

中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

佳作

030412

代代相傳－迭代勾股數之猜想

學校名稱：臺中市立居仁國民中學

作者： 國一 賴昱維	指導老師： 李美瑤 張斐閔
-------------------	-----------------------------

關鍵詞：勾股數、勾股形、迭代方法

作品名稱：代代相傳—迭代勾股數之猜想

摘要

這份研究旨在探討「勾股數迭代公式」的問題，並驗證「由『勾股形』可得到三個相似的矩陣來生成『勾股數迭代公式』」的猜想。研究的結果是以『勾股形』得到不同的勾股數關係式，接著以這些不同的勾股數關係式作迭代運算，得到了七十八個不同的勾股數矩陣迭代公式，再將具有相似矩陣的公式歸為同一類，則這七十八個公式共可分成二十六類，每類皆有三個公式，由此證明了勾股數迭代公式的猜想。在研究過程中，我得到了一般的勾股數矩陣迭代公式。

壹、研究動機

為了國小四年級資優班數學課中的「拼湊勾股數」活動，我查閱文獻並得知勾股數又名商高數或畢氏三元數，也就是符合畢氏定理 ($a^2 + b^2 = c^2$) 的整數解 (a, b, c)。不少學者曾經對勾股數生成公式提出各種證明方法 (黃文達, 2009; 蔡聰明, 2010):

$$(1) \text{畢達哥拉斯以代數證明勾股數生成公式: } \begin{cases} a = 2n + 1 \\ b = 2n^2 + 2n \\ c = 2n^2 + 2n + 1 \end{cases}, \forall n \in N。$$

$$(2) \text{柏拉圖以代數證明勾股數生成公式: } \begin{cases} a = 2n \\ b = n^2 - 1 \\ c = n^2 + 1 \end{cases}, \forall n \in N, n > 1。$$

$$(3) \left. \begin{array}{l} \text{丟番圖—以代數} \\ \text{歐幾里得—以幾何} \\ \text{費馬—以解析幾何} \\ \text{劉徽—以勾股形} \end{array} \right\} \text{證明勾股數生成公式: } \begin{cases} a = u^2 - v^2 \\ b = 2uv \\ c = u^2 + v^2 \end{cases}, \forall u, v \in N, u > v。$$

因此，我深深著迷於探討勾股數生成公式，後來在國小五年級時，我由圓點方陣獲得了勾股數生成公式，然後再延伸探討畢氏 N 元數生成公式，並參加了第 52 屆全國科展。接著，在國小六年級時，我由圓點方陣所獲得的勾股數生成公式延伸探討了海倫三角形邊長生成公式，參加了第 53 屆全國科展。後來，更以「畢氏三元數生成公式之研究與發展」為題目投稿中央研究院數學研究所的數學傳播季刊，獲得接受。就讀國中後，老師上數學課的第 1 章「整數的運算」，再度燃起我對勾股數的熱情。於是，我努力查閱文獻，想獲得更多「勾股數生成公式」的知識，我也因而得知所謂的「勾股形」是指以勾股數為邊長的幾何圖形，例如「畢氏三角形」的三邊長都是勾股數。而「勾股數迭代公式」是指從一勾股數 (a, b, c) 產生新的勾股數 (a', b', c') 的公式。清代數學家劉彝程曾經以魏晉時期數學家劉徽的勾股形產生一組「由已知的勾股數

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \text{ 產生新的勾股數 } (\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$$
$$\text{的迭代公式 (Paul Yiu, 1996): } \begin{cases} a' = 2a + b + 2c \\ b' = a + 2b + 2c \\ c' = 2a + 2b + 3c \end{cases}。$$

這組公式竟然類似於貝格倫 (B. Berggrens) 和普萊斯 (Price, H. Lee) 的畢氏三元數

矩陣迭代公式 (Wikipedia, the free encyclopedia, 2013)。貝格倫在 1934 年首先發現互質畢氏三元數之樹 (The tree of primitive Pythagorean triples) 後，再利用線性變換 (linear transformations) 得到以下三個相似的畢氏三元數矩陣迭代公式 (Price, H. Lee, 2008)。

$$(1) \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad (3) \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

而普萊斯也在 2008 年提出互質畢氏三元數之樹後，也利用線性變換得到以下三個相似的畢氏三元數矩陣迭代公式 (Price, H. Lee, 2008)。

$$(1) \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad (3) \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

貝格倫和普萊斯的公式分別由三個相似的矩陣來生成，可是劉彝程卻只有一個矩陣來產生。為此，我以『勾股形』找到了另外兩個相似的劉彝程迭代公式，也分別以『勾股形』重新證明了貝格倫和普萊斯的迭代公式，並以「勾股數迭代公式之研究與發展」為題目投稿中央研究院數學研究所的數學傳播季刊，獲得接受。接著，我大膽猜想「由『勾股形』可得到三個相似的矩陣來生成『勾股數迭代公式』」，希望在劉徽和劉彝程的基礎下，展開了勾股數迭代公式的研究，逐步證明我的猜想。

貳、研究目的

本研究的目的是在於設法證明「由『勾股形』可得到三個相似的矩陣來生成『勾股數迭代公式』」的猜想。為了達成此目的，我逐次探討下列問題：

- 一、劉徽以兩種「勾股形」得到兩組勾股數關係式之本質與方法為何？
- 二、劉彝程以劉徽兩組勾股數關係式得到一組勾股數迭代公式的本質與方法為何？
- 三、劉彝程、貝格倫和普萊斯的公式之間的關連性為何？是否存在另外兩個相似的劉彝程迭代公式？
- 四、是否存在不同的勾股數為邊長的幾何圖形可以得到不同的勾股數關係式？
- 五、如何延伸產生更多的勾股數關係式？
- 六、是否可利用不同的勾股數關係式作迭代運算產生不同的勾股數矩陣迭代公式？

參、研究設備及器材

筆、紙、電腦、word 2007。

肆、研究方法與過程

一、劉徽以勾股數為邊長的幾何圖形得到勾股數關係式

劉徽以「勾股形」證明以下兩組勾股數關係式（黃文達,2009）：

引理一：勾股數 a, b, c 滿足關係式(1)： $2(c-a)(c-b)=(a+b-c)^2$

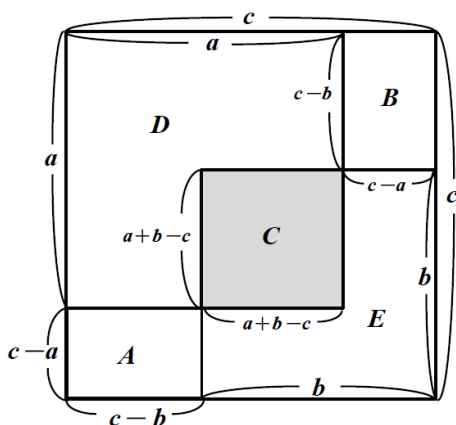
證明：在圖一，將勾股數 a 為邊長的正方形 $(C+D)$ 以及勾股數 b 為邊長的正方形 $(C+E)$ 放置於勾股數 c 為邊長的正方形 $(A+B+C+D+E)$ 內，則正方形 $(A+B+C+D+E)$ 面積恰為正方形 $(C+E)$ 和正方形 $(C+D)$ 面積之和。因此，長寬分別為 $(c-a)$ 和 $(c-b)$ 的矩形 (B) 和矩形 (A) 面積之和恰為邊長為 $(a+b-c)$ 的正方形 (C) 之面積，故得：

$$2(c-a)(c-b)=(a+b-c)^2。$$

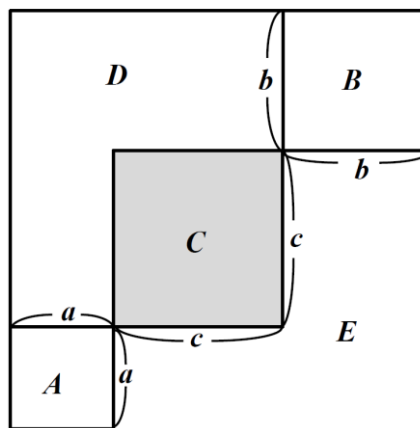
引理二：勾股數 a, b, c 滿足關係式(2)： $2(c+a)(c+b)=(a+b+c)^2$

