

中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

第三名

030407

矩形中無貫穿線之研究與探討

學校名稱：新北市私立裕德國民(中)小學

作者： 國二 林子欽	指導老師： 陳明仁 林忠正
-------------------	-----------------------------

關鍵詞：排列、貫穿線

矩形中無貫穿線之研究與探討

摘要

對於 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的矩形，矩形中不能存在貫穿線的條件是： a 、 b 要為 m 或 n 的因數，且 m 、 n 均可表示成「 $ab+sa+tb$ 」的形式，其中 s 、 $t \in \mathbb{N}$ 。

我們將這複雜的問題化繁為簡，分成 1×2 、 $1 \times b$ 和 $a \times b$ 三類積木討論，而這三類共用了 14 個引理和 10 個定理，才歸納出結果。

R.L.Graham(原著) 提到，只要符合以下兩點：

「1' Each of a and b divides p or q ;

2' Each of p and q can be expressed as $xa+yb$, $x,y > 0$, in at least two ways;」就能以 $a \times b$ 的積木排出 $p \times q$ 的無貫穿線矩形，但原著未解釋原因，本文給予證明。

壹、研究動機

美國貝爾實驗室數學博士 R.L.Graham 於 1981 年提出 Fault-free Tilings of Rectangles 的一篇論文。文中對用 1×2 的積木不能排出 6×6 的無貫穿線矩形，有詳盡的敘述。但我對此文有幾個疑惑：

- 1.文中提及「用 1×2 的積木，若 $m \times n$ 是一個無貫穿線矩形，則 $(m+4) \times (n+4)$ 亦是一個無貫穿線矩形」；而我認為 $m \times (n+2)$ 就是一個無貫穿線矩形。
- 2.文中提及「1' Each of a and b divides p or q ; 2' Each of p and q can be expressed as $xa+yb$, $x,y > 0$, in at least two ways;」就能以 $a \times b$ 的積木排出 $p \times q$ 的無貫穿線矩形，但原著未解釋原因。這些疑惑引起我的好奇，想要一探究竟。

貳、研究目的

對於 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的矩形，探討① $a \times b$ 的積木若能完全覆蓋 $m \times n$ 的矩形，則 m 、 n 與 a 、 b 之間有何關係？② $a \times b$ 的積木若能排出 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，則 m 、 n 的最小值為何？③ m 、 n 要符合甚麼條件，才能排出無貫穿線矩形？

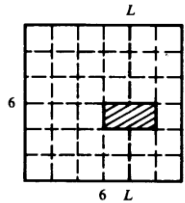
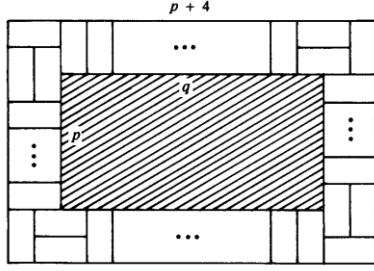
參、研究設備及器材

積木、紙、筆

肆、研究過程

一、文獻探討

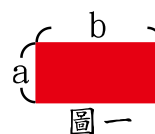
文獻分析表

	內容
文獻	1x2 的積木 (1)探討 1x2 的積木，①R.L.Graham(原著)以 $2 \times n$、$3 \times n$、$4 \times n$ 皆無法排出無貫穿線矩形，推得最小無貫穿線矩形為 5×6，但無法解釋 6×6 排不出來的原因，後來引述 S. W. Golomb and R.I. Jewett 兩位學者的見解，以分割線貫穿矩形後，分割線兩旁的矩形面積的奇偶性，來決定阻擋分割線的積木數，算出每條分割線最少要用 2 塊積木阻擋，而 6×6 的矩形，橫、直共有十條分割線，要用 20 塊積木來阻擋，但 6×6 的矩形只有 18 塊積木，故無法阻擋所有分割線，以此來解釋 6×6 排不出來的原因(如右上圖)。 ②黃偉烈(美國 49 屆國際科展)、③郭秉憲等(49 屆全國科展國中組)皆用上述解釋 6×6 的方法，來探討 1x2 的積木，求得最小無貫穿線矩形為 5×6。 (2)將無貫穿線矩形擴大，①R.L.Graham(原著)認為可以從小的無貫穿線矩形開始，然後鑲邊得到 $(m+4) \times (n+4)$ 的無貫穿線矩形(如右圖)。 ②郭秉憲等則討論較大矩形可否排出無貫穿線矩形。 ③黃偉烈則找出 $m \times (n+2)$ 亦為無貫穿線矩形，但只討論橫向擴大，未分析縱向擴大。  
本文	(1)考慮矩形邊長的奇偶性，來探討分割線上所需的直立積木數量與橫放積木數量，求得最小的無貫穿線矩形為 5×6。 (2)將橫向擴大為「$m \times (n+2)$」的矩形與縱向擴大為「$(m+2) \times n$」的矩形結合，從 5×6 及 6×8 的矩形向外擴大，每次在長或寬增加 2 個單位，剛好可以涵蓋全部排出的無貫穿線矩形。
文獻	1xb 的積木 ①R.L.Graham(原著)將 1xb 的積木併入 $a \times b$ 的積木中討論。 ②郭秉憲等只探討 1x2 的積木，無探討 1xb 的積木。 ③黃偉烈探討 1xb 的積木時，在 $m \leq 2b$ 的討論過於簡化，未考慮縱向擴大的情形。
本文	若 b 為 n(或 m)的因數，當 $m > 2b$(或 $n > 2b$)，就能排出無貫穿線的矩形。
文獻	$a \times b$ 的積木 ①R.L.Graham(原著)提到，只要符合以下兩點： 「1' Each of a and b divides p or q; 2' Each of p and q can be expressed as $xa+yb$, $x,y > 0$, in at least two ways;」就能以 $a \times b$ 的積木排出 $p \times q$ 的無貫穿線矩形，但未解釋原因。 ②黃偉烈，③郭秉憲等皆無探討 $a \times b$ 的積木。
本文	(1)找出 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形的條件為 ① a、b 為 m 或 n 的因數 ② m、n 均可表示成 $ab+sa+tb$($s, t \in \mathbb{N}$)的形式 (2)證明R.L.Graham(原著)所提的「1' Each of a and b divides p or q; 2' Each of p and q can be expressed as $xa+yb$, $x,y > 0$, in at least two ways;」，就能以 $a \times b$ 的積木排出 $p \times q$ 的無貫穿線矩形。

二、定義

(一)符號：

1. $a \times b$ 的積木：表示積木的寬是 a ($a \geq 2$)，長是 b ($b \geq 3$)，如圖一。

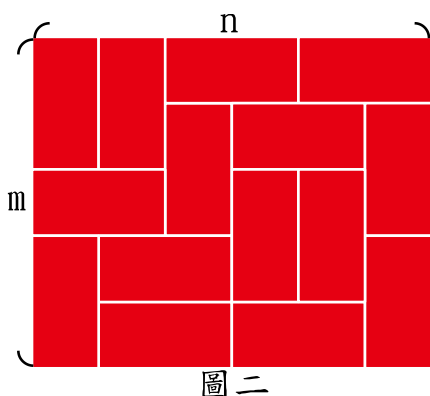


圖一

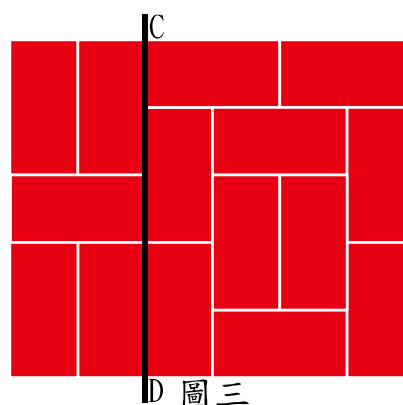
2. $m \times n$ 的矩形：表示矩形的寬是 m ，長是 n ，如圖二。

(二)本文中， a 、 b 互質，且 $a < b$ 。

(三)無貫穿線矩形：在矩形中找不到任何一條貫穿的直線，亦即這個矩形是無法拆成兩個小矩形。如圖二為一無貫穿線矩形，而圖三則否，因為在圖三中有一直線 $\overline{CD}$ 貫穿此矩形。



圖二



圖三

三、探討 1×2 的積木

將矩形邊長分為「奇數 $\times$ 偶數」的「奇偶型」與「偶數 $\times$ 偶數」的「偶偶型」兩類，考慮「排成 $m \times n$ 的矩形積木數量 $(\frac{m \times n}{2})$ 」，必須大於等於「利用矩形邊長的奇偶性，找出所需的直立積木數量及橫放積木數量的和」。

