中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030410

空間螺線的代數分析

學校名稱：私立康乃爾雙語中小學

作者：	指導老師：
國二 許浩鳴	王慧群 劉繕榜

關鍵詞：遞迴關係、阿基米德螺線、等角螺線

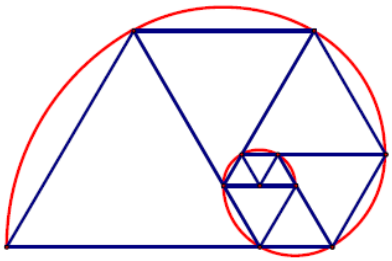
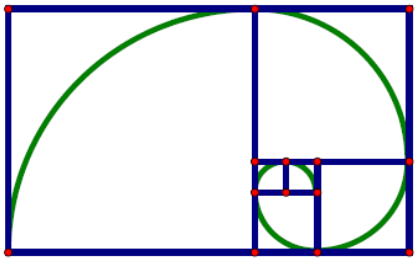
摘要

本研究試著將兩種自然界中存在的完美幾何圖形正四面體和螺線，利用空間代數分析，將其外接的數學特性作深入探討。鑽石是已知自然存在最硬物質，而它的最基本組成分子結構就是正四面體，每四個相鄰的碳原子均構成正四面體[1]，正四面體是柏拉圖立體中唯一一個所有頂點之間的距離都相等的，同時正四面體也是三維空間中使 4 個頂點每兩個頂點間距離相等的唯一方式結構[2]；螺線模式通常自發性地存在自然界當中，而螺線形式可以在拉長一段距離的情況下，仍維持節構的緊緻，在增加表面積的同時兼具一定的強度，螺旋狀型體在自然界普遍存在一定有其特定的數學模式，當正四面體遇上螺線是否能形成完美的數學形式結合？

關鍵詞：遞迴關係、阿基米德螺線、等角螺線

壹、研究動機

在一個偶然機會，我去參觀中華民國第 53 屆中小學科學展覽會，對於其中有一篇作品三角形鋪砌挑戰費氏數列[1]讓我印象深刻，文中經由三角形鋪砌凸多邊形推導出一組數列，進而畫出近似等角螺線(黃金螺線)，我在想這個三角形鋪砌還是在 2D 平面上做探討，而且螺線形狀看起來像是漩渦，應該有機會將此三角形鋪砌推導至 3D 立體空間。

比較名稱	鋪砌三角形	費氏數列
數列	1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12,16,21,28,37,49,…..	1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,……
比值	$\frac{a_n}{a_{n-1}} \approx 1.33$ $\frac{a_n}{a_{n-2}} \approx 1.75$	$\frac{a_n}{a_{n-1}} \approx 1.618$
圖示		

圖一 *文獻 [4] 中表 6 數列與鸚鵡螺黃金比例的關係

後來我找了一些文獻，發現這個數列 1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12,16,21,28,37,49,…..其實就是鼎鼎大名的巴都萬數列 Padovan sequence [5] 此數列以建築師理察•巴都萬命名，他的論文 Dom（1994 年）提及 Hans Van Der Laan 應用銀數在建築方面。1996 年 6 月，艾恩•史都華在《科學美國人》雜誌提到這個數列

Padovan sequence: $a(n) = a(n\text{-}2) + a(n\text{-}3)$ 其中 $a(0)=1$, $a(1)=a(2)=0$

但是繼續找一些巴都萬數列在立體上的螺線的數學文獻卻找不到，我想這一方面相關的數學值得探討。

去年夏天跟著家人到屏東海生館參觀時，看到在地球上已存活數億年的活化石鸚鵡螺，還有許多貝殼都很接近等角螺線的形狀讓我連想到，自古以來大自然界中是否要以螺旋狀的型體才最適合生存? 這當中是否存在著數學的定律? 這些既定的規律是否可以用數學的運算來模擬、佐證,甚至演算出對現代人類的影響? 這當中的關係又是如何? 這些都是引起我想更深入研究的動機。

貳、研究目的

根據義大利數學家帕西奧利所提倡的「黃金比」數學概念跟螺旋狀型體的關係,只要是需要充份利用空間及既定規律性存在的地方，都會有螺旋狀型體出現,然而螺旋狀型體也是使用最少材質卻可以構成最堅固結構的造型。等角螺線、對數螺線或生長螺線是在自然界常見的螺線，鸚鵡螺的貝殼就是一例[6]。

圖二 鸚鵡螺的貝殼[6]

另外， 鑽石是已知自然存在最硬物質，它的最基本組成就是正四面體，而正四面體也是三維中最簡單的多面體，也是目前已知結構強度最強的最簡單的多面體，自然界中很多物質的最小單位都是以正四面體形態存在，如果把立體螺旋套在正四面體會有什麼樣的性質呢 ？再用數學代數概念來更精確鎖定研究主題，我想探討出以下幾個問題：

一、多個正四面體堆疊是否會維持正四面體外型？

二、探討正四面體與正多面體的個數代數關係？

三、探討正四面體與正多面體的體積代數關係？

四、如何將三維阿基米德螺線套入多個正四面體堆疊的大正四面體？

五、如何求出經過正四面體節點的三組精確螺線公式？

六、阿基米德螺線和等角螺線有何差異點？

七、等角螺線是否也能經過正四面體的每個節點？

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Cabri 3D、GeoGebra 3D 動態幾何繪圖板

肆、研究過程及方法

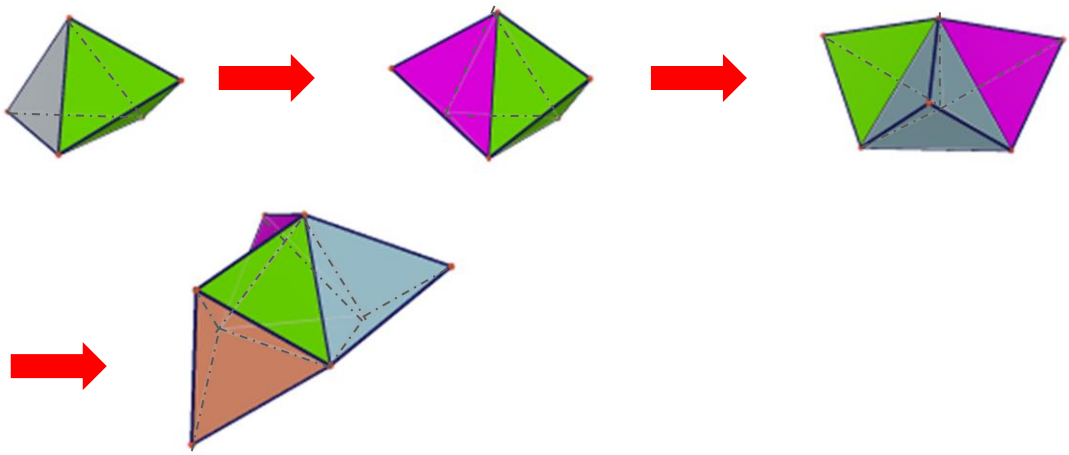
一、多個正四面體堆疊是否會維持正四面體外型?

(一) 先在 Cabri 3D 軟體上用兩個正四面體堆疊

(二) 再堆上第 3 個正四面體

(三) 再堆上第 4 個正四面體

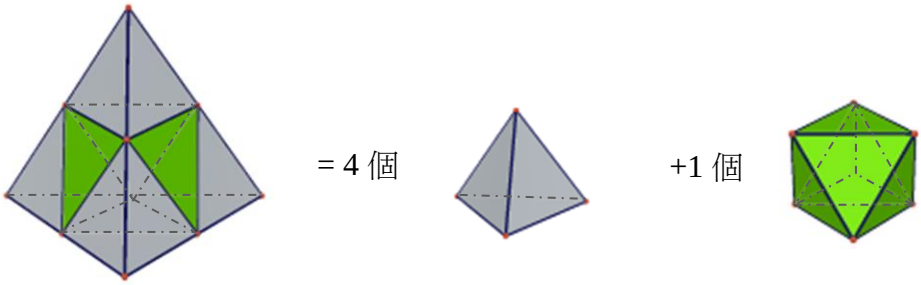
(四) 再堆上第 5 個正四面體



圖三 純粹多個正四面體堆疊

我試著將幾個正四面體順著正四面體外型堆疊，但是無法維持原本正四面體外型，接下來試著加入其他簡單多面體看是否能堆積出正四面體外型的大結構？

二、探討正四面體與正多面體的個數代數關係



圖四 正四面體與正八面體堆疊

(一) 我發現如果用四個正四面體中間夾一個正八面體 (如圖四綠色部分)，剛好可以維持完美的正四面體外型。

(二) 接下來我們探討正四面體與正多面體的個數代數關係。令 n 代表正四面體堆疊的次數，正四面體個數 x，正八面體個數 y，我們可得到如下的關係(如下表 1)：

表一 正四面體個數與正八面體個數之關係歸納

n 值	正四面體個數 x	正八面體個數 y
0	$x=1$	$y=0$
1	$x=4+1=5$ (加上一個外形最大的正四面體)	$y=1$
2	$x=4\times5+1=21$ (加上一個外形最大的正四面體)	$y=4+1=5$
3	$x=4\times21+1=85$ (加上一個外形最大的正四面體)	$y=4\times5+1=21$
4	$x=4\times85+1=341$ (加上一個外形最大的正四面體)	$y=4\times21+1=85$
…	…	…
k	$x_k=4x_{k-1}+1$	$y_k=4y_{k-1}+1$