證明：在圖二，連接勾股數 c 為邊長的正方形 (C) ，勾股數 a 為邊長的正方形 (A) 以及勾股數 b 為邊長的正方形 (B) ，則正方形 (C) 面積恰為正方形 (B) 和正方形 (A) 面積的和。因此，長寬分別為 $(c+a)$ 和 $(c+b)$ 的矩形 $(C+E)$ 和矩形 $(C+D)$ 面積之和恰為邊長為 $(a+b+c)$ 的正方形 $(A+B+C+D+E)$ 之面積，故得：

$$2(c+a)(c+b)=(a+b+c)^2。$$



圖一



圖二

二、 劉彝程以劉徽的勾股數關係式得到的勾股數迭代公式

劉彝程由劉徽的兩組勾股數關係式作迭代運算，得到迭代公式（Paul Yiu,1996）：

$$\text{定理一：勾股數 } (a, b, c) \text{ 產生新的勾股數 } (a', b', c') \text{ 迭代公式：} \begin{cases} a' = 2a + b + 2c \\ b' = a + 2b + 2c \\ c' = 2a + 2b + 3c \end{cases}$$

證明：先假設有勾股數 (a, b, c) 和新的勾股數 (a', b', c') ，則關係式(1)和(2)可表示為：

$$\begin{cases} 2(c' - a')(c' - b') = (a' + b' - c')^2 \\ 2(c + a)(c + b) = (a + b + c)^2 \end{cases}, \text{再假設} \begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' - b' = c + a \end{cases},$$

$$\text{則 } a' + b' - c' = a + b + c, \text{可得聯立方程式} \begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' - b' = c + a \\ a' + b' - c' = a + b + c \end{cases}, \text{再求解聯立方程式,}$$

$$\text{得到新的勾股數 } (a', b', c') : \begin{cases} a' = 2a + b + 2c \\ b' = a + 2b + 2c \\ c' = 2a + 2b + 3c \end{cases}.$$

三、 由貝格倫和普萊斯的公式推想劉彝程還有另外兩個相似的迭代公式

因為貝格倫和普萊斯各有三個相似的矩陣公式，可是劉彝程卻只有一個公式，

因此我推想劉彝程還有另外兩個相似的迭代公式。

(一) 貝格倫和普萊斯公式的相似性

貝格倫和普萊斯公式都各有 3 個相似的 3×3 階矩陣，而且在這 3 個矩陣中，同一行且同一列的元素之絕對值相等(Price, H. Lee,2008)。原因如下：

1. 這裡分別以 3 個不同的 3×3 階矩陣 A, B, C 表示貝格倫公式中的 3×3 階矩陣，則貝格倫公式可改寫成為表一中的形式，這時可發現 $|a_{ij}| = |b_{ij}| = |c_{ij}|$ ， $i, j = 1, 2, 3$ ，也就是在三個矩陣中任一個同一行且同一列元素的絕對值都相等。
2. 這裡分別以 3 個不同的 3×3 階矩陣 D, E, F 表示普萊斯公式中的 3×3 階矩陣，則普萊斯公式可改寫成為表一中的形式，這時可發現 $|d_{ij}| = |e_{ij}| = |f_{ij}|$ ， $i, j = 1, 2, 3$ ，也就是在三個矩陣中任一個同一行且同一列元素的絕對值都相等。

表一

公式	編號	矩陣轉換
貝格倫	(1)	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
	(2)	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
	(3)	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
普萊斯	(1)	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
	(2)	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
	(3)	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

(二) 另外兩個相似的劉彝程迭代公式

將劉彝程、貝格倫和普萊斯的公式進行如下的矩陣與聯立方程式的互相轉換時，我發現這些公式的相似性（表二）。

表二

公式	編號	矩陣與聯立方程式的互相轉換
貝格倫	(1)	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} a' = -a + 2b + 2c \\ b' = -2a + b + 2c \\ c' = -2a + 2b + 3c \end{cases}$
	(2)	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} a' = a + 2b + 2c \\ b' = 2a + b + 2c \\ c' = 2a + 2b + 3c \end{cases}$
	(3)	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} a' = a - 2b + 2c \\ b' = 2a - b + 2c \\ c' = 2a - 2b + 3c \end{cases}$

普萊斯	(1)	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} a' = 2a + b - c \\ b' = -2a + 2b + 2c \\ c' = -2a + b + 3c \end{cases}$
	(2)	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} a' = 2a + b + c \\ b' = 2a - 2b + 2c \\ c' = 2a - b + 3c \end{cases}$
	(3)	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} a' = 2a - b + c \\ b' = 2a + 2b + 2c \\ c' = 2a + b + 3c \end{cases}$
劉彝程	(1)	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} a' = 2a + b + 2c \\ b' = a + 2b + 2c \\ c' = 2a + 2b + 3c \end{cases}$

四、勾股數關係式的獲得

我的研究構想是以不同的「勾股形」得到不同的勾股數關係式，首先，我改變關係式(1)和(2)係數的性質符號： $\begin{cases} 2(c-a)(c-b) = (a+b-c)^2 \\ 2(c+a)(c+b) = (a+b+c)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(c-a)(c+b) = (-a+b+c)^2 \\ 2(c+a)(c-b) = (a-b+c)^2 \end{cases}$ 。

接著，我找到邊長為 $(-a+b+c)$ 或 $(a-b+c)$ 的兩種正方形，以及長寬分別為 $(c-a)$ 和 $(c+b)$ 或 $(c+a)$ 和 $(c-b)$ 的兩種矩形，然後探討其面積的關係，得到以下兩種不同的勾股數關係式。

引理三：勾股數 a, b, c 滿足關係式(3)： $2(c-a)(c+b) = (-a+b+c)^2$

證明：在圖三，將勾股數 a 為邊長的正方形（ I ）放置於勾股數 c 為邊長的正方形（ $A+D+E+I$ ）內，再連接勾股數 b 為邊長的正方形（ G ），則正方形（ $A+D+E+I$ ）面積恰為正方形（ G ）和正方形（ I ）面積之和，中間重疊區域（ $A+D+E$ ）的面積也等於正方形（ G ）的面積。因此，長寬分別為 $(c-a)$ 和 $(c+b)$ 的矩形（ $A+C+E$ ）和矩形（ $B+D+E$ ）面積之和等於邊長為 $(-a+b+c)$ 的正方形（ $B+C+E+G$ ）面積，故得：

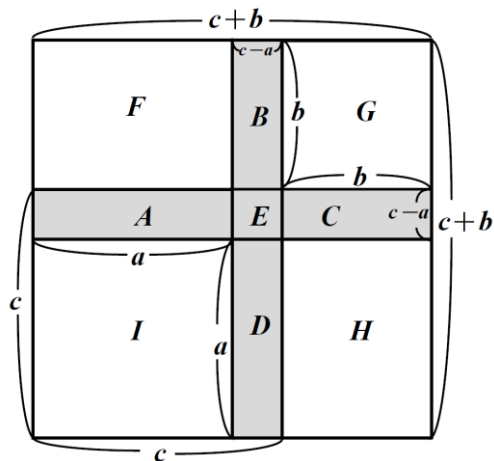
$$2(c-a)(c+b) = (-a+b+c)^2。$$

引理四：勾股數 a, b, c 滿足關係式(4)： $2(c+a)(c-b) = (a-b+c)^2$

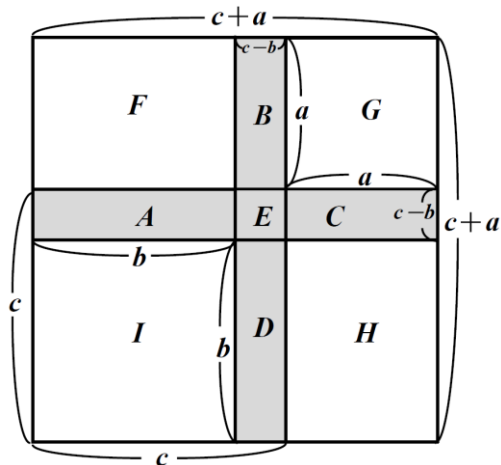
證明：在圖四，將勾股數 b 為邊長的正方形（ I ）放置於勾股數 c 為邊長的正方形（ $A+D+E+I$ ）內，再連接勾股數 a 為邊長的正方形（ G ），則正方形（ $A+D+E+I$ ）面積恰為正方形（ G ）和正方形（ I ）面積之和，中間重疊區域（ $A+D+E$ ）的面積也等於