(一)用 1×2 的積木覆蓋 $m \times n$ 的矩形

定理 1：若 1×2 的積木可完全覆蓋 $m \times n$ 的矩形，則 m 、 n 中至少有一個為偶數。

證明：因為 1×2 的積木面積為偶數，所以 m 、 n 中至少有一個為偶數。■

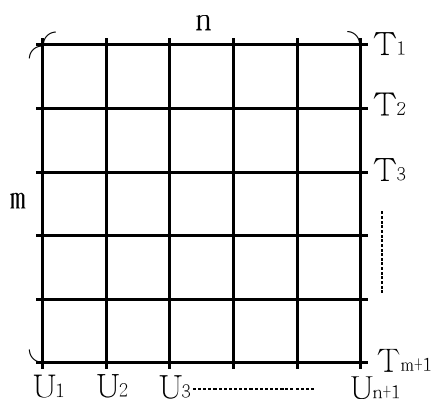
(二)用 1×2 的積木排 $m \times n$ 的最小無貫穿線矩形

定理 2：用 1×2 的積木可排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，

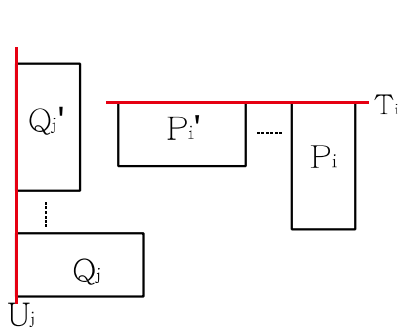
(1)若 $2 \mid m$ 且 $2 \mid n$ ，則 $m=8$ 、 $n=6$ (或 $m=6$ 、 $n=8$) 為「偶偶型」的最小無貫穿線矩形。

(2)若 $2 \nmid m$ 、 $2 \mid n$ (或 $2 \mid m$ 、 $2 \nmid n$)，則 $m=5$ 、 $n=6$ (或 $m=6$ 、 $n=5$) 為「奇偶型」的最小無貫穿線矩形。

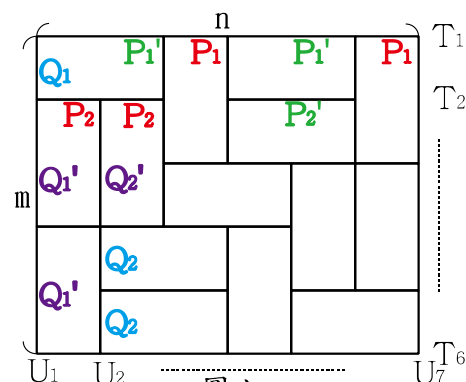
證明：假設有直線 $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{m+1}$ 及 $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n+1}$ 組成 $m \times n$ 個正方形格子(如圖四)。 P_i 表示 T_i 線向下直立的積木數量， P'_i 表示 T_i 線向下橫放的積木數量， Q_j 表示 U_j 線向右橫放的積木數量， Q'_j 表示 U_j 線向右直立的積木數量(如圖五)，圖六中 $P_1=2, P_2=2, Q_1=1, Q_2=2, P'_1=2, P'_2=1, Q'_1=2, Q'_2=1$ 。



圖四



圖五



圖六

繼續證明定理 2 之前，先介紹兩個引理：

引理 1：用 1×2 的積木可排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，若 $2 \mid m$ 且 $2 \mid n$ ，則(1) $2 \mid P_i$ 且 $P_i \geq 2$ ，其中 $1 \leq i \leq m-1$ ；(2) $2 \mid Q_j$ 且 $Q_j \geq 2$ ，其中 $1 \leq j \leq n-1$ 。

證明：1.若 $P_i=0$ ，則 T_{i+1} 必為貫穿線，矛盾，故 $P_i > 0$ ；同理可得 $Q_j > 0$ 。
 2.在 T_1 上，一個直立積木占用 1 個單位長，一個橫放積木占用 2 個單位長；
 因為 T_1 有 $P_1+P'_1$ 塊積木，所以 $n=1P_1+2P'_1$ ，而 n 為偶數，故 P_1 必為偶數；
 因為 T_2 有 $P_2+P'_2$ 塊積木，所以 $n=1P_2+2P'_2+P_1$ ，而 n, P_1 為偶數，故 P_2 必為偶數；
 $\vdots$
 以此類推可得 P_i 必為偶數，且 $P_i \geq 2$ ，其中 $1 \leq i \leq m-1$
 3.同理 Q_j 必為偶數，且 $Q_j \geq 2$ ，其中 $1 \leq j \leq n-1$ 。■

引理 2：用 1×2 的積木可排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，若 $2 \nmid m$ 且 $2 \mid n$ ，則(1) $2 \mid P_i$ 且 $P_i \geq 2$ ，其中 $1 \leq i \leq m-1$ ；(2) $\forall Q_j$ ，①若 $j=2k$ ，則有 $2 \mid Q_j$ 且 $Q_j \geq 2$ ，②若 $j=2k+1$ ，則有 $2 \nmid Q_j$ ，其中 $1 \leq j \leq n-1$ 。

證明：若 $2 \nmid m$ 且 $2 \mid n$ ，當 $P_i=0$ ，則 T_{i+1} 必為貫穿線，矛盾，故 $P_i > 0$ ；同理可得 $Q_j > 0$ 。
 (1) $2 \mid P_i$ 且 $P_i \geq 2$ ，其中 $1 \leq i \leq m-1$ ，證明同引理 1。
 (2)在 U_1 上，一個直立積木占用 2 個單位長，一個橫放積木占用 1 個單位長；
 因為 U_1 有 Q'_1+Q_1 塊積木，所以 $m=2Q'_1+1Q_1$ ，而 m 為奇數，故 Q_1 必為奇數；
 因為 U_2 有 Q'_2+Q_2 塊積木，所以 $m=2Q'_2+1Q_2+Q_1$ ，而 m, Q_1 為奇數，故 Q_2 必為偶數；
 因為 U_3 有 Q'_3+Q_3 塊積木，所以 $m=2Q'_3+1Q_3+Q_2$ ，而 m 為奇數、 Q_2 為偶數，故 Q_3 必為奇數；
 因為 U_4 有 Q'_4+Q_4 塊積木，所以 $m=2Q'_4+1Q_4+Q_3$ ，而 m, Q_3 為奇數，故 Q_4 必為偶數；
 $\vdots$
 以此類推可得 $\forall Q_j$ ，①若 $j=2k$ ，則有 $2 \mid Q_j$ 且 $Q_j \geq 2$ ，②若 $j=2k+1$ ，則有 $2 \nmid Q_j$ ，其中 $1 \leq j \leq n-1$ 。■

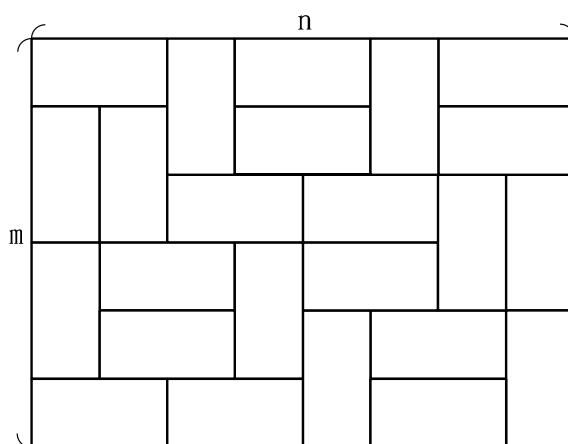
現在繼續證明定理 2

(1) 設 $2 \mid m$ 且 $2 \mid n$ ，由引理 1 知， $\forall P_i, Q_j, P_i \geq 2, Q_j \geq 2$ ，其中 $1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1$ 。

$$\sum_{i=1}^{m-1} P_i + \sum_{j=1}^{n-1} Q_j \geq 2(m-1) + 2(n-1), \text{ 而 } \sum_{i=1}^{m-1} P_i + \sum_{j=1}^{n-1} Q_j = \frac{m \cdot n}{1 \cdot 2},$$

$$\text{所以 } \frac{m \cdot n}{1 \cdot 2} \geq 2(m-1) + 2(n-1) \rightarrow (m-4)(n-4) \geq 8$$

當 $(m-4)(n-4)=8$ ，又 m, n 是偶數，故可推得 $m=6, n=8$ (或 $m=8, n=6$) 為最小值，下面的圖七是一個 $m=6, n=8$ 的無貫穿線矩形，其中 $P_i=2, Q_j=2, 1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 7$ 。



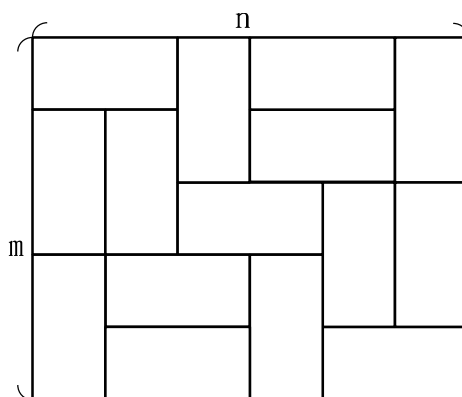
圖七

(2) 設 $2 \nmid m, 2 \mid n$ (或 $2 \mid m, 2 \nmid n$)，由引理 2 可得：

$$\textcircled{1} \sum_{i=1}^{m-1} P_i + \sum_{j=1}^{n-1} Q_j \geq 2(m-1) + \left[(1+2) \left(\frac{n-2}{2} \right) + 1 \right]$$

$$\text{而 } \sum_{i=1}^{m-1} P_i + \sum_{j=1}^{n-1} Q_j = \frac{m \cdot n}{1 \cdot 2}, \text{ 所以 } \frac{m \cdot n}{1 \cdot 2} \geq 2(m-1) + \left[(1+2) \left(\frac{n-2}{2} \right) + 1 \right]$$

$\rightarrow (m-3)(n-4) \geq 4$ ，當 $(m-3)(n-4)=4$ ，又 m 是奇數、 n 是偶數，故可推得 $m=5, n=6$ 為最小值；下面的圖八是一個 $m=5, n=6$ 的無貫穿線矩形， $P_i=2$ (其中 $1 \leq i \leq 4$)， $Q_1=1, Q_2=2, Q_3=1, Q_4=2, Q_5=1$ 。