(三) 接下來我試著找正四面體個數 x 與正八面體個數 y 堆疊的遞迴關係式：

$x_0=1$，$x_k=4x_{k-1}+1$

令 $(x_k-r)=4(x_{k-1}-r)$ r 為常數

$x_k-r=4x_{k-1}-4r$

$x_k=4x_{k-1}-3r$

當 $x_0=1$時， $r=-\frac{1}{3}$

將 r 代入原式得 $(x_n+\frac{1}{3})=4(x_{n-1}+\frac{1}{3})$

當 k=1 $(x_1+\frac{1}{3})=4(x_0+\frac{1}{3})$

當 k =2 $(x_2+\frac{1}{3})=4(x_1+\frac{1}{3})$

當 k =3 $(x_3+\frac{1}{3})=4(x_2+\frac{1}{3})$

…… ……..

當 k =n $(x_n+\frac{1}{3})=4(x_{n-1}+\frac{1}{3})$

兩邊全部相乘:

$$\cancel{(x_1+\frac{1}{3})}\cancel{(x_2+\frac{1}{3})}\cancel{(x_3+\frac{1}{3})}\ldots\ldots=4(x_0+\frac{1}{3})\times 4\cancel{(x_1+\frac{1}{3})}\times 4\cancel{(x_2+\frac{1}{3})}\ldots\ldots$$

並消去重複項可得：

$$(x_n+\frac{1}{3})=4^n(x_0+\frac{1}{3})$$

$$(x_n+\frac{1}{3})=4^n(\frac{4}{3})$$

$$(x_n+\frac{1}{3})=4^{n+1}\times\frac{1}{3}$$

$$x_n=4^{n+1}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$$

$$x_n=\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)\qquad n\geq 0\qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$y_n=x_{n-1}=\frac{1}{3}(4^n-1)\qquad n\geq 0\qquad n\in\mathbb{Z}$$

(四)接下來我們探討正四面體與正八面體的體積代數關係:

令 x 代表正四面體體積，y 代表正八面體體積，a 為正四面體的邊長，n 為堆疊次數，當堆疊次數隨 n 增加，我們可得到正四面體與正八面體的體積與邊長 a 的關係式：

1. 當 n=0 時， $x_0=\sqrt{2}a^3/12$ $\qquad y_0=0$
2. 當 n=1 時， $x_1=4x_0+y_1$ $\qquad y_1=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
3. 當 n=2 時， $x_2=4x_1+y_2$ $\qquad y_2=\frac{\sqrt{2}}{3}(2a)^3=\frac{\sqrt{2}}{3}(8a^3)$
4. 當 n=3 時， $x_3=4x_2+y_3$ $\qquad y_3=\frac{\sqrt{2}}{3}(4a)^3=\frac{\sqrt{2}}{3}(64a^3)$
5. 當 n=4 時， $x_4=4x_3+y_4$ $\qquad y_4=\frac{\sqrt{2}}{3}(8a)^3=\frac{\sqrt{2}}{3}(512a^3)$

   ……

6. 所以我們可以推得， $x_n=4x_{n-1}+y_n$ 我試著推導出 x,y 的一般項

   由體積關係式可得 $x_n=4x_{n-1}+y_n$ ----- (1)式

   由體積關係式亦可得 $y_n=4x_{n-1}$ ----- (2)式

   綜合 (1)和(2)式可得

   $x_n=4x_{n-1}+4x_{n-1}$

   $x_n=8x_{n-1}$

   代入 n 值

   $x_1=8x_0$

   $x_2=8x_1$

$x_3 = 8x_2$

$x_n = 8x_{n-1}$

……

全部相乘去除重複項可得:

$$\cancel{x_1} \times \cancel{x_2} \times \cancel{x_3} \times ..... = 8x_0 \times 8\cancel{x_1} \times 8\cancel{x_2} \times ....$$

$x_n = 8^n x_0$ 其中 $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ (單一個正四面體體積)

$x_n = 8^n(\frac{\sqrt{2}}{12}a^3)$ 代回(2)式得 $y_n = 4\left[8^{n-1}(\frac{\sqrt{2}}{12}a^3)\right]$

四、如何將三維阿基米德螺線套入多個正四面體堆疊的大正四面體？

(一) 將阿基米德螺線 (亦稱「等速螺線」[7]) 從二維型態延伸到三維

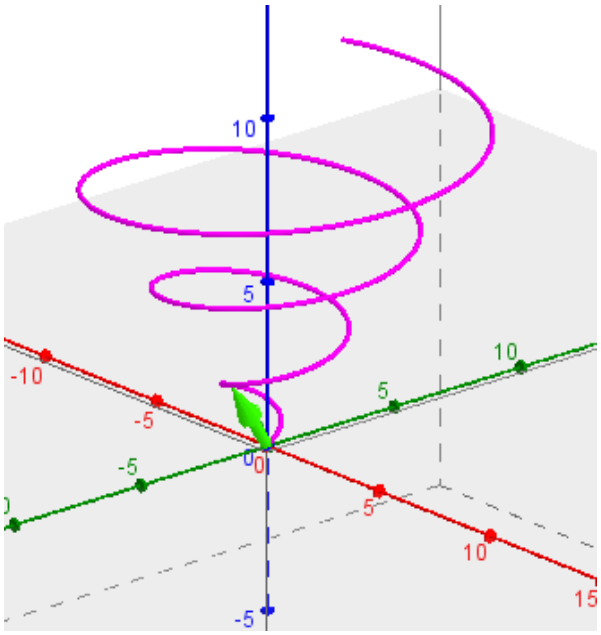
阿基米德螺線的極坐標方程為: $r = a\theta$，這種螺線的每條臂的距離永遠相等於 $2\pi a$，我們加上 z 軸套在笛卡兒坐標系，在 GeoGebra 3D 上將阿基米德螺線轉成三維

$x = rt\cos(at)$

$y = rt\sin(at)$

$z = t$

其中 r 為半徑, a 是角速度 $0 \le a \le 2\pi$, t 為變數



圖五 三維阿基米德螺線

(二) 求出正四面體上的節點座標通式

當 z=1 時，令 $\overline{bd}=x$ ， 則 $\overline{Ad}=3x$ 可得 $(3x)^2=x^2+1$ $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\overline{bC}=2\overline{bd}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

則 C 點座標為 $(\frac{1}{\sqrt{2}},0,1)$

求得邊長 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

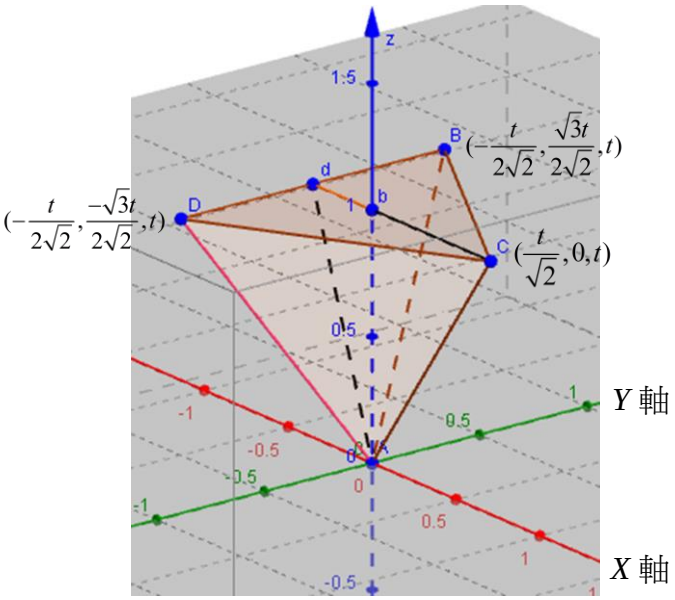
$\overline{Ad}=3\overline{bd}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ ， $\overline{dD}:\overline{Ad}=1:\sqrt{3}$ ， $\overline{dD}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (B 的座標在 y 軸的投影量)