正方形（ G ）的面積。因此，長寬分別為 $(c+a)$ 和 $(c-b)$ 的矩形（ $A+C+E$ ）和矩形（ $B+D+E$ ）面積之和等於邊長為 $(a-b+c)$ 的正方形（ $B+C+E+G$ ）面積，故得：

$$2(c+a)(c-b) = (a-b+c)^2。$$



圖三



圖四

五、勾股數關係式的延伸

接著，我將劉徽的兩組關係式以及我找到的另外兩組關係式稱為基本關係式。然後，將這四組基本關係式等號兩邊的式子同乘以大於 1 的平方數，藉此可延伸產生更多組的關係式：（一）基本關係式等號兩邊的式子同乘以 4 得到“ $\times 4$ ”關係式，即關係式(5)至(8)；（二）基本關係式等號兩邊的式子同乘以 9 得到“ $\times 9$ ”關係式，即關係式(9)至(12)；（三）基本關係式等號兩邊式子同乘以 m^2 得到“ $\times m^2$ ”關係式， m 為正整數，即關係式(13)至(16)；（四）基本關係式等號兩邊式子同乘以 n^2 得到“ $\times n^2$ ”關係式， n 為正整數，即關係式(17)至(20)（表三）。

表三

種類	基本關係式同乘以大於 1 的平方數	編號	勾股數關係式
× 4 關 係 式	$2(c-a)(c-b) \times 4 = (a+b-c)^2 \times 4$	(5)	$8(c-a)(c-b) = (2a+2b-2c)^2$
	$2(c+a)(c+b) \times 4 = (a+b+c)^2 \times 4$	(6)	$8(c+a)(c+b) = (2a+2b+2c)^2$
	$2(c-a)(c+b) \times 4 = (-a+b+c)^2 \times 4$	(7)	$8(c-a)(c+b) = (-2a+2b+2c)^2$
	$2(c+a)(c-b) \times 4 = (a-b+c)^2 \times 4$	(8)	$8(c+a)(c-b) = (2a-2b+2c)^2$
× 9	$2(c-a)(c-b) \times 9 = (a+b-c)^2 \times 9$	(9)	$18(c-a)(c-b) = (3a+3b-3c)^2$

關係式	$2(c+a)(c+b) \times 9 = (a+b+c)^2 \times 9$	⑩	$18(c+a)(c+b) = (3a+3b+3c)^2$
	$2(c-a)(c+b) \times 9 = (-a+b+c)^2 \times 9$	⑪	$18(c-a)(c+b) = (-3a+3b+3c)^2$
	$2(c+a)(c-b) \times 9 = (a-b+c)^2 \times 9$	⑫	$18(c+a)(c-b) = (3a-3b+3c)^2$
$\times m^2$ 關係式	$2(c-a)(c-b) \times m^2 = (a+b-c)^2 \times m^2$	⑬	$2m^2(c-a)(c-b) = (ma+mb-mc)^2$
	$2(c+a)(c+b) \times m^2 = (a+b+c)^2 \times m^2$	⑭	$2m^2(c+a)(c+b) = (ma+mb+mc)^2$
	$2(c-a)(c+b) \times m^2 = (-a+b+c)^2 \times m^2$	⑮	$2m^2(c-a)(c+b) = (-ma+mb+mc)^2$
	$2(c+a)(c-b) \times m^2 = (a-b+c)^2 \times m^2$	⑯	$2m^2(c+a)(c-b) = (ma-mb+mc)^2$
$\times n^2$ 關係式	$2(c-a)(c-b) \times n^2 = (a+b-c)^2 \times n^2$	⑰	$2n^2(c-a)(c-b) = (na+nb-nc)^2$
	$2(c+a)(c+b) \times n^2 = (a+b+c)^2 \times n^2$	⑱	$2n^2(c+a)(c+b) = (na+nb+nc)^2$
	$2(c-a)(c+b) \times n^2 = (-a+b+c)^2 \times n^2$	⑲	$2n^2(c-a)(c+b) = (-na+nb+nc)^2$
	$2(c+a)(c-b) \times n^2 = (a-b+c)^2 \times n^2$	㉔	$2n^2(c+a)(c-b) = (na-nb+nc)^2$

六、勾股數關係式的迭代運算

我接著將不同的勾股數關係式作迭代運算產生以下不同的勾股數矩陣迭代公式：

(一) $(1+1)$ 研究一由兩組不同的基本關係式進行迭代運算

我由兩組不同的基本關係式 $\begin{cases} 2A'B' = C'^2 \\ 2AB = C^2 \end{cases}$ 作迭代運算，先假設： $A' = B, B' = A$ ，則 $C' = C$ ，最後再求解聯立方程式 $\begin{cases} A' = B \\ B' = A \\ C' = C \end{cases}$ 。由基本關係式(1)、(2)、(3)和(4)中，取其中兩組

不同的關係式，由這兩組關係式產生 6 種組合：(1)和(2)、(1)和(3)、(1)和(4)、(2)和(3)、(2)和(4)以及(3)和(4)。每種組合各可分成 2 種情形作迭代運算，產生 12 組聯立方程式。再求解這 12 組聯立方程式。

結果：這 12 組聯立方程式中有 6 組可以得到勾股數矩陣迭代公式（表四）。

表四

勾股數 關係式	由關係式迭代運算 ^{求得} →矩陣迭代公式	矩陣迭代 公式編號
(1)和(2)	$\begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' - b' = c + a \\ a' + b' - c' = a + b + c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	1.1—①
	$\begin{cases} c' - a' = c + a \\ c' - b' = c + b \\ a' + b' - c' = a + b + c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	1.1—②
(1)和(3)	$\begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' - b' = c - a \\ a' + b' - c' = -a + b + c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	1.2—①
	$\begin{cases} c' - a' = c - a \\ c' - b' = c + b \\ a' + b' - c' = -a + b + c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	1.2—②
(1)和(4)	$\begin{cases} c' - a' = c - b \\ c' - b' = c + a \\ a' + b' - c' = a - b + c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	1.3—①
	$\begin{cases} c' - a' = c + a \\ c' - b' = c - b \\ a' + b' - c' = a - b + c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	1.3—②

(二) (1+4) 研究一由一組基本關係式和一組“×4”關係式進行迭代運算

我由一組基本關係式 $2A'B' = C'^2$ ，和一組“×4”關係式 $2 \times 4AB = (2C)^2$ 作迭代運算，分成兩種情形：①先假設： $A' = 4B, B' = A$ ，則 $C' = 2C$ ，最後再求解聯立方程式

$$\begin{cases} A' = 4B \\ B' = A \\ C' = 2C \end{cases} ; \text{②先假設：} \begin{cases} A' = 2B \\ B' = 2A \\ C' = 2C \end{cases}$$

由基本關係式(1)、(2)、(3)和(4)取其中一組關係式，由“×4”關係式(5)、(6)、(7)和(8)中取其中一組關係式，再由這兩組關係式產生 **16** 種組合：(1)和(5)、(1)和(6)、(1)和(7)、(1)和(8)、(2)和(5)、(2)和(6)、(2)和(7)、(2)和(8)、(3)和(5)、(3)和(6)、(3)和(7)、(3)和(8)以及(4)和(5)、(4)和(6)、(4)和(7)、(4)和(8)。每種組合可分成 **6** 種情形（①有 4 種；②有 2 種）作迭代運算，產生 **96** 組聯立方程式。再求解這 **96** 組聯立方程式。