圖八

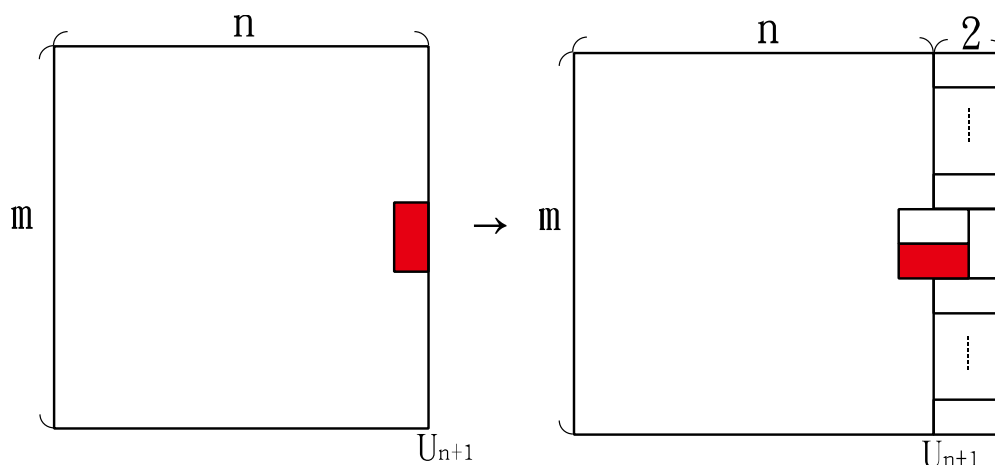
② 同理可推得 $m=6, n=5$ 為最小值。■

(三)將「 1×2 的積木排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形」擴大

定理 3：用 1×2 的積木排 $m \times n$ 的矩形，若 $m \times n$ 為一無貫穿線矩形，則 $m \times (n+2)$ 和 $(m+2) \times n$ 亦為無貫穿線矩形。

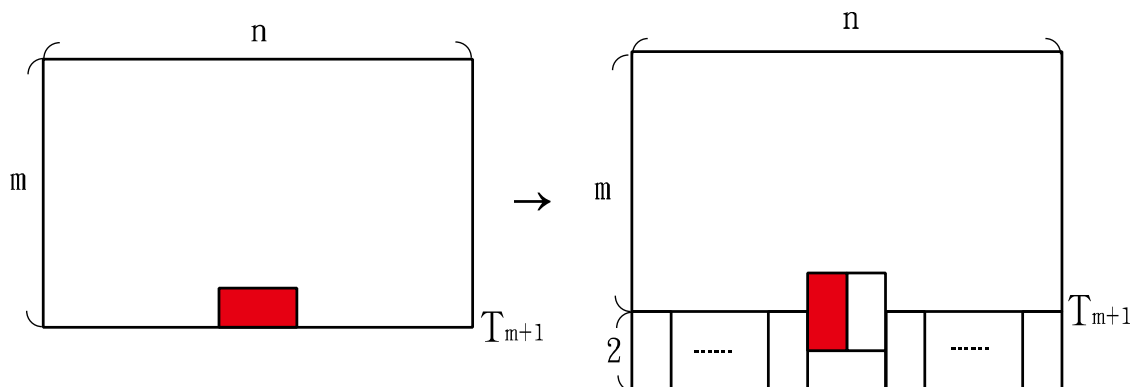
證明：1. 橫向擴大

若有一個用 1×2 的積木排成的 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，則 U_{n+1} 的左邊至少找到一個直立積木(若無，則 U_{n-1} 為貫穿線)，將這直立積木改成橫放，然後在這橫放積木上方加一個橫放積木，最後將長度排到 $n+2$ ，則 $m \times (n+2)$ 亦為無貫穿線矩形(如圖九)。



圖九

2. 縱向擴大(同橫向擴大，如圖十)



圖十



(四)由定理 3 知，從 5×6 及 6×8 的矩形向外擴大，每次在長或寬增加 2 個單位，剛好可以涵蓋全部排出的無貫穿線矩形。

利用定理 2、定理 3 的結果排出的無貫穿線矩形，整理成表一和表二。

表一(m 為偶數、 n 為偶數)

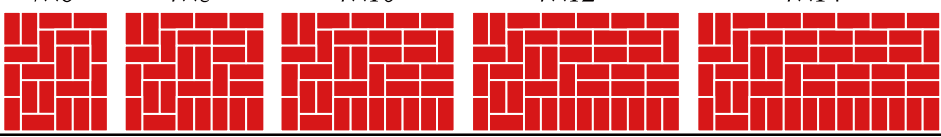
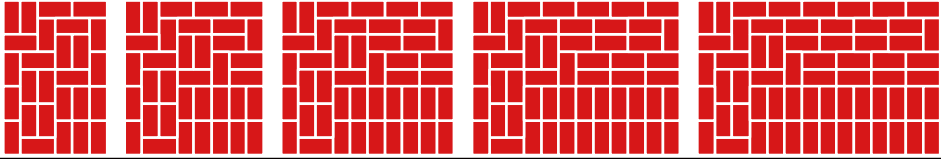
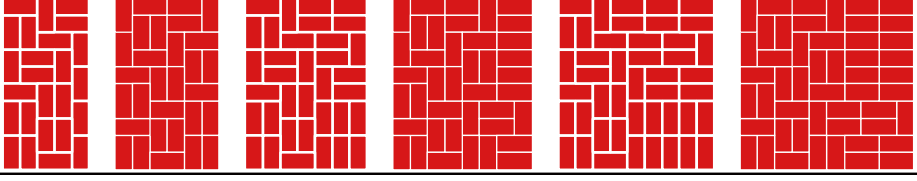
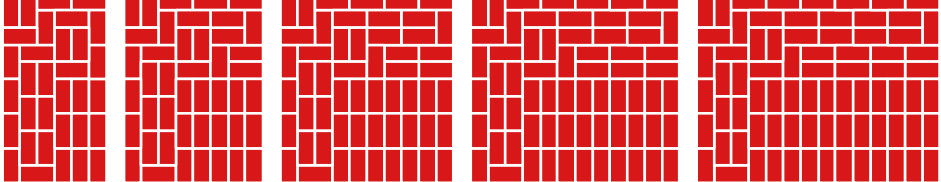
m 值	$m \times n$ 的無貫穿線矩形
6	6×8 、 6×10 、 6×12 、 $6 \times 14 \dots$
8	8×8 、 8×10 、 8×12 、 $8 \times 14 \dots$
10	10×8 、 10×10 、 10×12 、 $10 \times 14 \dots$
12	12×8 、 12×10 、 12×12 、 $12 \times 14 \dots$
$\vdots$	$\vdots$
註：本表的「 $m \times n$ 」可表示成「 $2x \times 2y$ 」的形式，其中 $x \geq 3$ ， $y \geq 4$	

表二(m 為奇數、n 為偶數)

m 值	$m \times n$ 的無貫穿線矩形
5	5×6 、 5×8 、 5×10 、 5×12 、 $5 \times 14 \cdots$
7	7×6 、 7×8 、 7×10 、 7×12 、 $7 \times 14 \cdots$
9	9×6 、 9×8 、 9×10 、 9×12 、 $9 \times 14 \cdots$
11	11×6 、 11×8 、 11×10 、 11×12 、 $11 \times 14 \cdots$
$\vdots$	$\vdots$
註：本表的「 $m \times n$ 」可表示成「 $(2x+1) \times 2y$ 」的形式，其中 $x \geq 2$ ， $y \geq 3$	

將表一和表二中 $m \times n$ 的無貫穿線矩形實際排列，排列結果整理成表三。

表三(用 1×2 的積木排出的無貫穿線矩形)

m 值	$m \times n$ 的無貫穿線矩形
m=5	5×6 5×8 5×10 5×12 5×14 
m=6	6×5 6×7 6×8 6×9 6×10 6×11 
m=7	7×6 7×8 7×10 7×12 7×14 
m=8	8×5 8×6 8×7 8×8 8×9 8×10 
m=9	9×6 9×8 9×10 9×12 9×14 
m=10	10×5 10×6 10×7 10×8 10×9 10×10 
m=11	11×6 11×8 11×10 11×12 11×14 
註：從 5×6 及 6×8 的矩形向外擴大，每次在長或寬增加 2 個單位，剛好可以涵蓋全部排出的無貫穿線矩形。	

(五) 用 1×2 的積木排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形之結論：

1. $2 \nmid m$ 且 $2 \mid n$ 時，「 $m \times n$ 」可表示成「 $(2x+1) \times 2y$ 」的形式(其中 $x \geq 2$ 且 $y \geq 3$)。
2. $2 \mid m$ 且 $2 \nmid n$ 時，「 $m \times n$ 」可表示成「 $2x \times 2y$ 」的形式(其中 $x \geq 3$ 且 $y \geq 4$)。