則節點 B 的座標為 $(-\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},1)$;

則節點 D 的座標為 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},1)$

代入 z=t 後可以得到正四面體上的節點座標通式，這對於建立 GeoGebra 3D 模型很有幫助：

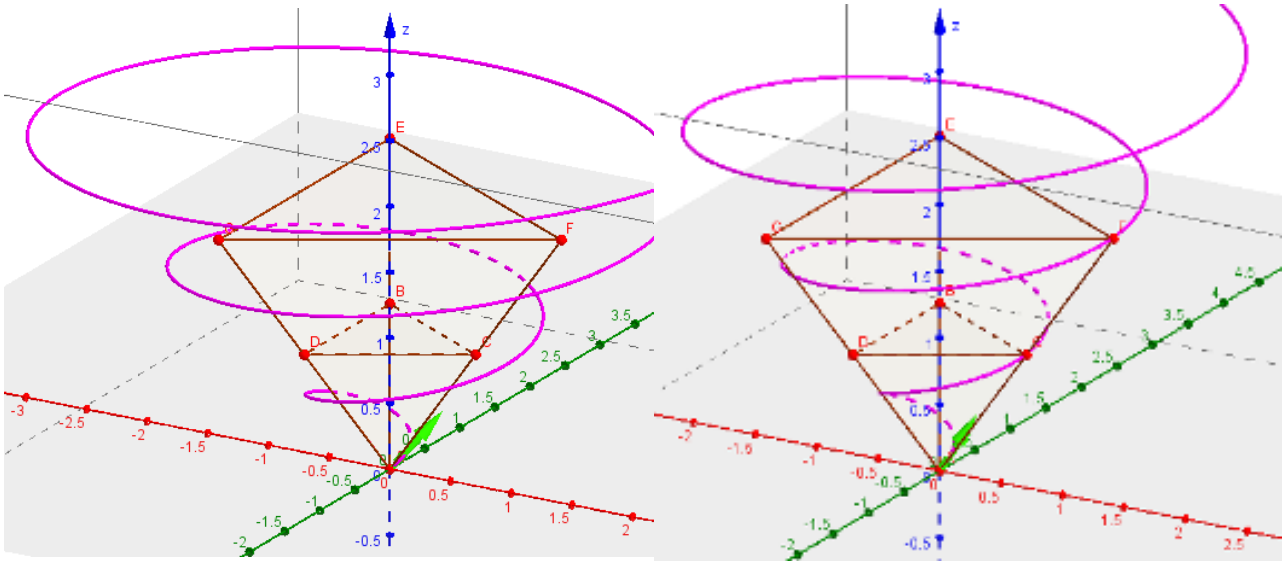
- B,E,H,K 方向節點座標: $(-\frac{t}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}t}{2\sqrt{2}},t)$
- C,F,I,L 方向節點座標: $(\frac{t}{\sqrt{2}},0,t)$
- D,G,J,M 方向節點座標: $(-\frac{t}{2\sqrt{2}},\frac{-\sqrt{3}t}{2\sqrt{2}},t)$



圖六 正四面體上的節點座標

(三) 我發現螺線除了頂點可外接於正四面體外，其它正四面體上的節點均無法外接於螺線，於是我開始調整其中控制的參數來想辦法讓螺線完美外接於正四面體。調整參數 r 時，令 r=0.7， 我發現點正四面體上 C 和 F 節點可與螺線相接。

r=1　　r=0.7



圖七 調整參數 r 時的螺線比較

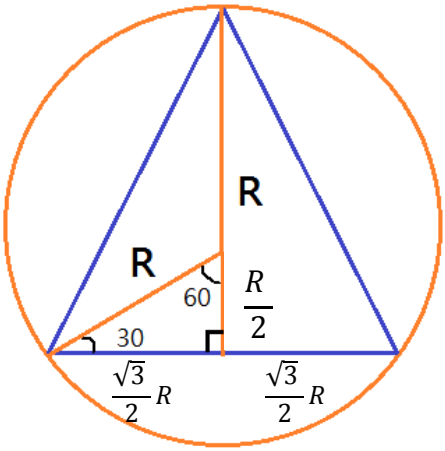
經過 r 的參數調整，螺線方程式調整如下:

$x = 0.7t\cos(at)$

$y = 0.7t\sin(at)$

$z = t$

(四) 對於 r=0.7 我相當好奇是否有更精確的解，我想找到是否有其他的關聯性來解釋這個值。首先，我把螺線的立體圖形在 x 和 y 座標軸的投影做一些探討，並試著找出正四面體高與外接圓半徑的比值：令外接圓半徑為 R



圖八 正四面體外接圓在 XY 平面的投影圖

正四面體高 $= \frac{\sqrt{6}}{3}$ x 邊長 ---------(1)

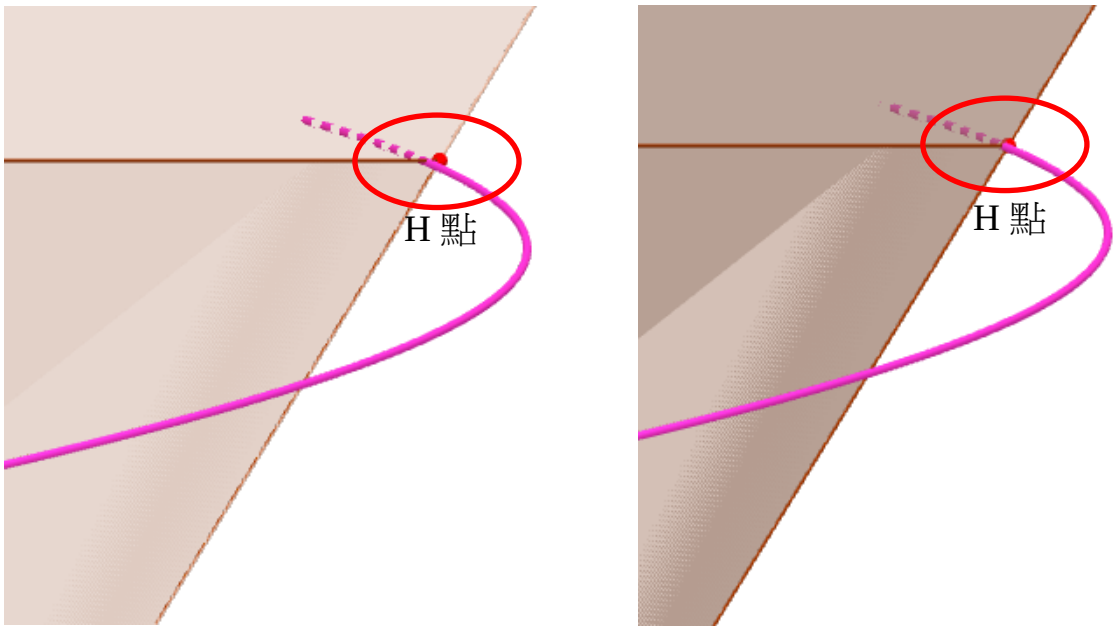
邊長= $\frac{\sqrt{3}}{2}R + \frac{\sqrt{3}}{2}R = \sqrt{3}R$--------(2)

由(1) 和 (2) 式可得正四面體高= $\frac{\sqrt{6}}{3}x\sqrt{3}R = \frac{\sqrt{18}}{3}R = \sqrt{2}\,R$

外接圓半徑: 正四面體高= R: $\sqrt{2}R = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0.70711$

將這比值帶回 GeoGebra 3D 螺線公式，我發現了當 $r=\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0.70711$ 時螺線能相接得更好。以 t=4 的 H 點為例可以看出其中的差異：

r=0.7 $\qquad$ $r=\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0.70711$



圖九 通過 H 點的阿基米德螺線代入不同 r 值的節點逼近比較

螺線公式現在修正為：

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} t\cos(at)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} t\sin(at)$$

