中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030409

密碼鎖－完美控制的正交拉丁超立方家族

學校名稱：國立南科國際實驗高級中學(國中)

作者：	指導老師：
國二 陳紅瑋	曾智偉
國二 楊東豪	蘇芳儀
國二 陳　鈺	

關鍵詞：正交拉丁方陣、延伸樹、完美控制

摘要

密碼鎖由K個旋鈕組成，旋鈕上有 N 種不同號碼，若旋鈕中僅有1個錯誤仍能打開此鎖，問最少嘗試多少組號碼能保證打開鎖？此問題等同於在 N 元K維超立方中找一組點集，點集中的點各自向其K維度畫出延伸線，若N^K所有點都至少被1條延伸線所涵蓋，求重複涵蓋的次數總和要最少。

50屆全國中小學科展中討論過N^{N+1}的情形，我們繼續分析N^K，$K=1+N+N^2+\cdots N^{E-1}$個旋鈕的情況，發現任意正整數N、E，我們能構造出最小控制集，且所有延伸線間涵蓋的點都不重複，稱為<u>完美控制</u>，而保證打開鎖的最小次數是N^D，$D=K-E$。

壹、 研究動機

開始時，老師說尚未有研究的主題時可先參考別人的作品， 50屆全國科展中「拉丁超立方體的完美控制情形」，直覺上超立方很有趣，它以IMO競賽題目3個旋鈕8個號碼去研究，感想是"怎麼變化的好難懂"，老師說當初學長做校內發表，老師們也是這樣的評語，但學長的數學能力和我們沒什麼不同；數學需要用直覺去看，再用邏輯去驗證，多次的研讀後想法變成"好難，怎想到的"，卻深感數學很神奇，用了合適的工具可把複雜的東西分解成簡單的部份，於是展開了在4維度畫格子的日子，「怎麼這麼難都畫不出預期的解來」，老師說「這可能是正確的直覺，很可能就是沒有解才畫不出來」，這話讓我們快瘋了，但由於實做中的練習才能理解如何處理高維度的問題。有一次我們發現，學長的延伸樹是n^2的，而出現完美控制，而在科展「超立方體Qn之最小控制」中也有完美控制，概念相同但處理的內容和方法就不相干；我們疑惑著為何延伸樹只能用n^2?難道只有n^{n+1}這種結構能有完美控制?這引起我們很大的興趣,最後我們決定把這個國際奧林匹克競賽的題目從3個旋鈕8個號碼延伸下去 ，看能不能對於更多旋鈕的情況有所發展。

貳、 研究目的

一、 分析4個旋鈕上各有N個號碼的數學模型(N^4問題),求保證開鎖的最小次數或上下限。

二、 K個旋鈕各有2個號碼時(2^K問題) ，$K=2^E-1$，E為正整數，找到非Nim遊戲中必勝點法外的完美控制集。

三、 K個旋鈕上各有3個號碼時(3^K問題)，$K=1+3+3^2+\ldots3^{E-1}$，E為正整數找到保證能打開鎖的最少號碼組合，並證明其是完美控制的情況。(3^4、3^{13}、3^{40}、3^{121}...)

四、 K個旋鈕上各有4個號碼時(4^K問題)，$K=1+4+4^2+\ldots4^{E-1}$，E為正整數找到保證能打開的最少號碼組合，並證明其是完美控制的情況。(4^5、4^{21}、4^{85}、4^{341}...)

五、 研究N^K中完美控制的條件，當$K=\frac{N^E-1}{N-1}=1+N+N^2+\cdots+N^{E-1}$時有完美控制出現，最小控制集數是$N^{K-E}$並提出完美控制情況下的最小控制集的選取方法。

參、 研究設備及器材

紙、筆、*Excel*、網際網路

肆、 研究過程與方法

一、 前言

(一)文獻探討

1. 1988年國際奧林匹克數學競賽中東德提供1個預選題如下：1個密碼鎖由3個旋鈕組成，每個旋鈕有8個位置(號碼)，由於構造上的缺點只要旋鈕中有2個正確便能打開這個鎖。問最少要嘗試多少組合才能保證打開這個鎖？

2. 在43屆的全國科展中曾被推廣為3個旋鈕其上有n個位置的$n\times n\times n$密碼鎖問題，討論出保證能開鎖的最少號碼組合次數的公式如下：

   n是偶數時：$(\frac{n}{2})^2+(\frac{n}{2})^2$ [參考資料一P.3]

   n是奇數時：$(\frac{n+1}{2})^2+(\frac{n-1}{2})^2$ .....(一.1式)

   在這篇文章中使用了1個固定選取控制點的立體圖形，名為3叉體，認定3叉體的選擇方式是最有效的選取控制點的方法，應是利用幾何圖形直覺，並無特別證明這是最有效的選取方法，且在n=8,10以外的數時，雖說明可以斜對角的選取法但沒明確的控制點選取公式。

3. 其後在48屆全國科展中有篇文章「超立方Qn的最小控制」：在2^K超立方中取1個點集，點集中的點及其有邊相連(只有1維座標不同)的點都聯集起來，若聯集的結果是整個超立方，便稱這個點集是1個控制集，點數最小的控制集其點數稱為控制數γ。文章討論出$K=2^E-1$時用Nim (拈)遊戲選的任2控制點不會控制同1個點，此時控制數是2^{K-E} [參考資料二 P8]是完美控制，K是其它數時沒有公式只確定上限。

   這文章在E>3時，並無明確選取控制點的公式，只依賴Nim (拈)遊戲中的必勝點存在，以必勝點為控制點並無錯誤，但選取的方法文章中無法明確指出選取法，只表列E=3時的一組成功的控制集，而E=4時的2^{15}問題便無明確表列或公式來指出控制集內容，只證明Nim (拈)遊戲中的必勝點可為控制點選取較為遺憾。

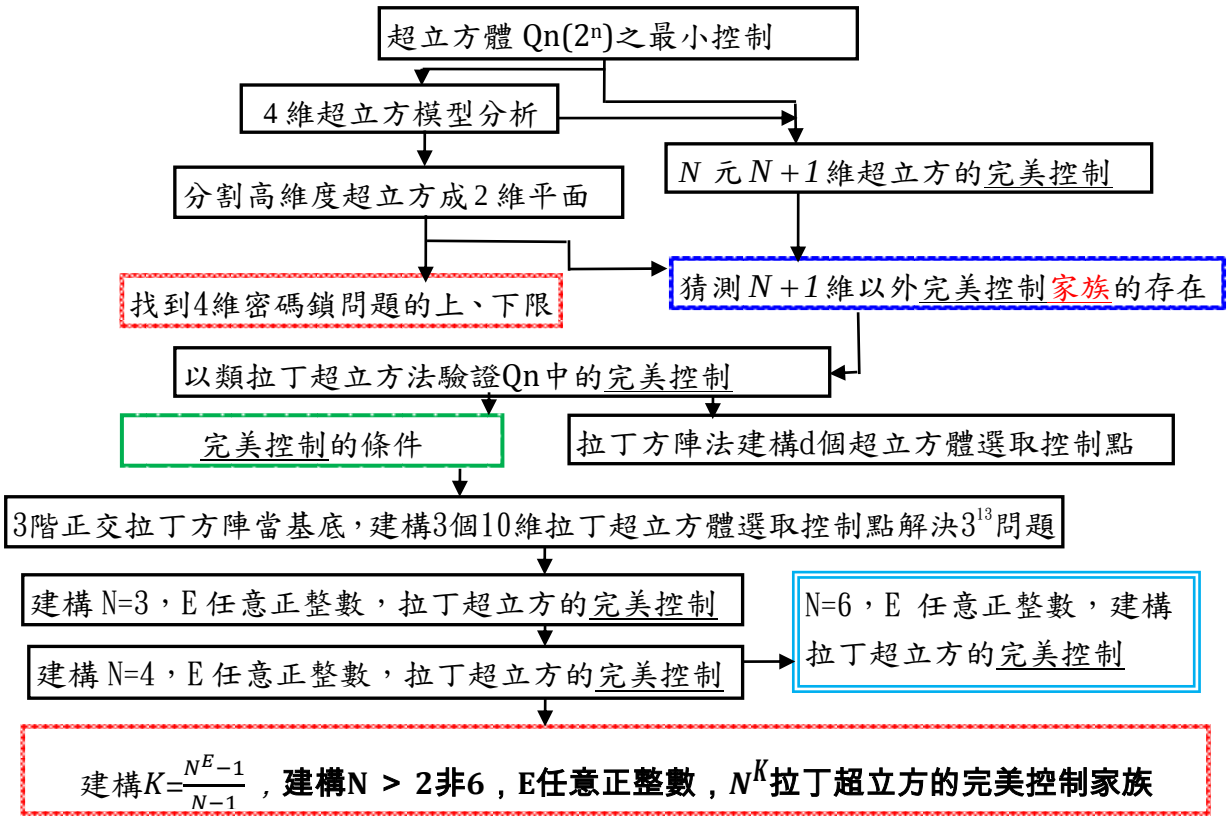
4. 在50屆全國中小學科展中「密碼鎖-拉丁超立方體的完美控制情形」找到了$n+1$個旋鈕上有n個位置的最小控制集的的解公式n^{n-1} [參考資料三 P2]，明確列出n=2,3,4,5時的控制集並找出控制點的選取公式，但該文章中的n是質數的，其後在2011臺灣國際科展中推展到n≠6正整數，我們發覺在非質數的證明之中找到2個拉丁超立方，但各平面上均呈正交拉丁方陣的理由並沒正確說明，且事實上並非任意的2正交拉丁方陣均能建構出各平面呈正交拉丁方陣的結果，所以我們覺得可以把幾篇文章再結合使用新的方法證明及推廣。

