中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030411

危險的距離－死神的區域內輪差

學校名稱：桃園縣立楊梅國民中學

作者：	指導老師：
國三 張毓文	劉國輝
國三 黃紫涵	張玉美
國三 呂明軒	

關鍵詞：內輪差、軸距 a、轉向角 θ

危險的距離-死神的區域內輪差

摘　要

隨著時代進步、交通便利，常在電視、網路與報章雜誌上，看見許多發生車禍的新聞，無論行走或騎機車，尤其在十字路口等紅綠燈時，明明有段距離，會不經意的被旁邊轉彎的車輛擦撞到，當汽車在轉彎時，前內輪和後內輪所經過的輪跡，也就是內側前後二輪輪跡的幅度，叫做內輪差，我們在此探討，什麼是內輪差及那些因素會影響內輪差，到底與大型車輛的距離應保持多遠，才能避免擦撞和不必要的交通事故。

壹、研 究 動 機

常會耳聞許多車禍的新聞，有些是因為走路或行車時不注意或是超速，看到這些新聞會覺得很難過，但也讓我腦中浮現了很多的問號，明明站在人行道上等過馬路，為何站在那裡會被撞到？還有汽車在轉彎時，前輪跟後輪走的軌跡好像不一樣？

貳、研 究 目 的

為了避免這種事情再次發生，我們應該站在哪裡和必須距離轉彎的車輛多遠，才不會成為車下亡魂呢？很多看似安全的事，其中，卻隱藏著許多危險！而我覺得「內輪差」，就是一個相當值得大家去了解的東西！