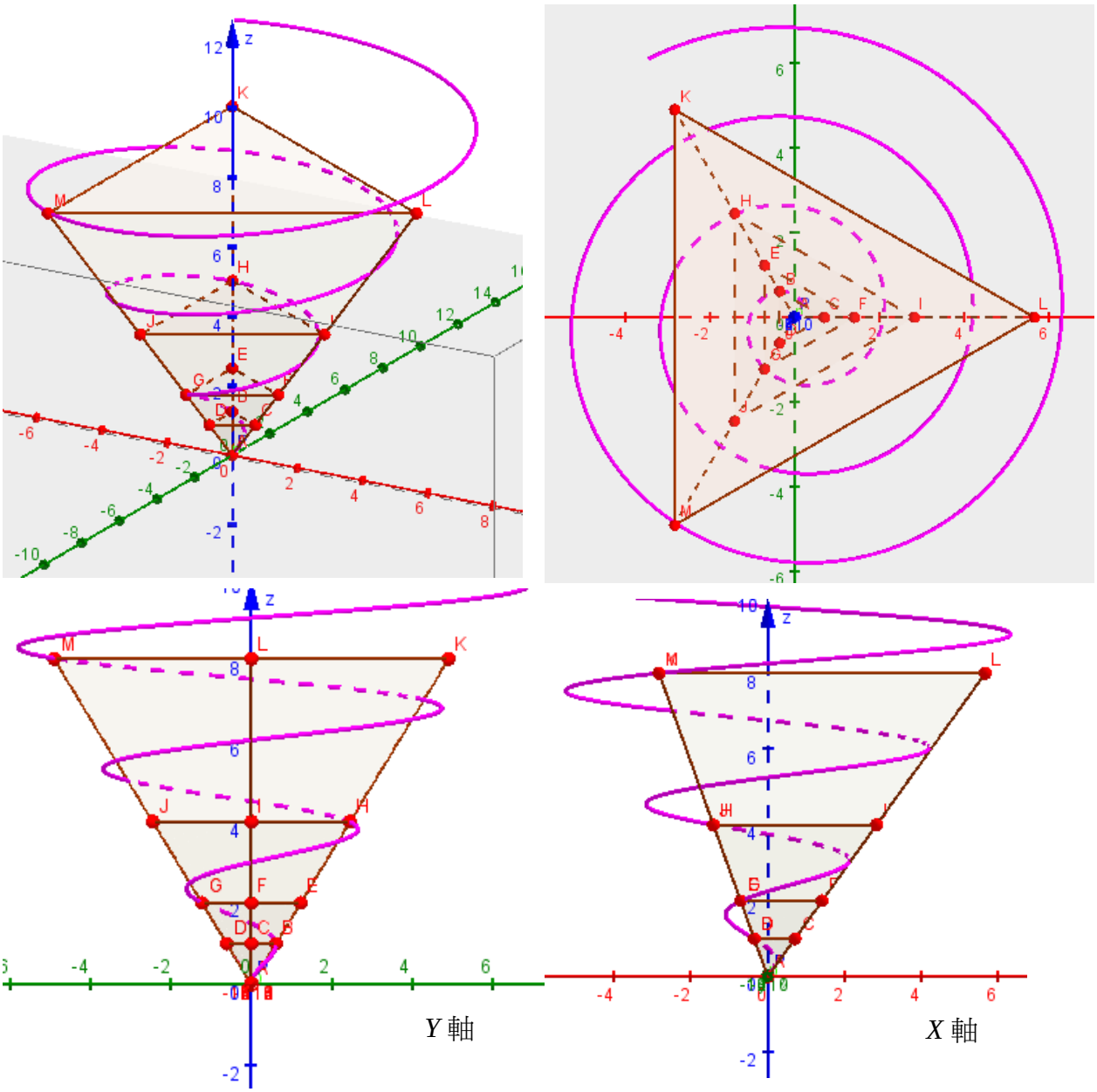
$$z = t$$

(五) 試著調整 a 值看是否能螺線相接得更好，經由數值分析試誤法模擬代入 a 值為 2.09366 時螺線相接於正四面體會更完美並通過正四面體節點 B，G，H，M，即

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}t\cos(2.09366t)$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\sin(2.09366t)$$

$$z=t$$



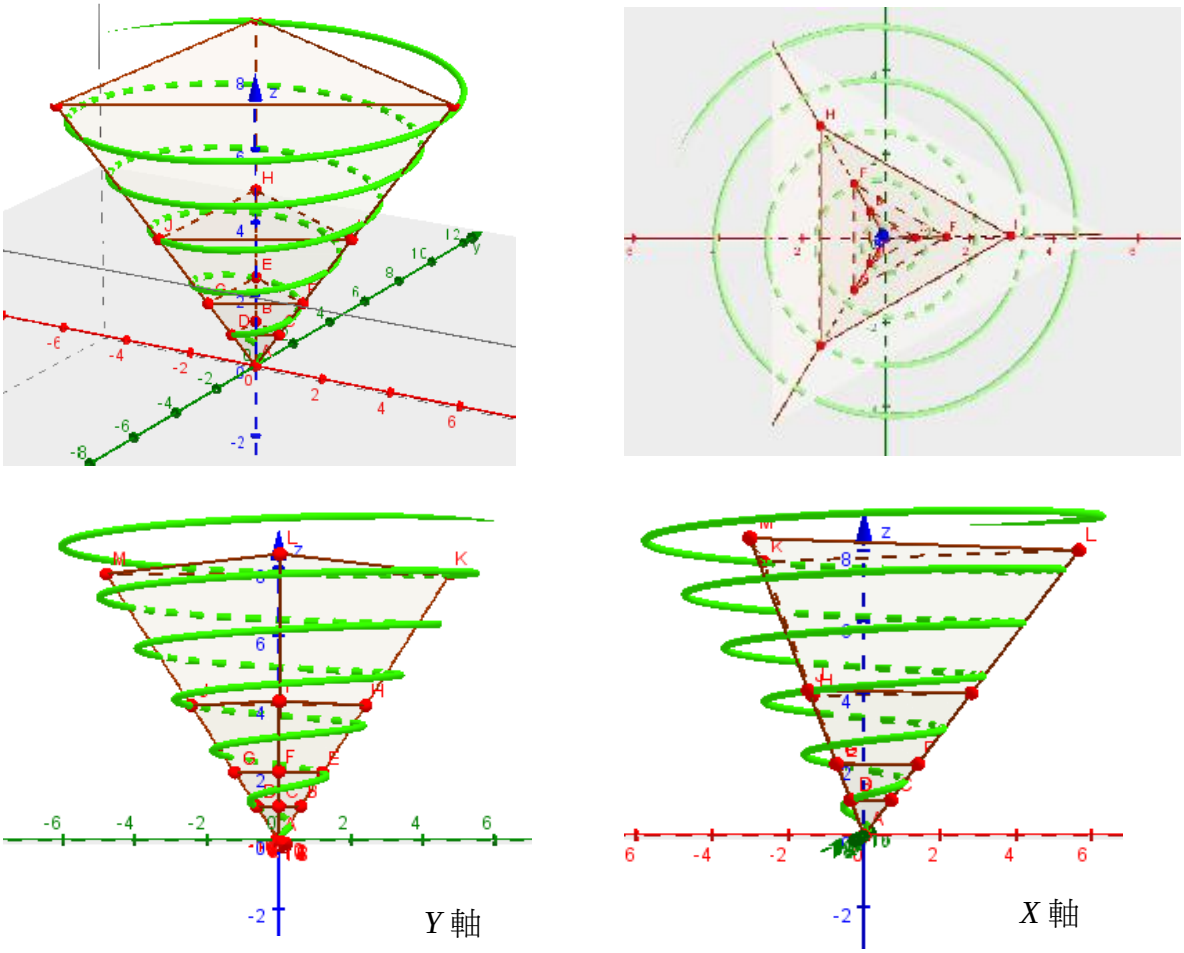
圖十 a=2.09366 的螺線

(六) 用同樣的方法找到另一組螺線方程式，把節點 D, E, J, K 接起來得螺線公式為:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}t\cos(4.209t)$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\sin(4.209t)$$