(二)名詞與符號定義

於本文中我們會重複使用到幾個概念，為了表達上的方便我們首先定義下列名詞：

1. 延伸樹：　1個點及超立方中與此點僅有1維座標相異之點的聯集。
2. 控制集：　1點集若其內各點之延伸樹的聯集等於整個超立方，稱此點集是個控制集，其內的點稱為控制點。定義$\gamma(N^K)$為K個旋鈕每個上有N個位置時的最小控制集內的控制點數。
3. 完美控制：　1組控制集其控制點之延伸樹間沒有交集的情況。
4. ${}^{d}_{n}\alpha_i(s)$:　n＞2，由2個n階正交拉丁方陣以合成函數所建立的n階d維度拉丁超立方例${}^{3}_{n}\alpha_3(s) = {}^{3}_{n}\alpha_3(x_1,x_2,x_3) = {}_{n}L({}_{n}S(x_1,x_2),x_3)$，${}^{4}_{n}\alpha_3(s) = {}_{n}L({}^{3}_{n}\alpha_3(x_1,x_2,x_3),x_4)$

(三)研究流程圖



二、推測4維問題中不存在型如3維時的最小控制集點數公式，故推論上下限

(一)推測公式

2 元3維和3元4維都可挑出延伸樹不重疊的控制集，而2元3維的最小控制集點數$\gamma(2^3)=2$，3元4維的最小控制集點數$\gamma(3^4)$=是9， 觀察$2=1^2+1^2$，$2=2^{2-1}$也符合n^{n-1}型態，$9=1+8$符合$9=1^3+2^3$，而$9=3^2$符合n^{n-1}，故猜測若4維有類似3維時型態的簡單公式應

$$\begin{cases} (\frac{n}{2})^3+(\frac{n}{2})^3 & ,n\text{是偶數時} \\ (\frac{n+1}{2})^3+(\frac{n-1}{2})^3 & ,n\text{是奇數時} \end{cases} \quad .....(二.1式)$$

該如右:

或 n^{n-1} .....(二.2式)

在n^3的主題中，解的一般式為一.1式，其控制點的延伸樹涵蓋的點數量比例為$\frac{n}{2}$或接近$\frac{n}{2}$的整數；n^{n+1}的主題中延伸樹蓋的點數為$\gamma(n^{n+1}) = n^{n-1}$，涵蓋比例為$\frac{1}{n^2}$，所以$3^4$中涵蓋比例為$\frac{1}{9}$，而$2^4$中$\gamma(Q_4) = 4$，涵蓋比例為$\frac{1}{4}$，我們猜測在$4^4$中若是涵蓋比例為$\frac{1}{8}$或$\frac{1}{4}$，那$\gamma(4^4)$=32或16。

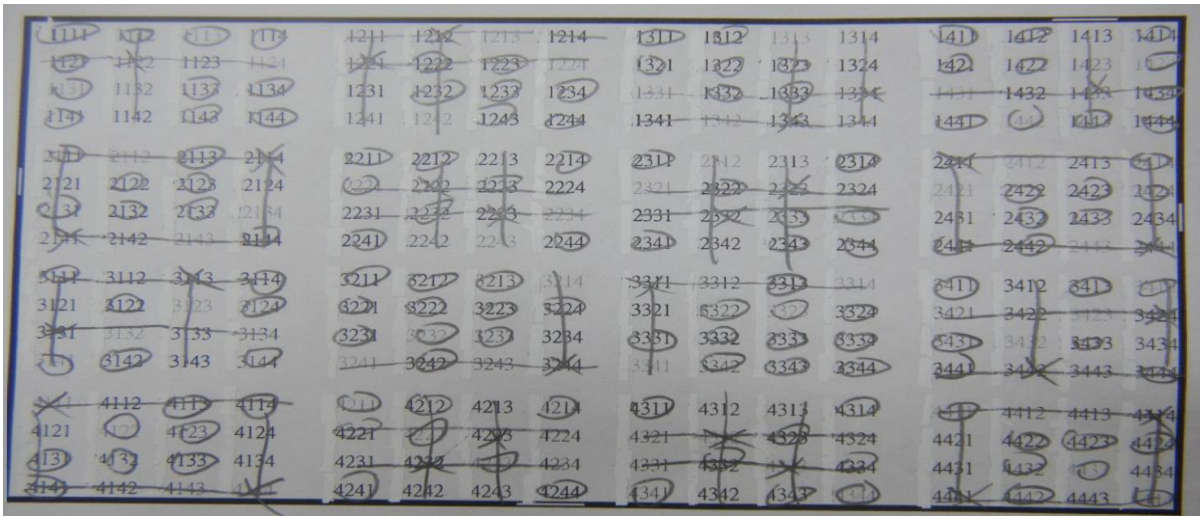
(二)討論 4 個旋鈕有 4 個位置: 4^4

依(二.1式)，則$n=4$時最小控制集點數是$(\frac{4}{2})^3+(\frac{4}{2})^3=16$，符合上述2段的論點，但4元4維中每個控制點其延伸樹可以涵蓋$3\times4+1=13$個點，16個控制點則涵蓋$13\times16<4^4$，沒蓋滿4^4，故最小控制集點數不可能是16，可知(二.1式)不合。

依(二.2式)，則$n=4$時最小控制集點數為4^3，由(一.1式)知道1個4元3維的立方體只需要8個控制點， $4^4=(4\times4\times4)\times4$，4元4維超立方體等於是由4個4元3維的立方體所組成，所需的最小控制集點數不會超過$4\times8=32$，事實上我們找到的最小解是28個控制點，故(二.2式)也是不正確的。

4元4維中的1點其延伸樹共涵蓋13個點，若每個延伸樹彼此不重疊則它們的聯集必為是13的倍數，但4^4不是13的倍數，所以不可能出現完美控制的情形，目前我們只能找出28個控制點的情況。並不符合上述的任何一個情況。

4^4中目前所找到最小控制點數28的情況如下:



(三)討論 4 個旋鈕有 5 個位置: 5^4

5^4 總共有 625 個點，任一控制集點其延伸樹可涵蓋 17 個點，依此用 625÷17 會得到 36.764…，因此 5^4 至少要選 37 個點才能蓋滿。

5^4 以一種切法可分為 25 個面，以 37 個點來說，至少有 13 個面是只有 1 個點的，另外 12 個面是有 2 個點的。

任一個面選了 1 個點以後，會剩下 16 個點沒蓋到，因此他最少需要 8 個有兩個點的面去涵蓋到剩下的 16 個點，因此，要蓋滿 5^4 的控制集點數下限為 45。

1	2	2	2	2
2	1	2	2	2
2	2	1	2	2
2	2	2	1	2
2	2	2	2	1

公式

推測 4 維中沒有最小控制集點數公式

在 4 維中，我們已經確定：

2^4 的最小控制集點數是 4

3^4 的最小控制集點數確定是 9

4^4 的最小控制集點數可能是 28

5^4 的最小控制集點數是 45~65

其中又以 3^4 最為肯定，因為 9 是 3^4 的完美控制

因此我們可以利用 9 這個確定的數和其他已知的數去分析 4 維中是否存在最小控制集點數公式

n^4	2^4	是否成立	3^4	是否成立	4^4	是否成立	5^4	是否成立	總結
$(n-1)^3+1$	2	否	9	是	28	是	65	是，但太多	不成立
n^{n-1}	2	否	9	是	64	否	125	否	不成立
n^2	2	是	9	是	16	否	25	否	不成立

從上述幾項公式來看，可以大致確定4維並沒有簡單公式解 4 維情況下我們沒找到合理的公式，不過由 $N^4 = N^3 \times N$，把 N 元 4 維超立方看做 N 個 N^3 立方體再加上(一.1式)，可以推論 4 維密碼鎖的最小<u>控制集</u>點數的1個明顯上限公式：

$\gamma(N^4) = \gamma(N^3) \times N$ …… (二.3式)

在參考文獻中得知，n 元 4 維的超立方中，n =1和3時才能挑出<u>延伸樹</u>不重疊的<u>控制集</u>。4 維問題中的最小<u>控制集</u>數的下限：

$$\text{最小控制集點數} \geq \frac{n^4}{4n-3} \quad \text{.....(二.4式)}$$

三、完美控制的條件$K=(N^E-1)/(N-1)$

完美控制的定義中控制集的延伸樹彼此間無交集，也就是說相異控制點p、q其延伸樹不相交；若p、q點有3個維度以上數字相異，$x_i(p)\neq x_i(q)$、$x_j(p)\neq x_j(q)$、$x_r(p)\neq x_r(q)$，且v點為p點的延伸樹所覆蓋，則不失為一般性假設$x_i(p)=x_i(v)$且$x_j(p)=x_j(v)$，可得到$x_i(v)\neq x_i(q)$且$x_j(v)\neq x_j(q)$，說明了q點的延伸樹不會覆蓋v點，故任意2控制點若超過2個維度以上數字相異，延伸樹方不重疊。

n元k維度超立方中要有完美控制，每1控制點其延伸樹能涵蓋的點數必需能整除n^k，滿足$\frac{n^k}{k(n-1)+1}$為正整數，若是$k(n-1)+1=n^e$，可得到$k=\frac{n^e-1}{n-1}, e=1,2,3..$;在50屆科展「拉丁超立方體的完美控制情形」[參考資料三]中完整討論過e=2的情況，使用2個拉丁超立方構造了2控制點超過2維度相異，得到了完美控制，詳細檢查中發現非質數時構造的結果並不完全正確，並非由正交拉丁方陣建構的拉丁超立方都是在平面上呈正交拉丁方陣，故正交拉丁方陣法並不是一定成功，且n=2時是不存在正交拉丁方陣的， 此外e> 2的情況也沒有進一步的作法，但若是取e≥3， $k=1+n+n^2+..n^{e-1}$，我們預測會發生新的完美控制的情況，控制集內的點數$\gamma(n^k)=n^{k-e}$。

(一) 討論 E=3 時的完美控制

1. n=1，1^3有明顯完美控制，是明顯的我們不多討論。
2. n=2，2^7有完美控制，$\gamma(Q_7)=16$。[參考資料二 P7]。
3. n=3，3^{13}我們找出完美控制，其控制集內點數$\gamma(3^{13})=3^{10}$。
4. n=4，4^{21}是完美控制，21^4不是完美控制[參考資料三 P10]，$\gamma(4^{21})=4^{18}$。
5. n^{n^2+n+1}，是完美控制，$\gamma(n^{n^2+n+1})=n^{n^2+n-2}$。