四、探討 $1 \times b$ 的積木

(一) 用 $1 \times b$ 的積木覆蓋 $m \times n$ 的矩形

定理 4：若 $1 \times b$ 的積木可完全覆蓋 $m \times n$ 的矩形，則 $b \mid m$ 或 $b \mid n$ 。

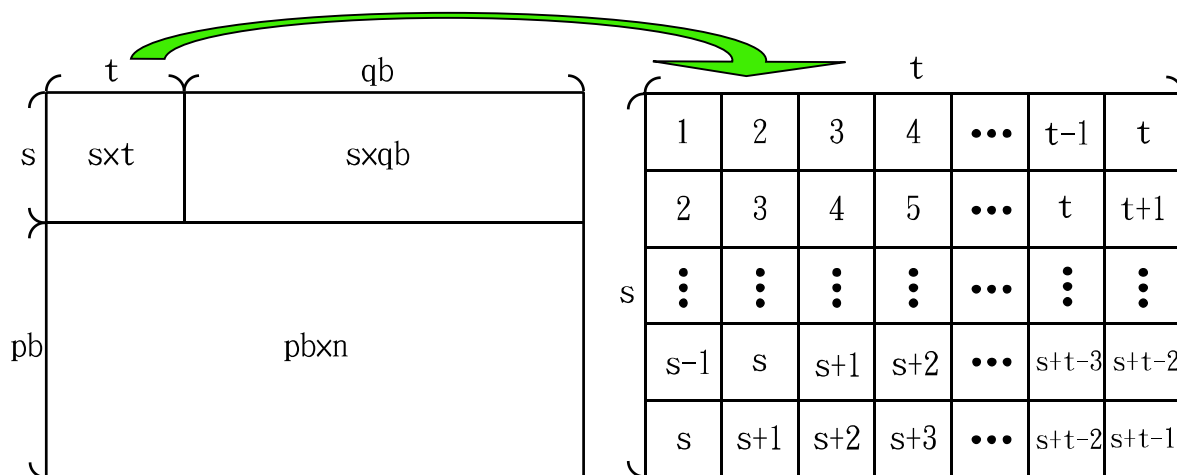
證明：在 $m \times n$ 的矩形分割線所構成的方格中填數，第一直行的格子從上到下依次填入 $1, 2, 3, \dots, m$ ，此外對其中任何一橫列，所填各數從左至右，每一格都增加 1 ，如圖十一，這樣，每一個 $1 \times b$ 的積木在矩形的覆蓋中，所蓋住的數，是模 b 的一個完全剩餘系。因為 $m \times n$ 矩形可以被 $1 \times b$ 的積木完全覆蓋，所以在矩形中的這 $m \times n$ 個數中，每個模 b 的剩餘類的個數會相等。

1	2	3	4	5	...	n
2	3	4	5	6	...	n+1
3	4	5	6	7	...	n+2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮
m	m+1	m+2	m+3	m+4	...	m+n-1

圖十一

若 $b \nmid m$ 且 $b \nmid n$ ，則 $m = pb + s$ ， $n = qb + t$ ，其中 $0 < s < b$ 且 $0 < t < b$ 。

設 $s \leq t$ ，將 $m \times n$ 的矩形按圖十二的方式分為 3 塊，一塊是 $s \times t$ 的矩形，另一塊是 $pb \times n$ 的矩形，還有一塊是 $s \times qb$ 的矩形。顯然， $pb \times n$ 的矩形和 $s \times qb$ 的矩形中，模 b 的各個不同剩餘類的個數相等。那麼 $s \times t$ 的矩形中，模 b 的各個不同剩餘類的個數也應該要相等。但我們觀察 $s \times t$ 矩形中所填的數(如圖十三)，發現 t 在圖十三中出現 s 次，而 $t+1$ 出現 $s-1$ 次，矛盾，所以 b 要為 m 或 n 的因數。



圖十二

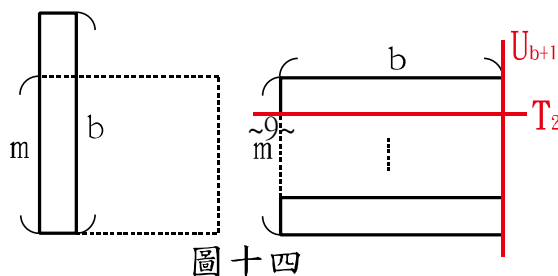
1	2	3	4	...	t-1	t
2	3	4	5	...	t	t+1
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
s-1	s	s+1	s+2	...	s+t-3	s+t-2
s	s+1	s+2	s+3	...	s+t-2	s+t-1

圖十三

(二)用 $1 \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的最小無貫穿線矩形

引理 3：若 $1 \times b$ 的積木可排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，則 $m \geq 2b+1$ 且 $n \geq 2b+1$ 。

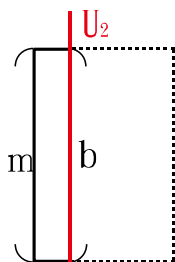
證明：1.當 $m < b$ 時，積木無法排直立，這會造成 U_{b+1} 為貫穿線，如圖十四，故當 $m < b$ 時，無法排出無貫穿線矩形。



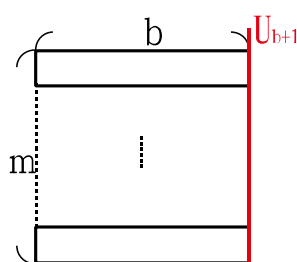
圖十四

2.當 $m=b$ 時，有二種情形，

- (1)若積木全部排直立，這會造成 U_2 為貫穿線，如圖十五；
- (2)若積木全部排橫放，這會造成 U_{b+1} 為貫穿線，如圖十六；
- (3)由(1)、(2)知，當 $m=b$ 時，無法排出無貫穿線矩形。

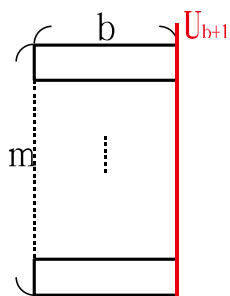


圖十五

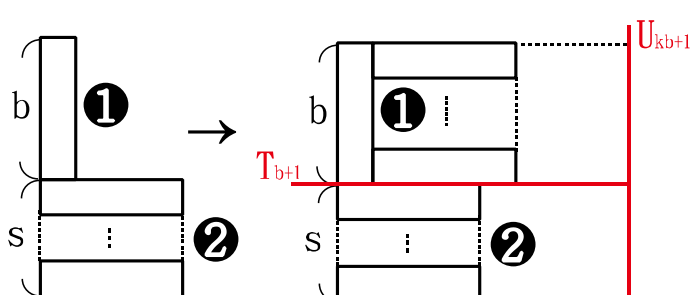


圖十六

- 3.當 $b < m < 2b$ 時，設矩形的最左邊有 s 個橫放積木、 t 個直立積木，此時 $t=0$ 或 $t=1$ ，
 - (1)若 $t=0$ ，積木全部排橫放，這會造成 U_{b+1} 為貫穿線，如圖十七。
 - (2)若 $t=1$ ，則 $m=s+b$ (此時 $1 \leq s < b$)，只需考慮 s 個橫放積木集中在一起的情形，如圖十八，①在①區，可接著排一個直立積木或 b 個橫放積木。②在②區，因 $s < b$ ，所以②區的積木只能繼續排 s 個橫放積木。③要阻擋 T_{b+1} ，則 T_{b+1} 的上、下積木要切齊，當排到長度為某個 kb 時， T_{b+1} 的上、下積木會切齊，此時若阻擋 T_{b+1} ，會造成 U_{kb+1} 為貫穿線。
 - (3)由(1)、(2)知，當 $b < m < 2b$ 時，無法排出無貫穿線矩形。

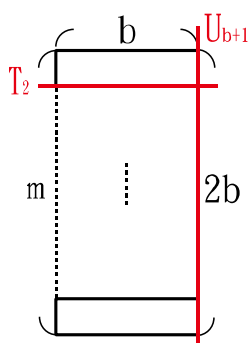


圖十七

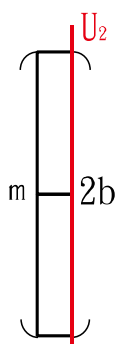


圖十八

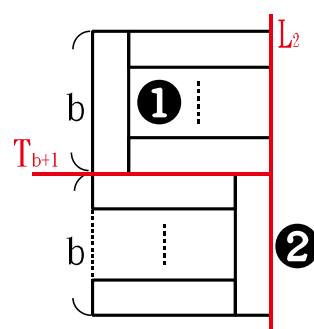
4. 當 $m=2b$ 時，設矩形的最左邊有 s 個橫放積木、 t 個直立積木，此時 $t=0$ 或 1 或 2 ，
- (1) 若 $t=0$: 積木全部排橫放，這會造成 U_{b+1} 為貫穿線，如圖十九。
 - (2) 若 $t=2$: 積木全部排直立，這會造成 U_2 為貫穿線，如圖二十。
 - (3) 若 $t=1$: 此時最左邊有 1 個直立積木， b 個橫放積木，只需考慮 b 個橫放積木集中排列的情形，如圖二十一。①②區，可接著排一個直立積木或 b 個橫放積木。②在②區，可排 1 個直立積木或 b 個橫放積木。③要阻擋 T_{b+1} ，則 T_{b+1} 的上、下積木要切齊，當 T_{b+1} 的上、下積木切齊時，阻擋 T_{b+1} ，會產生縱向貫穿線(L_2)，故當 $m=2b$ 時，無法排出無貫穿線矩形。
5. 由 1.、2.、3.、4. 知， $m \geq 2b+1$ ，同理可推得 $n \geq 2b+1$ 。