$$z=t$$



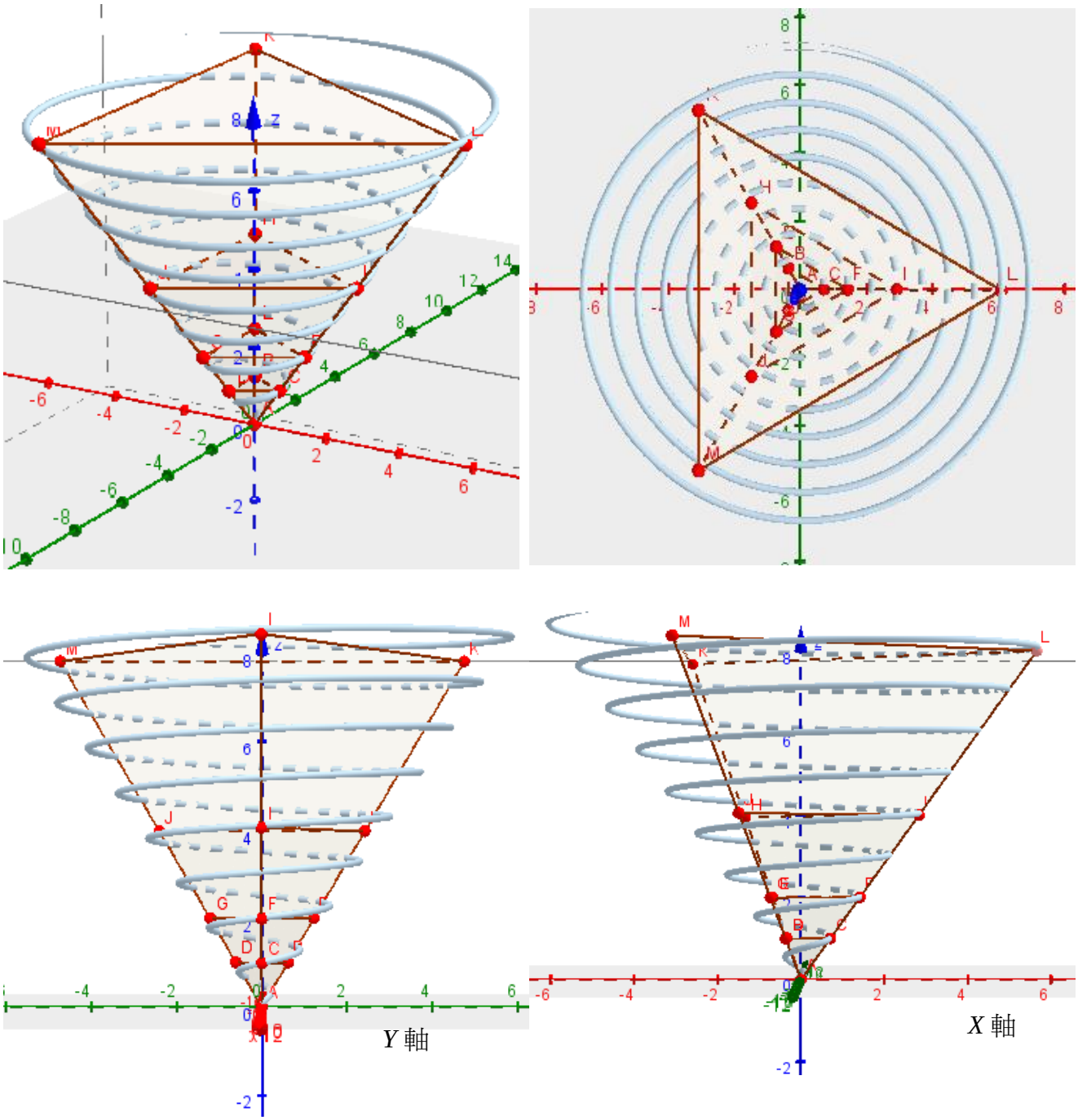
圖十一 a=4.209 的螺線

(七)用同樣的方法找到另一組螺線方程式把節點 C, F, I, L 接起來，螺線方程式如下：

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} t\cos(6.209t)$$

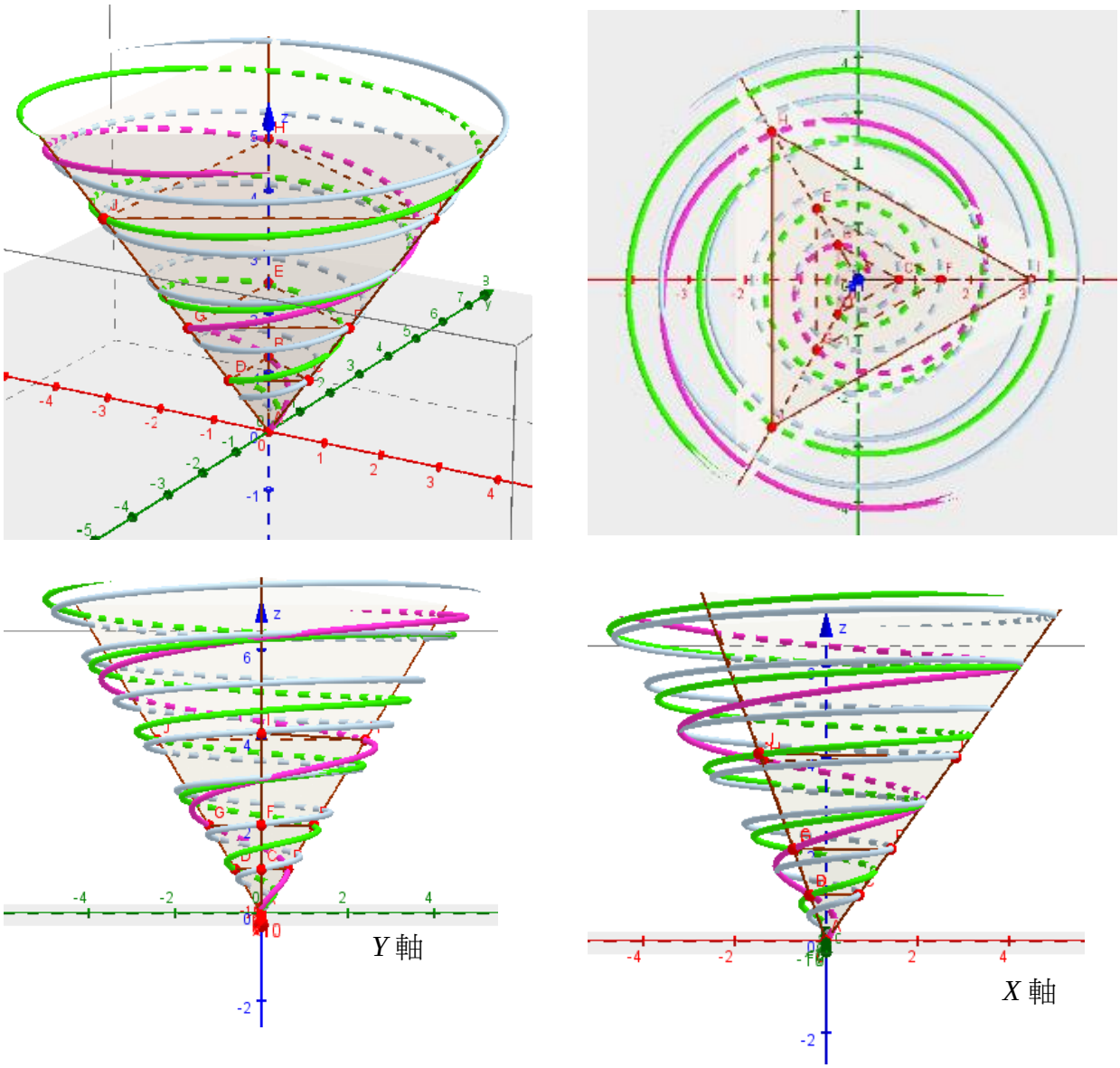
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} t\sin(6.209t)$$

$$z = t$$



圖十二 a=6.209 的螺線

(八)把三個不同螺線放在一起，就可把所有正四面體上所有節點與螺線外接了



圖十三 a=2.09366, 4.209, 6.209 的三組螺線比較

五、如何求出經過正四面體節點的三組精確螺線公式？

我試著把正四面體節點座標帶入螺線公式來求出 a 值的精確解

B,E,H,K 方向節點座標: $(-\frac{t}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}t}{2\sqrt{2}},t)$

C,F,I,L 方向節點座標: $(\frac{t}{\sqrt{2}},0,t)$

D,G,J,M 方向節點座標: $(-\frac{t}{2\sqrt{2}},\frac{-\sqrt{3}t}{2\sqrt{2}},t)$

(一) 求經過 *B,G,H,M* 方向節點座標螺線公式解

1. 當 *t*=1 時為 *B* 節點座標：$(-\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},1)$

   若 *B* 節點座標與 *t*=1 的螺線相交，則帶回 *B* 節點座標可得：

   $$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(a)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

   $$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(a)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

   $$z=t=1$$

   $$\cos(a)=-0.5$$

   $$\sin(a)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   求得共通解 $a=120°+360°\times n \quad n\in\mathbb{Z}$(或$\frac{2}{3}\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$)

   緊接著我將此通解帶入 *G,H,M* 檢驗。

2. 當 *t*=2 時為 *G* 節點座標： $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}},2)$

   若 *G* 節點座標與 *t*=2 的螺線相交，則帶回 *G* 節點座標可得：

   $$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\cos(2a)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

   $$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\sin(2a)=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

   $$z=t=2$$

   $$\cos(2a)=-0.5$$

   $$\sin(2a)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

   $a=120°+360°\times n \quad n\in\mathbb{Z}$(或$\frac{2}{3}\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$)符合上式

