 2-3】若 x 人參加遊戲，需 n 輪遊戲才結束，則 x 寫成二進位應為 n 位或 $n+1$ 位數。

5. 以下是列表 x=17 的情形：

x	2 進位	第一輪後	第二輪後	第三輪後	第四輪後
1	1				
2	10	10	010	0010	0010
3	11				
4	100	100			
5	101				
6	110	110	110		
7	111				
8	1000	1000			
9	1001				
10	1010	1010	1010	1010	
11	1011				
12	1100	1100			
13	1101				
14	1110	1110	1110		
15	1111				
16	10000	10000			
17	10001				

討論 1.

第一輪報”1”的一定蹲下，所以一定留下報”2”的。

以二進位法表示，報”2”的可以表成$(\cdots 0)_2$，也就是 $f_2(x)=(\cdots 0)_2$。

討論 2(1). 若$x>f_2(x)$, $x=(\cdots 0)_2$，則 $f_2(x)=(\cdots 00)_2$。

由$x=(\cdots 0)_2$，可知 x 為偶數。

第一輪由”1”開始報數，以”2”結束，故 $f_2(x)=(\cdots 0)_2$。

第二輪由”1”開始報數，留下報數”2”者，

報數”2”者之編號以二進位法表示可以表成$(\cdots 00)_2$。

討論 2(2). 若$x>f_2(x)$, $x=(\cdots 1)_2$，則 $f_2(x)=(\cdots 10)_2$。

由$x=(\cdots 1)_2$，可知 x 為奇數。

第一輪由”1”開始報數，以”1”結束，留下報數”2”者，故 $f_2(x)=(\cdots 0)_2$。

第二輪由”2”開始報數，留下報數”2”者，

報數”2”者之編號以二進位法表示可以表成$(\cdots 10)_2$。

討論 3(1). 若$x>f_2(x)$, $x=(\cdots 00)_2$，則 $f_2(x)=(\cdots 000)_2$。

由$x=(\cdots 00)_2$可知，x 為 4 的倍數 ($x=2\times$偶數)。

第一輪由”1”開始報數，以”2”結束， $f_2(x)=(\cdots 0)_2$，且

第二輪參與遊戲之人數為偶數。

第二輪由”1”開始報數，留下報數”2”者，

報數”2”者之編號以二進位法表示可以表成$(\cdots 00)_2$。

第三輪由”1”開始報數，

報數”2”者之編號以二進位法表示可以表成$(\cdots 000)_2$

討論 3(2). 若$x>f_2(x)$, $x=(\cdots 10)_2$，則 $f_2(x)=(\cdots 100)_2$。

由$x=(\cdots 10)_2$，可知 x 為偶數($x=2\times$奇數)，但不為 4 的倍數。

第一輪由”1”開始報數，以”2”結束，故 $f_2(x)=(\cdots 0)_2$，且

第二輪參與遊戲之人數為奇數。

第二輪由”1”開始報數，以”1”結束，

報數”2”者之編號以二進位法表示可以表成$(\cdots 00)_2$。

第三輪由”2”開始報數，

報數”2”者之編號以二進位法表示可以表成$(\cdots 100)_2$。

討論 3(3). 若$x>f(x)$, $x=(\cdots 01)_2$，則 $f_2(x)=(\cdots 010)_2$。

第一輪由”1”開始報數，以”1”結束，故 $f_2(x)=(\cdots 0)_2$，且

第二輪由”2”開始報數，以”1”結束。

報數”2”者之編號以二進位法表示可以表成$(\cdots 10)_2$。

第三輪由”2”開始報數，

報數”2”者之編號以二進位法表示可以表成$(\cdots 010)_2$。

討論 3(4). 若 $x > f_2(x), x=(\cdots 11)_2$，則 $f_2(x)=(\cdots 110)_2$。
第一輪由"1"開始報數，以"1"結束，故 $f_2(x)=(\cdots 0)_2$，且
第一輪站著的有奇數個。
第二輪由"2"開始報數，以"2"結束，
報數"2"者之編號以二進位法表示可以表成 $(\cdots 10)_2$。
第三輪由"1"開始報數，
報數"2"者之編號以二進位法表示可以表成 $(\cdots 110)_2$。