(二) 討論 E＞3 時的完美控制

Jerzy Wojdyło在March 31, 2007於Southeast Missouri State University的一篇報告「Latin Squares, Cubes and Hypercubes」中有提出，For every $K>2$ and every $N>2$, there exist a set of K orthogonal Latin K-hypercubes of order N.[參考資料四 P39]，所以在$N>2$我們可以找到足夠的N階拉丁超立方體，若能找到E個K-E維N階拉丁超立方體，且任意平面上至少有2個拉丁超立方呈現正交拉丁方陣便能選取出K維度N階超立方中的完美控制點集，來證明「完美控制」的存在且其最小控制集點數$\gamma(N^K)=N^{K-E}$，延伸樹涵蓋點數$(N-1)\times K+1=N^E$，建構出 E>3 時完美控制的拉丁超立方體家族。

當N=2且E正整數時便是48屆全國科展中所提的$\gamma(Q_K)=2^{K-E}$，都是完美控制的情況。

四、N＝2，E＞2以非Nim(拈)遊戲之必勝法挑選出完美控制點集

Nim(拈)遊戲必勝點集做為控制集S={0，123，145，167，246，257，347，356，1247，1256，1346，1357，2345，2367，4567，1234567}，若以2進位圖形表示如下:

0000000 0	0000001	0000100	0000101	0010000	0010001	0010100	0010101	1000000	1000001	1000100	1000101	1010000	1010001	1010100	1010101 1357
0000010	0000011	0000110	0000111 123	0010010	0010011	0010110	0010111	1000010	1000011	1000110	1000111	1010010 257	1010011	1010110	1010111
0001000	0001001	0001100	0001101	0011000	0011001 145	0011100	0011101	1001000	1001001	1001100 347	1001101	1011000	1011001	1011100	1011101
0001010	0001011	0001110	0001111	0011010	0011011	0011110 2345	0011111	1001010	1001011 1247	1001110	1001111	1011010	1011011	1011110	1011111
0100000	0100001	0100100	0100101	0110000	0110001	0110100 356	0110101	1100000	1100001 167	1100100	1100101	1110000	1110001	1110100	1110101
0100010	0000011	0100110	0100111	0110010	0110011 1256	0110110	0110111	1100010	1100011	1100110 2367	1100111	1110010	1110011	1110110	1110111
0101000	0001001	0101100	0101101 1346	0111000	0111001	0111100	0111101	1101000	1101001	1101100	1101101	1111000 4567	1111001	1111100	1111101
0101010 246	0001011	0101110	0101111	0111010	0111011	0111110	0111111	1101010	1101011	1101110	1101111	1111010	1111011	1111110	1111111 1234567

換成 2 進位來觀察後可發現所選之點滿足下列關係:

$x_5=2x_1+x_2+x_3+x_4$ mod2，$x_6=x_1+2x_2+x_3+x_4$ mod2，$x_7=x_1+x_2+2x_3+x_4$ mod2 把這些控制點畫出如下，x_5、x_6、x_7 的結構方式類似拉丁超立方(4 維度中只有 3 維度保持拉丁超立方特質)，卻是完美控制。另定義 $x_1=2x_7+x_6+x_5+x_4$ mod2，$x_2=2x_6+x_5+x_4+x_7$ mod2，$x_3=2x_5+x_4+x_7+x_6$ mod2 也形成另一組成功的 16 個控制點如表中黃色數字之點，且也是完美控制；不難看出有許多控制點非 Nim 遊戲中的必勝點(例如 $125=001_2+010_2+101_2=110_2$) 。

0000000 0	0000001	0000100	0000101	0010000	0010001	0010100	0010101	1000000	1000001	1000100	1000101	1010000	1010001	1010100	1010101 1357
0000010	0000011	0000110	0000111	0010010	0010011 125	0010110	0010111	1000010	1000011	1000110 237	1000111	1010010	1010011	1010110	1010111
0001000	0001001	0001100	0001101	0011000	0011001	0011100 345	0011101	1001000	1001001 147	1001100	1001101	1011000	1011001	1011100	1011101
0001010	0001011	0001110	0001111 1234	0011010	0011011	0011110	0011111	1001010	1001011	1001110	1001111	1011010 2457	1011011	1011110	1011111
0100000	0100001	0100100	0100101 136	0110000	0110001	0110100	0110101	1100000	1100001	1100100	1100101	1110000 567	1110001	1110100	1110101
0100010	0100011	0100110	0100111	0110010	0110011	0110110 2356	0110111	1100010	1100011 1267	1100110	1100111	1110010	1110011	1110110	1110111
0101000	0101001	0101100	0101101	0111000	0111001 1456	0111100	0111101	1101000	1101001	1101100 3467	1101101	1111000	1111001	1111100	1111101
0101010 246	0101011	0101110	0101111	0111010	0111011	0111110	0111111	1101010	1101011	1101110	1101111	1111010	1111011	1111110	1111111 1234567

把其延伸樹畫出如下，可看出 16 個控制點蓋滿 2^7 格，延伸樹間沒有重疊:

0000000 0	0000001	0000100	0000101	0010000	0010001	0010100	0010101	1000000	1000001	1000100	1000101	1010000	1010001	1010100	1010101 1357
0000010	0000011	0000110	0000111	0010010	0010011 125	0010110	0010111	1000010	1000011	1000110 237	1000111	1010010	1010011	1010110	1010111
0001000	0001001	0001100	0001101	0011000	0011001	0011100 345	0011101	1001000	1001001 147	1001100	1001101	1011000	1011001	1011100	1011101
0001010	0001011	0001110	0001111 1234	0011010	0011011	0011110	0011111	1001010	1001011	1001110	1001111	1011010 2457	1011011	1011110	1011111
0100000	0100001	0100100	0100101 136	0110000	0110001	0110100	0110101	1100000	1100001	1100100	1100101	1110000 567	1110001	1110100	1110101
0100010	0100011	0100110	0100111	0110010	0110011	0110110 2356	0110111	1100010	1100011 1267	1100110	1100111	1110010	1110011	1110110	1110111
0101000	0101001	0101100	0101101	0111000	0111001 1456	0111100	0111101	1101000	1101001	1101100 3467	1101101	1111000	1111001	1111100	1111101
0101010 246	0101011	0101110	0101111	0111010	0111011	0111110	0111111	1101010	1101011	1101110	1101111	1111010	1111011	1111110	1111111 1234567

以上可知，最小控制集不會只有一組，且不一定要以必勝點方法選取。

（一） Q_7： **N=2 且 E=3**

2^7需要16個控制點由前述圖形中呈現$2^7=2^3\times2^4$，等同於把超立方切割成16個2^3立方塊，每個2^3立方塊中選取1個控制點，所以需要3個位置函數指出每個方塊中控制點所在的3維座標，以x_1~x_4來定義3函數y_1~y_3，做為控制點的7維座標，且要確定任2個控制點必需要有超過2維度座標不同，所以1個x_i至少要影響2個y_j。N^{N+1}中使用2個N-1維拉丁超立方做為選取控制點方法，在E=3時需要3個超立方但N=2中無法以拉丁超立方完成。

I. 以類正交拉丁方陣選取控制點

令 a_i、b_i、c_i $\in\{0,1\}$,i=1,2,3,4，則數對(a_i,b_i,c_i)有2^3=8種組合，扣除H={(0,0,0)、(0,0,1)、(0,1,0)、(1,0,0)}則恰好剩下{(1,1,1)、(0,1,1) 、(1,1,0)、(1,0,1)}4組，做為3個位置函數之變數x_1~x_4前的係數；H中的數對做為y_1~y_3的x_i係數時，會使得x_i只影響0或1個y_j，剩下的係數組$(a_i,a_j)\neq(b_i,b_j)$或$(a_i,a_j)\neq(c_i,c_j)$或$(b_i,b_j)\neq(c_i,c_j)$。令$S_2=\{0\le s\le 2^3-1, s\text{是整數}\}$，這裏$x_i(s)$是十進位數s換算成2進位後的第i位數字，1≤i≤n，建立3個做為選取控制點的位置函數：

$${}^4_2y_1\big(x_1(s),x_2(s),x_3(s),x_4(s)\big)=a_1x_1(s)+a_2x_2(s)+a_3x_3(s)+a_4x_4(s)\quad \text{mod } 2$$

$${}^4_2y_2\big(x_1(s),x_2(s),x_3(s),x_4(s)\big)=b_1x_1(s)+b_2x_2(s)+b_3x_3(s)+b_4x_4(s)\quad \text{mod } 2$$

$${}^4_2y_3\big(x_1(s),x_2(s),x_3(s),x_4(s)\big)=c_1x_1(s)+c_2x_2(s)+c_3x_3(s)+c_4x_4(s)\quad \text{mod } 2$$

我們把${}^d_ny_j\big(x_1(s),x_2(s),x_3(s),\dots x_d(s)\big)$簡寫成${}^d_ny_j(s)$。3個位置函數${}^d_ny_j(s)$為$x_1$至$x_4$的函數，但部份係數為0故<u>不是拉丁超立方</u>。

令控制點$C(s)=\big(x_1(s),x_2(s),x_3(s),x_4(s),{}^4_2y_1(s),{}^4_2y_2(s),{}^4_2y_3(s)\big)$即為所求。