圖十九



圖二十

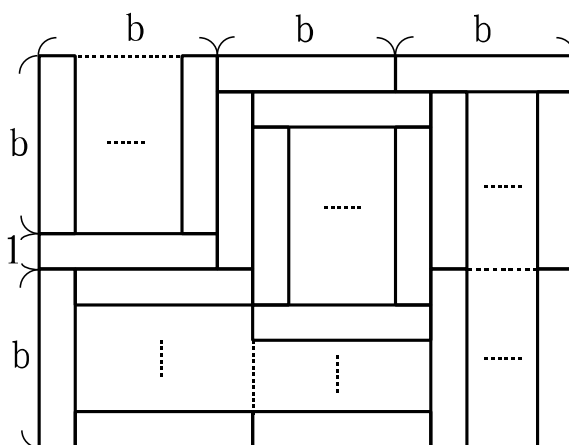


圖二十一

定理 5：若用 $1 \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的最小無貫穿線矩形，則 $m=2b+1$ 、 $n=3b$ 或 $m=3b$ 、 $n=2b+1$ 。

證明：由定理 4 知，若用 $1 \times b$ 的積木可完全覆蓋 $m \times n$ 的矩形，則 $b \mid m$ 或 $b \mid n$ 。

1. 若 $b \nmid m$ 且 $b \mid n$ ：由引理 3 知， $m \geq 2b+1$ 且 $n \geq 2b+1$ ，所以 m 的最小值為 $2b+1$ ， n 的最小值為 $3b$ ，當 $m=2b+1$ ， $n=3b$ 時，可排成最小的無貫穿線矩形，如圖二十三。
2. 若 $b \mid m$ 且 $b \nmid n$ ：同理，當 $m=3b$ ， $n=2b+1$ 時，可排成最小的無貫穿線矩形。
3. 若 $b \mid m$ 且 $b \mid n$ ： $m=3b$ ， $n=3b$ 時，不是最小的無貫穿線矩形。

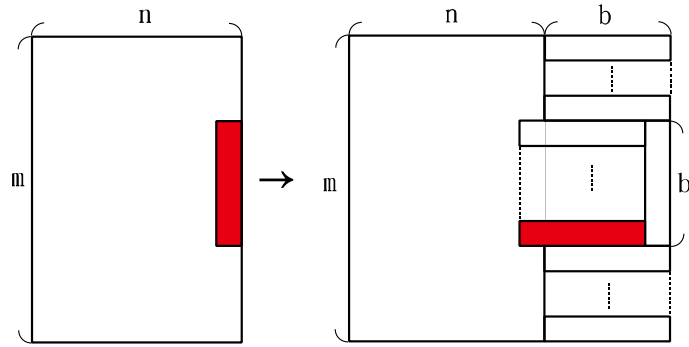


圖二十三

(三)將「 $1 \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形」擴大

定理 6：用 $1 \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的矩形，若 $m \times n$ 為一無貫穿線矩形，且 $b \mid n$ ，則 $m \times (n+b)$ 和 $(m+1) \times n$ 亦為無貫穿線矩形。

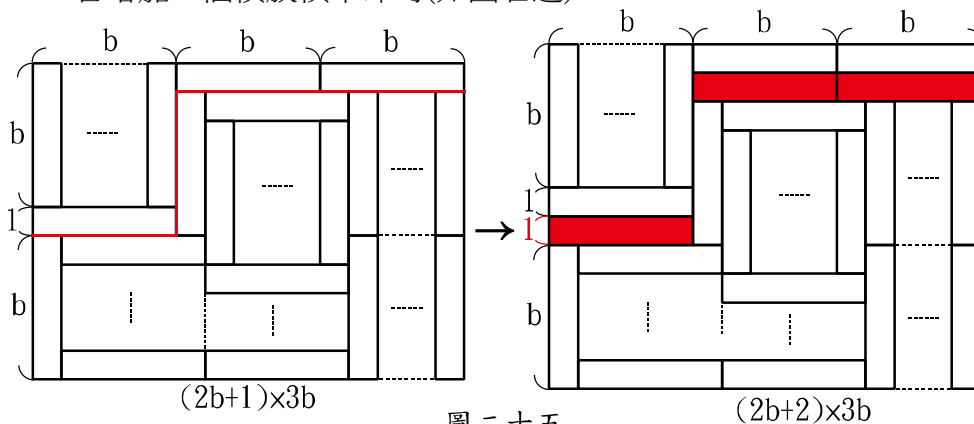
證明：1. 橫向擴大：同定理 3 的橫向擴大作法，如圖二十四。



圖二十四

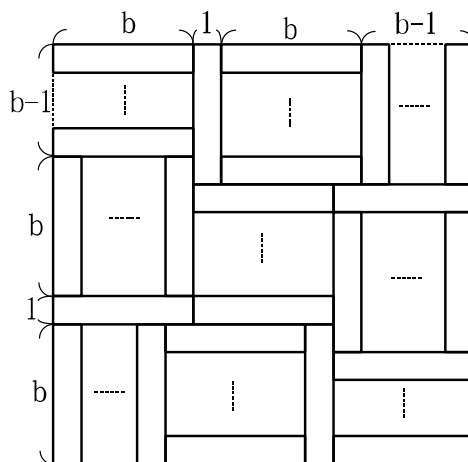
2. 縱向擴大

(1) 如圖二十五，在 $m=2b+1$ 、 $n=3b$ 的最小無貫穿線矩形中，找一條 3 個橫向相接的橫放積木(如圖左邊的紅線部分)，在這條橫向相接的橫放積木上邊(或下邊)各增加一個橫放積木即可(如圖右邊)。



圖二十五

(2) 當 m 的長度增加到 $3b$ 時，有貫穿線，此時可將 $3b \times 3b$ 的圖形重新排成圖二十六。



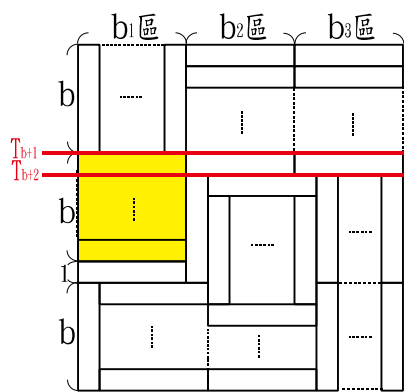
圖二十六

(3)①將圖二十五繼續往縱向擴大到 $m=3b+1$ ，如圖二十七，此時會產生 T_{b+1} 、 T_{b+2} 兩條貫穿線。

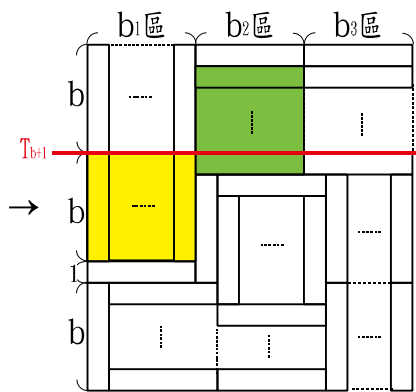
②為阻擋 T_{b+2} ，在 b_1 區，找一個面積是 $b \times b$ 的區塊(黃色部分)旋轉 90° ，即可阻擋 T_{b+2} ，如圖二十八。

③為阻擋 T_{b+1} ，在 b_2 區，找一個面積是 $b \times b$ 的區塊(綠色部分)旋轉 90° ，即可阻擋 T_{b+1} ，則此時的 $(3b+1) \times 3b$ 為一無貫穿線矩形，如圖二十九。

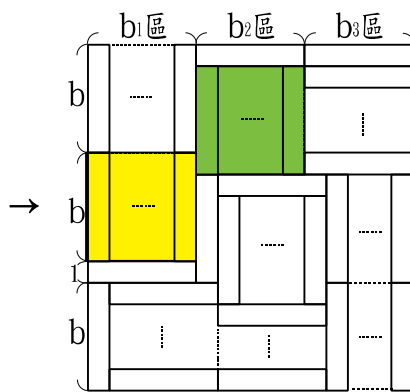
④當 $m \geq 3b+2$ 時，仿照 $m=3b+1$ 的做法。



圖二十七



圖二十八



圖二十九

(四)將定理 5、定理 6 的結果，以 1×3 、 1×4 的積木實際排列，排列結果整理成表四、表五

表四 用 1×3 的積木排出的無貫穿線矩形

m 值	$m \times n$ 的無貫穿線矩形			
m=7	7×9	7×12	7×15	7×18
m=8	8×9	8×12	8×15	8×18
m=9	9×7	9×8	9×9	9×10
m=10	10×9	10×12	10×15	10×18
m=11	11×9	11×12	11×15	11×18
m=12	12×7	12×8	12×9	12×10
m=13	13×9	13×12	13×15	13×18

表五 用 1×4 的積木排出的無貫穿線矩形

m 值	m×n 的無貫穿線矩形					
m=9	9×12	9×16	9×20	9×24		
m=10	10×12	10×16	10×20	10×24		
m=11	11×12	11×16	11×20	11×24		
m=12	12×9	12×10	12×11	12×12	12×13	12×14
m=13	13×12	13×16	13×20	13×24		
m=14	14×12	14×16	14×20	14×24		
m=15	15×12	15×16	15×20	15×24		
⋮	⋮					

(五) 用 $1 \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形之結論是「 $m \times n$ 」可表示成「 $m \times kb$ 」的形式(其中 $m \geq 2b+1$ 且 $k \geq 3$)。