6. 觀察 $f_2(2x)$ 與 $f_2(x)$ 的數據：

x	2	3	4	5	6
$f_2(x)$	2	2	4	2	4
$f_2(2x)$	4	4	8	4	8

由檢查推導的過程，我們猜測以下的結果，並証明。

【定理 2-4】 $f_2(2x)=2f_2(x)$。

(證明) 由**【引理 2-1】**可設 $f_2(x)=b_n\times 2^n+b_{n-1}\times 2^{n-1}+b_{n-2}\times 2^{n-2}+\cdots+b_1\times 2^1+0$ ，$b_k\in\{0,1\}$。

表示 x 人參加遊戲，第一輪留下二進位法之 2^0 位為 0 者，第 k 輪留下二進位法之 2^{k-1} 位為 b_k (k>0)。
又當 $2x$ 人參加遊戲時，第一輪留下二進位法之 2^0 位為 0 者，
且剩下 x 人參加遊戲。由此可知：
第二輪留下二進位法之 2^1 位為 0 者，且第 k+1 輪留下二進位法之 2^k 位為 b_k $(k>0)$，

即 $f_2(2x)=b_n\times 2^{n+1}+b_{n-1}\times 2^n+b_{n-2}\times 2^{n-1}+\cdots+b_1\times 2^2+0\times 2^1+0=2f(x)$ ，得證。

7.表列 $x=105=(1101001)_2$ 的情形：

	第 0 輪	第 1 輪	第 2 輪	第 3 輪	第 4 輪	第 5 輪	第 6 輪	第 7 輪
站立者總人數	105	52	26	13	7	3	2	1
始者數碼/報號	1/1	1/2	0/2	0/2	0/2	0/1	0/2	0/1
末者數碼/報號	1/1	0/1	1/1	1/1	0/2	0/1	0/2	1/2
站立者數碼		0	1	0	0	1	0	1

【引理 2-5】 $f_2(2^n+1)=2$ ，$n=0,1,2,3,\cdots$ 。

(證明)第一輪由 1 開始報數，以 1 結束，剩下 2^{n-1} 人。

第二輪由 2 開始報數，以 1 結束，剩下 2^{n-2} 人。

依此歸納可得：

第 n 輪由 2 開始報數，以 1 結束，剩下 $2^{n-n}=1$ 人

且除第 0 輪外，每一輪的第一個報數 2 的人都會留下(因為此人每輪皆報 2)，

故 $f_2(2^n+1)=2$ 。

8. 利用電腦程式觀察 $x=24,25,26$ 跑出來的結果的情形：

24	12	6	3	1	25	12	6	3	2	1	26	13	6	3	2	1
1	2	4	8	16	1	2	2	2	2	18	1	2	4	4	4	20
2	4	8	16		2	4	6	10	18		2	4	8	12	20	
3	6	12	24		3	6	10	18			3	6	12	20		
4	8	16			4	8	14				4	8	16			
5	10	20			5	10	18				5	10	20			
6	12	24			6	12	22				6	12	24			
7	14				7	14					7	14				
8	16				8	16					8	16				
9	18				9	18					9	18				
10	20				10	20					10	20				
11	22				11	22					11	22				
12	24				12	24					12	24				
13					13						13	26				
14					14						14					
15					15						15					
16					16						16					
17					17						17					
18					18						18					
19					19						19					
20					20						20					
21					21						21					
22					22						22					
23					23						23					
24					24						24					
					25						25					
											26					

在 $2^n < a < 2^{n+1}$ 的範圍內，且有 a 人參與 $G_2(x)$ 遊戲，我們將 a 分為奇偶，可討論如下：

(1)若 a 為偶數，且第 0 輪報數以 2 結束。

第一輪留下的編號為 $A_1=\left\{a_1^1,a_2^1,a_3^1,\cdots,a_{k_1}^1\right\}$，其中 $a_i^1\le a$，且必含有 2。

第二輪以 1 開始，留下的編號為 $A_2=\left\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_{k_2}^2\right\}$，其中 $a_i^2\le a$，且必沒有 2。

第 t ($t\ge 2$)輪留下的編號為 $A_t=\left\{a_1^t,a_2^t,a_3^t,\cdots,a_{k_t}^t\right\}$，其中 $a_i^2\le a$，且必沒有 2。