4組係數的互換位置能定義出24組位置函數，故用此法可挑出24組在2^7中的控制集。

II. 證明任2點選定控制點$C(p)$、$C(q)$不在同一個平面上，即為完美控制：

i. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前4維度中只有1個維度不同:
若$x_i(p)\neq x_i(q)$則${}^4_2y_1(p)-{}^4_2y_1(q)=a_i(x_i(p)-x_i(q))\quad \text{mod } 2$，${}^4_2y_2(p)-{}^4_2y_2(q)=b_i(x_i(p)-x_i(q))\quad \text{mod } 2$、${}^4_2y_3(p)-{}^4_2y_3(q)=c_i(x_i(p)-x_i(q))\quad \text{mod } 2$，
由於$(a_i、b_i、c_i)\notin H$，也就是至少2個值不為0，不失為一般性說$a_i\neq0, b_i\neq0$，則${}^4_2y_1(p)\neq{}^4_2y_1(q)$，${}^4_2y_2(p)\neq{}^4_2y_2(q)$，也就$C(p)$、$C(q)$最少有3維度不同，不會在同一平面上，其延伸樹不重複疊蓋相同點。

ii. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前4維度中只有2個維度不同:
若$x_i(p)\neq x_i(q)$且$x_j(p)\neq x_j(q)$，因(a_i,b_i,c_i)、$(a_j,b_j,c_j)\notin H$，不失一般性假設$(a_i,a_j)\neq(b_i,b_j)$，
假設 ${}^4_2y_1(p)-{}^4_2y_1(q)=a_i(x_i(p)-x_i(q))+a_j(x_j(p)-x_j(q))\quad \text{mod } 2=0$
且 ${}^4_2y_2(p)-{}^4_2y_2(q)=b_i(x_i(p)-x_i(q))+b_j(x_j(p)-x_j(q))\quad \text{mod } 2=0$, 因$(a_i,a_j)\neq(b_i,b_j)$，得聯立方程式$x_i(p)-x_i(q)=0$且$x_j(p)-x_j(q)=0$，與前題矛盾，得知${}^4_2y_1(p)\neq{}^4_2y_1(q)$或 ${}^4_2y_2(p)\neq{}^4_2y_2(q)$，也就$C(p)$、$C(q)$最少有3維度不同，不在同一平面上，其延伸樹不同疊。

iii. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前4維度中有3個維度以上不同則2控制點不在同一平面上，不需證明。故得知可得到Q_7中的完美控制。

(二) Q_k： n=2 且 $k=2^e-1$ ，e是大於3的正整數:

I. 選取控制點:

令$a_{r_i} \in \{0,1\}$,i=1,2,3,..d-e,r=1,2,3⋯e，則數對$(a_{1_i},a_{2_i},a_{3_i} \dots a_{e_i})$有$2^e$種情況，為了使任意i、j存在r、t，使得$(a_{r_i},a_{r_j}) \neq (a_{t_i},a_{t_j})$我們扣除$H_e$={(0,0,0, … 0)、(1,0,0,0 … 0)、 (0,1,0,0 … 0)、(0,0,1,0..0)、(0,0,0,0..1)}有e+1種情況。

令$S_2^e=\{0 \le s \le 2^e-1, s是整數\}$，$x_i(s)$是十進位數s換算成2進位後的第i位數字，1≤i≤n，建立e個2階2^e-1-e維超立方體，$(a_{1_i},a_{2_i},a_{3_i} \dots a_{e_i})$有$2^e$種情況，扣除$H_e$，尚有$2^e$-e-1組，取$(a_{1_i},a_{2_i},a_{3_i} \dots a_{e_i}) \neq (a_{1_j},a_{2_j},a_{3_j} \dots a_{e_j})$，令

${}_2^d y_r(s)=a_{r_1}x_1(s)+a_{r_2}x_2(s)+a_{r_3}x_3(s)+\dots a_{r_d}x_d(s) \mod 2$, r=1,2,3⋯e，$d=2^e-1-e$

令控制點$C(s)=\left(x_1(s),x_2(s),x_3(s),\dots x_d(s),{}_2^d y_1(s),{}_2^d y_2(s),{}_2^d y_3(s) \dots {}_2^d y_e(s)\right)$即為所求。

II. 證明任2點選定控制點$C(p)$、$C(q)$不在同一個平面上，即為完美控制：

$(a_{1_i},a_{2_i},a_{3_i} \dots a_{e_i})$有$2^e$種情況，扣除$H_e$尚有$2^e$-e-1組，使得對任意i、j存在r、t，$(a_{r_i},a_{r_j}) \neq (a_{t_i},a_{t_j})$。

i. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前$d=2^e-e-1$維度中只有1個維度不同:
若$x_i(p) \neq x_i(q)$則${}_2^d y_r(p)-{}_2^d y_r(q)=a_{r_i}(x_i(p)-x_i(q)) \mod 2 \neq 0$，${}_2^d y_t(p)-{}_2^d y_t(q)=a_{t_i}(x_i(p)-x_i(q)) \mod 2 \neq 0$，也就$C(p)$、$C(q)$最少有3維度不同，不會在同一平面上，其延伸樹不重疊。

ii. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前$d=2^e-e-1$維度中只有2個維度不同: 若$x_i(p) \neq x_i(q)$且$x_j(p) \neq x_j(q)$存在r、t，使得$a_{r_i}:a_{r_j} \neq a_{t_i}:a_{t_j}$且若$a_{r_i}=0$則$a_{r_j}$、$a_{t_i} \neq 0$，假設${}_2^d y_r(p)-{}_2^d y_r(q)=a_{r_i}(x_i(p)-x_i(q))+a_{r_j}(x_j(p)-x_j(q)) \mod 2=0$且${}_2^d y_t(p)-{}_2^d y_t(q)=a_{t_i}(x_i(p)-x_i(q))+a_{t_j}(x_j(p)-x_j(q)) \mod 2=0$
得到$(x_i(p)-x_i(q)=0$且$(x_j(p)-x_j(q))=0$矛盾，故${}_2^d y_r(p) \neq {}_2^d y_r(q)$或${}_2^d y_t(p) \neq {}_2^d y_t(q)$，故最少有3個維度不相同不會在同一平面上，其延伸樹不同疊。

iii. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前d維度中有3個維度以上不同: 那2控制點不在同一平面上，不需證明。

五、$N=3$，$N^{1+N+N^2+..N^{E-1}}$，有完美控制的存在:

(一) 取$E=3$，3^{13}，找出13個旋鈕其上有3個位置(號碼)中的完美控制點集，$\gamma(3^{13})=3^{10}$並證明其是完美控制

$3^{13}=3^3\times3^{10}$，在維度13的超立方體中挑選出$\gamma(3^{13})=3^{10}$個控制點，每個控制點蓋住3^3個點，且延伸樹彼此不重疊的情況。N=3時，係數可以用0,1,2，係數組變多了可以更容易建立位置函數。

1. **選取3^{10}個控制點:**

令$S_3^{10}=\{0 \le s \le 3^{10}-1, s是整數\}$，$x_i(s)$是十進位數s換算成n進位後的第i位數字，$1 \le i \le 10$，令$a_{r_i} \in \{0,1,2\}$,i=1,2,3,..10,r=1,2,3，則數對$(a_{1_i},a_{2_i},a_{3_i})$有$3^3$種情況，為了使任意$i \neq j$存在r、t，使得$(a_{r_i},a_{r_j}) \neq (a_{t_i},a_{t_j})$且$(a_{r_i},a_{r_j}) \neq 2(a_{t_i},a_{t_j})$扣除只影0或1個位置及造成$x_i$及$x_j$平行的係數$H_3$={(0,0,0)、(1,0,0)、(0,1,0)、(0,0,1)、(2,0,0)、(0,2,0)、(0,0,2)、(2,2,0)、(0,2,2)、(2,0,2)、(2,2,2)}，滿足要求者尚有16組。令

$^{10}_{3}y_1(s)=a_{1_1}x_1(s)+a_{1_2}x_2(s)+a_{1_3}x_3(s)+\dots a_{1_{10}}x_{10}(s) \mod 3$,

$^{10}_{3}y_2(s)=a_{2_1}x_1(s)+a_{2_2}x_2(s)+a_{2_3}x_3(s)+\dots a_{2_{10}}x_{10}(s) \mod 3$,

$^{10}_{3}y_3(s)=a_{3_1}x_1(s)+a_{3_2}x_2(s)+a_{3_3}x_3(s)+\dots a_{3_{10}}x_{10}(s) \mod 3$

令控制點$C(s)=\left(x_1(s),x_2(s),x_3(s),\dots x_{10}(s),{}^{10}_{3}y_1(s),{}^{10}_{3}y_2(s),{}^{10}_{3}y_3(s)\right)$即為所求。用此法建造的完美控制的最小控制集有$P_{10}^{16}$種。

2. **證明任2點選定控制點$C(p)$、$C(q)$不在同一個平面上，即為完美控制：**

I. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前10維度中只有1個維度不同:
若$x_i(p) \neq x_i(q)$，因a_{1_i}、a_{2_i}、a_{3_i}最多同時1個為0，故存在$a_{r_i}(x_i(p)-x_i(q)) \mod 3 \neq 0$，$a_{t_i}(x_i(p)-x_i(q)) \mod 3 \neq 0$，也就${}^{10}_{3}y_r(p) \neq {}^{10}_{3}y_r(q)$且${}^{10}_{3}y_t(p) \neq {}^{10}_{3}y_t(q)$，$C(p)$、$C(q)$最少有3維度不同，不會在同一平面上，其延伸樹不同疊。

II. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前10維度中只有2個維度不同:
若$x_i(p) \neq x_i(q)$且$x_j(p) \neq x_j(q)$存在r、t，使得$(a_{r_i},a_{r_j}) \neq (a_{t_i},a_{t_j})$且$(a_{r_i},a_{r_j}) \neq 2(a_{t_i},a_{t_j})$。
假設${}^{10}_{3}y_r(p)-{}^{10}_{3}y_r(q)=a_{r_i}(x_i(p)-x_i(q))+a_{r_j}(x_j(p)-x_j(q)) \mod 3=0$且${}^{10}_{3}y_t(p)-{}^{10}_{3}y_t(q)=a_{t_i}(x_i(p)-x_i(q))+a_{t_j}(x_j(p)-x_j(q)) \mod 3=0$
得到$x_i(p)-x_i(q)=0$且$x_j(p)-x_j(q)=0$矛盾，故${}^{10}_{3}y_r(p) \neq {}^{10}_{3}y_r(q)$或${}^{10}_{3}y_t(p) \neq {}^{10}_{3}y_t(q)$，故2控制點最少有3個維度不相同不會在同一平面上，其延伸樹不同疊。

III. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前10維度中有3個維度以上不同: 那2控制點不在同一平面上，不需證明。故得知可得到3^{13}中的完美控制。