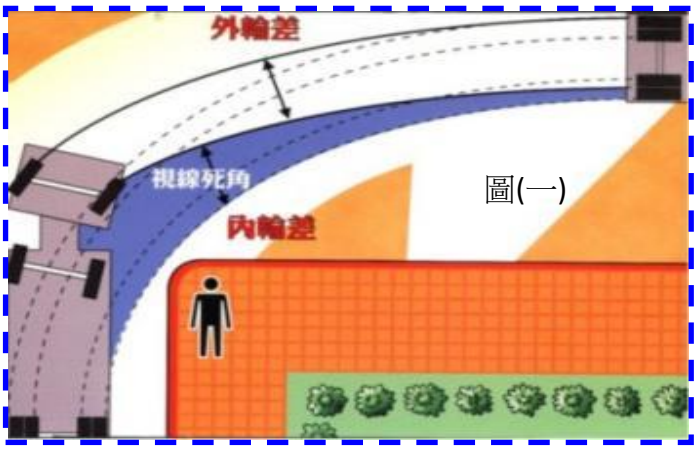
叁、研 究 設 備 及 器 材

電 腦 、 印表機、影 印 機、照相機

肆、研 究 過 程 或 方 法

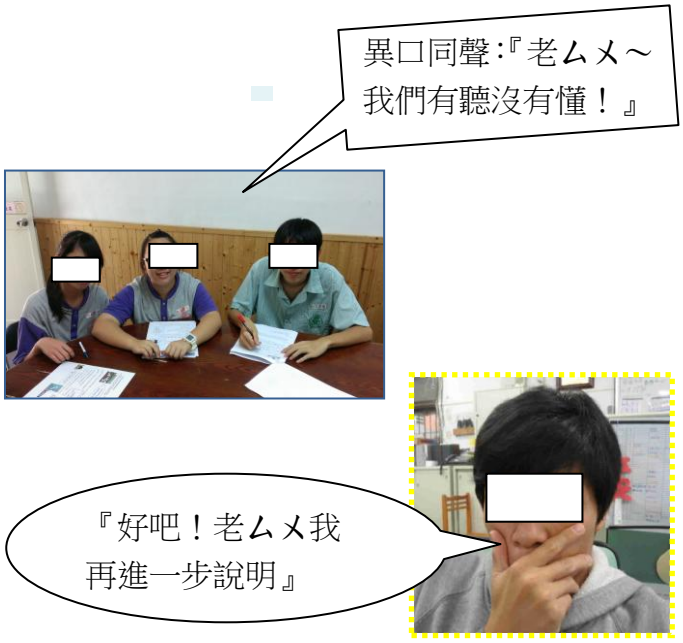
一、內輪差介紹

定義：如圖（一），當汽車在轉彎時，因前內輪和後內輪所經過的輪跡不同，故形成一視覺的死角區域，而『內側兩輪旋轉半徑的差』。

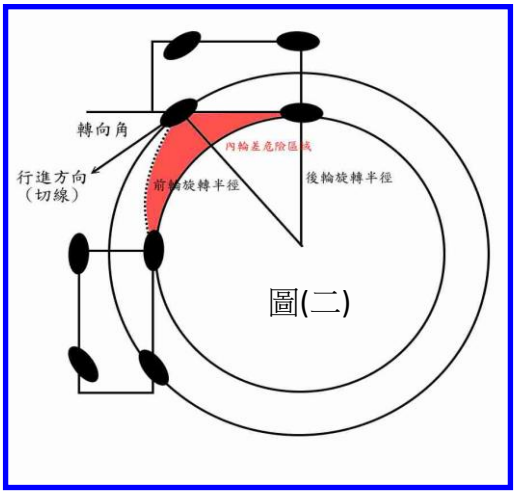


圖(一)

至於，為什麼會有內輪差呢? 這是因為一般車輛皆以操作方向盤使前輪的輪胎轉向發揮轉彎機能，低速旋轉時之行車軌跡，因為後輪不轉向，導致前、後輪之旋轉半徑不同，而形成內輪差，其旋轉中心差不多在後軸的延長線上。



以圖（二）為例，假設一以『逆時針旋轉』且『轉向角固定』之車輛為例，此時車輛會之內側前輪及後輪之行駛軌跡為一同心圓，其中『前輪旋轉半徑 ＞ 後輪旋轉半徑』，故定義「內輪差為內側前、後輪旋轉半徑之差」，而紅色區域稱為「內輪差危險區域」。(附錄二)

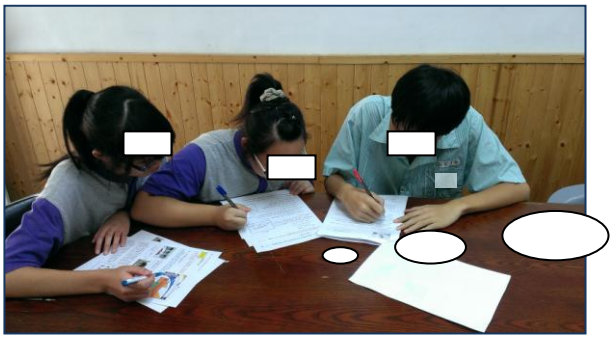


圖(二)

常見之大型車的內輪差比小型車的內輪差大，尤其車型愈大，像大貨車之類，其內輪差更大，因此愈大型的車輛轉彎時所產生的內輪差往往會超出其他道路使用者的預期，以至於常發生交通事故。

二、有哪些因素會影響內輪差呢?

讀到這裡，所有的讀者相信已經對內輪差有相當的認識了。但是，各位同學為了發揮科學家追根究底的精神，於是同時提出了一個疑問：



到底有哪些因素會影響內輪差呢?