最後一輪剩下的 $f(a)$。

當 $a+1$(為奇數) 人參與遊戲，比 a(為偶數)人參與遊戲多 1 人。

第一輪以 1 結束，留下的編號為 $B_1=\left\{\underline{\underline{2}},a_1^1,a_2^1,a_3^1,\cdots,a_{k_1}^1\right\}$。

第二輪以 2 開始，留下的編號必為 $B_2=\left\{\underline{\underline{2}},a_1^2+2,a_2^2+2,a_3^2+2,\cdots,a_{k_2}^2+2\right\}$。

第 t ($t\ge 2$)輪留下的編號 b_i^t 必為 $B_t=\left\{\underline{\underline{2}},a_1^t+2,a_2^t+2,a_3^t+2,\cdots,a_{k_t}^t+2\right\}$。

也可以說至此 $a+1$(為奇數) 人參與遊戲與 a(為偶數)人參與遊戲留下來的號碼滿足：

$b_i^t=a_i^t+2$ 或 2 。

所以，最後一輪剩下的 $f_2(a+1)$ 必為 $f_2(a)+2$ 或 2。

但由【引理 2-5】 $f_2(2^n+1)=2$，可知 $f_2(a+1)=f_2(a)+2$。

(2) 若 a 為奇數，且第一輪報數以 1 結束，

留下的編號為 $A_1=\left\{a_1^1,a_2^1,a_3^1,\cdots,a_{k_1}^1\right\}$，其中 $a_i^1\le a$。

第二輪報數以 2 開始，留下的編號為 $A_2=\left\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_{k_2}^2\right\}$，其中 $a_i^2\le a$。

第 t 輪留下的編號為 $A_t=\left\{a_1^t,a_2^t,a_3^t,\cdots,a_{k_t}^t\right\}$，最後一輪剩下的 $f_2(a)$。

當 $a+1$(為偶數) 人參與遊戲，比 a(為奇數)人參與遊戲多 1 人。

第一輪報數以 2 結束，留下的編號必為 $B_1=\left\{a_1^1,a_2^1,a_3^1,\cdots,a_{k_1}^1,\underline{\underline{a+1}}\right\}$。

第二輪留下的編號為 $B_2=\left\{a_1^2+2,a_2^2+2,a_3^2+2,\cdots,a_{k_1}^2+2,\underline{\underline{a+1}}\right\}$。

第 t 輪留下的編號 b_i^t 必為 $B_t=\left\{a_1^t+2,a_2^t+2,a_3^t+2,\cdots,a_{k_t}^t+2,\underline{\underline{a+1}}\right\}$。

因此，$b_i^t=a_i^t+2$ 或 $a+1$，即最後一輪剩下的 $f_2(a+1)$ 必為 $f_2(a)+2$ 或 $a+1$。

但由【引理 2-2】$f_2(2^n)=2^n$，得知 $f_2(a+1)=f_2(a)+2$ 。

由以上的討論，可得以下定理。

【定理 2-6】若 $2^n<a<2^{n+1}\ (n=0,1,2,\cdots)$，則 $f_2(a+1)=f_2(a)+2$。

由【定理 2-2】,【定理 2-4】及【定理 2-6】,我們可以得到：

【定理 2-7】若 $x=2^n+t\ (t=0,1,2,\cdots,2^n-1,n=1,2,3,\cdots)$，則 $f_2(x)=2t$。

8.透過**模擬報數的電腦程式，可得** $f_2(37)=10$ (如附錄 2)，

由【定理 2-6】與 $37=2^5+5$ 知 $f_2(37)=2\times5=10$，兩者相互輝映。

透過**模擬報數的電腦程式 雖可**求得 $f_2(8190)=8188$，計算速度就慢了些。

若考慮 $8190=2^{12}+4094$，即可得 $f_2(8190)=8188$。

二. 接著討論 $G_1(x)$ 遊戲：

「編號 $1,2,3,\cdots,x$ 號的同學圍成一圈，報數 1,2,1,2,…，由 1 號開始報數，**報 2 即蹲下**，則最後站著的是 $f_1(x)$ 號，遊戲需玩 $g_1(x)$ 輪」。

(一). $g_1(x)$ 的研究

首先，觀察遊戲的輪數 $g_1(x)$ 的值：

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$g_1(x)$	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