五、探討 $a \times b$ 的積木

(一) 用 $a \times b$ 的積木覆蓋 $m \times n$ 的矩形

定理 7：若用 $a \times b$ 的積木可完全覆蓋 $m \times n$ 的矩形，則(1) $a \mid m$ 、 $b \mid n$ (或 $a \mid n$ 、 $b \mid m$)，或(2) $a \mid n$ 、 $b \mid n$ ，且 $m = ax + by$ (或 $a \mid m$ 、 $b \mid m$ ，且 $n = ax + by$)，其中 x 、 y 都為正整數。

證明：若 $m \times n$ 的矩形被 $a \times b$ 的積木完全覆蓋，則 $m \times n$ 的矩形亦被 $1 \times b$ 的積木和 $a \times 1$ 的積木完全覆蓋，①被 $1 \times b$ 的積木完全覆蓋時，由定理 4 知： $b \mid m$ 或 $b \mid n$ ；②被 $a \times 1$ 的積木完全覆蓋時，由定理 4 知： $a \mid m$ 或 $a \mid n$ ，由①、②知，用 $a \times b$ 的積木可完全覆蓋 $m \times n$ 的矩形時，可推得：

(1) $a \mid m$ ， $b \mid n$ (或 $a \mid n$ ， $b \mid m$) 或 $a \mid n$ ， $b \mid n$ (或 $a \mid m$ ， $b \mid m$)。

(2) 若 $a \mid n$ 且 $b \mid n$ ，此時 $m \times n$ 矩形的最左邊有 x 個橫放積木、 y 個直立積木，則 $m = ax + by$ ，其中 x 、 y 都為正整數。同理可推得 $a \mid m$ 、 $b \mid m$ ，且 $n = ax + by$ ，其中 x 、 y 都為正整數。■

(二)用 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形

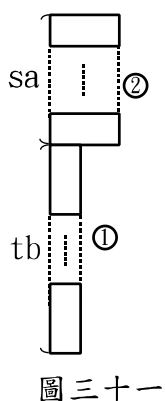
引理 4：用 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的矩形，當 $m=ab$ 時，矩形的最左邊只能排 a 個直立積木或 b 個橫放積木，換言之，無法排若干個直立積木加上若干個橫放積木。

證明：設矩形的最左邊排 s 個橫放積木或 t 個直立積木，則 $m=ab=sa+tb$ (其中 $s, t \in \mathbb{N}$ ， $s < b$ 且 $t < a$) $\rightarrow sa=b(a-t) \rightarrow b \mid sa$ ，因為 $(a,b)=1$ ，所以 $b \mid s$ ，此時 $s=0$ 或 b ，
 (1)當 $s=0$ ， $t=a$ 時，表示矩形的最左邊只能排 a 個直立積木。
 (2)當 $s=b$ ， $t=0$ 時，表示矩形的最左邊只能排 b 個橫放積木。■

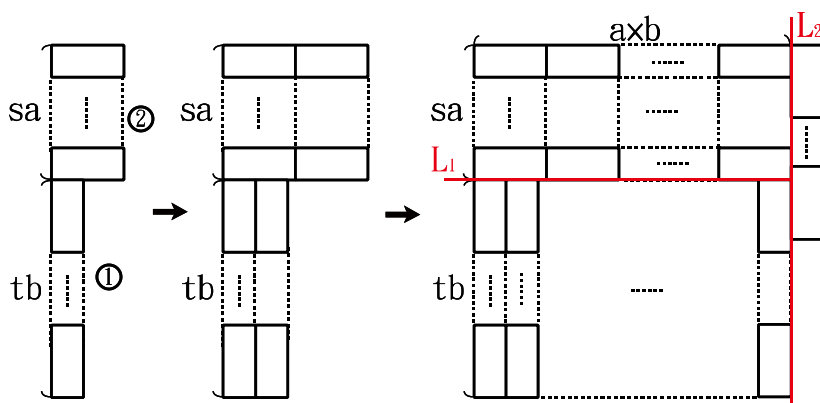
引理 5：用 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，當 $m=sa+tb$ 時，其中 $s \leq b$ 且 $t \leq a$ ， $s, t \in \mathbb{N}$ ，則無法用 $a \times b$ 的積木排出 $m \times n$ 的無貫穿線矩形。

證明：1.當 $m=sa+tb$ ，其中 $s < b$ 且 $t < a$ ， $s, t \in \mathbb{N}$ ，

- (1)設在矩形的最左邊排 x 個橫放積木加上 y 個直立積木，故 $m=sa+tb=xa+yb$ ，
 可設 $x \leq s$ 且 $y \geq t \rightarrow (s-x)a=(y-t)b \rightarrow b \mid (s-x)a$ ，因為 $(a,b)=1$ ，所以 $b \mid s-x$ ，
 但 $s < b$ ，故 $x=s$ ，並可推得 $y=t$ 。
- (2)由(1)之推論知，在矩形的最左邊排 s 個橫放積木加上 t 個直立積木，只需考慮 s 個橫放積木與 t 個直立積木分別集中排列在一起的情形，如圖三十一。
- (3)在 tb 區①的位置，只能排直立積木；在 sa 區②的位置，只能排橫放積木，理由如下：設 tb 區①的位置有 x 個橫放積木加上 y 個直立積木，故 $tb=xa+yb \rightarrow (t-y)b=xa \rightarrow a \mid (t-y)b$ ，因為 $(a,b)=1$ ，所以 $a \mid t-y$ ，但 $t < a$ ，故 $t-y=0 \rightarrow y=t$ ，並可推得 $x=0$ 。同理在 sa 區②的位置，可推得 $y=0$ 。
- (4)由(1)、(2)、(3)知：當 $m=sa+tb$ ，其中 $s < b$ 且 $t < a$ ， $s, t \in \mathbb{N}$ ，則 sa 區②的位置中無直立積木， tb 區①的位置中無橫放積木。
- (5)當長度排到 axb 時，要阻擋橫向貫穿線，卻產生縱向貫穿線，故無法排出無貫穿線矩形，如圖三十二。



圖三十一



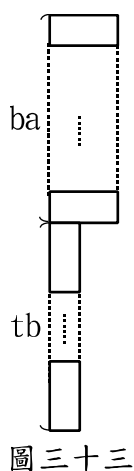
圖三十二

2.當 $m=sa+tb$ ，其中 $s=b$ 且 $t < a$ ， $s, t \in \mathbb{N}$ ，即 $m=ba+tb$

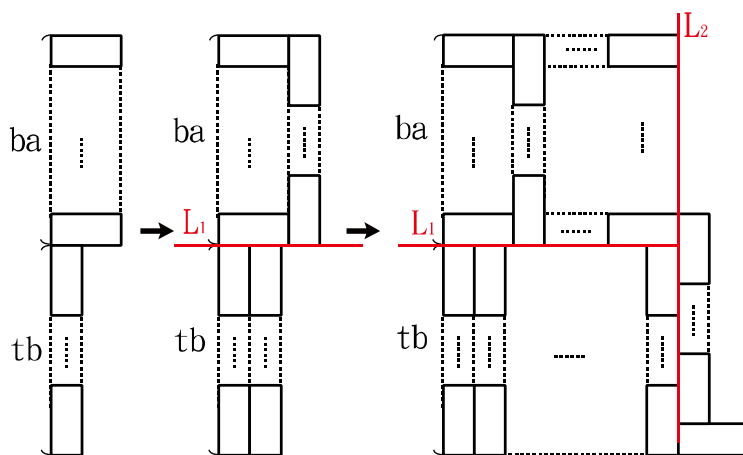
- (1)設在矩形的最左邊排 x 個橫放積木加上 y 個直立積木，故 $m=ba+tb=xa+yb \rightarrow xa=(a+t-y)b \rightarrow a \mid (a+t-y)b$ ，因為 $(a,b)=1$ ，所以 $a \mid a+t-y \rightarrow a \mid t-y$ ，但 $t < a$ ，故 $y=t$ ，並可推得 $x=b$ 。
- (2)由(1)之推論知，在矩形的最左邊排 b 個橫放積木加上 t 個直立積木，只需考慮 b 個橫放積木與 t 個直立積木分別集中排列在一起的情形，如圖三十三。
- (3)因 b 個橫放積木的寬度等於 ab ，由引理 4 知， L_1 的上方區塊每次只能全排直或全排橫。

(4)因 $t < a$ ，由本引理的 1. 知， L_1 的下方區塊只能全排直。

(5)若要阻擋 L_1 ，必須 L_1 上、下方區塊的積木切齊，這會產生 L_2 的貫穿線，無法排出無貫穿線矩形，如圖三十四。



圖三十三



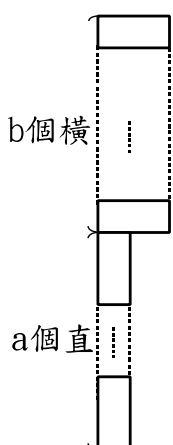
圖三十四

3.當 $m=sa+tb$ ，其中 $s < b$ 且 $t=a$ ， $s, t \in \mathbb{N}$ ，無法排出無貫穿線矩形，證明同上述 2.。

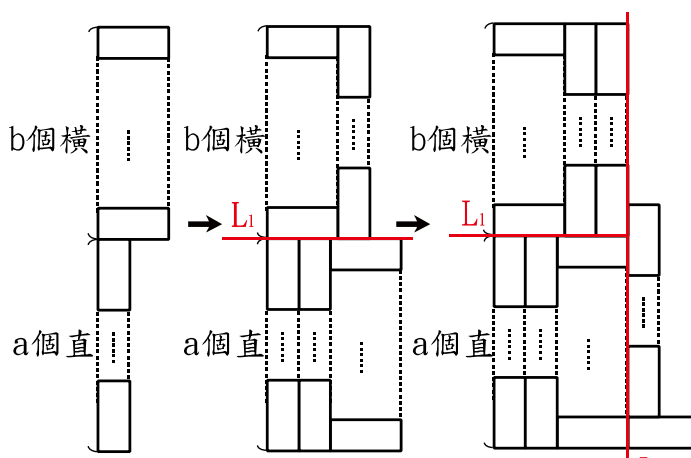
4.當 $m=sa+tb$ ，其中 $s=b$ 且 $t=a$ ， $s, t \in \mathbb{N}$ ，即 $m=ba+ab=2ab$