在前一個章節中，我們已經介紹過何謂內輪差了。首先，我們將圖(二)簡化為圖（三）以方便討論。

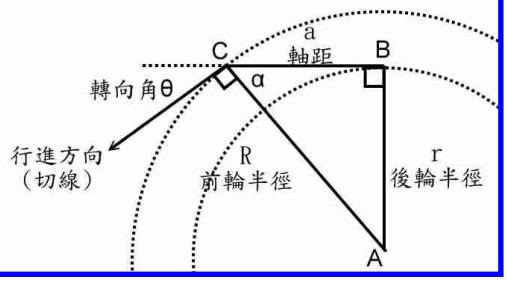
由圖（三）可以看出，當車子以逆時針方向旋轉為例，假設：

軸距(即前後輪之距離)為 a、車子的轉向角為θ

前輪之旋轉半徑為 R、後輪之旋轉半徑為 r。

在 ΔABC 中，其中 $\angle A+\alpha=\theta+\alpha=90^{\circ}$

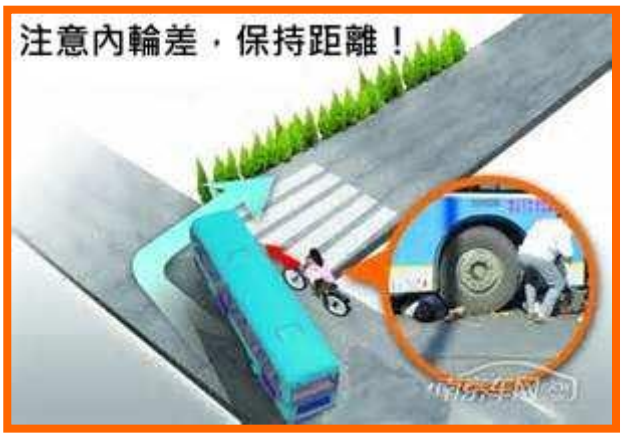
圖（三）



故 $\angle A=\theta$，且 ΔABC 之形成是根據轉向角θ 及軸距 a 而決定的。

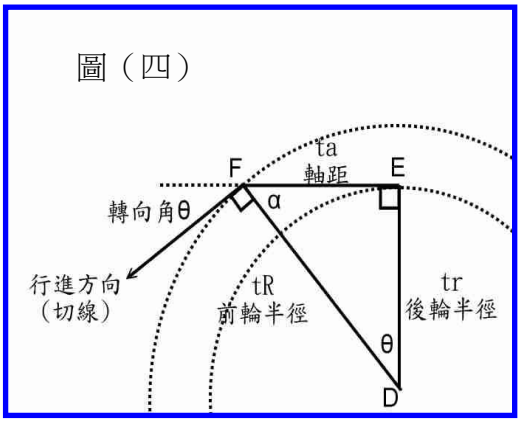
可見，『內輪差之大小(R-r)與轉向角θ 以及軸距 a 有直接的關係』。

接下來，我們來討論，軸距 a 以及轉向角 θ 到底對內輪差有什麼影響？



三、討論一：假設將軸距 a 放大為原來的 t 倍（即軸距變為$t \times a = ta$），轉向角θ 不變。

同學還記不記得？在九年級上學期我們所學過的『相似三角形』單元中曾學過，「若兩三角形相似，則兩三角形之對應邊長成比例，且對應角相等」。



圖（四）

在圖（三）、（四）中可得知，

在ΔABC與ΔDEF中，

$\because \angle B = \angle E = 90^\circ$，$\angle D = \angle A = \theta$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$（AA 相似）

所以，當軸距放大 t 倍（ta）時，前輪旋轉半徑（R）及後輪旋轉半徑（r）皆會等比例放大 t 倍為 tR、tr。

換言之，內輪差（R-r）也會變成原來之 t 倍[t(R-r)]。也就是說，『當車子的軸距愈長（車身長度愈長），則內輪差之危險區域將愈大』。

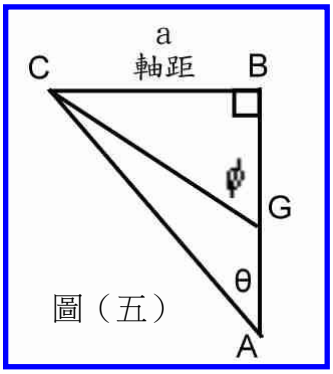
四、討論二：假設軸距 a 不變，轉向角為ϕ，其中$\phi > \theta$。

由圖（五）可知，當轉向角為ϕ且軸距仍為 a 時，所形成之三角形為ΔGBC。

原來之內輪差為$\overline{AC} - \overline{AB}$，新的內輪差為$\overline{GC} - \overline{GB}$，根據八年級上學期所學之勾股定理得知：