3. 當 *t*=4 時為 *H* 節點座標： $(-\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}},4)$

   若 *H* 節點座標與 *t*=4 的螺線相交，則帶回 *H* 節點座標可得：

   $$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 4\cos(4a)=-\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 4\sin(4a)=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$z=t=4$$

$$\cos(4a)=-0.5$$

$$\sin(4a)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$a=120°+360°\times n \quad n\in\mathbb{Z}(或\frac{2}{3}\pi+2\pi n\,,\ n\in\mathbb{Z})$ 符合上式

4. 當 t=8 時為 M 節點座標： $(-\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{-4\sqrt{3}}{\sqrt{2}},8)$

若 M 節點座標與 t=8 的螺線相交，則帶回 M 節點座標可得：

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 8\cos(8a)=-\frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 8\sin(8a)=\frac{-4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$z=t=8$$

$$\cos(8a)=-0.5$$

$$\sin(8a)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$a=120°+360°\times n \quad n\in\mathbb{Z}(或\frac{2}{3}\pi+2\pi n\,,\ n\in\mathbb{Z})$ 符合上式

由 1, 2, 3, 4, 可求得節點 B, G, H, M 的共通解 a 為$120°$ (或$\frac{2}{3}\pi$)

第一組阿基米德螺線通過正四面體節點 B, G, H, M 的公式為：

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}t\cos(\frac{2}{3}\pi t)$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\sin(\frac{2}{3}\pi t)$$

$$z=t$$

(二) 求經過 D, E, J, K 方向節點座標螺線公式解

1. 當 t=1 時為 D 節點座標： $(-\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},1)$

若 D 節點座標與 t=1 的螺線相交，則帶回 D 節點座標可得：

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(a)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(a)=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$z=t=1$$

$$\cos(a)=-0.5$$

$$\sin(a)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

求得共通解 $a=240°+360°\times n \quad n\in\mathbb{Z}$(或$\frac{4}{3}\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$)

緊接著我將此通解帶入 E, J, K 檢驗。

2. 當 t=2 時為 E 節點座標 ： $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},2)$

若 E 節點座標與 t=2 的螺線相交，則帶回 E 節點座標可得：

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\cos(2a)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\sin(2a)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$z=t=2$$

$$\cos(2a)=-0.5$$

$$\sin(2a)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$a=240°+360°\times n \quad n\in\mathbb{Z}$(或$\frac{4}{3}\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$) 符合上式

3. 當 t=4 時為 J 節點座標 ： $(-\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}},4)$

若 J 節點座標與 t=4 的螺線相交，則帶回 J 節點座標可得：

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 4\cos(4a)=-\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 4\sin(4a)=\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$z=t=4$$

$$\cos(4a)=-0.5$$

$$\sin(4a) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$a = 240° + 360° \times n \quad n \in \mathbb{Z}$(或$\frac{4}{3}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$) 符合上式

4. 當 t=8 時為 K 節點座標 ： $(-\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 8)$

若 K 節點座標與 t=8 的螺線相交，則帶回 K 節點座標可得：

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 8\cos(8a) = -\frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 8\sin(8a) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$z = t = 8$$

$$\cos(8a) = -0.5$$

$$\sin(8a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$a = 240° + 360° \times n \quad n \in \mathbb{Z}$(或$\frac{4}{3}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$) 符合上式

由 1, 2, 3, 4, 可求得節點 D, E, J, K 的共通解 a 為$240°$ (或$\frac{4}{3}\pi$)

第二組阿基米德螺線通過正四面體節點 D, E, J, K

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} t\cos(\frac{4}{3}\pi t)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} t\sin(\frac{4}{3}\pi t)$$

$$z = t$$

(三) 求經過 C, F, I, L 方向節點座標螺線公式解

1. 當 t=1 時為 C 節點座標 ： $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1)$

若 C 節點座標與 t=1 的螺線相交，則帶回 C 節點座標可得：

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(a) = 0$$

$z = t = 1$

$\cos(a) = 1$

$\sin(a) = 0$

求得共通解 $a = 360° \times n \quad n \in \mathbb{Z}$ (或 $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$)

緊接著我將此通解帶入 *F, I, L* 檢驗。

2. 當 *t*=2 時為 *F* 節點座標 ： $(\frac{2}{\sqrt{2}},0,2)$

若 *F* 節點座標與 *t*=2 的螺線相交，則帶回 *F* 節點座標可得：

$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\cos(2a) = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sin(2a) = 0$

$z = t = 2$

$\cos(2a) = 1$

$\sin(2a) = 0$

$a = 360° \times n \quad n \in \mathbb{Z}$(或 $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$) 符合上式

3. 當 *t*=4 時為 *I* 節點座標 ： $(\frac{4}{\sqrt{2}},0,4)$

若 *I* 節點座標與 *t*=4 的螺線相交，則帶回 *I* 節點座標可得：

$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4\cos(4a) = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4\sin(4a) = 0$

$z = t = 4$

$\cos(4a) = 1$

$\sin(4a) = 0$

$a = 360° \times n \quad n \in \mathbb{Z}$(或 $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$) 符合上式

4. 當 *t*=8 時為 *L* 節點座標 ： $(\frac{8}{\sqrt{2}},0,8)$

若 L 節點座標與 t=4 的螺線相交，則帶回 L 節點座標可得：

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 8\cos(8a)=\frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 8\sin(8a)=0$$

$$z=t=8$$

$$\cos(8a)=1$$

$$\sin(8a)=0$$

$a=360°\times n \quad n\in\mathbb{Z}$(或 $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$) 符合上式

由 1, 2, 3, 4, 可求得節點 C, F, I, L 的共通解 a 為 $a=360°\times n \quad n\in\mathbb{Z}$(或 $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$)

第三組阿基米德螺線通過節點 C, F, I, L

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}t\cos(2\pi t)$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\sin(2\pi t)$$

$$z=t$$

六、等角螺線是否也能經過正四面體的每個節點？

(一) 阿基米德螺線和等角螺線的差異點

1. 阿基米德螺線通式：

$$x=rt\cos(at)$$

$$y=rt\sin(at)$$

$$z=t$$

2. 等角螺線通式:

$r=ae^{b\theta}$ 轉成迪卡爾座標系為

$$x(t)=r(t)\cos(t)=ae^{bt}\cos(t)$$

$$y(t)=r(t)\sin(t)=ae^{bt}\sin(t)$$

其中 a，b 為實數， 加上 z 軸可得一立體等角螺線

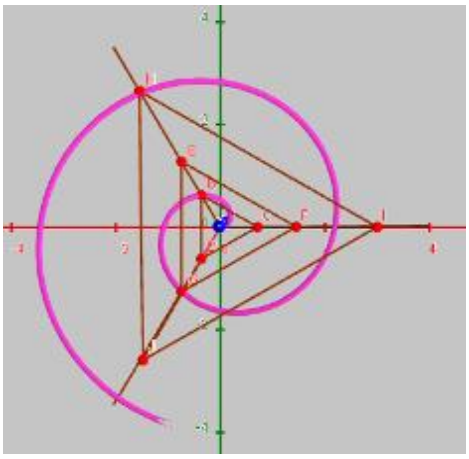
$$x(t)=r(t)\cos(t)=ae^{bt}\cos(t)$$

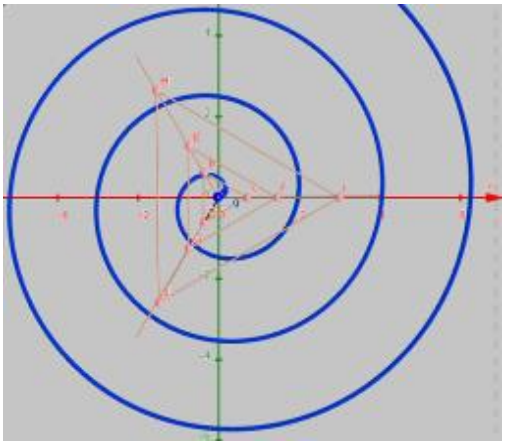
$$y(t)=r(t)\sin(t)=ae^{bt}\sin(t)$$

$$z(t)=t$$

畫成 2D 圖來比較會比較看的出來差異：

阿基米德螺線　　等角螺線





圖十四 阿基米德螺線和等角螺線的 2D 比較圖

從圖中看出等角螺線雖然是以對數等級向外擴散，但似乎有機會外接於正四面體

(二) 嘗試用立體等角螺線[6]來看是否能找到完美外接於正四面體的各個節點
經由 GeoGebra 3D 代入不同數值模擬我得到另外三組等角螺線方程式
第一組等角螺線通過正四面體節點 *B, G, H, M*

