中華民國第 54 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030414

過定點分割 N 邊形所形成之直角三角形內切圓半徑和之研究

學校名稱：國立高雄師範大學附屬高級中學

作者：	指導老師：
國二 歐劭謙	歐志昌

關鍵詞：內切圓半徑、適當區域、直角三角形

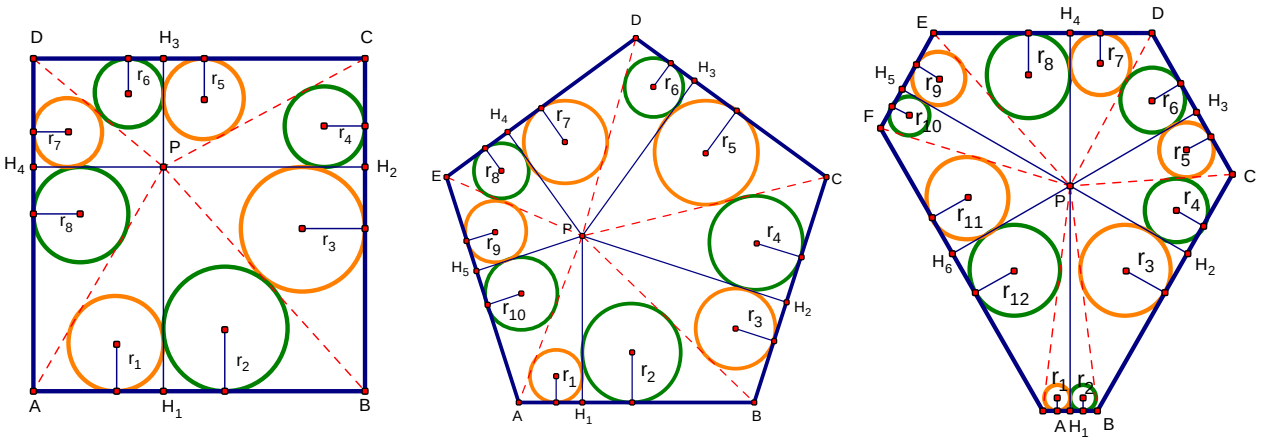
摘　要

本研究討論「過一定點 P，對一凸 N 邊形的各邊做垂線，可得 N 個垂足。利用 P 點、N 個垂足點及 N 邊形的 N 個頂點所形成的 $2N$ 個直角三角形，對應 $2N$ 個內切圓及半徑，此時若依序每次間隔一個三角形取其內切圓半徑(參考下圖)，共可將 $2N$ 個內切圓分為兩組內切圓半徑和」，經過研究討論發現以下結果：

（一）定義適當區域為：由垂直此凸多邊形各邊的垂線所共同圍出的封閉區域，當圖形為正三角形時，適當區域為正六邊形，較原圖形大，其餘的圖形所形成的適當區域必在原圖形內部。

（二）兩組相間隔的直角三角形之內切圓半徑之和相等的限制條件

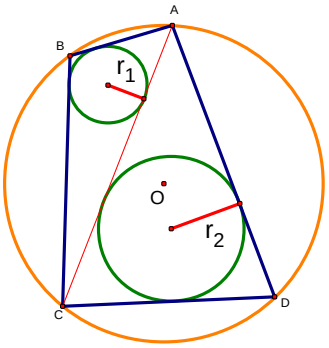
圖形類型	限制條件
正 $2N$ 邊形	P 點在任意位置
正 $2N+1$ 邊形	P 點落在適當區域內
等角且非正 N 邊形	P 點落在適當區域內

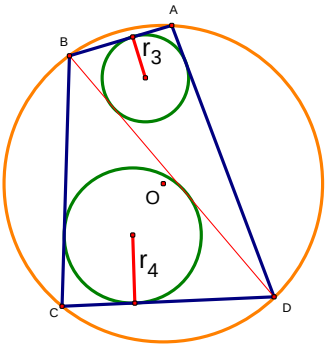


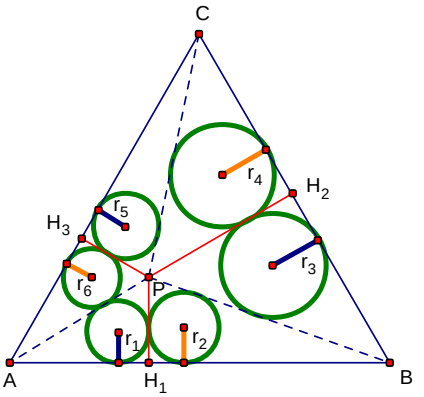
橘色內切圓半徑之和＝綠色內切圓半徑之和

一、　研究動機

我在第 53 屆的科展作品中討論過：圓內接 N 邊形利用連接對角線的方式可分割成多個圓內接三角形，而這些圓內接三角形的內切圓半徑和在不同的分割方式下，皆會相等(如下圖一、二)，這個結果讓我覺得內切圓是一種很有趣的圖形。另外在數學傳播第 36 卷第 1







圖一　　$r_1+r_2=r_3+r_4$　　圖二

期中，劉步松(2013)談到：「設 ΔABC 爲正三角形，P 爲內部任一點，由 P 分別向三角形的三邊做垂線，垂足分別爲 H_1,H_2,H_3，分別連接 $\overline{PA},\overline{PB},\overline{PC}$，則 ΔABC 被分成 6 個直角三角形(如上圖)，設這些直角三角形的內切圓半徑爲 r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6，則 $r_1,+r_3+r_5=r_2+r_4+r_6$。」我覺得這個結果非常有趣，而且目前似乎還沒有其他文獻有探討到這個問題，讓我想要進一步去探討是否有其他的圖形也具有相同的性質，於是我開始進行以下的研究。

二、　研究目的

劉步松在數學傳播的文章所提出的研究內容是討論正三角形及正五邊形在透過內部任一點 P 對各邊做垂足，並搭配 P 點與各頂點的連線所形成的直角三角形，其各相間隔之內切圓半徑之和會相等。因此我想進一步探討當邊數改變時，此性質是否相同；另外 P 點的位置對於內切圓半徑之和的結果又有何影響。因此我提出了以下的研究問題：

（一）　若圖形爲正 $2N$ 邊形時：

1.當 P 點在圖形內部，則兩組相間隔之內切圓半徑之和是否相等？

2.若兩組相間隔之內切圓半徑之和相等，則 P 點位置有何限制？

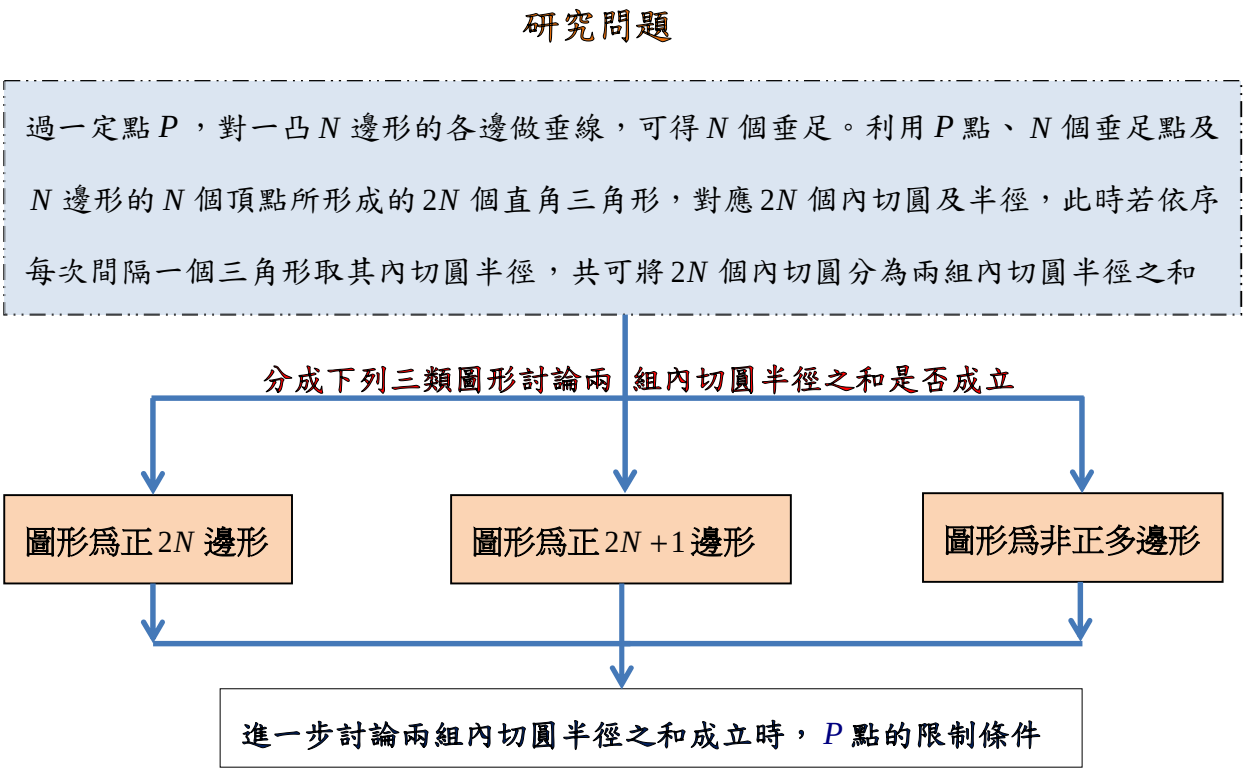
（二） 若圖形爲正 $2N+1$ 邊形時：

1.當 P 點在圖形內部，則兩組相間隔之內切圓半徑之和是否相等？

2.若兩組相間隔之內切圓半徑之和相等，則 P 點位置有何限制？

（三） 是否存在非正多邊形，使得當 P 點在何種限制下，能讓兩組相間隔之內切圓半徑之和相等？

以下是我的研究架構圖



三、 研究設備

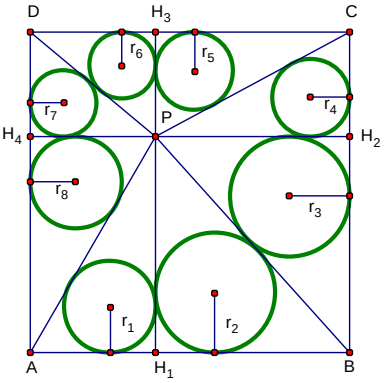
研究過程中我利用 GSP 作爲模擬實驗的工具，以便在進行推論時能有充足的資料參考。

四、　研究過程

（一）　當圖形爲正 $2N$ 邊形，且 P 點在圖形內部時

1、當圖形為正方形時：

已知四邊形 $ABCD$ 爲正方形，P 爲內部一點，由 P 點向各邊做垂線，分別得垂足依序爲 H_1, H_2, H_3, H_4（如右圖），再連接 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$、$\overline{PD}$，此時可得八個直角三角形，試問這八個直角三角形的內切圓半徑有何關係？

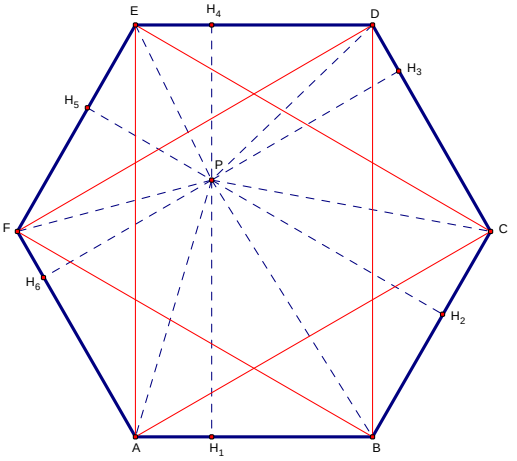


【想法】：從圖形觀察可知，$\overline{H_1H_3}$ 及 $\overline{H_2H_4}$ 將正方形分割成爲四個矩形，此時

$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$、$\overline{PD}$ 分別爲四個矩形的對角線，**因爲矩形的兩雙對邊等長（兩股長相等），且兩個直角三角形共用一條對角線（斜邊相等），因此** $r_1 = r_8$，$r_2 = r_3$，$r_4 = r_5$，$r_6 = r_7$，$\Rightarrow r_1 + r_3 + r_5 + r_7 = r_2 + r_4 + r_6 + r_8$

2、當圖形為正六邊形時：

當 P 點在正六邊形 $ABCDEF$ 內部時，由 P 點向各邊做垂線，分別得垂足依序爲 $H_1, H_2, \cdots, H_5, H_6$，再連接 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$、$\overline{PD}$、$\overline{PE}$、$\overline{PF}$，此時可得十二個直角三角形（如右圖），則這十二個直角三角形的內切圓半徑有何關係？