在ΔABC中，$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = a^2$、 而$\Delta GBC$中，$\overline{GC}^2 - \overline{GB}^2 = a^2$

所以，$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{GC}^2 - \overline{GB}^2$，利用平方差公式展開得：



圖（五）

$$(\overline{AC} + \overline{AB})(\overline{AC} - \overline{AB}) = (\overline{GC} + \overline{GB})(\overline{GC} - \overline{GB})$$

$$\because (\overline{AC} + \overline{AB}) > (\overline{GC} + \overline{GB})$$

$$\therefore (\overline{AC} - \overline{AB}) < (\overline{GC} - \overline{GB})$$

也就是說，『當轉向角變大且軸距不變時，則內輪差將隨轉向角變大而變大』。

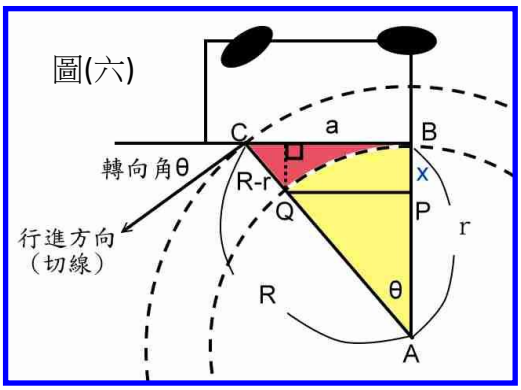
（PS.本題也可以使用三角形兩邊和大於第三邊來證明！大家可自行試試看！見附錄一）

五、討論三：那每次看到車轉彎的時候，到底應該保持多遠的距離才算是安全呢？

由右圖可知，當車輛轉彎時，太過靠近車輛時有可能因為因進入了內輪差危險區域而發生事故。所以，到底當我們看到車輛轉彎時應該保持多遠的距離方能安全呢？

國輝老師～這樣算不算為科學犧牲呢?

老ㄙㄨ：「好問題!讓我們來看看轉彎的示意圖（六）吧！」



如圖(六)所示，紅色區域為內輪差危險區域，黃色區域為安全區，其中 Q 點為距離車輛之理論安全位置，也就是說，當行人與動車之垂直距離> $\overline{BP}$ 時，理論上能確保行人之安全。(附錄三)

那麼安全距離 $\overline{BP}$ 怎麼計算

這年頭錢難賺啊~待我細細說來!

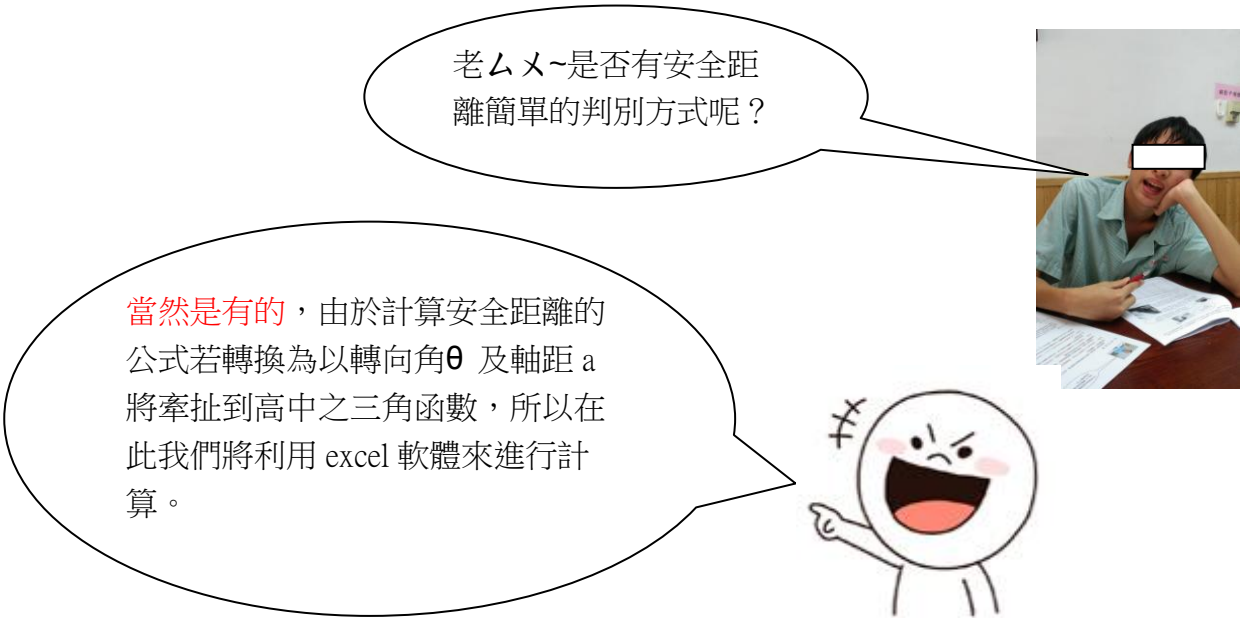
圖(六)中，假設 $\overline{BP}=x$，在 ΔABC 中，$\overline{QP}//\overline{BC}$，根據九年級下學期所學的『平行線截等比例線段性質』可得：