觀察 $x=3\times 2^n$ 輪數增加的例子：

x	3	6	12	24
$g_1(x)$	2	3	4	5

可得

【引理 3-1】 $g_1(3\times 2^n)=n+2$。

(證明) 第一輪剩下 $3\times 2^{n-1}$ 人，第二輪剩下 $3\times 2^{n-2}$ 人，

第 n 輪剩下 $3\times 2^{n-n}=3$ 人，報數為 1,2,1。

第 n+1 輪留下報 1 的，剩下 2 人，還需一輪方可結束。

因此，$g_1(3\times 2^n)=n+1+1=n+2$。

【定理 3-2】若 x 人參與遊戲，且 $3\times 2^{n-2}\le x<3\times 2^{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，則 $g_1(x)=n$。

(證明)

由【引理 3-1】可知 $g_1(3\times 2^{n-2})=n$，$g_1(3\times 2^{n-1})=n+1$，且第 n-1 輪報數為 1,2,1。

當 $x=3\times 2^{n-1}-1$ 時，

第 0 輪之最後報數為 1，

第一輪剩下 $3\times 2^{n-2}$ 人，最後報數為 2，

第 n-1 輪剩下 $3\times 2^{n-n}=3$ 人，報數為 2,1,2，

還需一輪方能結束。

故 $g_1(3\times 2^{n-1}-1)=(n-1)+1=n$。

又 $g_1(x)$ 為遞增函數，故當 $3\times 2^{n-2}\le x<3\times 2^{n-1}$ 時，$g_1(x)=n$。

註：由 $3\times 2^{n-2}=\dfrac{2^n+2^{n-1}}{2}$ 而 $3\times 2^{n-1}=\dfrac{2^{n+1}+2^n}{2}$，可以看到 $g_1(x)$ 的值也是以 $1,2,4,8,16,\cdots$ 的中心點為臨界點作分界。

透過模擬報數的電腦程式，可得 $g_1(37)=5$ (如附錄 3)，

由【定理 1-5】與 $3\times 2^3<37\le 3\times 2^4$ 知 $g_1(37)=5$，兩者相互輝映。

(二) $f_1(x)$ 的研究

1.首先觀察 $f_1(x)$ 的值：

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f_1(x)$	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3

x	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$f_1(x)$	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	1	3

因為偶數在第一輪就蹲下，所以第一輪站著的一定是奇數，可以得到：

【引理 4-1】 $f_1(x)$ 一定為奇數。

【定理 4-2】若 $x=2^n, n=0,1,2,3,\cdots$，則 $f_1(x)=1$。

(證明) 第一輪由 1 開始報數，以 2 結束，剩下 2^{n-1} 人。
第二輪由 1 開始報數，以 2 結束，剩下 2^{n-2} 人。
依此歸納可得：
第 n 輪由 2 開始報數，以 1 結束，剩下 $2^{n-n}=1$ 人。
且每一輪的第一個報數 1 者都會留下(因為此人每輪皆報 1)，

故 $f_1(2^n)=1$。

【定理 4-3】若 $x=2^n-1, n=0,1,2,3,\cdots$，則 $f_1(x)=x$。

(證明) 已知 2^n-1 為奇數，
第 0 輪由 1 開始報數，以 1 結束。
第一輪由 2 開始報數，以 1 結束，剩下 2^{n-1} 人。
第二輪由 2 開始報數，以 1 結束，剩下 2^{n-2} 人。
依此歸納可得：
第 n 輪由 2 開始報數，以 1 結束，剩下 $2^{n-n}=1$ 人，
且每一輪的最後一個報數者(2^n-1)都會留下(因此人每輪皆報 1)，

故 $f_1(2^n-1)=2^n-1$。

5. 利用電腦程式觀察 $x=20,21,22$ 情形：
先看 $x=20$ 到 $x=21$ 的變化，再 $x=21$ 看到 $x=22$ 的變化，都發現每一輪都有往前的情形，將一般化的情形討論如下。

20	10	5	3	1	21	11	5	3	1	22	11	6	3	1
1	1	1	1	9	1	1	3	3	11	1	1	1	5	13
2	3	5	9		2	3	7	11		2	3	5	13	
3	5	9	17		3	5	11	19		3	5	9	21	
4	7	13			4	7	15			4	7	13		
5	9	17			5	9	19			5	9	17		
6	11				6	11				6	11	21		
7	13				7	13				7	13			
8	15				8	15				8	15			
9	17				9	17				9	17			
10	19				10	19				10	19			
11					11	21				11	21			
12					12					12				
13					13					13				
14					14					14				
15					15					15				
16					16					16				
17					17					17				
18					18					18				
19					19					19				
20					20					20				
					21					21				
										22				