【想法】：**利用直角三角形內切圓半徑爲：$\frac{1}{2}$(兩股和－斜邊)**可得：

$$r_{\Delta PAH_1} = \frac{\overline{AH_1} + \overline{PH_1} - \overline{PA}}{2}, \quad r_{\Delta PBH_1} = \frac{\overline{BH_1} + \overline{PH_1} - \overline{PB}}{2},$$

$$r_{\Delta PBH_2} = \frac{\overline{BH_2} + \overline{PH_2} - \overline{PB}}{2}, \quad r_{\Delta PCH_2} = \frac{\overline{CH_2} + \overline{PH_2} - \overline{PC}}{2},$$

$$r_{\Delta PCH_3} = \frac{\overline{CH_3} + \overline{PH_3} - \overline{PC}}{2}, \quad r_{\Delta PDH_3} = \frac{\overline{DH_3} + \overline{PH_3} - \overline{PD}}{2},$$

$$r_{\Delta PDH_4} = \frac{\overline{DH_4} + \overline{PH_4} - \overline{PD}}{2}, \quad r_{\Delta PEH_4} = \frac{\overline{EH_4} + \overline{PH_4} - \overline{PE}}{2},$$

$$r_{\Delta PEH_5}=\frac{\overline{EH_5}+\overline{PH_5}-\overline{PE}}{2}\ ,\ r_{\Delta PFH_5}=\frac{\overline{FH_5}+\overline{PH_5}-\overline{PF}}{2}\ ,$$

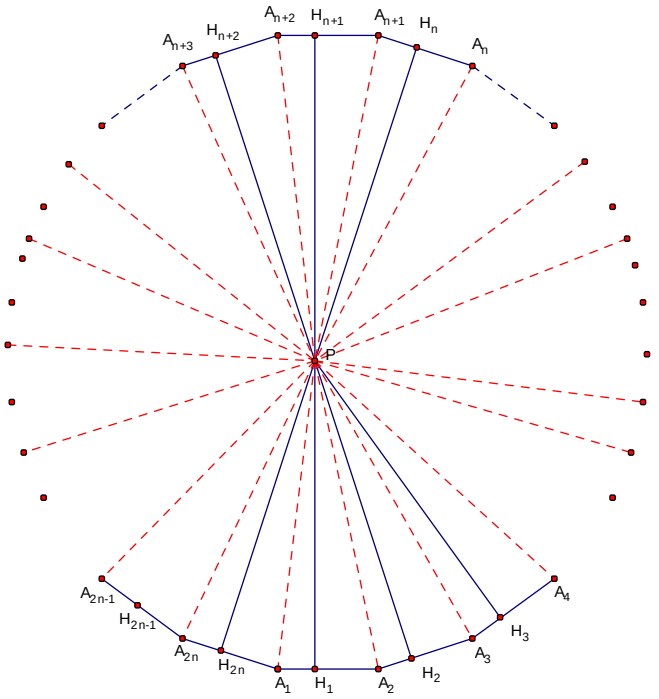
$$r_{\Delta PFH_6}=\frac{\overline{FH_6}+\overline{PH_6}-\overline{PF}}{2}\ ,\ r_{\Delta PAH_6}=\frac{\overline{AH_6}+\overline{PH_6}-\overline{PA}}{2}\ ,$$

$\because \overline{AH_1}=\overline{EH_4}$ ，$\overline{BH_2}=\overline{FH_5}$ ，$\overline{CH_3}=\overline{AH_6}$ ，$\overline{DH_4}=\overline{BH_1}$ ，$\overline{EH_5}=\overline{CH_2}$ ，$\overline{FH_6}=\overline{DH_3}$

$\therefore r_{\Delta PAH_1}+r_{\Delta PBH_2}+r_{\Delta PCH_3}+r_{\Delta PDH_4}+r_{\Delta PEH_5}+r_{\Delta PFH_6}=r_{\Delta PBH_1}+r_{\Delta PCH_2}+r_{\Delta PDH_3}+r_{\Delta PEH_4}+r_{\Delta PFH_5}+r_{\Delta PAH_6}$

3、正 $2N$ 邊形的一般化情形：

如右圖，當 P 點在正 $2N$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_{2n-1}A_{2n}$ 內部時，由 P 點向各邊做垂線，分別得垂足依序為 $H_1,H_2,\cdots,H_{2n-1},H_{2n}$ ，再連接 $\overline{PA_1}$ 、$\overline{PA_2}$ 、⋯、$\overline{PA_{2n-1}}$ 、$\overline{PA_{2n}}$ ，此時可得 $4N$ 個直角三角形，



利用直角三角形內切圓半徑為：$\frac{1}{2}$(兩股和−斜邊)可得：

$$r_{\Delta PA_1H_1}=\frac{\overline{A_1H_1}+\overline{PH_1}-\overline{PA_1}}{2}\ ,\ r_{\Delta PA_2H_1}=\frac{\overline{A_2H_1}+\overline{PH_1}-\overline{PA_2}}{2}\ ,$$

$$r_{\Delta PA_2H_2}=\frac{\overline{A_2H_2}+\overline{PH_2}-\overline{PA_2}}{2}\ ,\ r_{\Delta PA_3H_2}=\frac{\overline{A_3H_2}+\overline{PH_2}-\overline{PA_3}}{2}\ ,$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$r_{\Delta PA_nH_n}=\frac{\overline{A_nH_n}+\overline{PH_n}-\overline{PA_n}}{2}\ ,\ r_{\Delta PA_{n+1}H_n}=\frac{\overline{A_{n+1}H_n}+\overline{PH_n}-\overline{PA_{n+1}}}{2}\ ,$$

$$r_{\Delta PA_{n+1}H_{n+1}}=\frac{\overline{A_{n+1}H_{n+1}}+\overline{PH_{n+1}}-\overline{PA_{n+1}}}{2}\ ,\ r_{\Delta PA_{n+2}H_{n+1}}=\frac{\overline{A_{n+2}H_{n+1}}+\overline{PH_{n+1}}-\overline{PA_{n+2}}}{2}\ ,$$

$$r_{\Delta PA_{n+2}H_{n+2}}=\frac{\overline{A_{n+2}H_{n+2}}+\overline{PH_{n+2}}-\overline{PA_{n+2}}}{2}\ ,\ r_{\Delta PA_{n+3}H_{n+2}}=\frac{\overline{A_{n+3}H_{n+2}}+\overline{PH_{n+2}}-\overline{PA_{n+3}}}{2}\ ,$$

$$r_{\Delta PA_{n+3}H_{n+3}}=\frac{\overline{A_{n+3}H_{n+3}}+\overline{PH_{n+3}}-\overline{PA_{n+3}}}{2}\ ,\ r_{\Delta PA_{n+4}H_{n+3}}=\frac{\overline{A_{n+4}H_{n+3}}+\overline{PH_{n+3}}-\overline{PA_{n+4}}}{2}\ ,$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$r_{\Delta PA_{2n-1}H_{2n-1}}=\frac{\overline{A_{2n-1}H_{2n-1}}+\overline{PH_{2n-1}}-\overline{PA_{2n-1}}}{2}\text{，}r_{\Delta PA_{2n}H_{2n-1}}=\frac{\overline{A_{2n}H_{2n-1}}+\overline{PH_{2n-1}}-\overline{PA_{2n}}}{2}\text{，}$$

$$r_{\Delta PA_{2n}H_{2n}}=\frac{\overline{A_{2n}H_{2n}}+\overline{PH_{2n}}-\overline{PA_{2n}}}{2}\text{，}r_{\Delta PA_{1}H_{2n}}=\frac{\overline{A_{1}H_{2n}}+\overline{PH_{2n}}-\overline{PA_{1}}}{2}\text{，}$$

$$\because \overline{A_1H_1}=\overline{A_{n+2}H_{n+1}}\text{，}\overline{A_2H_2}=\overline{A_{n+3}H_{n+2}}\text{，}\overline{A_3H_3}=\overline{A_{n+4}H_{n+3}}\text{，}\cdots\cdots\text{，}\overline{A_nH_n}=\overline{A_1H_{2n}}$$

$$\overline{A_{n+1}H_{n+1}}=\overline{A_2H_1}\text{，}\overline{A_{n+2}H_{n+2}}=\overline{A_3H_2}\text{，}\cdots\cdots\text{，}\overline{A_{2n-1}H_{2n-1}}=\overline{A_nH_{n-1}}\text{，}\overline{A_{2n}H_{2n}}=\overline{A_{n+1}H_n}$$

$$\therefore r_{\Delta PA_1H_1}+r_{\Delta PA_2H_2}+\cdots+r_{\Delta PA_{2n-1}H_{2n-1}}+r_{\Delta PA_{2n}H_{2n}}=r_{\Delta PA_2H_1}+r_{\Delta PA_3H_2}+\cdots+r_{\Delta PA_{2n}H_{2n-1}}+r_{\Delta PA_1H_{2n}}$$

4、歸納：

從前面的討論過程中我發現：當 P 點在正 $2N$ 邊形的內部時，**正 $2N$ 邊形的兩組相間隔之內切圓半徑和皆具有以下三個特性**：

(1) **P 點與正 $2N$ 邊形各頂點連線段長**，在計算兩組相間隔之內切圓半徑和時，**必各出現一次**。

(2) 因爲**正 $2N$ 邊形有很好的對稱特性**，因此在計算內切圓半徑時，**若有某一個內切圓有一段股長落在正 $2N$ 邊形一邊，則必在其對邊存在另一個內切圓具有相同的股長**，且這兩個內切圓分別屬於不同兩組。

(3) 由 **P 點對正 $2N$ 邊形的各邊所做的垂線段長必爲連續兩組直角三角形所共用**，因此在計算兩組相間隔之內切圓半徑和時必各出現一次。

小結：

由以上的討論可知：在正 $2N$ 邊形內部任取一 P 點，並由 P 點對此正 $2N$ 邊形的各邊做垂線，可得 $2N$ 個垂足，分別連接 P 點與正 $2N$ 邊形的 $2N$ 個頂點，此時可得 $4N$ 個直角三角形，則考慮此 $4N$ 個直角三角形的內切圓半徑，若依序挑選每次間隔一個直角三角形的內切圓，則可將 $4N$ 個直角三角形分爲兩組，由上述推論可知此兩組內切圓半徑和必相等。

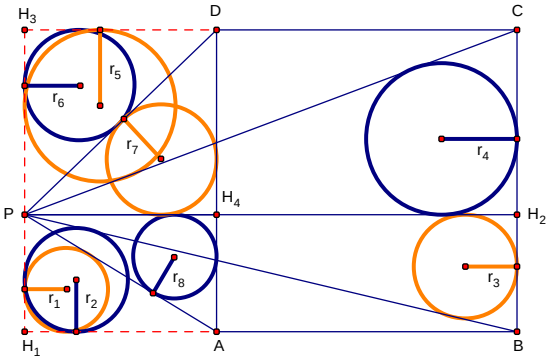
即：$r_{\Delta PA_1H_1}+r_{\Delta PA_2H_2}+\cdots+r_{\Delta PA_{2n-1}H_{2n-1}}+r_{\Delta PA_{2n}H_{2n}}=r_{\Delta PA_2H_1}+r_{\Delta PA_3H_2}+\cdots+r_{\Delta PA_{2n}H_{2n-1}}+r_{\Delta PA_1H_{2n}}$

（二） 當圖形爲正 $2N$ 邊形，且 P 點在圖形外部時

接著考慮如果 P 點的位置不在圖形內部時，那前面所得到的結果是否依然成立呢？

1、討論 P 點在正方形 $ABCD$ 外部時

當 P 點在正方形 $ABCD$ 外部時，**由 P 點向各邊及其延長線做垂線**，分別得垂足依序爲 H_1, H_2, H_3, H_4（如右圖），再連接 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$、$\overline{PD}$，可得八個直角三角形，此時 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$、$\overline{PD}$ 分別爲四個矩形的對角線，因爲矩形的兩雙對邊等長（兩股長相等），且兩個直角三角形共用一條對角線（斜邊相等），

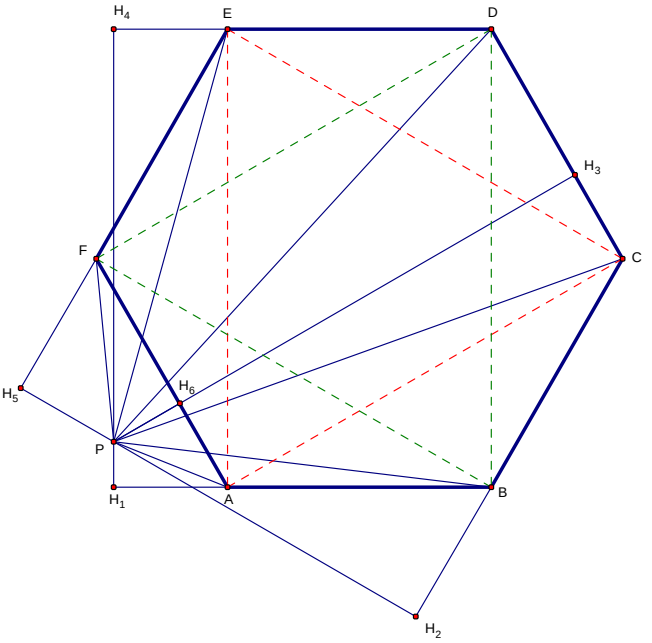


因此 $r_1 = r_8$，$r_2 = r_3$，$r_4 = r_5$，$r_6 = r_7$，$\Rightarrow r_1 + r_3 + r_5 + r_7 = r_2 + r_4 + r_6 + r_8$