$r:x=R:R-r$，根據比例式中，『內項積等於外項積』的原理可知：

$$xR=r(R-r)$$

$$x=\frac{r(R-r)}{R}$$

所以呢，安全距離基本上與 R（前輪旋轉半徑）、r（後輪旋轉半徑）有關，由前面之討論一及二得知，R、r 則根據轉向角θ 及軸距 a 相關，所以我們仍能夠判定『安全距離與轉向角θ 及軸距 a 決定』之結論。



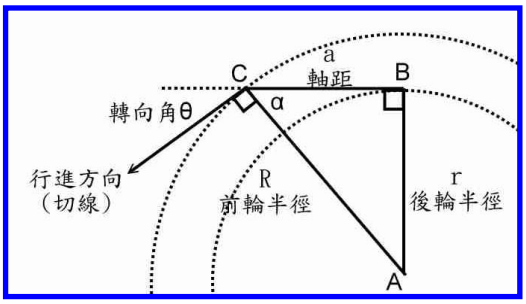
方法 1：

由右圖可知，$\sin\theta=\frac{a}{R}$、$\tan\theta=\frac{a}{r}$，所以

$$R=\frac{a}{\sin\theta}、r=\frac{a}{\tan\theta}、$$

$$R-r=(\frac{a}{\sin\theta}-\frac{a}{\tan\theta})、$$

$$x=(\frac{a}{\sin\theta}-\frac{a}{\tan\theta})\times\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$$



為方便計算，假設以軸距 1 單位長為例，我們計算各種不同轉向角的情況下，所需之安全距離的長度。

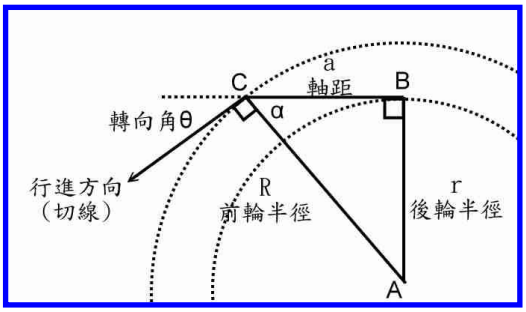
圖(七)

由下表可發現，安全距離 x 隨轉向角θ 增大而增加，而轉向角約在 50°時，安全距離達到最大值，約為 0.2997 單位長。若以實車為例，圖(七)中的車子最大轉向角約為 37°，故安全距離大約保持 0.2672 單位長即可。

軸距 a	轉向角θ	前輪半徑 R	後輪半徑 r	內輪差 R-r	安全距離 x
1	10.00	5.76	5.67	0.09	0.0862
1	20.00	2.92	2.75	0.18	0.1657
1	30.00	2.00	1.73	0.27	0.2321
1	37.00	1.66	1.33	0.33	0.2672
1	40.00	1.56	1.19	0.36	0.2788
1	45.00	1.41	1.00	0.41	0.2929
1	50.00	1.31	0.84	0.47	0.2997
1	60.00	1.15	0.58	0.58	0.2887