(1)設在矩形的最左邊排 x 個橫放積木加上 y 個直立積木，故 $m=2ab=xa+yb$ ，因為 $(a,b)=1$ ，所以 $a \mid y$ ，① $y=0$ 時，表示全排橫，不合。② $y=2a$ 時，表示全排直，不合。所以 $y=a$ 且 $x=b$ ，表示在矩形的最左邊排 b 個橫放積木加上 a 個直立積木，只需考慮 b 個橫放積木與 a 個直立積木分別集中排列在一起的情形，如圖三十五。

(2)因 a 個直立積木和 b 個橫放積木的長度都等於 ab ，由引理 4 知， L_1 的上、下方區塊的積木，每次只能全排直或全排橫，若要阻擋 L_1 ，必須 L_1 上、下方區塊的積木切齊，這會產生 L_2 的貫穿線，無法排出無貫穿線矩形，如圖三十六。



圖三十五



圖三十六

引理 6：若用 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，則 $m \geq ab+a+b$ ， $n \geq ab+a+b$ 。

證明：1. 設 $m=sa+tb < ab+a+b$ ，其中 $s, t \in \mathbb{N}$ ，

若 $s \geq b+1$ ，得到 $tb < b$ 矛盾，故 $s \leq b$ 。同理可推得 $t \leq a$ 。

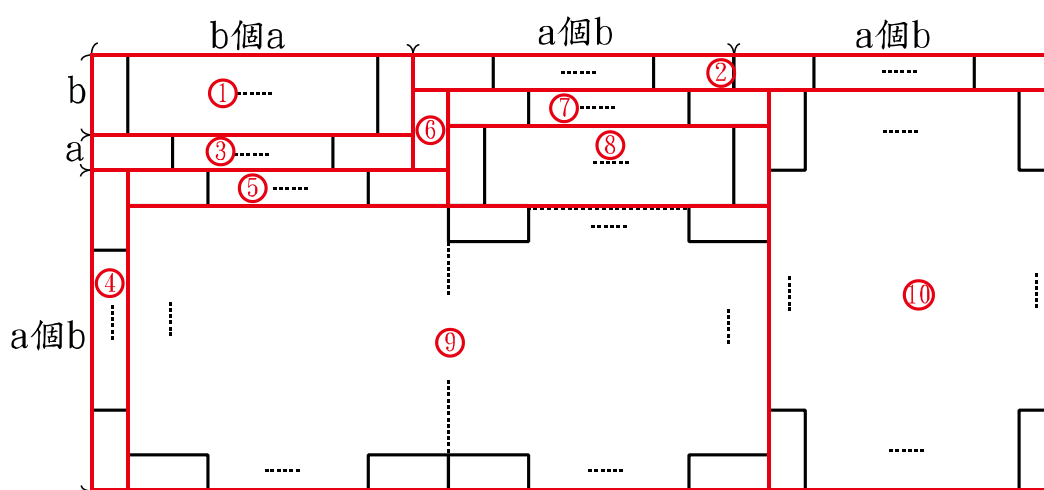
2. 當 $s \leq b$ 且 $t \leq a$ 時，由引理 5 知，無法排出無貫穿線矩形。故 $m \geq ab+a+b$ ，同理可得 $n \geq ab+a+b$ 。■

引理 7：用 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，當矩形中有一邊的長度是 $2ab$ 時，則無法排出無貫穿線矩形，即 $m=2ab$ 或 $n=2ab$ 都無法排出無貫穿線矩形。

證明：設 $m=sa+tb=2ab$ ，因為 $(a,b)=1$ ，所以 $b \mid s$ ，① $s=0$ ，全排直，不合；② $s=b$ ，可推得 $t=a$ ，由引理 5 知，無法排出無貫穿線矩形；③ $s=2b$ ，可推得 $t=0$ ，全排橫，不合。

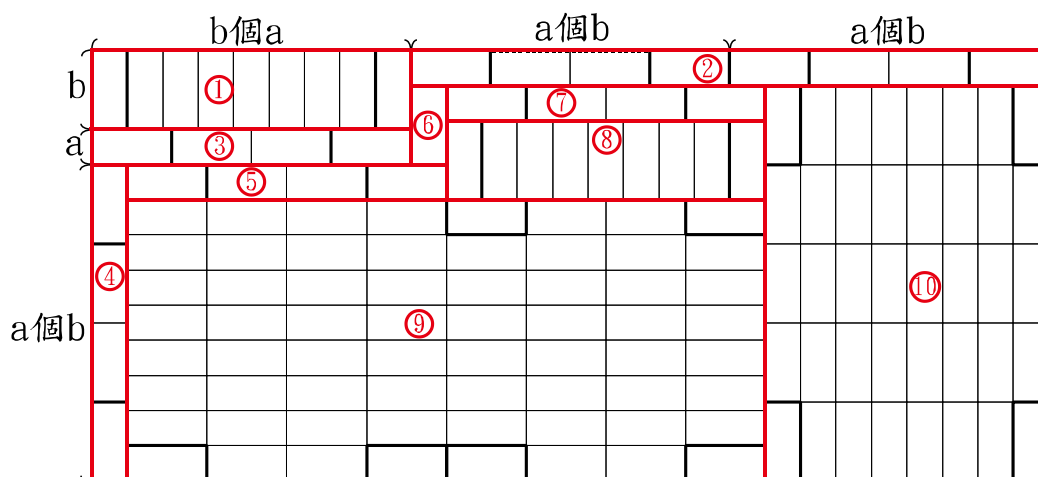
引理 8：用 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，若 $a \mid n$ 且 $b \mid n$ ，則 m, n 的最小值為 $m=ab+a+b, n=3ab$ 。

證明：1. 由引理 6 知， $m \geq ab+a+b$ ，當 $m=ab+a+b$ ，則 $a \nmid m, b \nmid m$ ，由定理 7 知 $n=kab$ ，
 (1) $k=1, n=ab$ ，由引理 6 知，矛盾。(2) $k=2, n=2ab$ ，由引理 7 知，無法排出。
 2. 由 1. 推論知， $n \geq 3ab$ 。
 3. 故當 $m=ab+a+b, n=3ab$ ，可排出無貫穿線的矩形，如圖三十八。



圖三十八

4. 以 $a=4, b=9$ 的積木實際排列，如圖三十九。



圖三十九

引理 9：若用 $a \times b$ 的積木可排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，則 m 、 n 都可表示成「 $ab+sa+tb$ 」的形式，其中 s 、 $t \in \mathbb{N}$ 。

證明：設矩形的最左邊由 x 個橫放積木和 y 個直立積木所組成(其中 $x, y \in \mathbb{N}$)，則 $m = xa + yb$ ，由引理 5 知 $x > b$ 或 $y > a$ ，若 $x > b$ 則 $m = ba + (x-b)a + yb$ ，若 $y > a$ ，則 $m = ba + xa + (y-a)b$ 。同理 n 也可表示成「 $ab+sa+tb$ 」的形式，其中 s 、 $t \in \mathbb{N}$ 。■

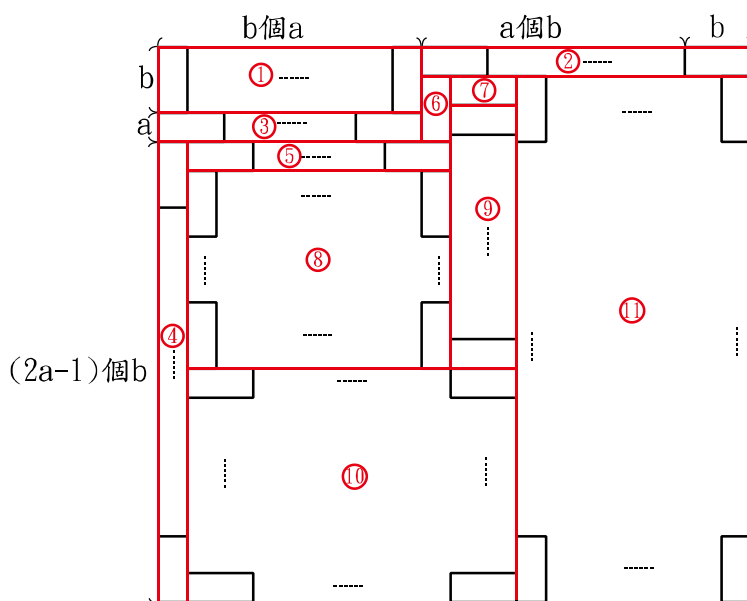
引理 10：用 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的最小無貫穿線矩形，若 $a \mid m$ 且 $b \mid n$ ，則 $m = 2ab + a$ 、 $n = 2ab + b$ 。