$$x(t) = 0.47e^{0.388t}\cos(\frac{2}{3}\pi t)$$

$$y(t) = 0.47e^{0.388t}\sin(\frac{2}{3}\pi t)$$

$$z(t) = t$$

(三) 第二組等角螺線通過正四面體節點 *D, E, J, K*

$$x(t) = 0.47e^{0.388t}\cos(\frac{4}{3}\pi t)$$

$$y(t) = 0.47e^{0.388t}\sin(\frac{4}{3}\pi t)$$

$$z(t) = t$$

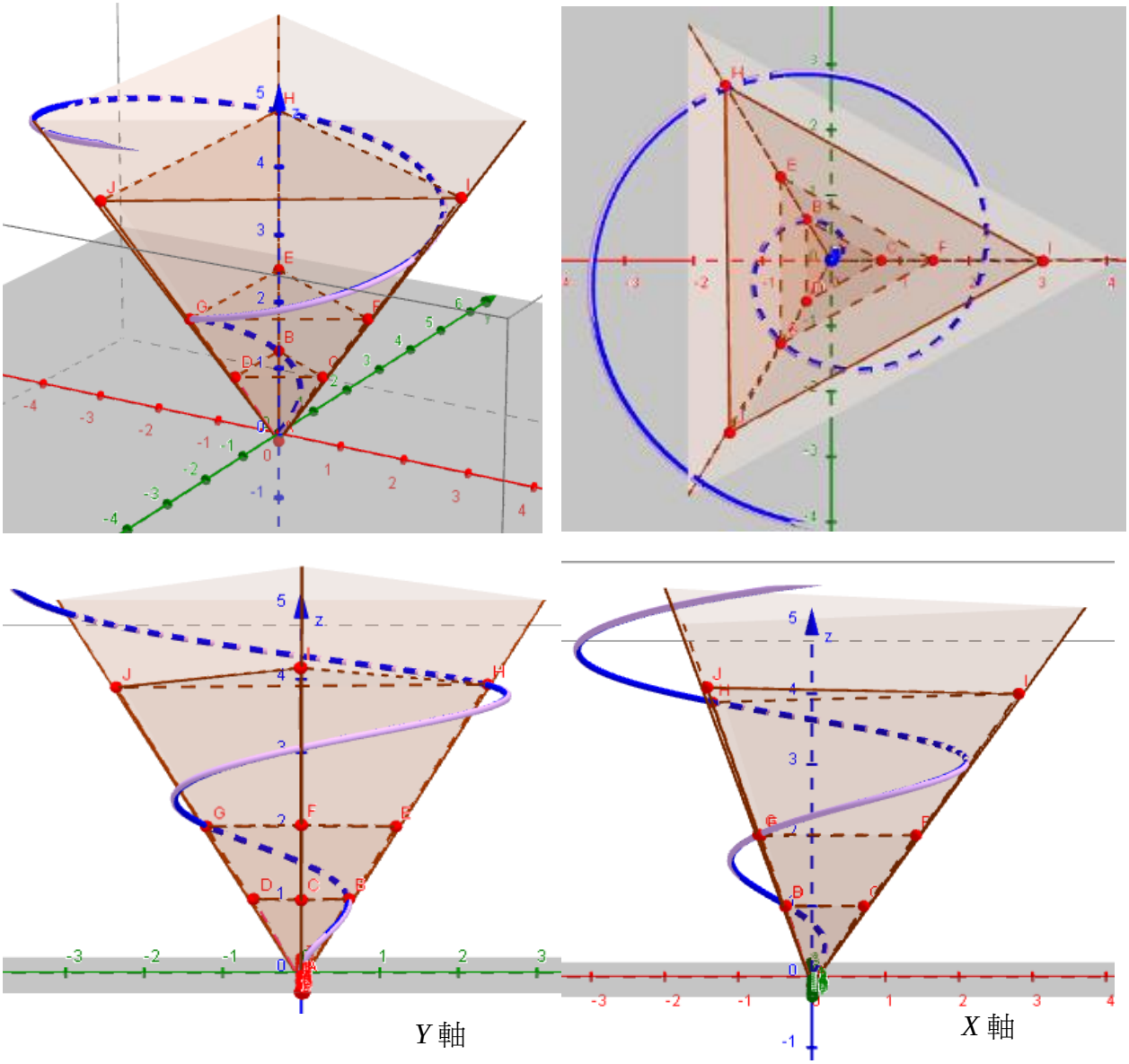
(四)第三組等角螺線通過節點 *C, F, I, L*

$$x(t) = 0.47e^{0.388t}\cos(2\pi t)$$

$$y(t) = 0.47e^{0.388t}\sin(2\pi t)$$

$$z(t) = t$$

把第一組等角螺線與第一組阿基米德螺線在 GeoGebra 3D 上作圖看是否重疊？



圖十五 等角螺線與阿基米德螺線近似重合

(五) 從 3D 圖形看起來近似重疊，但是我想確認是否真正重合。

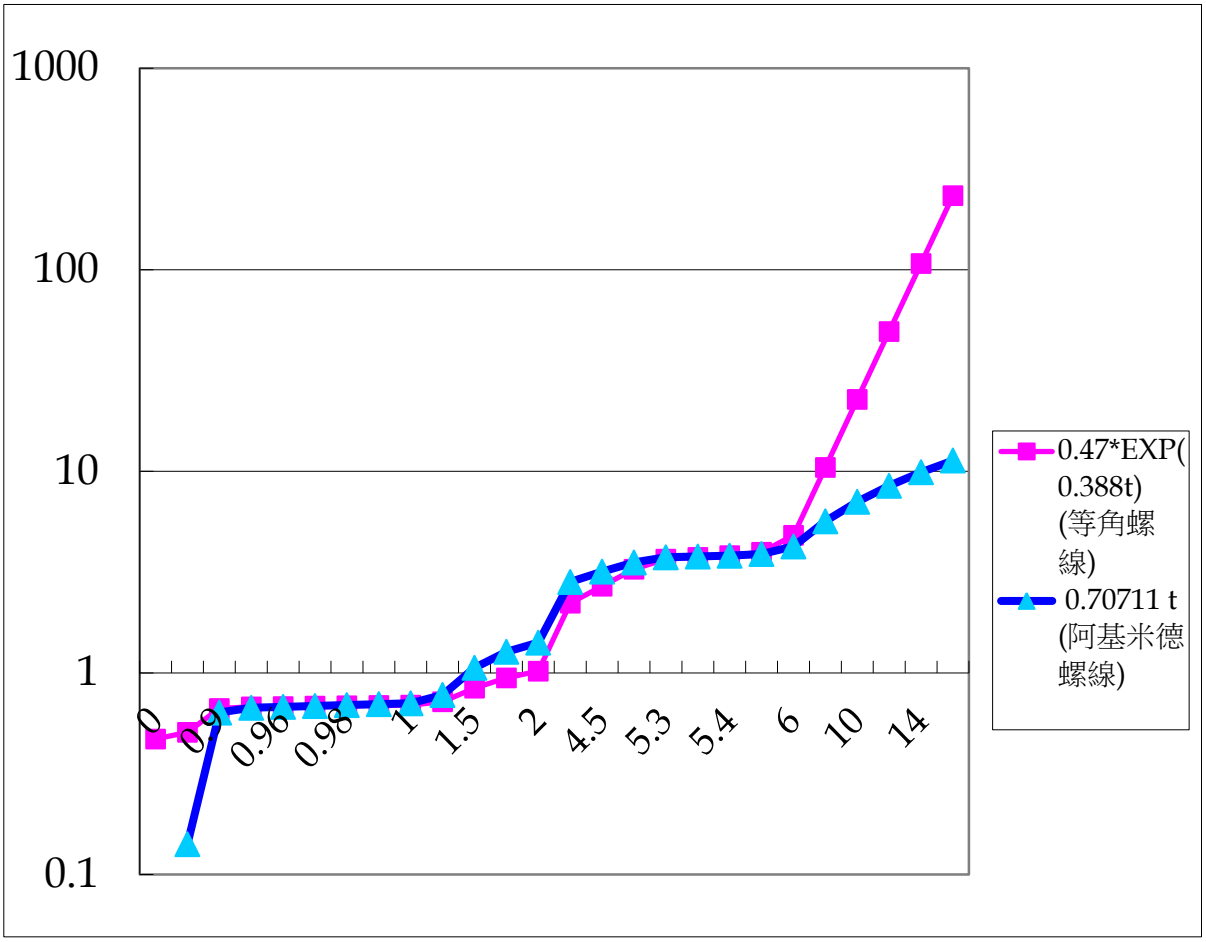
假設第一組等角螺線與第一組阿基米德螺線完全重合，則

$$0.47e^{0.388t} = \frac{\sqrt{2}}{2}t$$

利用疊代法[9][10] 將 t 值代入此式中

表一 疊代法數值模擬		
t=	0.47*EXP(0.388t) (等角螺線)	0.70711 t (阿基米德螺線)
0	0.47	0
0.2	0.507924439	0.141422
0.9	0.666428392	0.636399
0.95	0.679483326	0.6717545
0.96	0.682124843	0.6788256
0.97	0.684776628	0.6858967
0.98	0.687438723	0.6929678
0.99	0.690111166	0.7000389
1	0.692793999	0.70711
1.1	0.720202696	0.777821
1.5	0.841118619	1.060665
1.8	0.944950641	1.272798
2	1.021198988	1.41422
4	2.2188242	2.82844
4.5	2.693866213	3.181995
5	3.270612956	3.53555
5.3	3.674354297	3.747683
5.35	3.746332703	3.7830385
5.4	3.819721124	3.818394
5.5	3.970839033	3.889105
6	4.82098091	4.24266
8	10.47485283	5.65688
10	22.75938108	7.0711
12	49.45075944	8.48532
14	107.4448202	9.89954
16	233.4522165	11.31376