方法 2：

當然，我們也可以尋求不同的求解方式：



假設 $t=\frac{r}{R}$，其中 $0<t<1$

$$r^2=R^2-a^2=\frac{r^2}{t^2}-a^2$$

$$\Rightarrow r^2(1-\frac{1}{t^2})=-a^2 \Rightarrow r^2=\frac{-a^2}{1-\frac{1}{t^2}} \Rightarrow r^2=\frac{-a^2}{\frac{t^2-1}{t^2}}$$

$$\Rightarrow r^2=\frac{(at)^2}{1-t^2} \Rightarrow r=\pm\frac{at}{\sqrt{1-t^2}}\text{(負不合)}$$

$$\text{安全距離}x(t,a)=r\times\frac{R-r}{R}=r(1-t)=\frac{at(1-t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

亦即，安全距離 x 是 t 與 a 之函數，在給定 a=1(即軸距為 1)及不同的 t 值（$0<t<1$）下，試算應保持之安全距離 x 如下表：

t	安全距離 x	轉向角	t	安全距離 x	轉向角	t	安全距離 x	轉向角
0.99	0.0702	8.11	0.66	0.2987	48.70	0.33	0.2342	70.73
0.98	0.0985	11.48	0.65	0.2994	49.46	0.32	0.2297	71.34
0.97	0.1197	14.07	0.64	0.2999	50.21	0.31	0.2250	71.94
0.96	0.1371	16.26	0.63	0.3002	50.95	0.30	0.2201	72.54
0.95	0.1521	18.19	0.62	0.3003	51.68	0.29	0.2151	73.14
0.94	0.1653	19.95	0.61	0.3002	52.41	0.28	0.2100	73.74
0.93	0.1771	21.57	0.60	0.3000	53.13	0.27	0.2047	74.34
0.92	0.1878	23.07	0.59	0.2996	53.84	0.26	0.1993	74.93
0.91	0.1975	24.49	0.58	0.2990	54.55	0.25	0.1936	75.52
0.90	0.2065	25.84	0.57	0.2983	55.25	0.24	0.1879	76.11
0.89	0.2147	27.13	0.56	0.2974	55.94	0.23	0.1820	76.70
0.88	0.2223	28.36	0.55	0.2963	56.63	0.22	0.1759	77.29
0.87	0.2294	29.54	0.54	0.2951	57.32	0.21	0.1697	77.88
0.86	0.2359	30.68	0.53	0.2938	57.99	0.20	0.1633	78.46
0.85	0.2420	31.79	0.52	0.2922	58.67	0.19	0.1568	79.05
0.84	0.2477	32.86	0.51	0.2905	59.34	0.18	0.1501	79.63
0.83	0.2530	33.90	0.50	0.2887	60.00	0.17	0.1432	80.21
0.82	0.2579	34.92	0.49	0.2867	60.66	0.16	0.1362	80.79
0.81	0.2624	35.90	0.48	0.2845	61.31	0.15	0.1290	81.37
0.80	0.2667	36.87	0.47	0.2822	61.97	0.14	0.1216	81.95
0.79	0.2706	37.81	0.46	0.2798	62.61	0.13	0.1141	82.53
0.78	0.2742	38.74	0.45	0.2771	63.26	0.12	0.1064	83.11
0.77	0.2776	39.65	0.44	0.2744	63.90	0.11	0.0985	83.68
0.76	0.2806	40.54	0.43	0.2715	64.53	0.10	0.0905	84.26
0.75	0.2835	41.41	0.42	0.2684	65.17	0.09	0.0822	84.84
0.74	0.2861	42.27	0.41	0.2652	65.80	0.08	0.0738	85.41
0.73	0.2884	43.11	0.40	0.2619	66.42	0.07	0.0653	85.99
0.72	0.2905	43.95	0.39	0.2584	67.05	0.06	0.0565	86.56
0.71	0.2924	44.77	0.38	0.2547	67.67	0.05	0.0476	87.13
0.70	0.2941	45.57	0.37	0.2509	68.28	0.04	0.0384	87.71
0.69	0.2955	46.37	0.36	0.2470	68.90	0.03	0.0291	88.28
0.68	0.2968	47.16	0.35	0.2429	69.51	0.02	0.0196	88.85
0.67	0.2978	47.93	0.34	0.2386	70.12	0.01	0.0099	89.43