在 $2^n < a < 2^{n+1}$ 的範圍內，且有 a 人參與 $G_1(x)$ 遊戲，我們將 a 分為奇偶，可討論如下：

(1)若 a 為偶數，且第 0 輪報數以 2 結束，

第一輪以 1 開始，留下的編號為 $A_1 = \{a_1^1, a_2^1, a_3^1, \cdots, a_{k_1}^1\}$，其中 $a_i^1 \le a$，且必有 1。

第二輪留下的編號為 $A_2 = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, \cdots, a_{k_2}^2\}$，其中 $a_i^2 \le a$，且必有 1。

第 t ($t \ge 2$)輪留下的編號為 $A_t = \{a_1^t, a_2^t, a_3^t, \cdots, a_{k_t}^t\}$，其中 $a_i^2 \le a$。

最後剩下的為 $f_1(a)$。

當 $a+1$(為奇數) 人參與遊戲，比 a(為偶數)人參與遊戲多 1 人，第 0 輪以 1 結束。

第一輪以 2 開始，留下的編號為 $B_1 = \{a_1^1, a_2^1, a_3^1, \cdots, a_{k_1}^1, \underline{\underline{a+1}}\}$。

第二輪留下的編號必為 $B_2 = \{a_1^2+2, a_2^2+2, a_3^2+2, \cdots, a_{k_2}^2+2, \underline{\underline{a+1}}\}$。

第 t ($t \ge 2$)輪留下的編號 b_i^t 必為 $B_t = \{a_1^t+2, a_2^t+2, a_3^t+2, \cdots, a_{k_t}^t+2, \underline{\underline{a+1}}\}$。

也可以說 $a+1$(為奇數)人參與遊戲與 a(為偶數)人參與遊戲留下來的號碼滿足：

$b_i^t = a_i^t + 2$ 或 $a+1$ 。

所以最後一輪剩下的 $f_1(a+1)$ 必為 $f_1(a)+2$ 或者 $a+1$

但由【定理 4-3】 $f_1(2^n-1)=2^n-1$ ，得知 $f_1(a+1)=f_1(a)+2$ 。

(2) 若 a 為奇數，且第 0 輪報數以 1 結束。

第一輪報數以 2 開始，留下的編號為 $A_1=\{a_1^1,a_2^1,a_3^1,\cdots,a_{k_1}^1\}$ ，其中 $a_i^1 \le a$ 。

第二輪留下的編號為 $a_i^2 \in A_2=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_{k_2}^2\}$ ，其中 $a_i^2 \le a$ 。

第 t 輪留下的編號為 $a_i^t \in A_t=\{a_1^t,a_2^t,a_3^t,\cdots,a_{k_t}^t\}$ ，其中 $a_i^t \le a$ 。

最後一輪剩下的 $f_1(a)$ 。

當 $a+1$(為偶數) 人參與遊戲，比 a(為奇數)人參與遊戲多 1 人，第 0 輪報數以 1 結束。

第一輪報數以 1 開始，留下的編號必為 $B_1=\{\underline{\underline{1}},a_1^1,a_2^1,a_3^1,\cdots,a_{k_1}^1\}$ 。

第二輪留下的編號為 $B_2=\{\underline{\underline{1}},a_1^2+2,a_2^2+2,a_3^2+2,\cdots,a_{k_1}^2+2\}$ 。

第 t 輪留下的編號 b_i^t 必為 $B_t=\{\underline{\underline{1}},a_1^t+2,a_2^t+2,a_3^t+2,\cdots,a_{k_t}^t+2\}$ 。

因此， $b_i^t = a_i^t + 2$ 或 1 ；亦即最後一輪剩下的 $f_1(a+1)$ 必為 $f_1(a)+2$ 或者 1。。

但由【定理 4-2】 $f_1(2^n)=1$ ，得知 $f_1(a+1)=f_1(a)+2$ 。

由以上的討論，可得以下定理：

【定理 4-4】若 $2^n < a < 2^{n+1}$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ ，則 $f_1(a+1)=f_1(a)+2$ 。