2、討論 P 點在正六邊形 $ABCDEF$ 外部時

當 P 點在正六邊形 $ABCDEF$ 外部時，由 P 點向各邊及其延長線做垂線，分別得垂足依序爲 $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$（如右圖），再連接 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$、$\overline{PD}$、$\overline{PE}$、$\overline{PF}$，此時可得十二個直角三角形，利用直角三角形內切圓半徑爲：$\frac{1}{2}$(兩股和−斜邊)

可得：



$$r_{\Delta PAH_1} = \frac{\overline{AH_1} + \overline{PH_1} - \overline{PA}}{2}, \quad r_{\Delta PBH_1} = \frac{\overline{BH_1} + \overline{PH_1} - \overline{PB}}{2},$$

$$r_{\Delta PBH_2} = \frac{\overline{BH_2} + \overline{PH_2} - \overline{PB}}{2}, \quad r_{\Delta PCH_2} = \frac{\overline{CH_2} + \overline{PH_2} - \overline{PC}}{2},$$

$$r_{\Delta PCH_3} = \frac{\overline{CH_3} + \overline{PH_3} - \overline{PC}}{2}, \quad r_{\Delta PDH_3} = \frac{\overline{DH_3} + \overline{PH_3} - \overline{PD}}{2},$$

$$r_{\Delta PDH_4} = \frac{\overline{DH_4} + \overline{PH_4} - \overline{PD}}{2}, \quad r_{\Delta PEH_4} = \frac{\overline{EH_4} + \overline{PH_4} - \overline{PE}}{2},$$

$$r_{\Delta PEH_5}=\frac{\overline{EH_5}+\overline{PH_5}-\overline{PE}}{2}\text{，}r_{\Delta PFH_5}=\frac{\overline{FH_5}+\overline{PH_5}-\overline{PF}}{2}\text{，}$$

$$r_{\Delta PFH_6}=\frac{\overline{FH_6}+\overline{PH_6}-\overline{PF}}{2}\text{，}r_{\Delta PAH_6}=\frac{\overline{AH_6}+\overline{PH_6}-\overline{PA}}{2}\text{，}$$

$$\because \overline{AH_1}=\overline{EH_4}\text{，}\overline{BH_2}=\overline{FH_5}\text{，}\overline{CH_3}=\overline{AH_6}\text{，}\overline{DH_4}=\overline{BH_1}\text{，}\overline{EH_5}=\overline{CH_2}\text{，}\overline{FH_6}=\overline{DH_3}$$

$$\therefore r_{\Delta PAH_1}+r_{\Delta PBH_2}+r_{\Delta PCH_3}+r_{\Delta PDH_4}+r_{\Delta PEH_5}+r_{\Delta PFH_6}=r_{\Delta PBH_1}+r_{\Delta PCH_2}+r_{\Delta PDH_3}+r_{\Delta PEH_4}+r_{\Delta PFH_5}+r_{\Delta PAH_6}$$

3、歸納 P 點在正 $2N$ 邊形的內部或外部的結論：

從前面的討論過程中我發現：無論 P 點在正 $2N$ 邊形的內部或外部，正 $2N$ 邊形的兩組相間隔之內切圓半徑和皆具有相同的特性，因此可知 P 點位置對於兩組相間隔之內切圓半徑和沒有影響，以下為正 $2N$ 邊形一般化的結果：

結論一：

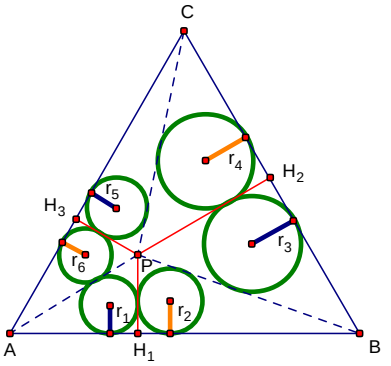
已知一正 $2N$ 邊形，並任取一點 P (位置沒有限制)，由 P 點對此正 $2N$ 邊形的各邊(及其延長線)做垂線，可得 $2N$ 個垂足。此時連接 P 點與正 $2N$ 邊形的 $2N$ 個頂點，可得 $4N$ 個直角三角形，考慮此 $4N$ 個直角三角形的內切圓半徑，若依序挑選每次間隔一個的直角三角形之內切圓，則可將 $4N$ 個直角三角形分為兩大組(每大組有 $2N$ 個直角三角形)，則由(一)、(二)的討論可知此兩大組直角三角形內切圓半徑和必相等。

即： $r_{\Delta PA_1H_1}+r_{\Delta PA_2H_2}+\cdots+r_{\Delta PA_{2n-1}H_{2n-1}}+r_{\Delta PA_{2n}H_{2n}}=r_{\Delta PA_2H_1}+r_{\Delta PA_3H_2}+\cdots+r_{\Delta PA_{2n}H_{2n-1}}+r_{\Delta PA_1H_{2n}}$

（三） 當圖形為正 $2N+1$ 邊形，且 P 點在圖形內部時

1、當圖形為正三角形時：

當 P 點在正三角形 ABC 內部時，由 P 點向各邊做垂線，分別得垂足依序為 H_1,H_2,H_3（如右圖），再連接 $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ 、 $\overline{PC}$ ，此時可得六個直角三角形，



利用直角三角形內切圓半徑為：$\frac{1}{2}$(兩股和−斜邊)可得：

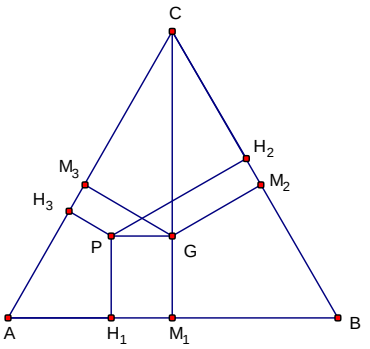
$$r_{\Delta PAH_1}=\frac{\overline{AH_1}+\overline{PH_1}-\overline{PA}}{2}\text{，}r_{\Delta PBH_1}=\frac{\overline{BH_1}+\overline{PH_1}-\overline{PB}}{2}\text{，}$$

$$r_{\Delta PBH_2}=\frac{\overline{BH_2}+\overline{PH_2}-\overline{PB}}{2}\text{，}r_{\Delta PCH_2}=\frac{\overline{CH_2}+\overline{PH_2}-\overline{PC}}{2}\text{，}$$

$$r_{\Delta PCH_3}=\frac{\overline{CH_3}+\overline{PH_3}-\overline{PC}}{2}\text{，}r_{\Delta PAH_3}=\frac{\overline{AH_3}+\overline{PH_3}-\overline{PA}}{2}\text{，}$$

若要推得 $r_{\Delta PAH_1}+r_{\Delta PBH_2}+r_{\Delta PCH_3}=r_{\Delta PBH_1}+r_{\Delta PCH_2}+r_{\Delta PAH_3}$ ，則需先證明

$\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}=\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{AH_3}$ ，以下是我的推導過程：



首先過 C 點做 $\overline{AB}$ 的垂線，可得垂足爲 M_1 ，並連接 $\overline{CM_1}$ ，再過 P 點對 $\overline{CM_1}$ 做垂線，可得垂足 G ，再過 G 點做 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 的垂線，可分別得垂足 M_2 、 M_3 ，並連接 $\overline{GM_2}$ 、 $\overline{GM_3}$ 及 $\overline{PG}$ 。

考慮： $\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}=\left(\overline{AM_1}-\overline{H_1M_1}\right)+\left(\overline{BM_2}+\overline{H_2M_2}\right)+\left(\overline{CM_3}+\overline{H_3M_3}\right)$

$\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{AH_3}=\left(\overline{BM_1}+\overline{H_1M_1}\right)+\left(\overline{CM_2}-\overline{H_2M_2}\right)+\left(\overline{AM_3}-\overline{H_3M_3}\right)$

$\because \overline{CM_3}=\overline{CM_2}$ ， $\overline{AM_1}=\overline{BM_1}$ ， $\overline{AM_3}=\overline{BM_2}$

$\therefore \left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}\right)-\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{AH_3}\right)=2\left(\overline{H_2M_2}+\overline{H_3M_3}-\overline{H_1M_1}\right)$

由圖形中可觀察出： $\angle H_2PG=30^\circ=\angle M_3GP \Rightarrow \overline{H_2M_2}=\frac{1}{2}\overline{PG}=\overline{H_3M_3}$

又 $\overline{H_1M_1}=\overline{PG}$ ，則 $\overline{H_2M_2}+\overline{H_3M_3}=\overline{PG}=\overline{H_1M_1}$

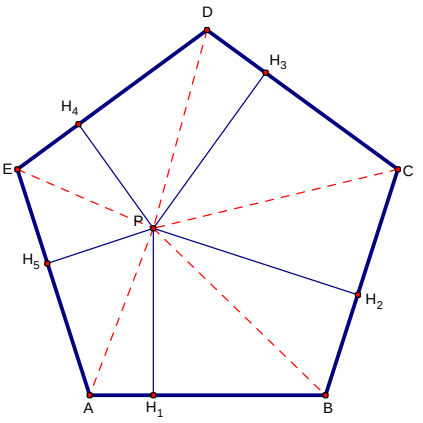
$\Rightarrow \left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}\right)-\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{AH_3}\right)=0$

也就是說： $\left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}\right)=\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{AH_3}\right)$

$\Rightarrow r_{\Delta PAH_1}+r_{\Delta PBH_2}+r_{\Delta PCH_3}=r_{\Delta PBH_1}+r_{\Delta PCH_2}+r_{\Delta PAH_3}$

所以當 P 點在正三角形內部時，兩組內切圓半徑和仍有相等的情形。

2、當圖形為正五邊形時：



當 P 點在正五邊形 $ABCDE$ 內部時，由 P 點向各邊做垂線，分別得垂足依序爲 H_1,H_2,H_3,H_4,H_5 ，再連接 $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ 、 $\overline{PC}$ 、 $\overline{PD}$ 、 $\overline{PE}$ ，此時可得十個直角三角形。

利用直角三角形內切圓半徑爲： $\frac{1}{2}$(兩股和−斜邊)可得：

$r_{\Delta PAH_1}=\dfrac{\overline{AH_1}+\overline{PH_1}-\overline{PA}}{2}$ ， $r_{\Delta PBH_1}=\dfrac{\overline{BH_1}+\overline{PH_1}-\overline{PB}}{2}$ ，

$$r_{\Delta PBH_2}=\frac{\overline{BH_2}+\overline{PH_2}-\overline{PB}}{2}\text{，}r_{\Delta PCH_2}=\frac{\overline{CH_2}+\overline{PH_2}-\overline{PC}}{2}\text{，}$$

$$r_{\Delta PCH_3}=\frac{\overline{CH_3}+\overline{PH_3}-\overline{PC}}{2}\text{，}r_{\Delta PDH_3}=\frac{\overline{DH_3}+\overline{PH_3}-\overline{PD}}{2}\text{，}$$

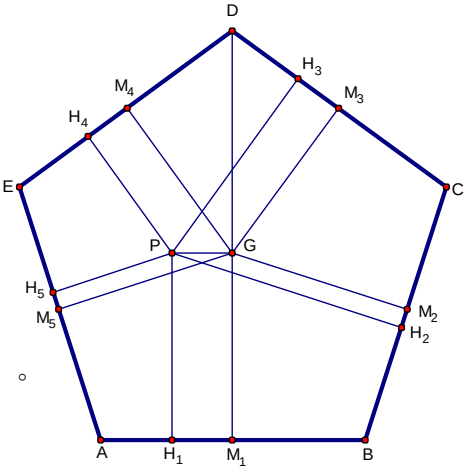
$$r_{\Delta PDH_4}=\frac{\overline{DH_4}+\overline{PH_4}-\overline{PD}}{2}\text{，}r_{\Delta PEH_4}=\frac{\overline{EH_4}+\overline{PH_4}-\overline{PE}}{2}\text{，}$$

$$r_{\Delta PEH_5}=\frac{\overline{EH_5}+\overline{PH_5}-\overline{PE}}{2}\text{，}r_{\Delta PAH_5}=\frac{\overline{AH_5}+\overline{PH_5}-\overline{PA}}{2}\text{，}$$

若要推得 $r_{\Delta PAH_1}+r_{\Delta PBH_2}+r_{\Delta PCH_3}+r_{\Delta PDH_4}+r_{\Delta PEH_5}=r_{\Delta PBH_1}+r_{\Delta PCH_2}+r_{\Delta PDH_3}+r_{\Delta PEH_4}+r_{\Delta PAH_5}$