由上表可發現，當 t=0.62 時，安全距離 x=0.3003 達到最大，此時之轉向角約為 51.68°。

由以上兩種方法可以得到同樣的結論。即當我們看到車輛轉彎時，必須保持軸長 a 的三分之一以上($\frac{1}{3} > 0.3003$)。為求保險起見，建議之安全距離最好保持為「車身長的三分之一以上」。(∵車身長>軸距長)

舉例：一輛長約 12 公尺的公車轉彎時，請保持$12 \times \frac{1}{3} = 4$公尺以上的安全距離。

吁~原來如此啊(感嘆貌)!
老ㄙㄨ，發覺真理的感覺真
是美妙啊~~~!!!

伍、研 究 結 果

經過前面的一番討論，相信大家對內輪差已經有進一步的了解了吧，那麼，我們就來為內輪差來下一個總結吧!

結論一：內輪差的大小是隨車子的前、後輪軸距而變化。(詳見三、討論一)

也就是車子越長，那麼內輪差之危險區域也愈大。換言之，看到大型車輛如公車、聯結車轉彎時，應保持比小車更長安全距離。

結論二：內輪差的大小是隨轉向角度而變化。(詳見四、討論二)

也就是當看到車子轉彎的角度愈大時，所形成的內輪差之危險區域也愈大，請保持更長之安全距離。

結論三：安全距離須大於車身長的三分之一。(詳見五、討論三、附錄三)

當我們看到車輛轉彎時，切記勿站在車輛的行進路線上，並保持車身長的三分之一以上之安全距離。例如：一輛長約 12 公尺的公車轉彎時，請保持$12 \times \frac{1}{3} = 4$公尺以上的安全距離。

陸、討 論

從現實生活中發現了原來常發生在周圍的交通事故內輪差與我們所學的數學比例式、勾股定理、平方差公式及三角形平行線截等比例性質相關，內輪差的大小與車子前後輪的軸距、轉向角度相關，我們討論了影響的因素，估計和車子的安全距離範圍，經過反覆思惟和討論，從研究過程學到很多東西。

柒、結 論

一、 內輪差的大小是隨車子的前、後輪軸距而變化。

二、 內輪差的大小是隨轉向角度而變化。

三、 3 分之 1 法則：勿站在車輛的行進路線上，安全距離須大於車身長的三分之一。

否則~慘事會發生!!

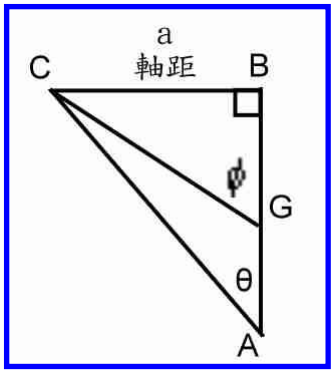
OH!MY GOD!

捌、參 考 資 料 及 其 他(附錄)

一、比例式：內項積等於外項積。(七年級下學期)
二、勾股弦定理：勾^2＋股^2＝弦^2。(八年級上學期)
三、平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。(八年級上學期)
四、三角形中平行線截等比例線段性質。(九年級上學期)
五、相似三角形：若兩三角形相似，則兩三角形之對應邊長成比例，且對應角相等、『三角形的 AA 相似』。(九年級上學期)
六、三角函數：正弦函數、正切函數、反餘弦函數（高中數學第三冊）
七、Office 2007 Excel：正弦、正切函數、反餘弦函數應用、弧度與角度轉換。(指導老師教學)