(二)$N=3$，E為正整數，$K=1+N+N^2+\cdots N^{E-1}$，$3^{1+3+3^2+..3^{E-1}}$有完美控制

1. **選取$3^{1+3+3^2+..3^{E-1}-E}$個控制點**

令$S_3^d=\{0 \le s \le 3^d-1, s是整數\}, d=1+3+3^2+\cdots 3^{e-1}-e$，$x_i(s)$是十進位數s換算成n進位後的第i位數字，$1 \le i \le n$，令$a_{r_i} \in \{0,1,2\}$,i=1,2,3,..d,r=1,2,3,..e，則數對$(a_{1_i},a_{2_i},a_{3_i}..a_{e_i})$有$3^e$種組合，為了對任意$i \neq j$存在r、t，使得$(a_{r_i},a_{r_j}) \neq (a_{t_i},a_{t_j})$且

$(a_{r_i}, a_{r_j}) \neq 2(a_{t_i}, a_{t_j})$我們扣除

$H_3^e=\left\{\begin{matrix}(0,0,0,..0)、(1,0,0,..0)、(0,1,0,..0)、..(0,0,..1)、(2,0,0,..0)、(0,2,0,..0)、(0,0,..2)、\\ (2,2,0,0,..0)、(0,2,2,0,..0)、(2,0,2,0,..0)、\ldots(2,2,2,\ldots 2)\end{matrix}\right\}$，滿足要求者

尚有3^e-(1+e+2^e-1)= 3^e-2^e-e組。令$(3^e-2^e-e)-d=3^e-(1+3+3^2+\cdots 3^{e-1})-2^e=1+3+3^2+\cdots 3^{e-1}-2^e+1=1+3+3^2+\cdots 3^{e-1}-(2^e-1)=(1+3+3^2+\cdots 3^{e-1})-(1+2+2^2+\cdots 2^{e-1})>0$。取$(a_{1_i},a_{2_i},a_{3_i}..a_{e_i}) \neq (a_{1_j},a_{2_j},a_{3_j}..a_{e_j})$

${}_3^d y_r(s)=a_{r_1}x_1(s)+a_{r_2}x_2(s)+a_{r_3}x_3(s)+\ldots a_{r_d}x_d(s) \mod 3$, r=1,2,3⋯.e

令控制點$C(s)=\left(x_1(s), x_2(s), x_3(s), \ldots x_d(s), {}_3^d y_1(s), {}_3^d y_2(s), {}_3^d y_3(s), \ldots . {}_3^d y_e(s)\right)$即為所求。

2. 證明任2點選定控制點$C(p)$、$C(q)$不在同一個平面上，即為完美控制：

I.若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前d維度中只有1個維度不同:

若$x_i(p) \neq x_i(q)$，因a_{1_i}、 a_{2_i}、a_{3_i}、$..a_{e_i}$最少同時2個 $\neq 0$，故存在 $a_{r_i}(x_i(p)-x_i(q)) \mod 3 \neq 0$， $a_{t_i}(x_i(p)-x_i(q)) \mod 3 \neq 0$，也就${}_3^d y_r(p) \neq {}_3^d y_r(q)$且${}_3^d y_t(p) \neq {}_3^d y_t(q)$，$C(p)$、$C(q)$最少有3

維度不同，不會在同一平面上，其延伸樹不同疊。

II. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前d維度中只有2個維度不同:

若$x_i(p) \neq x_i(q)$且$x_j(p) \neq x_j(q)$存在r、t，使得$(a_{r_i}, a_{r_j}) \neq (a_{t_i}, a_{t_j})$且$(a_{r_i}, a_{r_j}) \neq 2(a_{t_i}, a_{t_j})$。

假設${}_3^d y_r(p)-{}_3^d y_r(q)=a_{r_i}(x_i(p)-x_i(q))+a_{r_j}(x_j(p)-x_j(q)) \mod 3=0$且${}_3^d y_t(p)-{}_3^d y_t(q)=a_{t_i}(x_i(p)-x_i(q))+a_{t_j}(x_j(p)-x_j(q)) \mod 3=0$

得到$x_i(p)-x_i(q)=0$且$x_j(p)-x_j(q)=0$矛盾，故${}_3^d y_r(p) \neq {}_3^d y_r(q)$或${}_3^d y_t(p) \neq {}_3^d y_t(q)$，故2控制點最少有3個維度不相同不會在同一平面上，其延伸樹不同疊。

III.若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前d維度中有3個維度以上不同: 那2控制點不在同一平面上，不需證明。

故得知可得到3^k中的完美控制。

考慮若是取n階拉丁方陣 ${}_nw(x, y)=x+y \mod n$，則$x_1(s)+x_2(s)+x_3(s)\ldots x_d(s) \mod n=$

${}_nw\left({}_nw\left({}_nw(x_1(s), x_2(s)), x_3(s)\right), \ldots x_d(s)\right)$，是1個n階d維拉丁超立方，其係數皆不為0且和n互質，而上述的函數${}_3^d y_r(s)$在某些維度上係數出現0，故不呈拉丁超立方的型態。

我們建造了完美控制的控制集，所使用的控制點並非都是拉丁超立方，由以上例子得知完美控制並非都得符合拉丁超立方。

六、$N=4$，$N^{1+N+N^2+..N^{E-1}}$，有完美控制的存在:以拉丁超立方選取控制集

五十屆全國中小學科學展覽「拉丁超立方體的完美控制情況」提出以2個在各平面上相互正交的n-1維拉丁超立方來選取控制集，

$$x_n(s) \equiv x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} \bmod n$$
$$x_{n+1}(s) \equiv x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + (n-1)x_{n-1} \bmod n$$

但限於解聯立方程，所以要求n是質數，要用此法定出3個以上位置函數且在立方上正交會更困難，尤其在N不是質數時和E>3需建立超立方的正交。利用「Latin Squares, Cubes and Hypercubes 」[參考資料四 P32]中 $W_3^{n+1} = S(V_3^n(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_{n+1}), \cdots W_n^{n+1} = S(V_n^n(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_{n+1})$的概念，可以建立N+1個N+1維拉丁超立方體。利用其中一部分的觀念，首先找出2個正交的n階拉丁方陣為擴展的基底: ${}_nL(x,y)$、 ${}_nS(x,y)$:

${}_4L(x,y)=$

0	1	2	3
1	0	3	2
2	3	0	1
3	2	1	0

${}_4S(x,y)=$

0	1	2	3
3	2	1	0
1	0	3	2
2	3	0	1

${}_4L \oplus {}_4S=$

00	11	22	33
13	02	31	20
21	30	03	12
32	23	10	01

不難檢查出 ${}_nL(x,y)$、 ${}_nS(x,y)$其結合(superimposed)後可組成一個n階正交拉丁方陣。

再建造3個n階拉丁立方體，令

${}^3_n\alpha_1(x_1,x_2,x_3)= {}_nL({}_nL(x_1,x_2),x_3)$，${}^3_n\alpha_2(x_1,x_2,x_3)= {}_nS({}_nL(x_1,x_2),x_3)$，

${}^3_n\alpha_3(x_1,x_2,x_3)= {}_nL({}_nS(x_1,x_2),x_3)$

把3個拉丁立方體結合(superimposed)則${}^3_4\alpha_1 \oplus {}^3_4\alpha_3 \oplus {}^3_4\alpha_2(x_1,x_2,x_3) =$

第1層

000	111	222	333
113	002	331	220
221	330	003	112
332	223	110	001

第2層

131	020	313	202
022	133	200	311
310	201	132	023
203	312	021	130

第3層

212	303	030	121
301	210	123	032
033	122	211	300
120	031	302	213

第4層

323	232	101	010
230	321	012	103
102	013	320	231
011	100	233	322

不難驗證形成1組正交拉丁立方

第1層

0	21	42	63
23	2	61	40
41	60	3	22
62	43	20	1

第2層

29	8	55	34
10	31	32	53
52	33	30	11
35	54	9	28

第3層

38	51	12	25
49	36	27	14
15	26	37	48
24	13	50	39

第4層

59	46	17	4
44	57	6	19
18	7	56	45
5	16	47	58

繼續建造4個n階拉丁4維超立方:

${}^4_n\alpha_1(x_1,x_2,x_3,x_4)= {}_nL({}^3_n\alpha_1(x_1,x_2,x_3),x_4)$，　${}^4_n\alpha_2(x_1,x_2,x_3,x_4)= {}_nL({}^3_n\alpha_2(x_1,x_2,x_3),x_4)$，

${}^4_n\alpha_3(x_1,x_2,x_3,x_4)= {}_nL({}^3_n\alpha_3(x_1,x_2,x_3),x_4)$，　${}^4_n\alpha_4(x_1,x_2,x_3,x_4)= {}_nS({}^3_n\alpha_3(x_1,x_2,x_3),x_4)$

繼續下去可以建立d個n階d維的拉丁超立方且形成正交，我們把

${}^{d}_{n}\alpha_j(x_1(s), x_2(s), x_3(s), \ldots x_d(s))$簡寫成${}^{d}_{n}\alpha_j(s)$,是1個n階d維拉丁超立方。觀察 ${}^{3}_{4}\alpha_2 \oplus {}^{3}_{4}\alpha_3(x_1, x_2, x_3) =$

第1層

00	11	22	33
13	02	31	20
31	30	03	12
32	23	10	01

第2層

31	20	13	02
22	33	00	11
10	01	32	23
03	12	21	30

第3層

12	03	30	21
01	10	23	32
33	22	11	00
20	31	02	13

第4層

23	32	01	10
30	21	12	03
02	13	20	31
11	00	33	22

在3個方向的平面上都各自形成正交拉丁方陣。$4^{21}=4^{18}\times4^{3}$，我們需要在4^{18}個立方塊中各自選定1個控制點，選出的方式可以利用上述${}^{3}_{4}\alpha_2 \oplus {}^{3}_{4}\alpha_3$的特殊關係，在各平面上呈正交拉丁方陣。

(一) 取$E = 3$，4^{21}，找出21個旋鈕其上有4個位置(號碼)中的完美控制點集，$\gamma(4^{21})=4^{18}$並證明其是完美控制

n^{n^2+n+1}，$n = 4$，4^{21}，預測也會有完美控制，在[參考資料三 P10]中指出因為21元4維共需2401個點，而每個點會出現在6個平面上，故總共出現14406次。總共只有2646個平面，$14406 \div 2646 > 1$，故不會是完美控制。