則需先證明 $\left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}+\overline{DH_4}+\overline{EH_5}\right)=\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{DH_3}+\overline{EH_4}+\overline{AH_5}\right)$

以下是我的推導過程：



首先過 D 點做 $\overline{AB}$ 的垂線，可得垂足爲 M_1，並連接 $\overline{CM_1}$，再過 P 點對 $\overline{DM_1}$ 做垂線，可得垂足 G，再過 G 點做 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EA}$ 的垂線，分別得垂足 M_2、M_3、M_4、M_5，並連接 $\overline{GM_2}$、$\overline{GM_3}$、$\overline{GM_4}$、$\overline{GM_5}$ 及 $\overline{PG}$。

考慮：

$$\begin{aligned}&\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}+\overline{DH_4}+\overline{EH_5}\\&=\left(\overline{AM_1}-\overline{H_1M_1}\right)+\left(\overline{BM_2}-\overline{H_2M_2}\right)+\left(\overline{CM_3}+\overline{H_3M_3}\right)+\left(\overline{DM_4}+\overline{H_4M_4}\right)+\left(\overline{EM_5}-\overline{H_5M_5}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{DH_3}+\overline{EH_4}+\overline{AH_5}\\&=\left(\overline{BM_1}+\overline{H_1M_1}\right)+\left(\overline{CM_2}+\overline{H_2M_2}\right)+\left(\overline{DM_3}-\overline{H_3M_3}\right)+\left(\overline{EM_4}-\overline{H_4M_4}\right)+\left(\overline{AM_5}+\overline{H_5M_5}\right)\end{aligned}$$

$\because \overline{DM_3}=\overline{DM_4}$，$\overline{EM_4}=\overline{CM_3}$，$\overline{EM_5}=\overline{CM_2}$，$\overline{AM_5}=\overline{BM_2}$，$\overline{AM_1}=\overline{BM_1}$

$$\begin{aligned}&\therefore\left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}+\overline{DH_4}+\overline{EH_5}\right)-\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{DH_3}+\overline{EH_4}+\overline{AH_5}\right)\\&=2\left(\overline{H_3M_3}+\overline{H_4M_4}-\overline{H_1M_1}-\overline{H_2M_2}-\overline{H_5M_5}\right)\end{aligned}$$

由圖形可觀察出：$\angle H_2PG=18^\circ=\angle M_5GP$，$\angle H_3PG=54^\circ=\angle M_4GP$，$\overline{H_1M_1}=\overline{PG}$

則 $\left(\overline{H_3M_3}+\overline{H_4M_4}-\overline{H_1M_1}-\overline{H_2M_2}-\overline{H_5M_5}\right)=\overline{PG}\left(\sin 54^\circ+\sin 54^\circ-1-\sin 18^\circ-\sin 18^\circ\right)$

將 $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ ，$\sin 54^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ 帶入

$$\Rightarrow \left(\overline{H_3M_3}+\overline{H_4M_4}-\overline{H_1M_1}-\overline{H_2M_2}-\overline{H_5M_5}\right)=\overline{PG}\cdot 0=0$$

$$\Rightarrow \left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}+\overline{DH_4}+\overline{EH_5}\right)-\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{DH_3}+\overline{EH_4}+\overline{AH_5}\right)=0$$

也就是說：$\left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}+\overline{DH_4}+\overline{EH_5}\right)=\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{DH_3}+\overline{EH_4}+\overline{AH_5}\right)$

利用 $\left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}+\overline{DH_4}+\overline{EH_5}\right)=\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{DH_3}+\overline{EH_4}+\overline{AH_5}\right)$

$$\Rightarrow r_{\Delta PAH_1}+r_{\Delta PBH_2}+r_{\Delta PCH_3}+r_{\Delta PDH_4}+r_{\Delta PEH_5}=r_{\Delta PBH_1}+r_{\Delta PCH_2}+r_{\Delta PDH_3}+r_{\Delta PEH_4}+r_{\Delta PAH_5}$$

所以當 P 點在正五邊形內部時，兩組內切圓半徑和仍有相等的情形。

3、歸納：

(1)由**正三角形及正五邊形**的討論我發現，要證明兩組內切圓半徑和相等，**無法像正 $2N$ 邊形一樣，利用對邊平行的特性找到對邊的相對應線段等長**，搭配內切圓半徑 $=\dfrac{1}{2}$(兩股和－斜邊)，來完成推論。但是在 P **點與各頂點連線段及** P **點與各邊垂足連線段部分**，與正 $2N$ 邊形一樣，**在計算兩組內切圓半徑和時，會出現抵銷的現象**，所以**要推論兩組內切圓半徑和相等，只需要證明**由 P 點對各邊所做的垂足會將正 $2N+1$ 邊形每邊分成兩段，**仿照內切圓的分組方式取其線段和，當兩組線段和相等時，即可推論出兩組內切圓半徑和相等**。

(2)從正 $2N+1$ 邊形某一個頂點對其對邊做垂線，此垂線即爲正 $2N+1$ 邊形的對稱軸，此時由 P 點對此對稱軸做垂線可得垂足 G ，並連接 $\overline{PG}$ ，此時**由正三角形及正五邊形的討論可知，兩組線段和相等的條件可等價於一個以** $\overline{PG}$ **爲主的三角形邊角關係方程式**。以正三角形爲例，由前面的推導過程可知，

$$\left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}\right)-\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{AH_3}\right)=2\left(\overline{H_2M_2}+\overline{H_3M_3}-\overline{H_1M_1}\right)$$

再從圖形中可觀察出：$\angle H_2PG=30^\circ=\angle M_3GP \Rightarrow \overline{H_2M_2}=\dfrac{1}{2}\overline{PG}=\overline{H_3M_3}$

$$\Rightarrow 2\left(\overline{H_2M_2}+\overline{H_3M_3}-\overline{H_1M_1}\right)=2\left(\sin 30^\circ+\sin 30^\circ-1\right)\cdot\overline{PG}\ ,$$

表示兩組線段和相等的條件可等價於一個以 $\overline{PG}$ 爲主的三角形邊角關係方程式。

(3)在正五邊形的討論過程中，我發現**隨著邊數增加，利用 $\overline{PG}$ 表示兩組線段和相等的三角形邊角關係方程式會越來越複雜，有時候還要使用一些特殊角的三角函數值**，但是我**可以搭配有向角的方式來進行一般化的推論**。以正三角形爲例：

$$\left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}\right)-\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{AH_3}\right)=2\left(\overline{H_2M_2}+\overline{H_3M_3}-\overline{H_1M_1}\right)$$
$$=2\left(\sin 30^\circ+\sin 30^\circ-1\right)\cdot\overline{PG}=2\left(\sin 30^\circ+\sin 150^\circ+\sin 270^\circ\right)\cdot\overline{PG}$$

可得到一個**以 30° 爲起始角，每次增加 120°** 的三角函數運算式，**幾何意義上就是以 30° 爲起始角，將圓進行三等份的情形**，此結果與正三角形內接於一圓的情形吻合。

再驗證正五邊形的情形：

$$\left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}+\overline{DH_4}+\overline{EH_5}\right)-\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{DH_3}+\overline{EH_4}+\overline{AH_5}\right)$$
$$=2\left(\overline{H_3M_3}+\overline{H_4M_4}-\overline{H_1M_1}-\overline{H_2M_2}-\overline{H_5M_5}\right)$$

由前面的討論可推得兩組線段和相等的三角形邊角關係方程式爲

$$\left(\overline{H_3M_3}+\overline{H_4M_4}-\overline{H_1M_1}-\overline{H_2M_2}-\overline{H_5M_5}\right)$$

$$=\overline{PG}\left(\sin 54^\circ+\sin 54^\circ-1-\sin 18^\circ-\sin 18^\circ\right)$$

$$=\overline{PG}\left(\sin 54^\circ+\sin 126^\circ+\sin 270^\circ+\sin 198^\circ+\sin 342^\circ\right)$$

$$=\overline{PG}\left(\sin 54^\circ+\sin 126^\circ+\sin 198^\circ+\sin 270^\circ+\sin 342^\circ\right)$$

可得到一個**以 54° 爲起始角，每次增加 72°** 的三角函數運算式，**幾何意義上就是以 54° 爲起始角，將圓進行五等份**的情形，此結果與正五邊形內接於一圓的情形吻合。

由這些結果我發現**只要能證明以 θ 爲起始角，將圓進行 n 等份，讓角度每次增加 $\frac{360^\circ}{n}$ 的三角函數運算式：**

$$\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{360^\circ}{n}\times 1\right)+\sin\left(\theta+\frac{360^\circ}{n}\times 2\right)+\cdots+\sin\left(\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)\right)=0$$ 成立，

就能推得兩組線段和相等，進一步就能證明兩組內切圓半徑和相等。

【引理一】$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots\cdots+\cos\theta_n=0\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots\cdots+\sin\theta_n=0\end{cases}$，其中 $\theta_k=\phi+\dfrac{360^\circ\cdot k}{n}$ ， $k=1,2,\cdots\cdots,(n-1),n$

證明：我利用 $x^n=\alpha$ 的 n 次方根求解過程，來進行證明。

爲了討論方便且不失一般性，令 $|\alpha|=1$

設 $x=\cos\theta+i\sin\theta$ ， $\alpha=\cos\beta+i\sin\beta$ $\Rightarrow(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\alpha=\cos\beta+i\sin\beta$

由隸美弗定理可得 $\cos n\theta+i\sin n\theta=\cos\beta+i\sin\beta$

$\Rightarrow\theta_k=\dfrac{\beta+360^\circ\cdot k}{n}$ ， $k=1,2,\cdots\cdots,(n-1),n$

分別將 θ_k 帶回 $x_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k$ 可得 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_{n-1},x_n$

則 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_{n-1},x_n$ 代表 $x^n=\alpha$ 的 n 個解

由根與係數可知： $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{n-1}+x_n=0$

$\Rightarrow(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)+(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)+\cdots\cdots+(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)=0$

$\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots\cdots+\cos\theta_n=0\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots\cdots+\sin\theta_n=0\end{cases}$，其中 $\theta_k=\dfrac{\beta+360^\circ\cdot k}{n}$ ， $k=1,2,\cdots\cdots,(n-1),n$

此時令 $\dfrac{\beta}{n}=\phi$ ，

則 $\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots\cdots+\cos\theta_n=0\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots\cdots+\sin\theta_n=0\end{cases}$，其中 $\theta_k=\phi+\dfrac{360^\circ\cdot k}{n}$ ， $k=1,2,\cdots\cdots,(n-1),n$

4、驗證：

綜合 3-(1)、3-(2)、3-(3)的結果，並搭配【引理一】來驗證正九邊形的兩組內切圓半徑和是否會相等。

由 3-(1)可知，若兩組線段和相等，則可推得兩組內切圓半徑和相等，

因此我要先證明 $\overline{A_1H_1}+\overline{A_2H_2}+\cdots+\overline{A_8H_8}+\overline{A_9H_9}=\overline{A_2H_1}+\overline{A_3H_2}+\cdots+\overline{A_9H_8}+\overline{A_1H_9}$ (如下圖)

利用 $\left(\overline{A_1H_1}+\overline{A_2H_2}+\cdots+\overline{A_8H_8}+\overline{A_9H_9}\right)-\left(\overline{A_2H_1}+\overline{A_3H_2}+\cdots+\overline{A_9H_8}+\overline{A_1H_9}\right)$

$=2\left(\overline{H_4K_4}+\overline{H_5K_5}+\overline{H_6K_6}+\overline{H_7K_7}-\overline{H_1K_1}-\overline{H_2K_2}-\overline{H_3K_3}-\overline{H_8K_8}-\overline{H_9K_9}\right)$

觀察右圖中，$\overline{PK}$ 與 $\overline{KK_i}$ 及 $\overline{PH_i}$ 所形成的銳夾角，由小到大可得：

$\angle PKK_1 = 90^\circ$ ，$\angle KPH_2 = 50^\circ$ ，$\angle KPH_3 = 10^\circ$ ，$\angle KPH_4 = 30^\circ$ ，$\angle KPH_5 = 70^\circ$ ，

$\angle PKK_6 = 70^\circ$ ，$\angle PKK_7 = 30^\circ$ ，$\angle PKK_8 = 10^\circ$ ，$\angle PKK_9 = 50^\circ$ ，