綜合以上結果，可得：

【定理 4-5】若 $x=2^n+t$ $(t=1,2,\cdots,2^n-1, n=1,2,3,\cdots)$ ，則 $f_1(x)=2t+1$ 。

透過**模擬報數的電腦程式，可得** $f_1(37)=11$ (如附錄 3)，

由【定理 4-5】與 $37=2^5+5$ 知 $f_1(37)=2\times5+1=11$ ，兩者相互輝映。

陸、 研究結果與討論

本研究透過觀察、歸納，找出 x 人參與 1,2,1,2,$\cdots$報數遊戲$G_i(x)$中，整個遊戲所需要玩的輪數$g_i(x)$，與最後站立者之編號 $f_i(x)$。研究中，我們發現$1,2,4,8,16,\cdots$ 及其中心點可視為 $f_i(x)$與$g_i(x)$值的臨界點。事實上，對於$g_i(x)$值的界定，我們是以$1,2,4,8,16,\cdots$的中心點$\dfrac{2^{n+1}+2^n}{2}=3\times 2^{n-1}$為分界點；而 $f_i(x)$值的界定，我們是以$1,2,4,8,16,\cdots$ 為分界點。主要有以下兩項研究結果：

一. 所需輪數$g_1(x),g_2(x)$的值與性質：

(1) 若 $3\times 2^{n-2}\le x<3\times 2^{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，則$g_1(x)=n$。

(2) 若 $3\times 2^{n-2}<x\le 3\times 2^{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，則$g_2(x)=n$。

同時，我們也得到$g_1(x)$與$g_2(x)$的關係如下：

$$g_1(x)=\begin{cases} g_2(x)+1 & ,\ x=3\times 2^n \\ g_2(x) & ,\ x\ne 3\times 2^n \end{cases}$$ 。

二. 最後站立者編號 $f_1(x),f_2(x)$的值與性質：

(1) $f_1(x)$一定為奇數，$f_2(x)$一定為偶數。

(2) 若$x=2^n$，則 $f_1(x)=1$， $f_2(x)=x$。

(3) 若$x=2^n-1$，則 $f_1(x)=x$。若$x=2^n+1$，則 $f_2(x)=2$。

(4) 若$2^n<a<2^{n+1}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，則 $f_i(a+1)=f_i(a)+2$，其中$i=1,2$。

(5) 若$x=2^n+t$ $(t=0,1,2,,2^n-1,n=1,2,3,\cdots)$，則 $f_1(x)=2t+1,\ f_2(x)=2t$。

合併 $f_1(x)$及 $f_2(x)$的公式，可得到：

若$x=2^n+t$ $(t=0,1,2,,2^n-1,n=1,2,3,\cdots)$，則除了 $f_2(2^n)=2^n$之外， $f_i(x)$都可以表成 $f_i(x)=2t+2-i$，其中 $i=1,2$。

柒、　結論

本研究不僅可以解決原始問題：「13 人參與$1,2,1,2,\cdots$報數遊戲，希望最後是 11 號站著，應由哪一號開始報數？」理由如下：

由最後站立者為奇數，可推得開始報數者必為偶數。在$G_2(13)$的報數遊戲中，$f_2(13)=10$表示由編號1的人開始報數，而最後站立者是原排列編號10的人。因此，若希望最後站立者是原排列編號11的人，則應由編號2的人開始報數。

同時，我們也將題目拓展成一般狀況下的問題$G_i(x)$：「有$1,2,3,\cdots,x$號的同學圍成一圈，報數 1,2,1,2,…，由 1 號開始報數，報 i 的站著，需玩$g_i(x)$輪，最後站立者之編號為$f_i(x)$」，我們找到了$g_i(x)$與$f_i(x)$的一般式。日後我們也希望進一步探討：對任意的質數p，若報數方式改成$1,2,\cdots,p,1,2,\cdots,p,\cdots$，則所需玩的輪數$g_i(x)$，及最後站立者之編號$f_i(x)$之一般式又是如何呢？