八、附錄一：利用三角形兩邊和必大於第三邊證明結論二

<已知> ΔABC 為直角三角形，$\phi > \theta$



<試證> $\overline{GC}-\overline{GB}>\overline{AC}-\overline{AB}$

<證明>

在 ΔGCB 中，

$\because$ 三角形兩邊和必大於第三邊

$\therefore \overline{GC}+\overline{AG}>\overline{AC}$

兩邊同減 $\overline{AB}$ 得：

$$\overline{GC}+\overline{AG}-\overline{AB}>\overline{AC}-\overline{AB}$$
$$\Rightarrow \overline{GC}+\overline{AG}-\overline{AG}-\overline{GB}>\overline{AC}-\overline{AB}$$
$$\Rightarrow \overline{GC}-\overline{GB}>\overline{AC}-\overline{AB}$$

故得證。

九、 附錄二：車輛最小迴轉半徑參考資料

將汽車的方向盤轉動到極限，以極低的速度讓汽車進行轉向的圓周運動，此時汽車在轉向時所形成的圓周的半徑就是迴轉半徑。迴轉半徑數據可以使駕駛者知道汽車所須的迴轉空間，這對於經常行駛在狹小巷弄的車輛尤其重要。

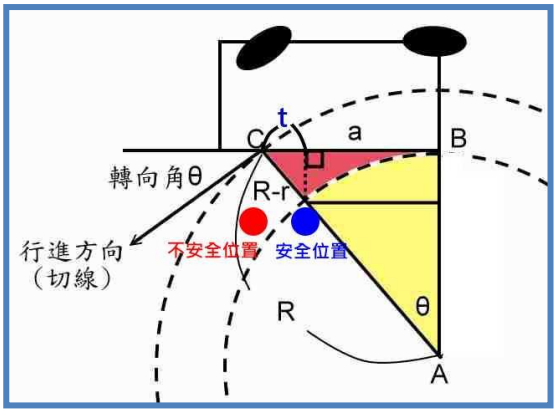
所謂「迴轉半徑」，是指迴轉所畫出之圓的「半徑」，而不是「直徑」。也就是說，當一輛車的迴轉半徑標示為 5.5m 時，其迴轉「直徑」為 11m，表示至少要有 11 公尺的路寬，才能提供該車進行一次完整的迴轉。

資料來源：Toyota 汽車教室

十、 附錄三：除安全距離為車身長的 $\frac{1}{3}$ 之外，行人與車輛間的相對位置還有其他限制嗎？

<討論>

假設 t 為行人與前輪之水平距離，由右圖可知：



$$t : a = R - r : R$$

$$\Rightarrow t = \frac{a(R-r)}{R}$$

在給定 a=1 之條件下，可計算出 t 值如下表：

軸距 a	轉向角 θ	前輪半徑 R	後輪半徑 r	內輪差 R-r	行人與前輪之水平距離 t=(R-r)/R	安全距離 x
1	10.00	5.76	5.67	0.09	0.02	0.0862
1	20.00	2.92	2.75	0.18	0.06	0.1657
1	30.00	2.00	1.73	0.27	0.13	0.2321
1	37.00	1.66	1.33	0.33	0.20	0.2672
1	40.00	1.56	1.19	0.36	0.23	0.2788

亦即，一般車輛之最大轉向角不超過 40°，此時行人與車輛前輪之水平距離應大於軸距之 0.23 單位長。也就是說，行人除了應注意與車輛之垂直距離以外，也應注意不要站得離前輪太近，建議與前輪之水平距離應超過車身長的 $\frac{1}{3}$ 較為安全。

【評語】030411

本作品探討汽車在十字路口轉彎時，內側前後二輪輪跡所形成的內輪差，以及保持安全距離的相關問題，內容相當有趣，而且使用數學方法探討生活中所應注意的事項，非常值得鼓勵，然而，所使用的數學方法尚有可加增的空間。日後或可嘗試應用攝影幾何方法作進一步的研究，以及加入車子的速度等因素。