結果：這 **96** 組聯立方程式中有 **24** 組可以得到勾股數矩陣迭代公式（表五）。

表五

勾股數 關係式	由關係式迭代運算 ^{求得} →矩陣迭代公式	矩陣迭代 公式編號
(1)和(5)	$\begin{cases} c' - a' = 4(c - a) \\ c' - b' = c - b \\ a' + b' - c' = 2a + 2b - 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.1—①
	$\begin{cases} c' - a' = c - b \\ c' - b' = 4(c - a) \\ a' + b' - c' = 2a + 2b - 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.1—②
	$\begin{cases} c' - a' = 4(c - b) \\ c' - b' = c - a \\ a' + b' - c' = 2a + 2b - 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.1—③
	$\begin{cases} c' - a' = c - a \\ c' - b' = 4(c - b) \\ a' + b' - c' = 2a + 2b - 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.1—④
(1)和(6)	$\begin{cases} c' - a' = 4(c + a) \\ c' - b' = c + b \\ a' + b' - c' = 2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.2—①
	$\begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' - b' = 4(c + a) \\ a' + b' - c' = 2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.2—②
	$\begin{cases} c' - a' = 4(c + b) \\ c' - b' = c + a \\ a' + b' - c' = 2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.2—③
	$\begin{cases} c' - a' = c + a \\ c' - b' = 4(c + b) \\ a' + b' - c' = 2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.2—④
(1)和(7)	$\begin{cases} c' - a' = 4(c - a) \\ c' - b' = c + b \\ a' + b' - c' = -2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.3—①
	$\begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' - b' = 4(c - a) \\ a' + b' - c' = -2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 3 \\ -6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.3—②
	$\begin{cases} c' - a' = 4(c + b) \\ c' - b' = c - a \\ a' + b' - c' = -2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 6 \\ -3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.3—③

	$\begin{cases} c' - a' = c - a \\ c' - b' = 4(c + b) \\ a' + b' - c' = -2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 6 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.3—④
(1)和(8)	$\begin{cases} c' - a' = 4(c + a) \\ c' - b' = c - b \\ a' + b' - c' = 2a - 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.4—①
	$\begin{cases} c' - a' = c - b \\ c' - b' = 4(c + a) \\ a' + b' - c' = 2a - 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & 3 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.4—②
	$\begin{cases} c' - a' = 4(c - b) \\ c' - b' = c + a \\ a' + b' - c' = 2a - 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & -6 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.4—③
	$\begin{cases} c' - a' = c + a \\ c' - b' = 4(c - b) \\ a' + b' - c' = 2a - 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.4—④
(3)和(6)	$\begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' + b' = 4(c + a) \\ -a' + b' + c' = 2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.5—①
	$\begin{cases} c' - a' = c + a \\ c' + b' = 4(c + b) \\ -a' + b' + c' = 2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.5—②
(3)和(7)	$\begin{cases} c' - a' = c - a \\ c' + b' = 4(c + b) \\ -a' + b' + c' = -2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.6—①
(3)和(8)	$\begin{cases} c' - a' = c - b \\ c' + b' = 4(c + a) \\ -a' + b' + c' = 2a - 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.7—①
(4)和(6)	$\begin{cases} c' + a' = 4(c + a) \\ c' - b' = c + b \\ a' - b' + c' = 2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.8—①
	$\begin{cases} c' + a' = 4(c + b) \\ c' - b' = c + a \\ a' - b' + c' = 2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.8—②
(4)和(7)	$\begin{cases} c' + a' = 4(c + b) \\ c' - b' = c - a \\ a' - b' + c' = -2a + 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.9—①
(4)和(8)	$\begin{cases} c' + a' = 4(c + a) \\ c' - b' = c - b \\ a' - b' + c' = 2a - 2b + 2c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	2.10—①

(三) (1+9) 研究一由一組基本關係式和一組 “× 9” 關係式進行迭代運算

由一組基本關係式 $2A'B' = C'^2$ ，和一組 “× 9” 關係式 $2 \times 9AB = (3C)^2$ 作迭代運算，分成兩種情形：①先假設： $A' = 9B, B' = A$ ，則 $C' = 3C$ ，最後再求解聯立方程式

$$\begin{cases} A' = 9B \\ B' = A \\ C' = 3C \end{cases} ; \text{②先假設：} A' = 3B, B' = 3A, \text{則 } C' = 3C, \text{最後再求解聯立方程式：} \begin{cases} A' = 3B \\ B' = 3A \\ C' = 3C \end{cases}$$

由基本關係式(1)、(2)、(3)和(4)取其中一組關係式，由 “× 9” 關係式(9)、(10)、(11)和(12)取其中一組關係式，再由這兩組關係式產生 **16** 種組合：(1)和(9)、(1)和(10)、(1)和(11)、(1)和(12)、(2)和(9)、(2)和(10)、(2)和(11)、(2)和(12)、(3)和(9)、(3)和(10)、(3)和(11)、(3)和(12)以及(4)和(9)、(4)和(10)、(4)和(11)、(4)和(12)。每種組合可分成 **6** 種情形（①有 4 種；②有 2 種）作迭代運算，產生 **96** 組聯立方程式。再求解這 **96** 組聯立方程式。

結果：這 **96** 組聯立方程式中有 **24** 組可以得到勾股數矩陣迭代公式（表六）。

表六

勾股數 關係式	由關係式迭代運算 $\xrightarrow{\text{求得}}$ 矩陣迭代公式	矩陣迭代 公式編號
(1)和(9)	$\begin{cases} c' - a' = 9(c - a) \\ c' - b' = c - b \\ a' + b' - c' = 3a + 3b - 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -6 & 3 & 6 \\ -6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.1—①
	$\begin{cases} c' - a' = c - b \\ c' - b' = 9(c - a) \\ a' + b' - c' = 3a + 3b - 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.1—②
	$\begin{cases} c' - a' = 9(c - b) \\ c' - b' = c - a \\ a' + b' - c' = 3a + 3b - 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 6 \\ 2 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.1—③
	$\begin{cases} c' - a' = c - a \\ c' - b' = 9(c - b) \\ a' + b' - c' = 3a + 3b - 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.1—④
	$\begin{cases} c' - a' = 9(c + a) \\ c' - b' = c + b \\ a' + b' - c' = 3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 12 & 3 & 12 \\ 12 & 4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.2—①

(1)和(10)	$\begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' - b' = 9(c + a) \\ a' + b' - c' = 3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 12 \\ 3 & 4 & 4 \\ 12 & 4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.2—②
	$\begin{cases} c' - a' = 9(c + b) \\ c' - b' = c + a \\ a' + b' - c' = 3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 12 & 12 \\ 4 & 12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.2—③
	$\begin{cases} c' - a' = c + a \\ c' - b' = 9(c + b) \\ a' + b' - c' = 3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 12 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.2—④
(1)和(11)	$\begin{cases} c' - a' = 9(c - a) \\ c' - b' = c + b \\ a' + b' - c' = -3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -12 & 3 & 12 \\ -12 & 4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.3—①
	$\begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' - b' = 9(c - a) \\ a' + b' - c' = -3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 3 & 12 \\ -3 & 4 & 4 \\ -12 & 4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.3—②
	$\begin{cases} c' - a' = 9(c + b) \\ c' - b' = c - a \\ a' + b' - c' = -3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 4 \\ -3 & 12 & 12 \\ -4 & 12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.3—③
	$\begin{cases} c' - a' = c - a \\ c' - b' = 9(c + b) \\ a' + b' - c' = -3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 12 & 12 \\ -4 & 3 & 4 \\ -4 & 12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.3—④
(1)和(12)	$\begin{cases} c' - a' = 9(c + a) \\ c' - b' = c - b \\ a' + b' - c' = 3a - 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 12 & -3 & 12 \\ 12 & -4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.4—①
	$\begin{cases} c' - a' = c - b \\ c' - b' = 9(c + a) \\ a' + b' - c' = 3a - 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 & 12 \\ 3 & -4 & 4 \\ 12 & -4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.4—②
	$\begin{cases} c' - a' = 9(c - b) \\ c' - b' = c + a \\ a' + b' - c' = 3a - 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 3 & -12 & 12 \\ 4 & -12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.4—③
	$\begin{cases} c' - a' = c + a \\ c' - b' = 9(c - b) \\ a' + b' - c' = 3a - 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 12 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.4—④
(3)和(10)	$\begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' + b' = 9(c + a) \\ -a' + b' + c' = 3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.5—①
	$\begin{cases} c' - a' = c + a \\ c' + b' = 9(c + b) \\ -a' + b' + c' = 3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.5—②

(3)和(11)	$\begin{cases} c' - a' = c - a \\ c' + b' = 9(c + b) \\ -a' + b' + c' = -3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.6—①
(3)和(12)	$\begin{cases} c' - a' = c - b \\ c' + b' = 9(c + a) \\ -a' + b' + c' = 3a - 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.7—①
(4)和(10)	$\begin{cases} c' + a' = 9(c + a) \\ c' - b' = c + b \\ a' - b' + c' = 3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 6 \\ 6 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.8—①
	$\begin{cases} c' + a' = 9(c + b) \\ c' - b' = c + a \\ a' - b' + c' = 3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 6 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.8—②
(4)和(11)	$\begin{cases} c' + a' = 9(c + b) \\ c' - b' = c - a \\ a' - b' + c' = -3a + 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.9—①
(4)和(12)	$\begin{cases} c' + a' = 9(c + a) \\ c' - b' = c - b \\ a' - b' + c' = 3a - 3b + 3c \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	3.10—①