由 **3-(2)**、**3-(3)**可知

$$2\left(\overline{H_4K_4}+\overline{H_5K_5}+\overline{H_6K_6}+\overline{H_7K_7}-\overline{H_1K_1}-\overline{H_2K_2}-\overline{H_3K_3}-\overline{H_8K_8}-\overline{H_9K_9}\right)$$

$$=2\left(\sin 30^\circ+\sin 70^\circ+\sin 70^\circ+\sin 30^\circ-1-\sin 50^\circ-\sin 10^\circ-\sin 10^\circ-\sin 50^\circ\right)\cdot\overline{PK}$$

$$=2\left(\sin 30^\circ+\sin 70^\circ+\sin 110^\circ+\sin 150^\circ+\sin 270^\circ+\sin 230^\circ+\sin 190^\circ+\sin 350^\circ+\sin 310^\circ\right)\cdot\overline{PK}$$

$$=2\left(\sin 30^\circ+\sin 70^\circ+\sin 110^\circ+\sin 150^\circ+\sin 190^\circ+\sin 230^\circ+\sin 270^\circ+\sin 310^\circ+\sin 350^\circ\right)\cdot\overline{PK}$$

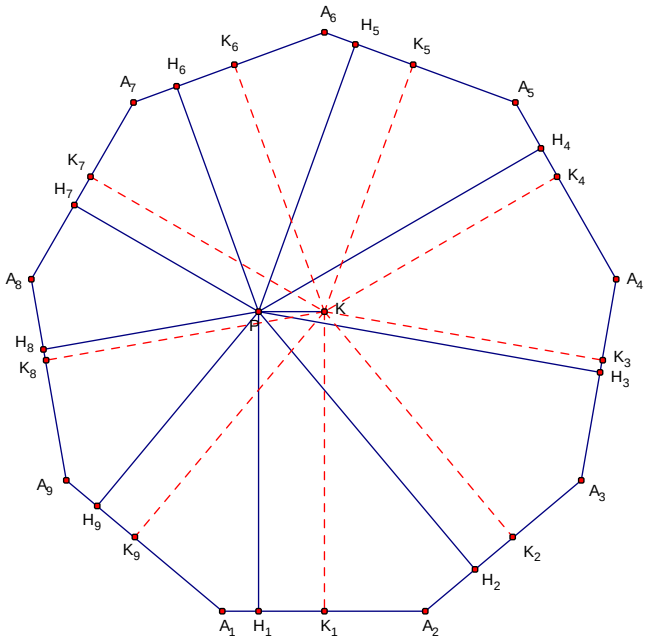
利用引理一

上式代表以 30° 爲起始角，且正九邊形將圓九等份，所以角度依次增加 40° ，由引理一可知

$\sin 30^\circ+\sin 70^\circ+\sin 110^\circ+\sin 150^\circ+\sin 190^\circ+\sin 230^\circ+\sin 270^\circ+\sin 310^\circ+\sin 350^\circ=0$ 成立

$$\Rightarrow \overline{A_1H_1}+\overline{A_2H_2}+\cdots+\overline{A_8H_8}+\overline{A_9H_9}=\overline{A_2H_1}+\overline{A_3H_2}+\cdots+\overline{A_9H_8}+\overline{A_1H_9}$$

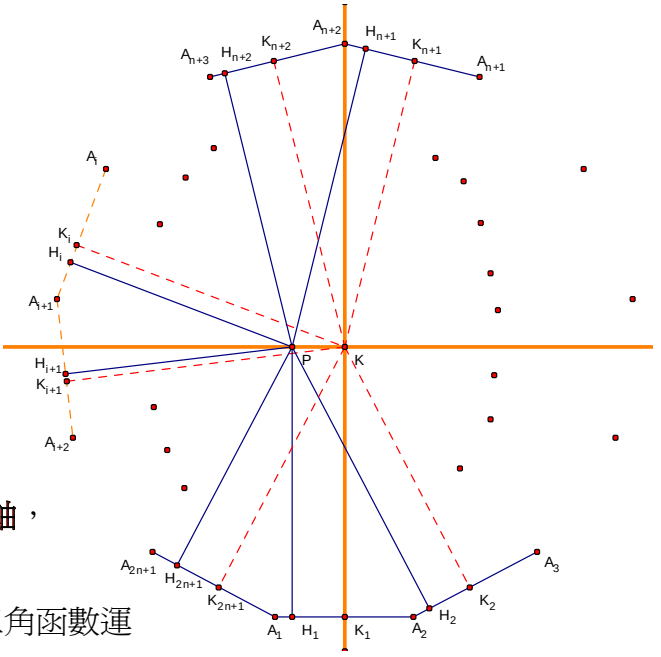
$\Rightarrow$ 正九邊形的兩組內切圓半徑和必相等。



5、推論 P 點在正 $2N+1$ 邊形內部的一般化情形：

綜合 1～4 的討論，當 P 點在正 $2N+1$ 邊形的內部時，可進行一般化的推導：

(1) 過頂點 A_{n+2} 做 $\overline{A_1A_2}$ 的垂線，令垂足為 K_1，並連接 $\overline{A_{n+2}K_1}$，此時由 P 點對 $\overline{A_{n+2}K_1}$ 做垂線，令垂足為 K，連接 $\overline{PK}$。



(2) 由 P 點對 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 做垂線所得之垂足令為 H_i，由 K 點對 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 做垂線所得之垂足令為 K_i，則可得 $\angle H_iPH_{i+1}=\angle K_iPK_{i+1}=\dfrac{360^\circ}{2n+1}$，$\forall i=1,2,\cdots,2n+1$。

(3) 進行座標化，**分別以 $\overleftrightarrow{PK}$ 及 $\overleftrightarrow{A_{n+2}K_1}$ 為 x 軸與 y 軸**，則在 3-(2)中所需用來表示兩組線段和相等的三角函數運算式，如果**將運算符號及所使用的角度綜合考慮，可以有向角的方式將角度寫成：**

$$\phi,\left(\phi+\frac{360^\circ}{2n+1}\right),\left(\phi+\frac{360^\circ}{2n+1}\times 2\right),\cdots\cdots,\left(\phi+\frac{360^\circ}{2n+1}\times 2n\right)$$

，其三角函數運算式則為

$$2\left[\sin\phi+\sin\left(\phi+\frac{360^\circ}{2n+1}\right)+\sin\left(\phi+\frac{360^\circ}{2n+1}\times 2\right)+\cdots\cdots+\sin\left(\phi+\frac{360^\circ}{2n+1}\times 2n\right)\right]\cdot\overline{PG}$$

(4) 由引理一可知 $\sin\phi+\sin\left(\phi+\dfrac{360^\circ}{2n+1}\right)+\sin\left(\phi+\dfrac{360^\circ}{2n+1}\times 2\right)+\cdots\cdots+\sin\left(\phi+\dfrac{360^\circ}{2n+1}\times 2n\right)=0$

因此決定兩組內接圓半徑和是否相等的條件：「兩組線段和相等」必成立，代表兩組內接圓半徑和必相等。

(5) 由上述的推導過程中我發現**有向角 270° 必定會出現**，因此**起始角 ϕ 可利用 n 等分及 270° 加以確定**。以正五邊形為例，$\dfrac{360^\circ}{5}=72^\circ$，又因為 $270^\circ=\phi+72^\circ\times 3\Rightarrow\phi=54^\circ$，也就是說在正五邊形的情形下，起始角為 54° (請參考 P.11，正五邊形的說明)。

結論二：

已知一正 $2N+1$ 邊形，並任取內部一點 P，由 P 點對此正 $2N+1$ 邊形的各邊做垂線，可得 $2N+1$ 個垂足。此時連接 P 點與正 $2N+1$ 邊形的 $2N+1$ 個頂點，可得 $4N+2$ 個直角三角形，考慮此 $4N+2$ 個直角三角形的內切圓半徑，若依序挑選每次間隔一個的直角三角形之內切圓，則可將 $4N+2$ 個直角三角形分爲兩大組(每大組有 $2N+1$ 個直角三角形)，則此兩大組直角三角形內切圓半徑和必相等。

即：$r_{\Delta PA_1H_1}+r_{\Delta PA_2H_2}+\cdots+r_{\Delta PA_{2n-1}H_{2n-1}}+r_{\Delta PA_{2n+1}H_{2n+1}}=r_{\Delta PA_2H_1}+r_{\Delta PA_3H_2}+\cdots+r_{\Delta PA_{2n+1}H_{2n}}+r_{\Delta PA_1H_{2n+1}}$

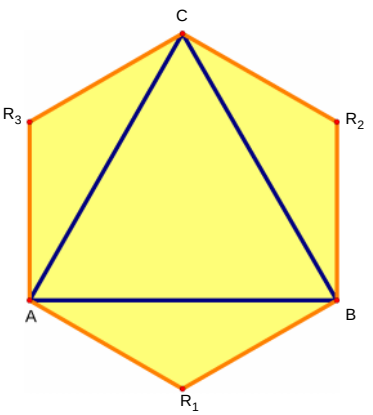
（四） 當圖形爲正 $2N+1$ 邊形，討論 P 點位置的限制條件

1、討論正三角形的情形：

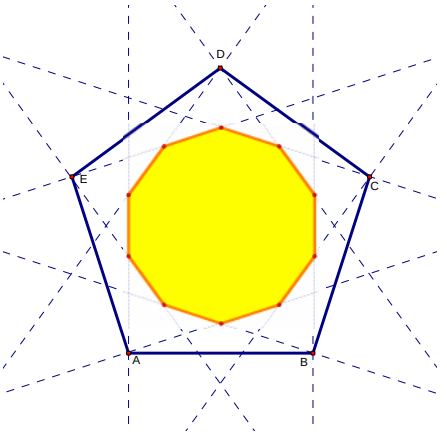
由前面的討論中可知，整個推論的過程中，$\left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}\right)=\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{AH_3}\right)$ 是一個關鍵的條件，因此當 P 點位置落在哪個區域內時，才能保證 $\left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}\right)=\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{AH_3}\right)$ 依然成立呢？

在此我定義能讓兩組線段和相等成立的所有 P 點位置所形成的區域為適當區域。

從圖形觀察，要讓 $\left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}\right)=\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{AH_3}\right)$ 依然成立的條件是必須讓 P 點落在由垂直各邊的垂線所共同圍成的區域，因爲當 P 點落在此區域時，由 P 點對正三角形各邊所做垂線的垂足才能在正三角形的邊上，倘若由 P 點對正三角形各邊所做垂線的垂足出現在正三角形一邊的延長線上，則 $\left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}\right)=\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{AH_3}\right)$ 就無法推得兩組內切圓半徑和相等了(參考 P.8，正三角形的推導過程)，因此正三角形的適當區域如右圖，是一個正六邊形。也就是說，當 P 點落在三角形外部時，只要 P 點落在此適當區域內，$\left(\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}\right)=\left(\overline{BH_1}+\overline{CH_2}+\overline{AH_3}\right)$ 依然成立，當然 $r_{\Delta PAH_1}+r_{\Delta PBH_2}+r_{\Delta PCH_3}=r_{\Delta PBH_1}+r_{\Delta PCH_2}+r_{\Delta PAH_3}$ 也會同時成立。



2、討論正五邊形的情形：



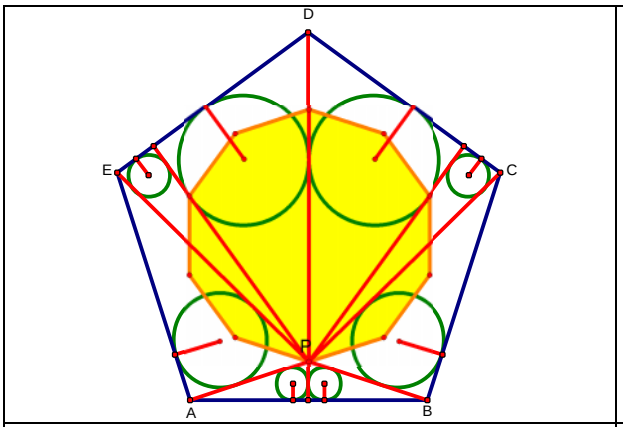
由 **P.9** 正五邊形的推導過程可知，為了讓兩組線段和相等成立，P 點對正五邊形各邊作垂線形成之垂足必須落在各邊線段內，因此**正五邊形的適當區域如右圖所示**，就是對正五邊形各邊做垂線，共有十條垂線，而這十條垂線所圍成的區域（圖中的黃色區域）**為一個正十邊形**，就是 P 點的適當區域。當 P 點落在此適當區域，可由結論二得知，兩組內切圓半徑和必相等。