$4^{21}=4^{3}\times4^{18}$，所以要在維度21的4階超立方體中挑選出$\gamma(4^{21})= 4^{18}$個控制點，每個控制點蓋住4^{3}個點，而延伸樹彼此不重疊的情況。

1. 選取4^{18}個控制點:

令$S_4^{18}=\{0 \le s \le 4^{18}-1, s是整數\}$，$x_i(s)$是十進位數s換算成4進位後的第i位數字，$1\le i\le 10$，由於4不是質數，在設定拉丁超立方$a_{r_1}x_1(s)+a_{r_2}x_2(s) + a_{r_3}x_3(s)+\ldots a_{r_d}x_d(s) \mod 4$時係數只能用0,1在解聯立方程時才能成功。令$a_{r_i} \in \{0,1\}$,i=1,2,3,..,r=1,2,3，則數對$(a_{1_i},a_{2_i})$有$2^3$種情況故可用的組合只有{(1,0,0)、(0,1,0)、(0,0,1)、(1,1,0)、(1,0,1)、(0,1,1)、(1,1,1)}7個不足做為18個變數x_i前的係數。回想N=2時的技巧，3個位置函數 $y_r(s)$可以解決4個$x_i(s)$的情況，那重複相同程序可以解決更多個變數。令 $(a_{1_i},a_{2_i},a_{3_i}..a_{5_i})\neq(0,0,0..0)$，$a_{r_i} \in \{0,1\}$,i=1,2,3..18，r=1,2,3,..5，令 $y_r(s)=a_{r_1}x_1(s)+a_{r_2}x_2(s) + a_{r_3}x_3(s)+\ldots a_{r_{18}}x_{18}(s) \mod 4$, 建立了5個函數 $y_r(s)$， 且保持著當某一個i，$x_i(p)\neq x_i(q)$時，有1個以上 $y_r(p)\neq y_r(q)$，再令$(b_{1_i},b_{2_i},b_{3_i})\neq(0,0,0)$，$b_{t_i} \in \{0,1\}$,i=1,2,3..5，t=1,2,3

$z_t(s)=b_{t_1}y_1(s)+b_{t_2}y_2(s) + b_{t_3}y_3(s)+\ldots b_{t_5}y_5(s) \mod 4$保持著當某一個i， $y_r(p)\neq y_r(q)$時，有1個以上 $z_t(p)\neq z_t(q)$， 再令$(c_{1_i},c_{2_i})\neq(0,0)$，$c_{v_i} \in \{0,1\}$,i=1,2,3，v=1,2

$w_v(s)=c_{v_1}z_1(s)+c_{v_2}z_2(s) + c_{v_3}z_3(s) \mod 4$ 令

${}^{18}_{4}\omega_3(s) = {}^{18}_{4}\omega_3\left(x_1(s), x_2(s), x_3(s), \dots x_{18}(s)\right) = {}^{18}_{4}\alpha_1(s) = x_1(s) + x_2(s) + x_3(s), \dots + x_{18}(s) \mod 4$

${}^{18}_{4}\omega_i(s) = {}^{18}_{4}\omega_i\left(x_1(s), x_2(s), x_3(s), \dots x_{18}(s)\right) = {}^{3}_{4}\alpha_{i+1}\left(w_v(s), w_v(s), 0\right)$,i=1,2

令控制點$C(s) = \left(x_1(s), x_2(s), x_3(s), \dots x_{10}(s), {}^{18}_{4}\omega_1(s), {}^{18}_{4}\omega_2(s), {}^{18}_{4}\omega_3(s)\right)$即為所求。${}^{18}_{4}\omega_i(s)$為4階18維度的拉丁超立方體。

2. 證明任2點選定控制點$C(p)$、$C(q)$不在同一個平面上，即為完美控制：

I. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前10維度中有3個維度以上不同: 那2控制點不在同一平面上，不需證明。

II. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前18維度中只有2個維度不同:
若$x_i(p) \neq x_i(q)$且$x_j(p) \neq x_j(q)$且存在r、t，使得$(a_{r_i}, a_{r_j}) \neq (a_{t_i}, a_{t_j})$且$(a_{r_i}, a_{r_j}) \neq (0,0)$、$(a_{t_i}, a_{t_j}) \neq (0,0)$，假設

$y_r(p) - y_r(q) = a_{r_i}(x_i(p) - x_i(q)) + a_{r_j}(x_j(p) - x_j(q)) \mod 4 = 0$且

$y_t(p) - y_t(q) = a_{t_i}(x_i(p) - x_i(q)) + a_{t_j}(x_j(p) - x_j(q)) \mod 4 = 0$

得到$x_i(p) - x_i(q) = 0$且$x_j(p) - x_j(q) = 0$矛盾，故 $y_r(p) \neq y_r(q)$或 $y_t(p) \neq y_t(q)$

i. 若 $y_r(p) \neq y_r(q)$且 $y_t(p) \neq y_t(q)$，存在g,h使得$(b_{g_r}, b_{g_t}) \neq (b_{h_r}, b_{h_t})$且$(b_{g_r}, b_{g_t}) \neq (0,0)$，$(b_{h_r}, b_{h_t}) \neq (0,0)$，假設

$z_g(p) - z_g(q) = b_{g_r}(y_r(p) - y_r(q)) + b_{g_t}(y_t(p) - y_t(q)) \mod 4 = 0$且

$z_h(p) - z_h(q) = b_{h_r}(y_r(p) - y_r(q)) + b_{h_t}(y_t(p) - y_t(q)) \mod 4 = 0$得到

$y_r(p) - y_r(q) = 0$且 $y_t(p)1 \; y_t(q) = 0$ 矛盾，故 $z_g(p) \neq z_g(q)$或 $z_h(p) \neq z_h(q)$

ii. 若 $y_r(p) \neq y_r(q)$但 $y_t(p) = y_t(q)$，存在g使得 $b_{g_r}(y_r(p) - y_r(q)) \mod 4 \neq 0$，得到 $z_g(p) \neq z_g(q)$

也就是 $z_g(p) \neq z_g(q)$或 $z_h(p) \neq z_h(q)$。同樣程序可最後得到存在v、u使得 $w_v(p) \neq w_v(q)$ 或 $w_u(p) \neq w_u(q)$；

因${}^{3}_{4}\alpha_2$與${}^{3}_{4}\alpha_3$ 為拉丁立方且在各平面上為正交拉丁方陣故${}^{3}_{4}\alpha_2\left(w_v(s), w_u(s), 0\right) \neq {}^{3}_{4}\alpha_2\left(w_v(s), w_u(s), 0\right)$或${}^{3}_{4}\alpha_3\left(w_v(s), w_u(s), 0\right) \neq {}^{3}_{4}\alpha_3\left(w_v(s), w_u(s), 0\right)$。
也就是$C(p)$、$C(q)$有3個維度以上不同。

III. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前18維度中只有1個維度不同:

若$x_i(p) \neq x_i(q)$，${}^{18}_{4}\omega_i(p) - {}^{18}_{4}\omega_i(q) = x_i(p) - x_i(q) \neq 0$，

又因$\left(a_{1_i}, a_{2_i}, a_{3_i} .. a_{5_i}\right) \neq (0,0,0..0)$，故存在$a_{r_i}(x_i(p) - x_i(q)) \mod 4 \neq 0$，也就 $y_r(p) \neq y_r(q)$，同理存在$b_{t_r}(y_r(p) - y_r(q)) \mod 4 \neq 0$，推得 $z_t(p) \neq z_t(q)$，再繼續

$c_{v_t}(z_t(p) - z_t(q)) \mod 4 \neq 0$，推得 $w_v(p) \neq w_v(q)$又${}^{3}_{4}\alpha_2$與${}^{3}_{4}\alpha_3$ 為拉丁立方且在各平

面上為正交拉丁方陣故${}^{3}_{4}\alpha_2(\ w_v(s),\ w_v(s),0) \neq {}^{3}_{4}\alpha_2(\ w_v(s),\ w_v(s),0)$或

${}^{3}_{4}\alpha_3(\ w_v(s),\ w_v(s),0) \neq {}^{3}_{4}\alpha_3(\ w_v(s),\ w_v(s),0)$。

$C(p)$、$C(q)$最少有3維度不同，不會在同一平面上，其延伸樹不同疊。

故2控制點最少有3個維度不相同不會在同一平面上，其延伸樹不同疊。

故得知可得到4^{21}中的完美控制。

（二） $N=4$，E為正整數，$K=1+N+N^2+\cdots N^{E-1}$，$4^{1+4+4^2+..4^{E-1}}$有完美控制，以拉丁超立方法來選取控制點

在上節中選取控制點時利用了${}^{3}_{4}\alpha_2$與${}^{3}_{4}\alpha_3$為拉丁立方且在各平面上為正交拉丁方陣的特性，但並<u>不是任意的2個拉丁立方皆有此特性</u>，尋找能形成此類的正交拉丁方陣便成為一般化再擴展的阻礙，我們再度修正選取控制點的方法。由於${}^{3}_{4}\alpha_1$、${}^{3}_{4}\alpha_2$與${}^{3}_{4}\alpha_3$拉丁立方是由2個正交的4階拉丁方陣來建構，開始時我們以為E=3應以正交拉丁立方來解決的看法反而不容易解決，所以解決的方式應該退回到2個正交拉丁方陣，以前面的位置函數做為正交拉丁方陣的變數來選取控制點，用以構造拉丁超立方法的完美控制。

1. 選取$4^{1+4+4^2+..4^{E-1}-E}$個控制點 ，$d=1+n+n^2+\cdots n^{e-1}-e$, $S_4^d=\{0 \le s \le 4^d-1, s$是整數$\}$