(四) $(1+m^2)$ 研究—由一組基本關係式和一組“ $\times m^2$ ”關係式進行迭代運算

由一組基本關係式 $2A'B' = C'^2$ ，和一組“ $\times m^2$ ”關係式 $2m^2AB = (mC)^2$ ，作迭代運算。這裡我分成 m 是合數以及 m 是質數來討論。當 m 是合數，因為 m 可以分解成數個質數，得考慮情形就不只兩種聯立方程式，相當複雜，例如。 $m=10$ 時，考慮的情形有以下五種聯立方程式。①假設： $A'=100B, B'=A$ ，則 $C'=10C$ ，於是再求解這三

組方程式 $\begin{cases} A'=100B \\ B'=A \\ C'=10C \end{cases}$ ；②假設： $A'=50B, B'=2A$ ，則 $C'=10C$ ，於是再求解這三組方程式

$\begin{cases} A'=50B \\ B'=2A \\ C'=10C \end{cases}$ ；③假設： $A'=25B, B'=4A$ ，則 $C'=10C$ ，於是再求解這三組方程式 $\begin{cases} A'=25B \\ B'=4A \\ C'=10C \end{cases}$ ；

④假設： $A'=20B, B'=5A$ ，則 $C'=10C$ ，於是再求解這三組方程式 $\begin{cases} A'=20B \\ B'=5A \\ C'=10C \end{cases}$ ；⑤假設：

$\begin{cases} A'=10B \\ B'=10A \\ C'=10C \end{cases}$ 。所以，本研究只取

m 為質數以簡化整個過程，方便研究。當 m 是質數，分成兩種情形：①先假設：

$$A' = m^2 B, B' = A, \text{ 則 } C' = mC, \text{ 最後再求解聯立方程式 } \begin{cases} A' = m^2 B \\ B' = A \\ C' = mC \end{cases} ; \text{ ②先假設：}$$

$$A' = mB, B' = mA, \text{ 則 } C' = mC, \text{ 最後再求解聯立方程式 } \begin{cases} A' = mB \\ B' = mA \\ C' = mC \end{cases} \text{。由基本關係式(1)、(2)、}$$

(3)和(4)取其中一組關係式，由“ $\times m^2$ ”關係式(13)、(14)、(15)和(16)取其中一組關係式，再由這兩組關係式產生 **16** 種組合：(1)和(13)、(1)和(14)、(1)和(15)、(1)和(16)、(2)和(13)、(2)和(14)、(2)和(15)、(2)和(16)、(3)和(13)、(3)和(14)、(3)和(15)、(3)和(16)以及(4)和(13)、(4)和(14)、(4)和(15)、(4)和(16)。每種組合可分成 **6** 種情形（①有 **4** 種；②有 **2** 種）作迭代運算，產生 **96** 組聯立方程式。再求解這 **96** 組聯立方程式。

結果：這 **96** 組聯立方程式中有 **24** 組可以得到勾股數矩陣迭代公式（表七）。

表七

勾股數 關係式	由關係式迭代運算 ^{求得} →矩陣公式（ m 為質數）	矩陣公 式編號
(1)和(13)	$\begin{cases} c' - a' = m^2(c - a) \\ c' - b' = c - b \\ a' + b' - c' = ma + mb - mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m-1 & -(m-1) \\ -(m^2-m) & m & m^2-m \\ -(m^2-m) & m-1 & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.1—①
	$\begin{cases} c' - a' = c - b \\ c' - b' = m^2(c - a) \\ a' + b' - c' = ma + mb - mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m^2-m) & m & m^2-m \\ m & m-1 & -(m-1) \\ -(m^2-m) & m-1 & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.1—②
	$\begin{cases} c' - a' = m^2(c - b) \\ c' - b' = c - a \\ a' + b' - c' = ma + mb - mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-1 & m & -(m-1) \\ m & -(m^2-m) & m^2-m \\ m-1 & -(m^2-m) & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.1—③
	$\begin{cases} c' - a' = c - a \\ c' - b' = m^2(c - b) \\ a' + b' - c' = ma + mb - mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -(m^2-m) & m^2-m \\ m-1 & m & -(m-1) \\ m-1 & -(m^2-m) & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.1—④
(1)和(14)	$\begin{cases} c' - a' = m^2(c + a) \\ c' - b' = c + b \\ a' + b' - c' = ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m+1 & m+1 \\ m^2+m & m & m^2+m \\ m^2+m & m+1 & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.2—①
	$\begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' - b' = m^2(c + a) \\ a' + b' - c' = ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2+m & m & m^2+m \\ m & m+1 & m+1 \\ m^2+m & m+1 & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.2—②

	$\begin{cases} c' - a' = m^2(c + b) \\ c' - b' = c + a \\ a' + b' - c' = ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+1 & m & m+1 \\ m & m^2+m & m^2+m \\ m+1 & m^2+m & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.2—③
	$\begin{cases} c' - a' = c + a \\ c' - b' = m^2(c + b) \\ a' + b' - c' = ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m^2+m & m^2+m \\ m+1 & m & m+1 \\ m+1 & m^2+m & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.2—④
(1)和(15)	$\begin{cases} c' - a' = m^2(c - a) \\ c' - b' = c + b \\ a' + b' - c' = -ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & m+1 & m+1 \\ -(m^2+m) & m & m^2+m \\ -(m^2+m) & m+1 & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.3—①
	$\begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' - b' = m^2(c - a) \\ a' + b' - c' = -ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m^2+m) & m & m^2+m \\ -m & m+1 & m+1 \\ -(m^2+m) & m+1 & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.3—②
	$\begin{cases} c' - a' = m^2(c + b) \\ c' - b' = c - a \\ a' + b' - c' = -ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m+1) & m & m+1 \\ -m & m^2+m & m^2+m \\ -(m+1) & m^2+m & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.3—③
	$\begin{cases} c' - a' = c - a \\ c' - b' = m^2(c + b) \\ a' + b' - c' = -ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & m^2+m & m^2+m \\ -(m+1) & m & m+1 \\ -(m+1) & m^2+m & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.3—④
(1)和(16)	$\begin{cases} c' - a' = m^2(c + a) \\ c' - b' = c - b \\ a' + b' - c' = ma - mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -(m+1) & m+1 \\ m^2+m & -m & m^2+m \\ m^2+m & -(m+1) & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.4—①
	$\begin{cases} c' - a' = c - b \\ c' - b' = m^2(c + a) \\ a' + b' - c' = ma - mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2+m & -m & m^2+m \\ m & -(m+1) & m+1 \\ m^2+m & -(m+1) & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.4—②
	$\begin{cases} c' - a' = m^2(c - b) \\ c' - b' = c + a \\ a' + b' - c' = ma - mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+1 & -m & m+1 \\ m & -(m^2+m) & m^2+m \\ m+1 & -(m^2+m) & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.4—③
	$\begin{cases} c' - a' = c + a \\ c' - b' = m^2(c - b) \\ a' + b' - c' = ma - mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -(m^2+m) & m^2+m \\ m+1 & -m & m+1 \\ m+1 & -(m^2+m) & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.4—④
(3)和(14)	$\begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' + b' = m^2(c + a) \\ -a' + b' + c' = ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2-m & -m & m^2-m \\ m & m-1 & m-1 \\ m^2-m & -(m-1) & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.5—①
	$\begin{cases} c' - a' = c + a \\ c' + b' = m^2(c + b) \\ -a' + b' + c' = ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & m^2-m & m^2-m \\ m-1 & m & m-1 \\ -(m-1) & m^2-m & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.5—②
(3)和(15)	$\begin{cases} c' - a' = c - a \\ c' + b' = m^2(c + b) \\ -a' + b' + c' = -ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m^2-m & m^2-m \\ -(m-1) & m & m-1 \\ m-1 & m^2-m & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.6—①