3、歸納正 $2N+1$ 邊形的適當區域：

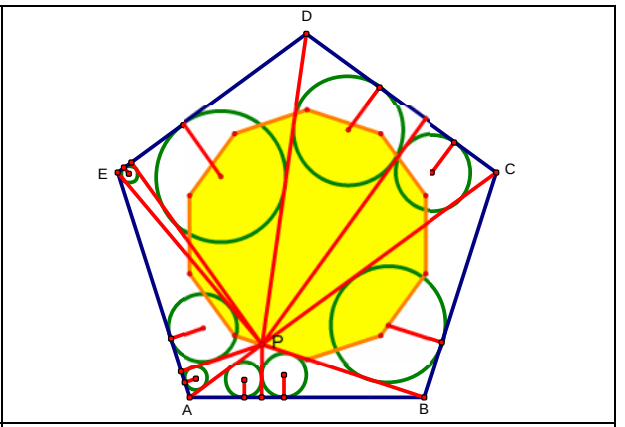
仿照正三角形及正五邊形的討論方式，**正 $2N+1$ 邊形的適當區域找法就是過正 $2N+1$ 邊形的頂點對正 $2N+1$ 邊形的每一邊做垂線，共可得 $4N+2$ 條線，且這 $4N+2$ 條線恰可圍出一個正 $4N+2$ 邊形，此區域即為正 $2N+1$ 邊形的適當區域**。且**只有在正三角形的情形下，適當區域可能出現在原圖形的外部**，當邊數在 5 以上時，所有的適當區域都會出現在原圖形的內部。也因此可以知道，正 $2N+1$ 邊形無法與正 $2N$ 邊形一樣，可將兩組內切圓半徑和相等的結果推廣到 P 點位置可任意出現在內部或外部，**對於正 $2N+1$ 邊形而言，P 點位置必須在原圖形內部(正三角形除外)，兩組內切圓半徑和才有可能相等**。

4、當 P 點落在適當區域的邊界及頂點時：

以正五邊形為例，圖一表示 P 點落在適當區域頂點上，此時在 ΔPBC 及 ΔPAE 中，內切圓會因 $\overline{PB}\perp\overline{BC}$ 且 $\overline{PA}\perp\overline{AE}$ 而各減少一個，**計算兩組內切圓半徑和時，可將減少的內切圓半徑視為 0**，可得兩組內切圓半徑和會相等；圖二表示 P 點落在適當區域邊界上，此時在 ΔPBC 中，內切圓會因為 $\overline{PB}\perp\overline{BC}$ 而減少一個，計算兩組內切圓半徑和時，可將減少的內切圓半徑視為 0，進一步檢驗兩組內切圓半徑和，發現仍然會相等。因此，**當 P 點落在適當區域邊界及頂點時，雖然會出現內切圓減少的現象，但不影響兩組內切圓半徑和相等的結果。**



圖一：P 點落在適當區域的頂點上

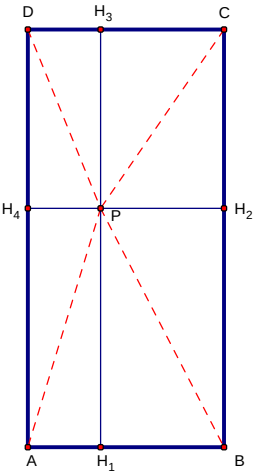


圖二：P 點落在適當區域的邊界上

目前我已經將圖形爲正多邊形的情形討論完畢，而且可以確定只要是正多邊形，當 P 點落在適當區域內，則透過 P 點與各邊所形成的垂線段及 P 點與各頂點的連線段所形成的直角三角形之內切圓半徑可分成依序間隔挑選分成兩組，且兩組內切圓半徑和會相等。那我進一步想要知道如果圖形不是正多邊形，那結果是否依然成立。於是我進行以下的討論

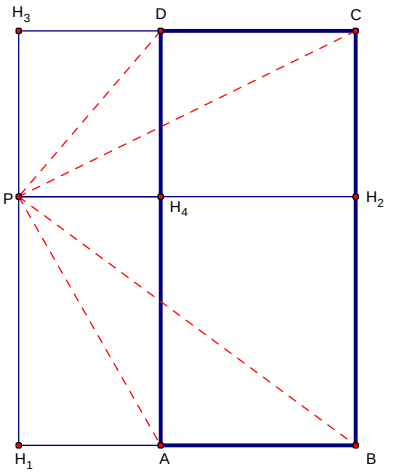
（五） 討論 P 點在等角不等邊 $2N$ 邊形的情形

1、討論 P 點在矩形的情形：



已知矩形 $ABCD$ ， P 點可能在矩形內部或外部，由 P 點向各邊及其延長線做垂線，分別得垂足依序爲 H_1, H_2, H_3, H_4（如右圖），再連接 $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ 、 $\overline{PC}$ 、 $\overline{PD}$ ，此時可得八個直角三角形，

利用直角三角形內切圓半徑爲： $\frac{1}{2}$(兩股和−斜邊)可得：



$$r_{\Delta PAH_1} = \frac{\overline{AH_1} + \overline{PH_1} - \overline{PA}}{2}, \quad r_{\Delta PBH_1} = \frac{\overline{BH_1} + \overline{PH_1} - \overline{PB}}{2},$$

$$r_{\Delta PBH_2} = \frac{\overline{BH_2} + \overline{PH_2} - \overline{PB}}{2}, \quad r_{\Delta PCH_2} = \frac{\overline{CH_2} + \overline{PH_2} - \overline{PC}}{2},$$

$$r_{\Delta PCH_3} = \frac{\overline{CH_3} + \overline{PH_3} - \overline{PC}}{2}, \quad r_{\Delta PDH_3} = \frac{\overline{DH_3} + \overline{PH_3} - \overline{PD}}{2},$$

$$r_{\Delta PDH_4} = \frac{\overline{DH_4} + \overline{PH_4} - \overline{PD}}{2}, \quad r_{\Delta PAH_4} = \frac{\overline{AH_4} + \overline{PH_4} - \overline{PA}}{2},$$

$$\because \overline{AH_1} = \overline{DH_3}, \ \overline{BH_2} = \overline{AH_4}, \ \overline{CH_3} = \overline{BH_1}, \ \overline{DH_4} = \overline{CH_2},$$

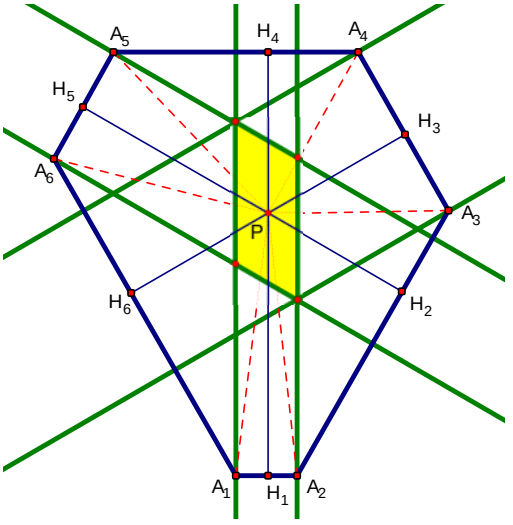
$$\therefore r_{\Delta PAH_1} + r_{\Delta PBH_2} + r_{\Delta PCH_3} + r_{\Delta PDH_4} = r_{\Delta PBH_1} + r_{\Delta PCH_2} + r_{\Delta PDH_3} + r_{\Delta PAH_4}$$

由上述討論可知，將圖形由正方形放寬至矩形，原結論仍然成立。

在這裡有一個有趣的現象，如果依照前面討論適當區域的方法，矩形的適當區域應該就是原圖形，但是在討論過程中我發現，就算 P 點不在此區域中，因爲在矩形中線段等長的關係有很完整的對稱性，所以**矩形與正 $2N$ 邊形的情形相同， P 點沒有限制**。

2、討論 P 點在等角且非正六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的情形：

要建構等角且非正六邊形，須要求其三組對邊互相平行，且相交的兩線必須夾 120°。



首先討論等角且非正六邊形的適當區域。由各頂點對各邊作垂線，所得的共同區域即爲適當區域(如右圖，黃色區域爲適當區域)。當 P 點落在此區域內，則由 P 點對各邊做垂線所得的六個垂足點皆會落在此六邊形的線段內。

分別假設垂足依序爲 H_1,H_2,H_3,H_4,H_5,H_6（如右圖），再連接 $\overline{PA_1}$、$\overline{PA_2}$、$\overline{PA_3}$、$\overline{PA_4}$、$\overline{PA_5}$、$\overline{PA_6}$，此時可得十二個直角三角形，

利用直角三角形內切圓半徑爲：$\frac{1}{2}$(兩股和−斜邊)可得：

$$r_{\Delta PA_1H_1}=\frac{\overline{A_1H_1}+\overline{PH_1}-\overline{PA_1}}{2}\ ,\ r_{\Delta PA_2H_1}=\frac{\overline{A_2H_1}+\overline{PH_1}-\overline{PA_2}}{2}\ ,$$

$$r_{\Delta PA_2H_2}=\frac{\overline{A_2H_2}+\overline{PH_2}-\overline{PA_2}}{2}\ ,\ r_{\Delta PA_3H_2}=\frac{\overline{A_3H_2}+\overline{PH_2}-\overline{PA_3}}{2}\ ,$$

$$r_{\Delta PA_3H_3}=\frac{\overline{A_3H_3}+\overline{PH_3}-\overline{PA_3}}{2}\ ,\ r_{\Delta PA_4H_3}=\frac{\overline{A_4H_3}+\overline{PH_3}-\overline{PA_4}}{2}\ ,$$

$$r_{\Delta PA_4H_4}=\frac{\overline{A_4H_4}+\overline{PH_4}-\overline{PA_4}}{2}\ ,\ r_{\Delta PA_5H_4}=\frac{\overline{A_5H_4}+\overline{PH_4}-\overline{PA_5}}{2}\ ,$$

$$r_{\Delta PA_5H_5}=\frac{\overline{A_5H_5}+\overline{PH_5}-\overline{PA_5}}{2}\ ,\ r_{\Delta PA_6H_5}=\frac{\overline{A_6H_5}+\overline{PH_5}-\overline{PA_6}}{2}\ ,$$

$$r_{\Delta PA_6H_6}=\frac{\overline{A_6H_6}+\overline{PH_6}-\overline{PA_6}}{2}\ ,\ r_{\Delta PA_1H_6}=\frac{\overline{A_1H_6}+\overline{PH_6}-\overline{PA_1}}{2}\ ,$$

將這些算式相加，可推得**當下式成立時，**

$$\overline{A_1H_1}+\overline{A_2H_2}+\overline{A_3H_3}+\overline{A_4H_4}+\overline{A_5H_5}+\overline{A_6H_6}=\overline{A_2H_1}+\overline{A_3H_2}+\overline{A_4H_3}+\overline{A_5H_4}+\overline{A_6H_5}+\overline{A_1H_6}$$

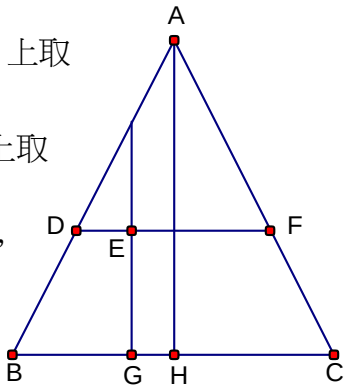
$$r_{\Delta PA_1H_1}+r_{\Delta PA_2H_2}+r_{\Delta PA_3H_3}+r_{\Delta PA_4H_4}+r_{\Delta PA_5H_5}+r_{\Delta PA_6H_6}=r_{\Delta PA_2H_1}+r_{\Delta PA_3H_2}+r_{\Delta PA_4H_3}+r_{\Delta PA_5H_4}+r_{\Delta PA_6H_5}+r_{\Delta PA_1H_6}$$

才會成立。

但此時因圖形並非正六邊形，所以不會有對邊所分割線段等長(如同正六邊形)的現象。但我可以證明這兩組線段和在等角且非正六邊形的情形下仍會相等。

以下是我的推導過程：

(1)如右圖，已知等腰ΔABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BC}=l$，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$。在$\overline{AB}$上取一點$D$，過$D$點作$\overline{BC}$的平行線交$\overline{AC}$於$F$，連接$\overline{DF}$。此時在$\overline{DF}$上取一點$E$，使得$\overline{DE}=m$，$\overline{EF}=n$，並過$E$點作$\overline{BC}$的垂直線交$\overline{BC}$於$G$，則可推得$\overline{BG}=\frac{l}{2}+\frac{m-n}{2}$，$\overline{CG}=\frac{l}{2}+\frac{n-m}{2}$。



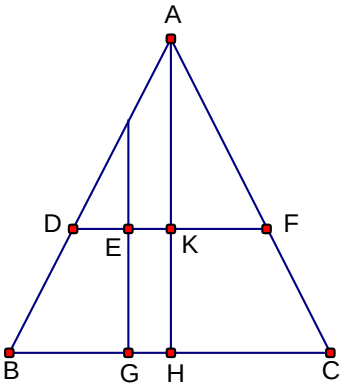
【證明】：

已知$\overline{DE}=m$，$\overline{EF}=n$，考慮$\overline{AH}$與$\overline{DF}$交於K，

$\because \overline{DF}//\overline{BC}$，且$\overline{AH}$平分$\overline{BC}$

$\therefore \overline{DK}=\overline{KF}=\frac{m+n}{2}\Rightarrow\overline{EK}=\frac{m+n}{2}-m=\frac{n-m}{2}=\overline{GH}$

$\Rightarrow\overline{BG}=\frac{l}{2}-\left(\frac{n-m}{2}\right)=\frac{l}{2}+\left(\frac{m-n}{2}\right)$，$\overline{CG}=\frac{l}{2}+\left(\frac{n-m}{2}\right)$