設定係數$a_{r_i}^m \in \{0,1\}$做為第m層r個函數的i個變數之係數，且其個數的對應關係如下表

m=	1	2	3	4	5	6	7	8
r(m)=	1,2	1,2,3	$1\le r\le 4$	$1\le r\le 6$	$1\le r\le 9$	$1\le r\le 13$	$1\le r\le 19$	$1\le r\le 28$
i(m)=	1,2,3	1,2,3,4	$i\le 6$	$i\le C_1^r+\frac{r}{2}$=9	$C_1^r+\frac{r}{2}$=13.5	$C_1^r+\frac{r}{2}$=19	$C_1^r+\frac{r}{2}$=28.5	$C_1^r+\frac{r}{2}$=42

令$y_1^1(s)=a_{1_1}^1 y_1^2(s)+a_{1_2}^1 y_2^2(s)+a_{1_3}^1 y_3^2(s)$ ，$y_2^1(s)=a_{2_1}^1 y_1^2(s)+a_{2_2}^1 y_2^2(s)+a_{2_3}^1 y_3^2(s)$

$y_r^m(s)=\sum_{i=1}^{i(m)} a_{r_i}^m y_i^{m+1}(s)$,r=1,2,3.. r(m) ， $a_{1_i}^m, a_{2_i}^m, a_{3_i}^m, a_{4_i}^m..a_{r_i}^m$ 中對任意i, 要求

$1 \le \sum_{r=1}^{r(m)} a_{r_i}^m \le 2$為1且$\sum_{i=1}^{i(m)} a_{r_i}^m \le 2$，當$i \neq j$,$(a_{1_i}^m, a_{2_i}^m, a_{3_i}^m, a_{4_i}^m..a_{r_i}^m) \neq (a_{1_j}^m, a_{2_j}^m, a_{3_j}^m, a_{4_j}^m..a_{r_j}^m)$。

例如第2層中3個函數其第i個變數前的係數可取$(a_{1_i}^2, a_{2_i}^2, a_{3_i}^2) \in \{(0,0,1)、(0,1,0)、(1,0,0)、(1,1,0)\}$、$(a_{1_i}^3, a_{2_i}^3, a_{3_i}^3, a_{4_i}^3) \in \{(1,0,0,0)、(0,1,0,0)、(0,0,1,0)、(0,0,0,1)、(1,1,0,0)、(0,0,1,1)\}$

當$i(m) \le d = 1+4+4^2+..4^{E-1}-E < i(m+1)$，令$y_i^{m+1}(s)=x_i(s)$,i=1,2,3..d

$y_i^{m+1}(s)=0, i=d+1, d+2,..i(m+1)-1$ ，${}^{d}_{n}\beta_1(s)={}_{n}L(y_1^1(s), y_2^1(s))$，${}^{d}_{n}\beta_2(s)={}_{n}S(y_1^1(s), y_2^1(s))$，

${}^{d}_{n}\beta_i(s)={}^{d}_{n}\alpha_i(s)$，i=3,4,5⋯e， ${}_{n}L(x,y)$與 ${}_{n}S(x,y)$是任意的正交n階拉丁方陣，$n\neq 6$。

最後令控制點$C(s)=\left(x_1(s),x_2(s),x_3(s),\ldots x_d(s),{}^{d}_{n}\beta_1(s),{}^{d}_{n}\beta_2(s),{}^{d}_{n}\beta_3(s),..{}^{d}_{n}\beta_e(s)\right)$，${}^{d}_{n}\beta_i(s)$皆為d維n階拉丁超方立，且${}^{d}_{n}\beta_1(s)$與${}^{d}_{n}\beta_2(s)$結合後以各平面檢查形成正交拉丁方陣。

2. 我們要說明任二個控制點$C(p)$、$C(q)$不屬於同一個3維度的立方塊或2維度的平面內。

在n階拉丁方陣中若選定點 $p(x_1,y_1)$ **而與其不同行及列共有 (n-1)²個點** $q(x_2,y_2)$ ，q 點所在位置的值**有n-1個與** p 相同，有**(n-1)²-(n-1)與** p 相異，而 ${}_3L\oplus{}_3S$正交時，若 ${}_nL(x_1,y_1)={}_nL(x_2,y_2)$則 ${}_nS(x_1,y_1)\neq{}_nS(x_2,y_2)$，示例如下圖:

${}_3L(x,y)=$

0	1	2
2	0	1
1	2	0

${}_3S\ (x,y)=$

0	1	2
1	2	0
2	0	1

${}_3L\oplus{}_3S=$

01	12	20
22	00	11
10	21	02

故 ${}^{d}_{n}\beta_1(s)={}_nL(y_1^1(s),y_2^1(s))$，${}^{d}_{n}\beta_2(s)={}_nS(y_1^1(s),y_2^1(s))$，故$y_1^1(p)\neq y_1^1(q)$或$y_2^1(p)\neq y_2^1(q)$時 ${}^{d}_{n}\beta_1(p)\neq{}^{d}_{n}\beta_1(q)$或${}^{d}_{n}\beta_2(p)\neq{}^{d}_{n}\beta_2(q)$。

I. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前d維度中有3個維度以上不同: 那2控制點不在同一平面上，不需證明，$d=\mathbf{1+4+4^2+..4^{E-1}-E}$。

II. 若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前d維度中只有2個維度不同:

當$i(m)\leq d=\mathbf{1+4+4^2+..4^{E-1}-E}<i(m+1)$，令$y_i^{m+1}(s)=x_i(s)$,i=1,2,3..d

若$x_i(p)\neq x_i(q)$且$x_j(p)\neq x_j(q)$且存在v、t，使得$\left(a^m_{v_i},a^m_{t_i}\right),\left(a^m_{v_j},a^m_{t_j}\right)\in\{(0,1)、(1,0)、(1,1)\}$，

假設$y_v^m(p)-y_v^m(q)=a^m_{v_i}(x_i(p)-x_i(q))+a^m_{v_j}(x_j(p)-x_j(q))\mod 4=0$ 且

$y_t^m(p)-y_t^m(q)=a^m_{t_i}(x_i(p)-x_i(q))+a^m_{t_j}(x_j(p)-x_j(q))\mod 4=0$

得到$x_i(p)-x_i(q)=0$且$x_j(p)-x_j(q)=0$矛盾，故$y_v^m(p)\neq y_v^m(q)$或$y_t^m(p)\neq y_t^m(q)$，得到最少存在某1個r 使得$y_r^m(p)\neq y_r^m(q)$。

i. 若存在3個或3個以上的數r,v,t，使得$y_v^m(p)\neq y_v^m(q)$且$y_t^m(p)\neq y_t^m(q)$且$y_r^m(p)\neq y_r^m(q)$，因$\sum_{i=1}^{i(m-1)}a^{m-1}_{r_i}\leq 2$存在g,h使得$\left(a^{m-1}_{g_v},a^{m-1}_{h_v}\right),\left(a^{m-1}_{g_r},a^{m-1}_{h_r}\right)\in\{(0,1)、(1,0)、(1,1)\}$，且

$y_g^{m-1}(p)-y_g^{m-1}(q)=a^{m-1}_{g_v}\left(y_v^m(p)-y_v^m(q)\right)+a^{m-1}_{g_r}(y_r^m(p)-y_r^m(q))\mod 4$ ，

$y_h^{m-1}(p)-y_h^{m-1}(q)=a^{m-1}_{h_v}\left(y_v^m(p)-y_v^m(q)\right)+a^{m-1}_{h_r}(y_r^m(p)-y_r^m(q))\mod 4$ 假設

$a^{m-1}_{g_v}(y_v(p)-y_v(q))+a^{m-1}_{g_r}(y_r(p)-y_r(q))\mod 4=0$且$a^{m-1}_{h_v}(y_v(p)-y_v(q))+$

$a^{m-1}_{h_r}(y_r(p)-y_r(q))\mod 4=0$

$y_v^m(p)-y_v^m(q)=0$且$y_r^m(p)-y_r^m(q)=0$ 矛盾，故$y_g^{m-1}(p)\neq y_g^{m-1}(q)$或$y_h^{m-1}(p)\neq y_h^{m-1}(q)$得到最少存在某1個r 使得$y_r^{m-1}(p)\neq y_r^{m-1}(q)$。

ii. 若存在2個數r,v，使得$y_v^m(p) \neq y_v^m(q)$且$y_r^m(p) \neq y_r^m(q)$，存在g,h使得

$(a_{g_v}^{m-1}, a_{h_v}^{m-1}), (a_{g_r}^{m-1}, a_{h_r}^{m-1}) \in \{(0,1)、(1,0)、(1,1)\}$，且

$y_g^{m-1}(p) - y_g^{m-1}(q) = a_{g_v}^{m-1}(y_v^m(p) - y_v^m(q)) + a_{g_r}^{m-1}(y_r^m(p) - y_r^m(q)) \mod 4$ ，

$y_h^{m-1}(p) - y_h^{m-1}(q) = a_{h_v}^{m-1}(y_v^m(p) - y_v^m(q)) + a_{h_r}^{m-1}(y_r^m(p) - y_r^m(q)) \mod 4$ 假設

$a_{g_v}^{m-1}(y_v(p)-y_v(q)) + a_{g_r}^{m-1}(y_r(p)-y_r(q)) \mod 4 = 0$且$a_{h_v}^{m-1}(y_v(p)-y_v(q)) +$

$a_{h_r}^{m-1}(y_r(p)-y_r(q)) \mod 4 = 0$

$y_v^m(p) - y_v^m(q) = 0$且$y_r^m(p) - y_r^m(q) = 0$ 矛盾，故$y_g^{m-1}(p) \neq y_g^{m-1}(q)$或$y_h^{m-1}(p) \neq y_h^{m-1}(q)$得到最少存在某1個r 使得$y_r^{m-1}(p) \neq y_r^{m-1}(q)$。

iii. 若僅存在1個數v，使得$y_v^m(p) \neq y_v^m(q)$，則存在g使得$a_{g_v}^{m-1} = 1$且

$y_g^{m-1}(p) - y_g^{m-1}(q) = a_{g_v}^{m-1}(y_v^m(p) - y_v^m(q)) \mod 4 \neq 0$，