(3)和(16)	$\begin{cases} c' - a' = c - b \\ c' + b' = m^2(c + a) \\ -a' + b' + c' = ma - mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 - m & m & m^2 - m \\ m & -(m-1) & m-1 \\ m^2 - m & m-1 & m^2 - m + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.7—①
(4)和(14)	$\begin{cases} c' + a' = m^2(c + a) \\ c' - b' = c + b \\ a' - b' + c' = ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m-1 & m-1 \\ m^2 - m & -m & m^2 - m \\ m^2 - m & -(m-1) & m^2 - m + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.8—①
	$\begin{cases} c' + a' = m^2(c + b) \\ c' - b' = c + a \\ a' - b' + c' = ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-1 & m & m-1 \\ -m & m^2 - m & m^2 - m \\ -(m-1) & m^2 - m & m^2 - m + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.8—②
(4)和(15)	$\begin{cases} c' + a' = m^2(c + b) \\ c' - b' = c - a \\ a' - b' + c' = -ma + mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m-1) & m & m-1 \\ m & m^2 - m & m^2 - m \\ m-1 & m^2 - m & m^2 - m + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.9—①
(4)和(16)	$\begin{cases} c' + a' = m^2(c + a) \\ c' - b' = c - b \\ a' - b' + c' = ma - mb + mc \end{cases} \xrightarrow{\text{求得}} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -(m-1) & m-1 \\ m^2 - m & m & m^2 - m \\ m^2 - m & m-1 & m^2 - m + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	4.10—①

(五) (4+9) 研究一由一組 “× 4” 關係式和一組 “× 9” 關係式進行迭代運算

由一組 “× 4” 關係式 $2 \times 4A'B' = (3C')^2$ ，和一組 “× 9” 關係式 $2 \times 9AB = (3C)^2$ 作迭代運算，分成五種情形：①先假設： $4A' = 9B, B' = A$ ，則 $2C' = 3C$ ，最後再求解聯立方程

$$\begin{cases} 4A' = 9B \\ B' = A \\ 2C' = 3C \end{cases} ; \text{②先假設：} \begin{cases} A' = 9B \\ 4B' = A \\ 2C' = 3C \end{cases} ;$$

$$\text{③先假設：} \begin{cases} 2A' = 9B \\ 2B' = A \\ 2C' = 3C \end{cases} ; \text{④先假設：}$$

$$A' = 3B, 4B' = 3A, \text{則 } 2C' = 3C, \text{最後再求解聯立方程式} \begin{cases} A' = 3B \\ 4B' = 3A \\ 2C' = 3C \end{cases} ; \text{⑤先假設：} \begin{cases} 2A' = 3B \\ 2C' = 3C \end{cases}$$

$$2B' = 3A, \text{則 } 2C' = 3C, \text{最後再求解聯立方程式：} \begin{cases} 2A' = 3B \\ 2B' = 3A \\ 2C' = 3C \end{cases} \text{。由 “× 4” 關係式(5)、(6)、(7)}$$

和(8)取其中一組關係式，以及 “× 9” 關係式(9)、(10)、(11)和(12)取其中一組關係式，再由這兩組關係式產生 16 種組合：(5)和(9)、(5)和(10)、(5)和(11)、(5)和(12)、(6)和(9)、(6)和(10)、(6)和(11)、(6)和(12)、(7)和(9)、(7)和(10)、(7)和(11)、(7)和(12)以及(8)和(9)、(8)和(10)、(8)和(11)、(8)和(12)。每種組合可分成 18 種情形（①,②,③,④各有 4 種；⑤有 2 種）作迭代運算，產生 288 組聯立方程式。再求解這 288 組聯立方程式。

結果：無法得到勾股數迭代公式。

(六) $(4+m^2)$ 研究—由一組 “ $\times 4$ ” 關係式和一組 “ $\times m^2$ ” 關係式進行迭代運算如同 $(1+m^2)$ 研究，這裡只討論 m 是質數的情形，由一組 “ $\times 4$ ” 關係式 $2 \times 4A'B' = (2C')^2$ ，和一組 “ $\times m^2$ ” 關係式 $2 \times m^2 AB = (mC)^2$ 作迭代運算，分成五種情形：

①先假設： $4A' = m^2 B, B' = A$ ，則 $2C' = mC$ ，最後再求解聯立方程式 $\begin{cases} 4A' = m^2 B \\ B' = A \\ 2C' = mC \end{cases}$ ；②先假

設： $A' = m^2 B, 4B' = A$ ，則 $2C' = mC$ ，最後再求解聯立方程式 $\begin{cases} A' = m^2 B \\ 4B' = A \\ 2C' = mC \end{cases}$ ；③先假設：

$2A' = m^2 B, 2B' = A$ ，則 $2C' = mC$ ，最後再求解聯立方程式： $\begin{cases} 2A' = m^2 B \\ 2B' = A \\ 2C' = mC \end{cases}$ ；④先假設：

$A' = mB, 4B' = mA$ ，則 $2C' = mC$ ，最後再求解聯立方程式 $\begin{cases} A' = mB \\ 4B' = mA \\ 2C' = mC \end{cases}$ ；⑤先假設：

$2A' = mB, 2B' = mA$ ，則 $2C' = mC$ ，最後再求解聯立方程式： $\begin{cases} 2A' = mB \\ 2B' = mA \\ 2C' = mC \end{cases}$ 。由 “ $\times 4$ ” 關係

式(5)、(6)、(7)和(8)取其中一組關係式，以及 “ $\times m^2$ ” 關係式(13)、(14)、(15)和(16)取其中一組關係式，再由這兩組關係式產生 16 種組合：(5)和(13)、(5)和(14)、(5)和(15)、(5)和(16)、(6)和(13)、(6)和(14)、(6)和(15)、(6)和(16)、(7)和(13)、(7)和(14)、(7)和(15)、(7)和(16)以及(8)和(13)、(8)和(14)、(8)和(15)、(8)和(16)。每種組合可分成 18 種情形（①,②,③,④各有 4 種；⑤有 2 種）作迭代運算，產生 288 組聯立方程式再求解這 288 組聯立方程式。

結果：無法得到勾股數迭代公式。

(七) $(9+m^2)$ 研究—由一組 “ $\times 9$ ” 關係式和一組 “ $\times m^2$ ” 關係式進行迭代運算如同 $(1+m^2)$ 研究，這裡只討論 m 是質數的情形，由一組 “ $\times 9$ ” 關係式 $2 \times 9A'B' = (3C')^2$ ，和一組 “ $\times m^2$ ” 關係式 $2 \times m^2 AB = (mC)^2$ 作迭代運算，分成五種情形：

①先假設： $9A' = m^2 B, B' = A$ ，則 $3C' = mC$ ，最後再求解聯立方程式 $\begin{cases} 9A' = m^2 B \\ B' = A \\ 3C' = mC \end{cases}$ ；②先假

設： $A' = m^2 B, 9B' = A$, 則 $3C' = mC$ ，最後再求解聯立方程式 $\begin{cases} A' = m^2 B \\ 9B' = A \\ 3C' = mC \end{cases}$ ；③先假設：

$3A' = m^2 B, 3B' = A$, 則 $3C' = mC$ ，最後再求解聯立方程式： $\begin{cases} 3A' = m^2 B \\ 3B' = A \\ 3C' = mC \end{cases}$ ；④先假設：

$A' = mB, 9B' = mA$, 則 $3C' = mC$ ，最後再求解聯立方程式 $\begin{cases} A' = mB \\ 9B' = mA \\ 2C' = mC \end{cases}$ ；⑤先假設：

$3A' = mB, 3B' = mA$, 則 $3C' = mC$ ，最後再求解聯立方程式： $\begin{cases} 3A' = mB \\ 3B' = mA \\ 3C' = mC \end{cases}$ 。由“ $\times 9$ ”關係

式(9)、(10)、(11)和(12)取其中一組關係式，以及“ $\times m^2$ ”關係式(13)、(14)、(15)和(16)中取其中一組關係式，再由這兩組關係式產生 **16** 種組合：(9)和(13)、(9)和(14)、(9)和(15)、(9)和(16)、(10)和(13)、(10)和(14)、(10)和(15)、(10)和(16)、(11)和(13)、(11)和(14)、(11)和(15)、(11)和(16)以及(12)和(13)、(12)和(14)、(12)和(15)、(12)和(16)。每種組合可分成 **18** 種情形（①,②,③,④各有 4 種；⑤有 2 種）作迭代運算，產生 **288** 組聯立方程式再求解這 **288** 組聯立方程式。