我找到了 t 的兩組近似值解 0.97 及 5.4，也就是說等角螺線和阿基米德螺線只有兩個交會點(如圖十六)。如果再考慮正四面體節點位置只有在 t=1,2,4,8 …，則唯一的近似解只有 t=0.97 節點位置 B，同理可求得其它兩組螺線只可交會於 C 和 D 節點。



圖十六 等角螺線與阿基米德螺線交會數值圖

伍、研究結果

一、多個正四面體堆疊無法維持正四面體外型，加入了正八面體堆疊後可維持正四面體外型。

二、正四面體與正多面體的個數代數關係： n 代表正四面體堆疊的次數，正四面體個數 x，正八面體個數 y，我們可得到如下的關係。

$$x_n = \frac{1}{3}(4^{n+1}-1) \qquad n \geq 0 \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$y_n = x_{n-1} = \frac{1}{3}(4^{n}-1) \qquad n \geq 0 \qquad n \in \mathbb{Z}$$

三、正四面體與正多面體的體積代數關係：x 代表正四面體體積，y 代表正八面體體積，a 為正四面體的邊長，n 為堆疊次數，我們可得到如下的關係。

$$x_n = 8^n\left(\frac{\sqrt{2}}{12}a^3\right) \quad , \quad y_n = 4\left[8^{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{12}a^3\right)\right]$$

四、將三維阿基米德螺線套入多個正四面體堆疊的大正四面體後可經由 Excel 試算得到一組近似解的螺線公式。

(一) 第一組阿基米德螺線通過正四面體節點 B, G, H, M

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}t\cos(2.09366t)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}t\sin(2.09366t)$$

$$z = t$$

(二) 第二組阿基米德螺線通過正四面體節點 D, E, J, K

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}t\cos(4.209t)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}t\sin(4.209t)$$

$$z = t$$

(三) 第三組阿基米德螺線通過節點 C, F, I, L

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}t\cos(6.209t)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}t\sin(6.209t)$$

$$z = t$$

五、經過正四面體節點的三組螺線公式亦可精確的由 t 和 π 來表示，精確的螺線公式。

(一) 第一組阿基米德螺線通過正四面體節點 B, G, H, M

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}t\cos(\frac{2}{3}\pi t)$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\sin(\frac{2}{3}\pi t)$$

$$z=t$$

(二) 第二組阿基米德螺線通過正四面體節點 D, E, J, K

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}t\cos(\frac{4}{3}\pi t)$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\sin(\frac{4}{3}\pi t)$$

$$z=t$$

(三) 第三組阿基米德螺線通過節點 C, F, I, L

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}t\cos(2\pi t)$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\sin(2\pi t)$$

$$z=t$$

六、阿基米德螺線的常數項是以等比級數由中心向外擴散，等角螺線的常數項是以對數由中心向外擴散。

(一)阿基米德螺線通式：

$$x=rt\cos(at)$$

$$y=rt\sin(at)$$

$$z=t$$

(二)等角螺線通式：

$$x(t)=ae^{bt}\cos(t)$$

$$y(t)=ae^{bt}\sin(t)$$

$$z(t)=t$$

七、等角螺線雖然也能經由數值分析(Numerical Analysis) [10] 找到幾乎經過正四面體的每個節點的近似解，近似的螺線公式為：

(一) 第一組等角螺線通過正四面體節點 B, G, H, M

$$x(t) = 0.47e^{0.388t}\cos(\frac{2}{3}\pi t)$$

$$y(t) = 0.47e^{0.388t}\sin(\frac{2}{3}\pi t)$$

$$z(t) = t$$

(二) 第二組等角螺線通過正四面體節點 D, E, J, K

$$x(t) = 0.47e^{0.388t}\cos(\frac{4}{3}\pi t)$$

$$y(t) = 0.47e^{0.388t}\sin(\frac{4}{3}\pi t)$$

$$z(t) = t$$

(三)第三組等角螺線通過節點 C, F, I, L

$$x(t) = 0.47e^{0.388t}\cos(2\pi t)$$

$$y(t) = 0.47e^{0.388t}\sin(2\pi t)$$

$$z(t) = t$$

但是等角螺線卻找不到如阿基米德螺線經過正四面體的每個節點的精確解，也就是說阿基米德螺線是經過正四面體的每個節點的精確螺線，且有三組精確解。

陸、討論

等角螺線是由笛卡兒在 1638 年發現的。雅各布•伯努利後來重新研究之。他發現了等角螺線的許多特性，如等角螺線經過各種適當的變換之後仍是等角螺線。他十分驚嘆和欣賞這曲線的特性，故要求死後將之刻在自己的墓碑上，並附詞「縱使改變，依然故我」(eadem mutata resurgo)。可惜雕刻師誤將阿基米德螺線刻了上去。經由本文研究可發現等角螺線阿基米德螺線在某些低螺線圈數情況下可以說是完全重合，這個雕刻師可能被誤會了好幾百年，他的確刻上了等角螺線!

圖十七 雅各布·伯努利墓碑上的螺線[11]

柒、結論

如果將做好的正四面體與三條不同螺線倒過來看，螺線看起來就像遊樂場的滑水道，如果用同一個正四面體結構是否能更省空間的容納更多條滑水道？除了兼顧結構節點的有效支撐也可大幅度降低建置成本。

另一方面透過這個正四面體外接螺線，我們可以針對龍捲風[12]進行結構分析或『科里奧利力』[13] 做探討，或許可找出可有效抗龍捲風的幾何結構，這些都是我們未來可應用的方向。

捌、參考資料及其他

[1] Gemological Institute of America, GIA Gem Reference Guide 1995, ISBN 0-87311-019-6

[2] 正四面體:　Eric W. Weisstein/ Tetrahedron at MathWorld

[3] 趙文敏/等角螺線(Logarithmic Spiral)及其他，科學月刊第二十卷第九期、第十期，1989

[4] 邱渝萍、賈千躍、洪意淨著/三角形鋪砌挑戰費氏數列，中華民國第 53 屆中小學科學展覽會作品，2013

[5] 巴都萬數列 Padovan sequence, Barry Balof /Restricted Tilings and Bijections , Journal of Integer Sequences, Vol. 15 (2012), Article 12.2.3,

[6] 等角螺線 Jim Wilson, Equiangular Spiral (or Logarithmic Spiral) and Its Related Curves, University of Georgia (1999)

[7] 阿基米德螺線(Archimedean spiral), Clifford A. Pickover/ The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics, 2009

[8] 陳仁政著/ 的密碼，北京科學出版社， 2011

[9] 疊代法, C. T. Kelley / Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations, 1995

[10] 數值分析 (Numerical Analysis)
http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B0%E5%80%BC%E5%88%86%E6%9E%90

[11] 雅各布•伯努利墓碑上的螺線
http://professortiz.wordpress.com/2013/02/06/eadem-mutata-resurgo/

[12] 龍捲風問答 http://www.spc.noaa.gov/faq/tornado/

[13] 科里奧利力 http://zh.wikipedia.org/wiki/

【評語】030410

本研究將二維螺線延伸至三維螺線，並探討阿基米德與等角兩種螺線外接於正四面體的情況，嘗試推導出螺線和正四面體交點的座標表示式，已獲得部份結果。雖則等角螺線方面尚未求出其經過正四面體節點的精確解，但因主題具一定程度的困難度，本研究仍具參考價值。作品可朝更多應用的方向進行探索，例如應用於漩渦的研究之中。