捌、　參考資料

1. 國中數學第 2 冊 (康軒文教事業)
2. 高中數學第 2 冊 (龍騰文化)
3. 數學遊戲大觀第三集 (前程出版社)
4. 初中競賽教程 (九章出版社)
5. 約瑟夫數列的最後一章，第 46 屆全國中小學科學展覽會，作者：葉佩雯
6. 約瑟夫問題 2007 年臺灣國際科展，作者：葉佩雯
7. 撲克牌遊戲中的數學原理，第 53 屆全國中小學科展作品，作者：張哲綱、李汪其

附錄 1： 模擬報數的電腦程式

```
Sub main()
	Dim num As Integer, cycle As Integer, gap As Integer, sel As Integer
	Dim i As Integer, j As Integer, temp As Integer, tmp As Integer, tmp_sel As Integer
	Dim num_array() As Integer, start() As Integer
	Dim remainder As Integer, remainder2 As Integer, j2 As Integer

	num = InputBox("輸入參與報數的總人數", "輸入方塊", 2)
	Do
		temp = 0
		gap = InputBox("輸入報數間隔(需大於 1)", "輸入方塊", 2)
		If gap < 2 Then
			temp = 2
			MsgBox ("報數間隔需大於 1")
		End If
	Loop While temp = 2

	Do
		temp = 0
		sel = InputBox("輸入欲選中的報數編號", "輸入方塊", gap)
		If sel > gap Then
			temp = 2
			MsgBox ("報數編號不得大於剛才輸入的報數間隔!")
		End If
	Loop While temp = 2

	Worksheets(1).Cells.ClearContents

	cycle = 1
	temp = num
	tmp_sel = sel
	remainder = 0		'前一次的餘數
	remainder2 = 0		'本次的餘數
	Do While temp > 0
		ReDim Preserve num_array(0 To num, 1 To cycle) As Integer
		ReDim Preserve start(1 To cycle) As Integer

		num_array(0, cycle) = temp
		start(cycle) = tmp_sel
```

```
        If temp = 1 Then Exit Do

        remainder2 = (temp + remainder) Mod gap

        tmp_sel = (sel + (gap - remainder2)) Mod gap
        If tmp_sel = 0 Then tmp_sel = gap

        temp = Int((temp + remainder + gap - sel) / gap)
        If remainder >= sel Then temp = temp - 1

        cycle = cycle + 1
        remainder = remainder2
    Loop

    For j = 1 To num
        num_array(j, 1) = j
    Next

    For i = 2 To cycle
        For j = 1 To num_array(0, i)
            num_array(j, i) = num_array(start(i - 1) + (j - 1) * gap, i - 1)
        Next
    Next

    For i = 1 To cycle
        For j = 0 To num
            If num_array(j, i) <> 0 Then
'                Worksheets(1).Cells(1, i).Value = start(i)          '  本行為偵錯或測試用
                Worksheets(1).Cells(j + 2, i).Value = num_array(j, i)
            End If
        Next
    Next
End Sub
```

附錄 2： $G_2(37)$ 模擬報數電腦程式執行的結果

37	18	9	5	2	1
1	2	2	2	10	10
2	4	6	10	26	
3	6	10	18		
4	8	14	26		
5	10	18	34		
6	12	22			
7	14	26			
8	16	30			
9	18	34			
10	20				
11	22				
12	24				
13	26				
14	28				
15	30				
16	32				
17	34				
18	36				
19					
20					
21					
22					
23					
24					
25					
26					
27					
28					
29					
30					
31					
32					
33					
34					
35					
36					
37					

附錄 **3**： $G_1(37)$ 模擬報數電腦程式執行的結果

37	19	9	5	2	1
1	1	3	3	11	11
2	3	7	11	27	
3	5	11	19		
4	7	15	27		
5	9	19	35		
6	11	23			
7	13	27			
8	15	31			
9	17	35			
10	19				
11	21				
12	23				
13	25				
14	27				
15	29				
16	31				
17	33				
18	35				
19	37				
20					
21					
22					
23					
24					
25					
26					
27					
28					
29					
30					
31					
32					
33					
34					
35					
36					
37					

【評語】030415

本作品運用數學歸納法探討報數遊戲中，最後站立者的編號以及遊戲輪數的函數式子。比較特別的是作者在研究的過程中，運用了二進位的處理方式，頗有可開發的空間。本作品略嫌內容不夠豐富，可考慮朝更複雜的報數規則進行研究，並思考相關應用的可能性。