得到最少存在某1個g 使得$y_g^{m-1}(p) \neq y_g^{m-1}(q)$。

繼續此程序最得可得$y_1^1(p) \neq y_1^1(q)$或$y_2^1(p) \neq y_2^1(q)$。

以上皆可說明$y_1^1(p) \neq y_1^1(q)$或$y_2^1(p) \neq y_2^1(q)$則${}_4^d\beta_1(p) \neq {}_4^d\beta_1(q)$或${}_4^d\beta_2(p) \neq {}_4^d\beta_2(q)$也就是$C(p)$與$C(q)$有3個維度以上不同。

III.若是控制點$C(p)$、$C(q)$在前d維度中只有1個維度不同:

若$x_i(p) \neq x_i(q)$，則存在g使得$a_{g_v}^m = 1$且

$y_g^m(p) - y_g^m(q) = a_{g_v}^m(y_v^{m+1}(p) - y_v^{m+1}(q)) \mod 4 \neq 0$，故$y_g^m(p) \neq y_g^m(q)$。

繼續此程序最得可得$y_1^1(p) \neq y_1^1(q)$或$y_2^1(p) \neq y_2^1(q)$故${}_4^d\beta_1(p) \neq {}_4^d\beta_1(q)$或${}_4^d\beta_2(p) \neq {}_4^d\beta_2(q)$，

又${}_4^d\beta_i(s) = {}_4^d\alpha_i(s)$，i=3,4,5⋯e，皆是4階d維拉丁超立方，在只有1維度不同時${}_4^d\beta_i(p) \neq {}_4^d\beta_i(p)$，i=3,4,5⋯e，所以$C(p)$、$C(q)$最少有3維度不同，不會在同一平面上，其延伸樹不同疊。

我們發現此節所使用的拉丁超立方的選取方法，也適用於前面N=3的情況中，只要存在2個N階的正交拉丁方陣，便可使用本節的方法。

七、當N是大於2的非6正整數，E是大於2正整數，$K=\frac{N^E-1}{N-1} = 1 + N + N^2 + \cdots + N^{E-1}$，

構造 N 元K維的<u>完美控制</u>情形，$\gamma(N^K)= N^{K-E}$

因n＞2且為非6的正整數時，皆存在2個結合後正交的拉丁方陣，故前節所使用的方法可以找出e個k-e維度拉丁超立方，且${}^{d}_{n}\beta_1$與${}^{d}_{n}\beta_2$在各平面上呈正交拉丁方陣，所選取的方法和n=4時相同，證明也相同，所以維度$k=\frac{n^e-1}{n-1}$，n＞2且為非6的正整數時皆有完美控制的存在。

八、$N=6$，$E\geq 3$為正整數，$K=1+N+N^2+\cdots N^{E-1}$，$6^{1+6+6^2+..6^{E-1}}$有完美控制，以6階拉丁<u>立方</u>建造完美控制$\gamma(6^K)= 6^{K-E}$

(一) 取$E=3$，6^{43}，找出43個旋鈕其上有6個位置(號碼)中的完美控制點集， $\gamma(6^{43})=6^{40}$並證明其是完美控制

令$d=40, S^d_6=\{0\leq s\leq 6^{40}-1, s是整數\}$，因n=6時找不到正交拉丁方陣，但依前節所用方法定義出的第1層位置函數 $y^1_1(p)\neq y^1_1(q)$或$y^1_2(p)\neq y^1_2(q)$ ，令${}^{40}_{6}\beta_3(s)={}^{40}_{6}\alpha_3(s)$最後令控制點$C(s)=\left(x_1(s),x_2(s),x_3(s),\ldots x_d(s),y^1_1(s),y^1_2(s),{}^{40}_{6}\beta_3(s)\right)$ 即為所求之控制點集。

(二) 取$E>3$，$K=1+N+N^2+\cdots N^{E-1}$，$6^{1+6+6^2+..6^{E-1}}$有完美控制，以6階拉丁<u>立方</u>建造完美控制$\gamma(6^K)= 6^{K-E}$

令$d=k-e, S^d_6=\{0\leq s\leq 6^d-1, s是整數\}$，因n=6時找不到正交拉丁方陣，但存在3個6階拉丁立方形成正交拉丁立方A(x,y,z)、B(x,y,z)、C(x,y,z) [參考資料四P35、36]。

選定控制點${}^{d}_{6}\beta_1(s)=A(y^2_1(s),y^2_2(s),y^2_3(s))$，${}^{d}_{6}\beta_2(s)=A(y^2_1(s),y^2_2(s),y^2_3(s))$，${}^{d}_{6}\beta_3(s)=A(y^2_1(s),y^2_2(s),y^2_3(s))$，${}^{d}_{6}\beta_i(s)={}^{d}_{6}\alpha_i(s)$，$i=4,5\cdots e$

最後令控制點$C(s)=\left(x_1(s),x_2(s),x_3(s),\ldots x_d(s),{}^{d}_{6}\beta_1(s),{}^{d}_{6}\beta_2(s),{}^{d}_{6}\beta_3(s),..{}^{d}_{n}\beta_e(s)\right)$

證明: 因${}^{d}_{6}\beta_i(s)$皆是6階d維的拉丁超立方，且${}^{d}_{6}\beta_1(s)$ 、${}^{d}_{6}\beta_2(s)$ 、${}^{d}_{6}\beta_3(s)$還在任意3維度的立方塊上為正交拉丁立方，故前d維度中有1維度相異的2個控制點其 ${}^{d}_{6}\beta_i(p)\neq {}^{d}_{6}\beta_i(q)$,i∈ {1,2,3}至少有1個成立，加上${}^{d}_{6}\beta_i(p)\neq {}^{d}_{6}\beta_i(q)$,i＞3 ，彼此總共會有3個維度以上不同；前d維度中有2維度相異的2個控制點其${}^{d}_{6}\beta_i(p)\neq {}^{d}_{6}\beta_i(q)$,i＞3 ,彼此總共會有3個維度以上不同。2控制點不共平面，則其延伸樹不會重疊是完美控制。

伍、 研究結果

一、N ＞2非6,E＞2是正整數時，存在2個彼此正交的拉丁方陣為基底，可構造出延伸樹不重疊的控制集，稱為「完美控制」，這時最小控制集點數是 $N^{1+N+N^2+\ldots N^{E-1}-E}$ ，以解決旋鈕數 $K=1+N+N^2+\ldots N^{E-1}$ 且旋鈕上有 N 個號碼的密碼鎖問題。

二、N =2以類正交拉丁超立方來處理，仍有完美控制的存在。

三、N =6,E＞2是正整數時，不存在2個彼此正交的拉丁方陣，改由3個正交的拉丁立方為基底建造拉丁超立方，可構造「完美控制」的控制集，這時最小控制集點數是 $6^{1+6+6^2+\ldots 6^{E-1}-E}$ 。

四、超立方中完美控制的條件之一為 $\dfrac{N^K}{(N-1)\times K+1}$ 是正整數；當K=$\frac{N^E-1}{N-1}=1+N+N^2+\cdots+N^{E-1}$, E ＞2、N 是正整數，能構造出K-E維度N階超立方以選取控制點集，證明「完美控制」的存在且其最小控制集點數$\gamma(N^K)=N^{K-E}$，延伸樹涵蓋點數$(N-1)\times K+1=N^E$，藉此可以建構出完美控制的正交拉丁超立方體家族。

五、當E=2時，D=N+1便是50屆全國科展中所提的完美控制情況，$\gamma(N^{N+1})=N^{N-1}$，我們的方法雖只寫出E≥ 3的過程，但同時適用於E=2且可以解決其中N不是質數的問題。

六、當N=2便是48屆全國科展中所提Q_{2^E-1}的最小控制集問題，都是完美控制的情況。

七、非完美控制中的情況不易找到簡易通式解，在幾篇科展作品中可以發現，4^4問題中我們目前找的最小解是28。

八、完美控制不需皆使用拉丁超立方也能選取，也不是任意的正交拉丁方陣皆成功選取完美控制的控制點，但拉丁超立方的方式可以設計來選取完美控制的控制集。

九、*Cartesian prodcut* 可以把 N^K 超立方分割成較小維度的集合以適合分析，而完美控制中挑選控制點的方法也可把 N^K 也以分割成彼此獨立的 N^{K-E} 個集合。

陸、 討論

一、E=3時每個n^3立方中應只有一個控制點，證明時，前K-E維度中只有2維相異時，只說明了2個控制點不在任意n^2平面上，不能說明2點不在任意n^3立方塊上，似乎有憾或許可以學習50屆全國科展中「拉丁超立方體的完美控制情形」利用 *Cartesian prodcut* 切割法，使用鴿籠原理再證明看看。

二、k個維度中取3個維度決定一個n^3立方塊，其取法有$C_3^k=\frac{k\times(k-1)\times(k-2)}{6}$，當k夠大時例如13，$C_3^{13}=268$，而取2個維度決定一個$n^2$平面，其取法$C_2^{13}=78$，這表示同一個點同時屬於268個不同立方塊中卻只同時屬於78個平面中，或許就是上述中證明平面反而較易的對映原因。

三、*N*=2時不存在正交的拉丁方陣，所以構造時要以類同於拉丁方陣的方式，依換行換列就更改數值的概念，所以用加法來構造出類拉丁超立方的方式。

四、*N*=6時不存在正交的拉丁方陣，所以構造時要以正交拉丁立方的方式。

五、完美控制應仍有其它類型，我們仍未全部完成。

柒、 參考資料及其它

一、陳冠儒、翁翠微、伍蕙萱、陳冠霖/ 密碼鎖/ 第四十三屆全國中小學科學展覽

二、李佳晉、藍唯倫、徐書強、鄭博升/ 超立方體Qn之最小控制/ 第四十八屆全國中小學科學展覽

三、尤怡方、李敏辰、余珍華、陳佑瑄/ 密碼鎖-拉丁超立方體的完美控制情形/第五十屆全國中小學科學展覽

四、Jerzy Wojdyo/ Latin Squares, Cubes and Hypercubes/ Southeast Missouri State University March 31, 200

【評語】030409

作者在已知的全國科展(國際科展)得獎的作品之基礎上繼續延伸做了推廣。對於一類集合求出其最小控制集，作品有數學的深度。然建議可由初始的實際例子做詳細觀察與分析，以更能理解問題及使用技巧之脈絡及關鍵所在，以期許能更清晰呈現作品。