(2)證明：

$$\overline{A_1H_1}+\overline{A_2H_2}+\overline{A_3H_3}+\overline{A_4H_4}+\overline{A_5H_5}+\overline{A_6H_6}=\overline{A_2H_1}+\overline{A_3H_2}+\overline{A_4H_3}+\overline{A_5H_4}+\overline{A_6H_5}+\overline{A_1H_6}$$

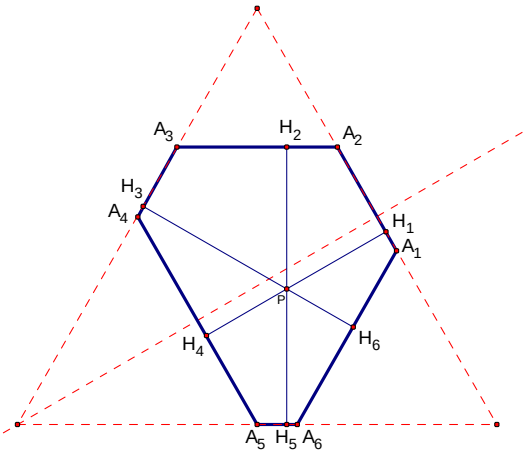
利用(1)所推得的結果，可將上式左邊各項表示如下：

$$\overline{A_1H_1}=\frac{\overline{A_1A_2}+\overline{A_1A_6}+\overline{A_2A_3}}{2}+\frac{\overline{A_5H_4}-\overline{A_4H_4}}{2}-\overline{A_1A_6}$$

$$=\frac{\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}-\overline{A_1A_6}}{2}+\frac{\overline{A_5H_4}-\overline{A_4H_4}}{2}\cdots(1)$$

$$\overline{A_2H_2}=\frac{\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}}{2}+\frac{\overline{A_6H_5}-\overline{A_5H_5}}{2}-\overline{A_1A_2}$$

$$=\frac{\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}-\overline{A_1A_2}}{2}+\frac{\overline{A_6H_5}-\overline{A_5H_5}}{2}\cdots(2)$$



$$\overline{A_3H_3}=\frac{\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\overline{A_4A_5}}{2}+\frac{\overline{A_1H_6}-\overline{A_6H_6}}{2}-\overline{A_2A_3}=\frac{\overline{A_3A_4}+\overline{A_4A_5}-\overline{A_2A_3}}{2}+\frac{\overline{A_1H_6}-\overline{A_6H_6}}{2}\cdots(3)$$

$$\overline{A_4H_4}=\frac{\overline{A_3A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_6}}{2}+\frac{\overline{A_2H_1}-\overline{A_1H_1}}{2}-\overline{A_3A_4}=\frac{\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_6}-\overline{A_3A_4}}{2}+\frac{\overline{A_2H_1}-\overline{A_1H_1}}{2}\cdots(4)$$

$$\overline{A_5H_5}=\frac{\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_6}+\overline{A_6A_1}}{2}+\frac{\overline{A_3H_2}-\overline{A_2H_2}}{2}-\overline{A_4A_5}=\frac{\overline{A_5A_6}+\overline{A_6A_1}-\overline{A_4A_5}}{2}+\frac{\overline{A_3H_2}-\overline{A_2H_2}}{2}\cdots(5)$$

$$\overline{A_6H_6}=\frac{\overline{A_5A_6}+\overline{A_6A_1}+\overline{A_1A_2}}{2}+\frac{\overline{A_4H_3}-\overline{A_3H_3}}{2}-\overline{A_5A_6}=\frac{\overline{A_6A_1}+\overline{A_1A_2}-\overline{A_5A_6}}{2}+\frac{\overline{A_4H_3}-\overline{A_3H_3}}{2}\cdots(6)$$

由$(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)$可得

$$\overline{A_1H_1}+\overline{A_2H_2}+\overline{A_3H_3}+\overline{A_4H_4}+\overline{A_5H_5}+\overline{A_6H_6}=\overline{A_2H_1}+\overline{A_3H_2}+\overline{A_4H_3}+\overline{A_5H_4}+\overline{A_6H_5}+\overline{A_1H_6}$$

由(1)、(2)可知，當P點在落在適當區域時，上述的邊長和相等結果必成立，可進一步推得兩組內切圓半徑和必相等(如下式)。

$$r_{\Delta PA_1H_1}+r_{\Delta PA_2H_2}+r_{\Delta PA_3H_3}+r_{\Delta PA_4H_4}+r_{\Delta PA_5H_5}+r_{\Delta PA_6H_6}=r_{\Delta PA_2H_1}+r_{\Delta PA_3H_2}+r_{\Delta PA_4H_3}+r_{\Delta PA_5H_4}+r_{\Delta PA_6H_5}+r_{\Delta PA_1H_6}$$

3、討論P點在等角且非正$2N$邊形的一般化情形：

從前面的討論可知，推論兩組內切圓半徑和相等的充分條件爲兩組相對應的線段和相等，因此以下我先證明：對任意等角且非正$2N$邊形，

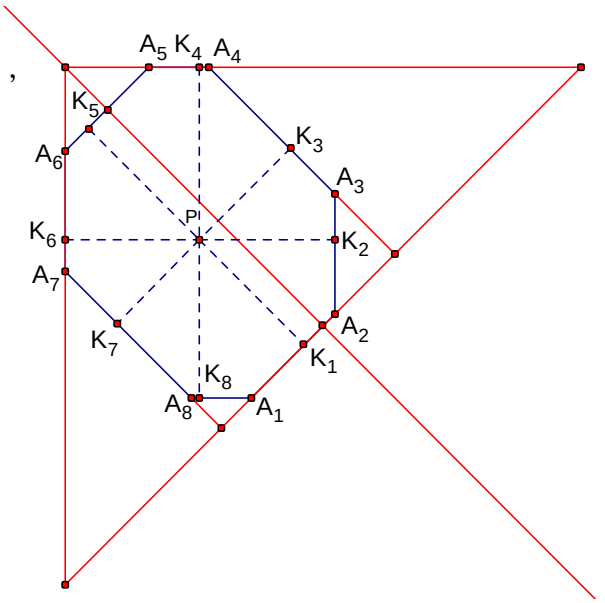
$\overline{A_1H_1}+\overline{A_2H_2}+\cdots+\overline{A_{2n-1}H_{2n-1}}+\overline{A_{2n}H_{2n}}=\overline{A_2H_1}+\overline{A_3H_2}+\cdots+\overline{A_nH_{2n-1}}+\overline{A_1H_{2n}}$ 恆成立。

【引理二】

對任意等角且非正$2N$邊形，當P點在落在適當區域時，由P點對各邊做垂線可得$2N$個垂足，記爲$K_1,K_2,\cdots,K_{2n}$，則$\overline{A_1K_1}+\overline{A_2K_2}+\cdots+\overline{A_{2n}K_{2n}}=\overline{A_2K_1}+\overline{A_3K_2}+\cdots+\overline{A_nK_{2n-1}}+\overline{A_1K_{2n}}$。

【證明】

因爲當邊數較大時，圖形不易呈現，且運算過於繁雜，爲了說明方便，我以等角非正八邊形作爲輔助說明的例子，最後再進行一般化的符號說明。



利用 2-(1)的結論可推得以下八個等式：

$$\overline{A_1K_1}=\frac{\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_1A_8}+\overline{A_7A_8}+\overline{A_1A_2}+\sqrt{2}\cdot\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}\right)}{2}+\frac{\overline{A_6K_5}-\overline{A_5K_5}}{2}-\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_1A_8}+\overline{A_7A_8}\right)$$

$$=\frac{\left[\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}-\overline{A_7A_8}+\sqrt{2}\cdot\left(\overline{A_2A_3}-\overline{A_1A_8}\right)\right]}{2}+\frac{\overline{A_6K_5}-\overline{A_5K_5}}{2}\cdots(1)$$

$$\overline{A_2K_2}=\frac{\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_1A_2}+\overline{A_1A_8}+\overline{A_2A_3}+\sqrt{2}\cdot\overline{A_3A_4}+\overline{A_4A_5}\right)}{2}+\frac{\overline{A_7K_6}-\overline{A_6K_6}}{2}-\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_1A_2}+\overline{A_1A_8}\right)$$

$$=\frac{\left[\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}-\overline{A_1A_8}+\sqrt{2}\cdot\left(\overline{A_3A_4}-\overline{A_1A_2}\right)\right]}{2}+\frac{\overline{A_7K_6}-\overline{A_6K_6}}{2}\cdots(2)$$

$$\overline{A_3K_3}=\frac{\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_2A_3}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\sqrt{2}\cdot\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_6}\right)}{2}+\frac{\overline{A_8K_7}-\overline{A_7K_7}}{2}-\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_2A_3}+\overline{A_1A_2}\right)$$

$$=\frac{\left[\overline{A_3A_4}+\overline{A_5A_6}-\overline{A_1A_2}+\sqrt{2}\cdot\left(\overline{A_4A_5}-\overline{A_2A_3}\right)\right]}{2}+\frac{\overline{A_8K_7}-\overline{A_7K_7}}{2}\cdots(3)$$

$$\overline{A_4K_4}=\frac{\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_3A_4}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\sqrt{2}\cdot\overline{A_5A_6}+\overline{A_6A_7}\right)}{2}+\frac{\overline{A_1K_8}-\overline{A_8K_8}}{2}-\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_3A_4}+\overline{A_2A_3}\right)$$

$$=\frac{\left[\overline{A_4A_5}+\overline{A_6A_7}-\overline{A_2A_3}+\sqrt{2}\cdot\left(\overline{A_5A_6}-\overline{A_3A_4}\right)\right]}{2}+\frac{\overline{A_1K_8}-\overline{A_8K_8}}{2}\cdots(4)$$

$$\overline{A_5K_5}=\frac{\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_4A_5}+\overline{A_3A_4}+\overline{A_5A_6}+\sqrt{2}\cdot\overline{A_6A_7}+\overline{A_7A_8}\right)}{2}+\frac{\overline{A_2K_1}-\overline{A_1K_1}}{2}-\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_4A_5}+\overline{A_3A_4}\right)$$

$$=\frac{\left[\overline{A_5A_6}+\overline{A_7A_8}-\overline{A_3A_4}+\sqrt{2}\cdot\left(\overline{A_6A_7}-\overline{A_4A_5}\right)\right]}{2}+\frac{\overline{A_2K_1}-\overline{A_1K_1}}{2}\cdots(5)$$

$$\overline{A_6K_6}=\frac{\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_5A_6}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_6A_7}+\sqrt{2}\cdot\overline{A_7A_8}+\overline{A_8A_1}\right)}{2}+\frac{\overline{A_3K_2}-\overline{A_2K_2}}{2}-\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_5A_6}+\overline{A_4A_5}\right)$$

$$=\frac{\left[\overline{A_6A_7}+\overline{A_8A_1}-\overline{A_4A_5}+\sqrt{2}\cdot\left(\overline{A_7A_8}-\overline{A_5A_6}\right)\right]}{2}+\frac{\overline{A_3K_2}-\overline{A_2K_2}}{2}\cdots(6)$$

$$\overline{A_7K_7}=\frac{\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_6A_7}+\overline{A_5A_6}+\overline{A_7A_8}+\sqrt{2}\cdot\overline{A_8A_1}+\overline{A_1A_2}\right)}{2}+\frac{\overline{A_4K_3}-\overline{A_3K_3}}{2}-\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_6A_7}+\overline{A_5A_6}\right)$$

$$=\frac{\left[\overline{A_7A_8}+\overline{A_1A_2}-\overline{A_5A_6}+\sqrt{2}\cdot\left(\overline{A_8A_1}-\overline{A_6A_7}\right)\right]}{2}+\frac{\overline{A_4K_3}-\overline{A_3K_3}}{2}\cdots(7)$$

$$\overline{A_8K_8}=\frac{\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_7A_8}+\overline{A_6A_7}+\overline{A_8A_1}+\sqrt{2}\cdot\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}\right)}{2}+\frac{\overline{A_5K_4}-\overline{A_4K_4}}{2}-\left(\sqrt{2}\cdot\overline{A_7A_8}+\overline{A_6A_7}\right)$$

$$=\frac{\left[\overline{A_8A_1}+\overline{A_2A_3}-\overline{A_6A_7}+\sqrt{2}\cdot\left(\overline{A_1A_2}-\overline{A_7A_8}\right)\right]}{2}+\frac{\overline{A_5K_4}-\overline{A_4K_4}}{2}\cdots(8)$$

由$(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)+(8)$可得

$$\overline{A_1K_1}+\overline{A_2K_2}+\cdots+\overline{A_7K_7}+\overline{A_8K_8}=\overline{A_2K_1}+\overline{A_3K_2}+\cdots+\overline{A_8K_7}+\overline{A_1K_8}$$