結果：無法得到勾股數迭代公式。

(八) $(n^2 + m^2)$ 研究—由一組“ $\times n^2$ ”關係式和一組“ $\times m^2$ ”關係式進行迭代運算如同 $(1 + m^2)$ 研究，這裡只討論 m, n 是質數的情形，由一組“ $\times n^2$ ”關係式 $2n^2 A' B' = (nC')^2$ ，和一組“ $\times m^2$ ”關係式 $2 \times 9AB = (mC)^2$ 作迭代運算，分成五種情形：

①先假設： $n^2 A' = m^2 B, B' = A$, 則 $nC' = mC$ ，最後再求解聯立方程式 $\begin{cases} n^2 A' = m^2 B \\ B' = A \\ 2C' = 3C \end{cases}$ ；②先

假設： $A' = m^2 B, n^2 B' = A$, 則 $nC' = mC$ ，最後再求解聯立方程式 $\begin{cases} A' = m^2 B \\ n^2 B' = A \\ 2C' = 3C \end{cases}$ ；③先假設：

$nA' = m^2 B, nB' = A$, 則 $nC' = mC$ ，最後再求解聯立方程式： $\begin{cases} nA' = m^2 B \\ nB' = A \\ nC' = mC \end{cases}$ ；④先假設：

$A' = mB, n^2 B' = mA$, 則 $nC' = mC$ ，最後再求解聯立方程式 $\begin{cases} A' = mB \\ n^2 B' = mA \\ nC' = mC \end{cases}$ ；⑤先假設：

$nA' = mB, nB' = mA$, 則 $nC' = mC$, 最後再求解聯立方程式：
$$\begin{cases} nA' = mB \\ nB' = mA \\ nC' = mC \end{cases}$$
。由“ $\times n^2$ ”勾股

數關係式(17)、(18)、(19)和(20)取其中一組關係式，以及“ $\times m^2$ ”勾股數關係式(13)、(14)、(15)和(16)取其中一組關係式，再由這兩組關係式產生 **16** 種組合：(17)和(13)、(17)和(14)、(17)和(15)、(17)和(16)、(18)和(13)、(18)和(14)、(18)和(15)、(18)和(16)、(19)和(13)、(19)和(14)、(19)和(15)、(19)和(16)以及(20)和(13)、(20)和(14)、(20)和(15)、(20)和(16)。每種組合可分成 **18** 種情形（①,②,③,④各有 4 種；⑤有 2 種）作迭代運算，產生 **288** 組聯立方程式。再求解這 **288** 組聯立方程式。

結果：無法得到勾股數迭代公式。

伍、研究結果

一、劉徽以兩種「勾股形」得到勾股數關係式之本質與方法

劉徽由「勾股形」取得邊長為 $(a+b-c)$ 以及 $(a+b+c)$ 的兩種正方形，還有長寬分別為 $(c-a)$ 和 $(c-b)$ 以及 $(c+a)$ 和 $(c+b)$ 的兩種矩形，然後探討其面積關係，得到兩種不同的勾股數關係式。

二、劉彝程得到勾股數迭代公式之本質與方法

由劉徽兩組不同的基本關係式
$$\begin{cases} 2A'B' = C'^2 \\ 2AB = C^2 \end{cases}$$
作迭代運算，先假設： $A' = B, B' = A$ ，則 $C' = C$ ，最後再求解聯立方程式
$$\begin{cases} A' = B \\ B' = A \\ C' = C \end{cases}$$
，得到勾股數迭代公式。

三、存在另外兩個相似的劉彝程迭代公式

除了原本的劉彝程迭代公式，如同貝格倫和普萊斯各有三個相似的矩陣公式，存在另外兩個相似的劉彝程迭代公式。

四、存在不同的「勾股形」得到不同的勾股數關係式

我由不同的「勾股形」找到邊長為 $(-a+b+c)$ 以及 $(a-b+c)$ 的兩種正方形，還有長寬分別為 $(c-a)$ 和 $(c+b)$ 以及 $(c+a)$ 和 $(c-b)$ 的兩種矩形，然後探討其面積關係，得到兩種不同的勾股數關係式。

五、 延伸產生更多的勾股數關係式

將基本關係式等號兩邊的式子同乘以大於 1 的平方數產生十六組的關係式。

六、 利用不同的勾股數關係式作迭代運算，得到不同的勾股數迭代公式

由不同的勾股數關係式作迭代運算可以發現（1+1）研究找到 **6 個** 矩陣迭代公式，（1+4）和（1+9）研究各找到 **24 個** 矩陣迭代公式，以及（1+ m^2 ）研究找到 **24 個** 一般矩陣迭代公式，所以本研究總共找到 **78 個** 公式。然後我將這 **78 個** 公式中具有相似矩陣的公式歸為同一類，可以得到以下的結果：

（一）（1+1）研究

6 個 矩陣公式可以分成 **2 類** 公式(表八)，分別是第 A 和第 B 類。第 A 類：**1.2—①**，**1.1—①**，**1.3—①**；第 B 類：**1.2—②**，**1.1—②**，**1.3—②**。因為第 A 類公式中的 **1.1—①** 公式就是劉彝程的公式，所以第 A 類公式中的 **1.2—①** 和 **1.3—①** 就是另外 **2 個** 劉彝程的公式。第 B 類公式就是貝格倫的 **3 個** 公式。

表八

類別	公式
A	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
B	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

（二）（1+4）研究

24 個 矩陣公式可以分成 **8 類** 公式(表九)，分別是第 C 到第 J 類。第 C 類：**2.1—①**，**2.8—①**，**2.10—①**；第 D 類：**2.1—②**，**2.5—①**，**2.7—①**；第 E 類：**2.8—②**，**2.1—③**，**2.9—①**；第 F 類：**2.5—②**，**2.1—④**，**2.6—①**；第 G 類：**2.3—①**，**2.2—①**，**2.4—①**；第 H 類：**2.3—②**，**2.2—②**，**2.4—②**；第 I 類：**2.3—③**，**2.2—③**，**2.4—③**；第 J 類：**2.3—④**，**2.2—④**，**2.4—④**。第 C 類公式就是普萊斯 **3 個** 公式。

表九

類別	公式
C	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Q	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 4 \\ -3 & 12 & 12 \\ -4 & 12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 12 & 12 \\ 4 & 12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 3 & -12 & 12 \\ 4 & -12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
R	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 12 & 12 \\ -4 & 3 & 4 \\ -4 & 12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 12 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 12 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

(四)($1+m^2$)研究

24 個矩陣公式可以分成 8 類公式（表十一），分別是第 S 到第 Z 類。

第 S 類：4.1—①，4.8—①，4.10—①；第 T 類：4.1—②，4.5—①，4.7—①；第

U 類：4.8—②，4.1—③，4.9—①；第 V 類：4.5—②，4.1—④，4.6—①；第 W

類：4.3—①，4.2—①，4.4—①；第 X 類：4.3—②，4.2—②，4.4—②；第 Y 類：

4.3—③，4.2—③，4.4—③；第 Z 類：4.3—④，4.2—④，4.4—④。(m 為質數)

表十一

類別	公式 (m 為質數)
S	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m-1 & -(m-1) \\ -(m^2-m) & m & m^2-m \\ -(m^2-m) & m-1 & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m-1 & m-1 \\ m^2-m & -m & m^2-m \\ m^2-m & -(m-1) & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -(m-1) & m-1 \\ m^2-m & m & m^2-m \\ m^2-m & m-1 & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
T	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m^2-m) & m & m^2-m \\ m & m-1 & -(m-1) \\ -(m^2-m) & m-1 & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2-m & -m & m^2-m \\ m & m-1 & m-1 \\ m^2-m & -(m-1) & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2-m & m & m^2-m \\ m & -(m-1) & m-1 \\ m^2-m & m-1 & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
U	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-1 & m & m-1 \\ -m & m^2-m & m^2-m \\ -(m-1) & m^2-m & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-1 & m & -(m-1) \\ m & -(m^2-m) & m^2-m \\ m-1 & -(m^2-m) & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m-1) & m & m-1 \\ m & m^2-m & m^2-m \\ m-1 & m^2-m & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
V	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & m^2-m & m^2-m \\ m-1 & m & m-1 \\ -(m-1) & m^2-m & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -(m^2-m) & m^2-m \\ m-1 & m & -(m-1) \\ m-1 & -(m^2-m) & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$