我利用推論六邊形及八邊形的方式來推論$2N$邊形的情形：

(1)**等角不等邊的$2N$邊形共有N組對邊互相平行**，由前面 2-(1)的結論搭配包含$\overline{A_iK_i}$的邊$\overline{A_iA_{i+1}}$，可推得$\overline{A_iK_i}$與$\overline{A_iA_{i+1}}$之鄰邊及對邊的關係式，且關係式中所使用$\overline{A_iA_{i+1}}$**的鄰邊數量爲由$\overline{A_iA_{i+1}}$向左、右各取$(N-2)$個邊，搭配$\overline{A_iA_{i+1}}$及與$\overline{A_iA_{i+1}}$互相平行的對邊$\overline{A_{i+n}A_{(i+1)+n}}$**，**共使用$(2N-2)$個邊**。

(2)**將**所推得$\overline{A_iK_i}$**與$\overline{A_iA_{i+1}}$之鄰邊及對邊的關係式**一一條列出來並**進行累加**，**因爲$2N$邊形有等角的條件**，所以在推導$\overline{A_iK_i}$與$\overline{A_iA_{i+1}}$之鄰邊及對邊的關係式時，**不同的$\overline{A_iK_i}$會有相同規律(使用邊角關係時)**，因此在**進行累加法**的時候**會產生對消的現象**，最後可推得：$\overline{A_1K_1}+\overline{A_2K_2}+\cdots+\overline{A_{2n}K_{2n}}=\overline{A_2K_1}+\overline{A_3K_2}+\cdots+\overline{A_nK_{2n-1}}+\overline{A_1K_{2n}}$ 。

接著利用引理二，並搭配直角三角形內切圓半徑爲：$\frac{1}{2}$(兩股和−斜邊)可得：

$$r_{\Delta PA_1H_1}=\frac{\overline{A_1K_1}+\overline{PK_1}-\overline{PA_1}}{2}\quad,\quad r_{\Delta PA_2H_1}=\frac{\overline{A_2K_1}+\overline{PK_1}-\overline{PA_2}}{2}\ ,$$

$$r_{\Delta PA_2H_2}=\frac{\overline{A_2K_2}+\overline{PK_2}-\overline{PA_2}}{2}\quad,\quad r_{\Delta PA_3H_2}=\frac{\overline{A_3K_2}+\overline{PK_2}-\overline{PA_3}}{2}\ ,$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$r_{\Delta PA_{2n-1}H_{2n-1}}=\frac{\overline{A_{2n-1}K_{2n-1}}+\overline{PK_{2n-1}}-\overline{PA_{2n-1}}}{2}\quad,\quad r_{\Delta PA_{2n}H_{2n-1}}=\frac{\overline{A_{2n}K_{2n-1}}+\overline{PK_{2n-1}}-\overline{PA_{2n}}}{2}\ ,$$

$$r_{\Delta PA_{2n}H_{2n}}=\frac{\overline{A_{2n}K_{2n}}+\overline{PK_{2n}}-\overline{PA_{2n}}}{2}\quad,\quad r_{\Delta PA_1H_{2n}}=\frac{\overline{A_1K_{2n}}+\overline{PK_{2n}}-\overline{PA_1}}{2}\ ,$$

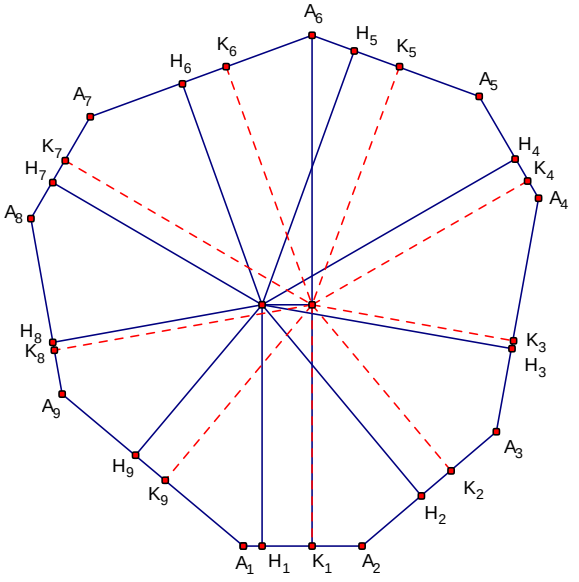
$$\therefore r_{\Delta PA_1H_1}+r_{\Delta PA_2H_2}+\cdots+r_{\Delta PA_{2n-1}H_{2n-1}}+r_{\Delta PA_{2n}H_{2n}}=r_{\Delta PA_2H_1}+r_{\Delta PA_3H_2}+\cdots+r_{\Delta PA_{2n}H_{2n-1}}+r_{\Delta PA_1H_{2n}}$$

因此，**對於等角且非正$2N$邊形而言，當P點落在適當區域內時，可推得與正$2N$邊形相同的結論，也就是兩組內切圓半徑和必相等**。

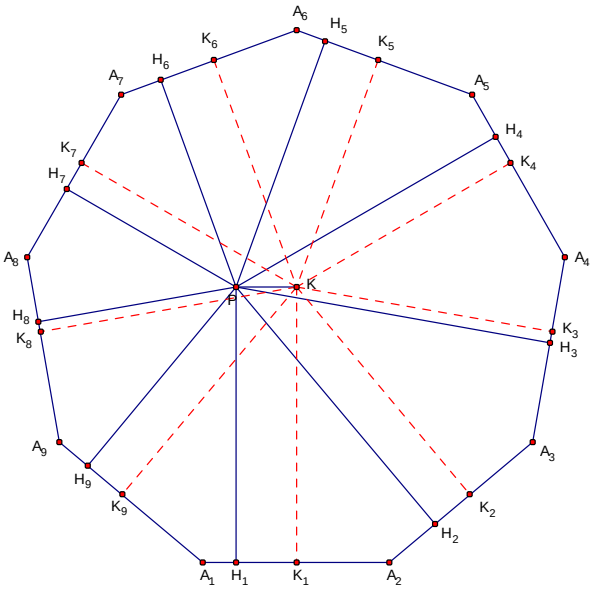
（六） 討論 P 點在等角非正 $2N+1$ 邊形的情形

由（三）討論正 $2N+1$ 邊形的過程中可知，兩組內切圓半徑和相等的充分條件爲兩組對應的線段和相等，而這兩組線段和相等又可等價於一個以 $\overline{PG}$ 爲主的三角函數關係式，因此可推論影響兩組線段和相等的主要因素爲構成此多邊形的角度關係。

以等角非正九邊形爲例，因爲保持等角的條件，雖然邊長沒有每邊相同，但在討論兩組線段和相等時，觀察圖形可知，其討論過程在角度上仍保持與正九邊形相同的情況(如下圖)，因此可推論等角非正九邊形在 P 點落在適當區域的條件下，兩組線段和相等必成立，也可進一步推得兩組內切圓半徑和相等。此結果也用來說明等角非正 $2N+1$ 邊形的情形。



等角非正九邊形

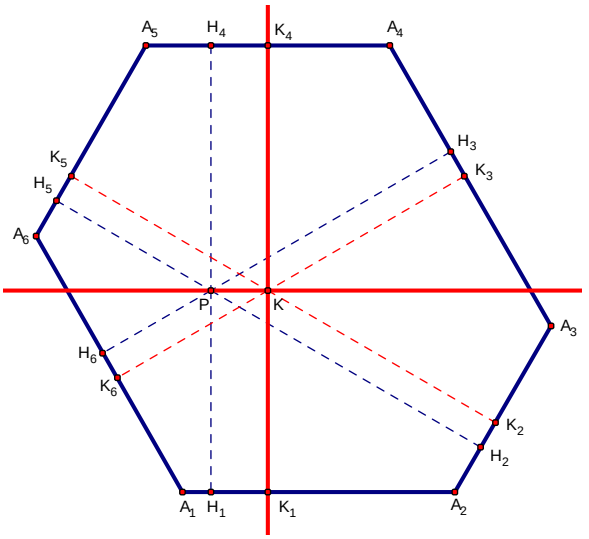


正九邊形

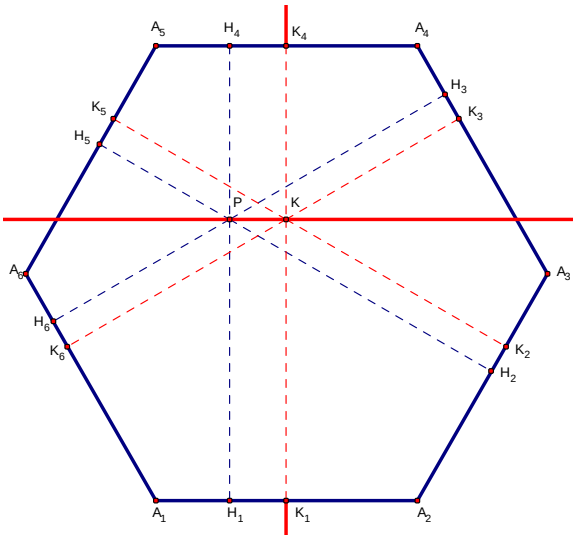
（七） 使用討論 $2N+1$ 邊形的方法來討論 $2N$ 邊形的情形

在(一)、(二)及(五)討論 $2N$ 邊形的各種情形時，因爲 $2N$ 邊形的 N 組對邊有很好的對稱性，於是我利用對稱及線段的比例關係可以證明 $2N$ 邊形的兩組內切圓半徑和必相等。而在(三)、(四)及(六)討論 $2N+1$ 邊形時，因爲邊數爲奇數，無法利用對稱的特性來證明，所以我利用三角函數關係式及角度旋轉的方式也可以證明 $2N+1$ 邊形的兩組內切圓半徑和必相等。那如果我用推導 $2N+1$ 邊形的三角函數關係式及角度旋轉的想法來討論 $2N$ 邊形的情形，以等角非等邊六邊形爲例(如下圖)，我任取一邊作中垂線，以此做爲定義有向角的

y 軸，再過 P 點對剛才所做的中垂線作垂線，交於 K 點，並以此垂線做爲定義有向角的 x 軸，則仿照討論 $2N+1$ 邊形的方法，也能利用三角函數關係式及角度旋轉證明 $2N$ 邊形的兩組內切圓半徑和必相等，且此結論在正六邊形也是成立的。



等角非正六邊形



正六邊形

五、 研究結果

綜合以上的討論我得到以下的研究結果

（一）若圖形爲正 $2N$ 邊形，則不論 P 點的位置在圖形的內部或外部，由 P 點對各邊做垂線所產生的分割圖形中，兩組相間隔的直角三角形之內切圓半徑和必相等。對於正 $2N$ 邊形而言，由於圖形有對稱的特性，所以不論 P 點的位置在圖形的內部或外部，皆能推得內切圓半徑和相等的結論。

（二）我定義適當區域爲：由垂直此多邊形各邊的垂線所共同圍出的封閉區域，當圖形爲正三角形時，適當區域爲一正六邊形，較原正三角形圖形大，其餘的多邊形所形成的適當區域必在原圖形內部。適當區域除了正 $2N$ 邊形外，皆須列爲證明內切圓半徑和相等的必要成立條件，因爲只有當 P 點落在適當區域內時，對應到內切圓半徑和相等的等價關係：兩組線段和相等才會成立，才能推得內切圓半徑和相等。

（三）若圖形爲正 $2N+1$ 邊形，則當 P 點落在適當區域內時，兩組相間隔的直角三角形之內切圓半徑和必相等。

（四）若將圖形推廣到等角且非正 N 邊形，則當 P 點落在適當區域內時，由 P 點對各邊做垂線所產生的分割圖形中，兩組相間隔的直角三角形之內切圓半徑和也會相等。

六、 未來展望

（一）目前我已經將有關正 N 邊形及等角非正 N 邊形的部分討論完畢，於是我嘗試著將等角的條件再放寬，但是從 GSP 的模擬實驗結果發現，若將等角條件放寬，要得到相同結果是做不到的，不知道是否還有其他條件也能讓結果同樣成立。

（二）目前我可以證明出兩組內切圓半徑和會相等，於是我進一步利用 GSP 模擬兩組內切圓的面積和是否會相等，實驗結果發現不一定成立，因此未來我想進一步找出能讓兩組內切圓面積和相等的限制條件。

七、 參考資料

（一）劉步松(2013)。正三角形和正五邊形的兩個性質。數學傳播第 36 卷第 1 期 pp.93-96。

（二）康軒出版社(2013)。相似形、三角形的內心。國中數學第五冊。

（三）歐劭謙(2013)。內外兼具探討圓內接 n 邊形中共邊三角形之內切圓半徑和及其極值。第 53 屆高雄市科展。

【評語】030414

本研究運用直角三角形內切圓半徑的計算與三角函數式的運算分別求得正 2N 邊形。正 2N+1 邊形過定點分割所形成直角三角形內切圓半徑之和的結論，內容可以推廣應用在國中數學現場上，值得肯定。惟非正 N 邊形仍然有討論之空間，期盼未來繼續努力。