	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m^2-m & m^2-m \\ -(m-1) & m & m-1 \\ m-1 & m^2-m & m^2-m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
W	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & m+1 & m+1 \\ -(m^2+m) & m & m^2+m \\ -(m^2+m) & m+1 & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m+1 & m+1 \\ m^2+m & m & m^2+m \\ m^2+m & m+1 & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -(m+1) & m+1 \\ m^2+m & -m & m^2+m \\ m^2+m & -(m+1) & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
X	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m^2+m) & m & m^2+m \\ -m & m+1 & m+1 \\ -(m^2+m) & m+1 & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2+m & m & m^2+m \\ m & m+1 & m+1 \\ m^2+m & m+1 & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2+m & -m & m^2+m \\ m & -(m+1) & m+1 \\ m^2+m & -(m+1) & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
Y	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m+1) & m & m+1 \\ -m & m^2+m & m^2+m \\ -(m+1) & m^2+m & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+1 & m & m+1 \\ m & m^2+m & m^2+m \\ m+1 & m^2+m & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+1 & -m & m+1 \\ m & -(m^2+m) & m^2+m \\ m+1 & -(m^2+m) & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
Z	$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & m^2+m & m^2+m \\ -(m+1) & m & m+1 \\ -(m+1) & m^2+m & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m^2+m & m^2+m \\ m+1 & m & m+1 \\ m+1 & m^2+m & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -(m^2+m) & m^2+m \\ m+1 & -m & m+1 \\ m+1 & -(m^2+m) & m^2+m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

(五) $(4+9)$ 研究、 $(4+m^2)$ 研究、 $(9+m^2)$ 研究以及 (n^2+m^2) 研究

無法得到勾股數迭代公式。

陸、 討論

- 一、 劉徽以『勾股形』得到引理一和引理二，我也以『勾股形』得到引理三和引理四，從這四組關係式我產生了劉彝程和貝格倫的迭代公式。接著，我再將這四組關係式的等號兩邊同乘以大於 1 的平方數，不僅產生普萊斯的公式，更得到一般的勾股數矩陣迭代公式。

- 二、我以不同的勾股數關係式作迭代運算，產生聯立方程式，並不是所有的聯立方程式都可得到矩陣公式。將所有得到的矩陣公式具有相似矩陣的公式歸為同一類，則每一類都有三組公式（表十二）。

表十二

研究	聯立方程式	公式	類別
$(1 + 1)$	12	6	2
$(1 + 4)$	96	24	8
$(1 + 9)$	96	24	8
$(1 + m^2)$	96	24	8

- 三、以矩陣的元素之性質符號來比較我所得公式，那麼 78 個公式有 15 種形式的矩陣，26 類公式有 5 種形式的矩陣（表十三）。

表十三

種類	迭代公式 a, b, c 的性質符號			迭代公式類別
一	$\begin{bmatrix} + & + & - \\ - & + & + \\ - & + & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & + & + \\ + & - & + \\ + & - & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & - & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{bmatrix}$	C,K,S
二	$\begin{bmatrix} - & + & + \\ + & + & - \\ - & + & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & - & + \\ + & + & + \\ + & - & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & + & + \\ + & - & + \\ + & + & + \end{bmatrix}$	D,L,T
三	$\begin{bmatrix} + & + & + \\ - & + & + \\ - & + & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & + & - \\ + & - & + \\ + & - & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{bmatrix}$	E,M,U
四	$\begin{bmatrix} - & + & + \\ + & + & + \\ - & + & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & - & + \\ + & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & + & + \\ - & + & + \\ + & + & + \end{bmatrix}$	F,N,V
五	$\begin{bmatrix} - & + & + \\ - & + & + \\ - & + & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & - & + \\ + & - & + \\ + & - & + \end{bmatrix}$	A,B,G,H,I,J,O,P,Q,R,W,X,Y,Z

- 四、以往的勾股數的生成公式往往著重於產生單一組勾股數，直到劉彝程最先由劉徽的想法提出一組迭代公式，後來貝格倫和普萊斯更提出各三個相似矩陣的迭代公式，改變產生勾股數的方法，讓後人可以由一組勾股數產生連續組勾股數。

柒、 結論

本研究證明我的猜想：「由『勾股形』可得到三個相似的矩陣來生成『勾股數迭

代公式』」。整個探索的過程呈現出數學中最美妙的規律性，以精簡的方式詮釋已知的數學知識，推演出新的勾股數迭代公式。

- 一、 劉徽由「勾股形」取得兩種不同邊長的正方形，還有兩種不同長寬的矩形，然後探討其面積的關係，得到兩種不同的勾股數關係式。
- 二、 劉彝程由劉徽兩組不同的基本關係式作迭代運算，得到勾股數關係式。
- 三、 除了原本的劉彝程公式，存在另外兩個相似的劉彝程迭代公式，就如同貝格倫和普萊斯各有三個相似的矩陣公式一樣。
- 四、 我由不同的「勾股形」找到兩種不同邊長的正方形，還有兩種不同長寬的矩形，然後探討其面積的關係，得到兩種不同的勾股數關係式。
- 五、 我將基本關係式的等號兩邊式子同乘以大於 1 的平方數，產生十六組的關係式。
- 六、 本研所得到的矩陣公式有 78 個，將具有相似矩陣的公式劃分成同一類，共可劃分成 26 類公式，每類都有三個矩陣公式。其中， $(1+1)$ 研究有兩類公式， $(1+4)$ 研究、 $(1+9)$ 研究以及 $(1+m^2)$ 研究各有八類公式。
 - (一) $(1+1)$ 研究：由勾股數關係式(1)至(4)找到 6 個矩陣迭代公式，分成兩類：
 1. 第 A 類公式有劉彝程原本的公式，以及另外兩個相似的矩陣公式。
 2. 第 B 類公式也就是貝格倫公式。
 - (二) $(1+4)$ 研究：由勾股數關係式(1)至(8)找到 24 個矩陣迭代公式，分成八類：
 1. 第 C 類公式也就是普萊斯公式。
 2. 從第 D 至 J 類公式全都有三個公式，同一類公式具有相似的矩陣。
 - (三) 在 $(1+9)$ 研究中，我利用勾股數關係式(1)至(4)以及勾股數關係式(9)至(12)找到 24 個勾股數矩陣迭代公式，分成八類，從第 K 至 R 類公式全都有三個公式，同一類公式具有相似的矩陣。
 - (四) 在 $(1+m^2)$ 研究中，我利用勾股數關係式(1)至(4)以及勾股數關係式(13)至(16)找到 24 個一般的勾股數矩陣迭代公式，分成八類，從第 S 至 Z 類公式全都有三個公式，同一類公式具有相似的矩陣。

捌、 參考資料

- 一、 黃文達 (2009)。勾股三元數組。台灣數學博物館。2009 年 9 月 7 日，取自：
<http://museum.math.ntnu.edu.tw/view.php?menuID=55>
- 二、 蔡聰明 (2010)。數學拾貝。台北市：三民。
- 三、 Paul Yiu (1996)。《九章算術》傳統的連續數勾股形構作。香港數學教育學會《數學教育》， 3， 取自：
http://www.hkame.org.hk/html/modules/tinyd2/content/Edumath/v3/v3_26to32.pdf
- 四、 From " Wikipedia, the free encyclopedia ": Formulas for generating Pythagorean triples. (2 November 2013). Retrieved 2 November 2013, from
http://en.wikipedia.org/wiki/Formulas_for_generating_Pythagorean_triples
- 五、 Price, H. Lee (2008). "The Pythagorean Tree: A New Species".arXiv:0809.4324
[math.HO], from:
<http://arxiv.org/pdf/0809.4324.pdf>

【評語】 030412

有趣的作品。透過對劉徽導出勾股數性質的想法，作者聰明的給出了兩個關於勾股數的新的關係式。由此，結合劉彝程給出的勾股數迭代關係式的作法，作者給出了新的勾股數的迭代關係式。藉由簡單的概念的延伸，將前人的結果進一步的擴展到更廣的形式，很不錯的作品。關於勾股數的一般化表示其實是廣為人知的結果。作者透過新的做法得出的種種迭代關係所能產生的勾股數其實是有侷限的。那些型態的勾股數可以由此方式生成會是一個有趣的問題，如果能增加這一部份的討論會更好。