證明：1. 由引理 6 知， $m \geq ab + a + b$ 、 $n \geq ab + a + b$ 。

2. 由引理 9 知，邊長 m 可表示成「 $ab+sa+tb$ 」，其中 $s, t \in \mathbb{N}$ ，所以當 $a \mid m \rightarrow a \mid t$ ，因此 $m \geq 2ab + a$ 。

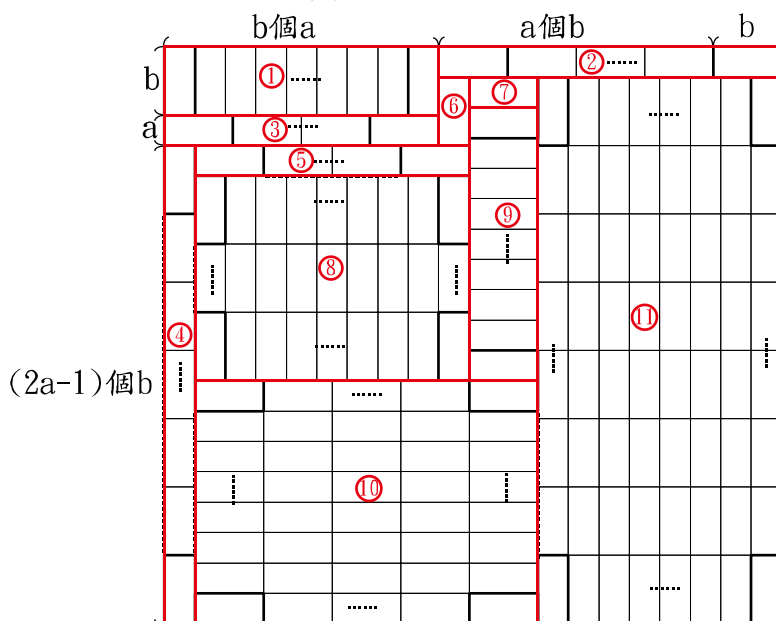
3. 同理當 $b \mid n$ 時， $n \geq 2ab + b$ 。

4. 當 $m = 2ab + a$ ， $n = 2ab + b$ 時，可排成的無貫穿線矩形，如圖四十。



圖四十

5. 以 $a=4$ ， $b=9$ 的積木，實際排列如圖四十一。



圖四十一

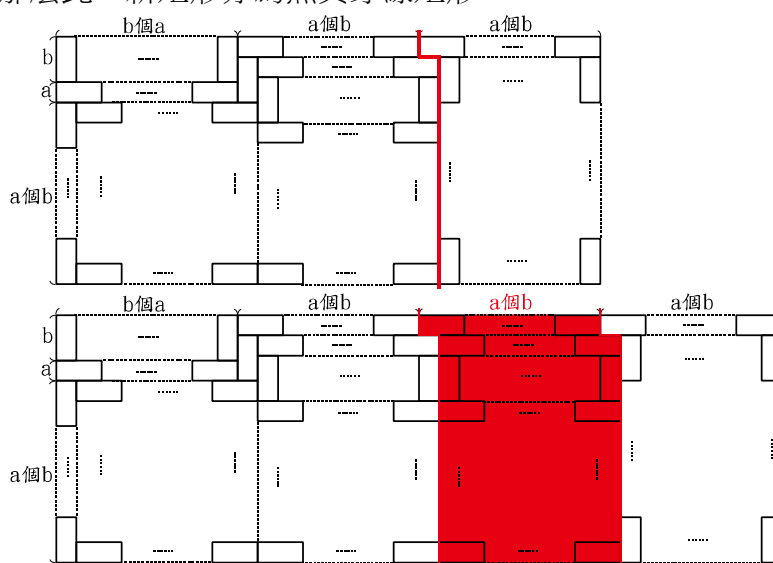
定理 8：用 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的最小無貫穿線矩形，(1)若 $a \nmid m$ 、 $b \nmid m$ 且 $a \mid n$ 、 $b \mid n$ ，則 $m=ab+a+b$ ， $n=3ab$ ；(2)若 $a \mid m$ 且 $b \mid n$ ，則 $m=2ab+a$ ， $n=2ab+b$ 。

證明：由引理 6、引理 8、引理 10 可得定理 8。■

(三)將「 $a \times b$ 的積木排出 $m \times n$ 的無貫穿線矩形」擴大

引理 11：若 $a \mid n$ 且 $b \mid n$ ，則在最小無貫穿線矩形($m=ab+a+b$ 、 $n=3ab$)中，橫向增加 kab ($k \in \mathbb{N}$)的長度，此一新矩形亦為無貫穿線矩形。

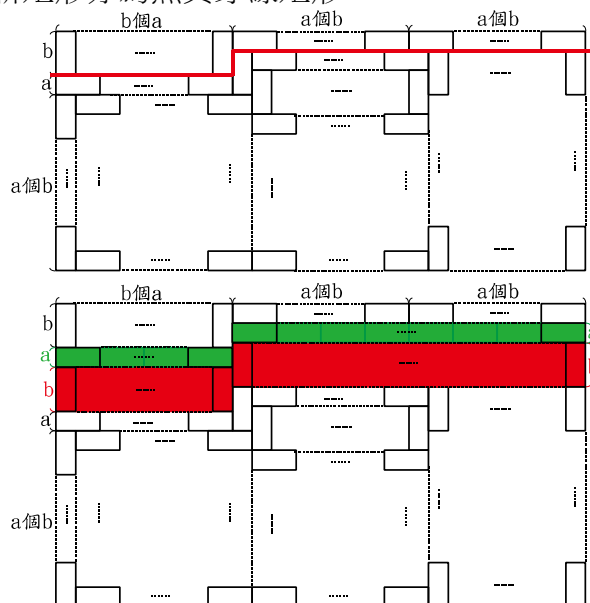
證明：由引理 8 知，若 $a \mid n$ 且 $b \mid n$ ，則最小無貫穿線矩形 $m=ab+a+b$ 、 $n=3ab$ ，如圖四十二，將這最小無貫穿線矩形往橫向擴大，擴大方法如圖所示，先找一條貫穿此矩形的 $\hookrightarrow$ 形線，再從中排入一個跟左邊形式一樣(長為 ab 、寬為 m)的積木組，那麼此一新矩形亦為無貫穿線矩形。



圖四十二

引理 12：若 $a \mid n$ 且 $b \mid n$ ，則在最小無貫穿線矩形($m=ab+a+b$ ， $n=3ab$)中，縱向增加 $sa+tb$ ($s, t \in \mathbb{N}$)的長度，此一新矩形亦為無貫穿線矩形。

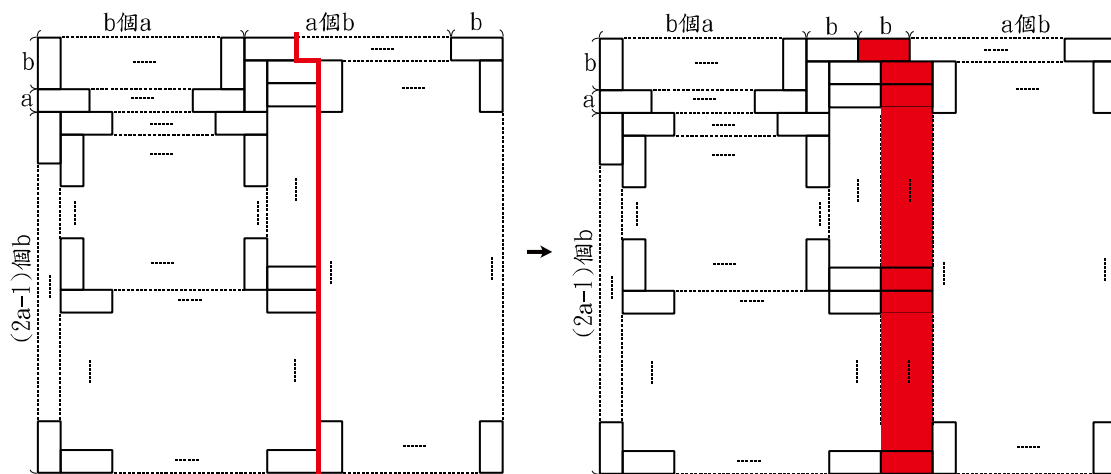
證明：由引理 8 知，若 $a \mid n$ 且 $b \mid n$ ，則最小無貫穿線矩形 $m=ab+a+b$ 、 $n=3ab$ ，如圖四十三，將這最小無貫穿線矩形往縱向擴大，擴大方法如圖所示，先找一條貫穿此矩形的 $\hookrightarrow$ 形線，如圖所示，在這條 $\hookrightarrow$ 形紅線上方增加 3 個「長為 ab 、寬為 $sa+tb$ 」的積木組，此時積木左、右相差一個 $b-a$ 的長度，不會產生橫向的貫穿線，所以此一新矩形亦為無貫穿線矩形。



圖四十三

引理 13：若 $a \mid m$ 且 $b \mid n$ ，則在最小無貫穿線矩形($m=2ab+a$ 、 $n=2ab+b$)中，橫向增加 $kb(k \in \mathbb{N})$ 的長度，此一新矩形亦為無貫穿線矩形。

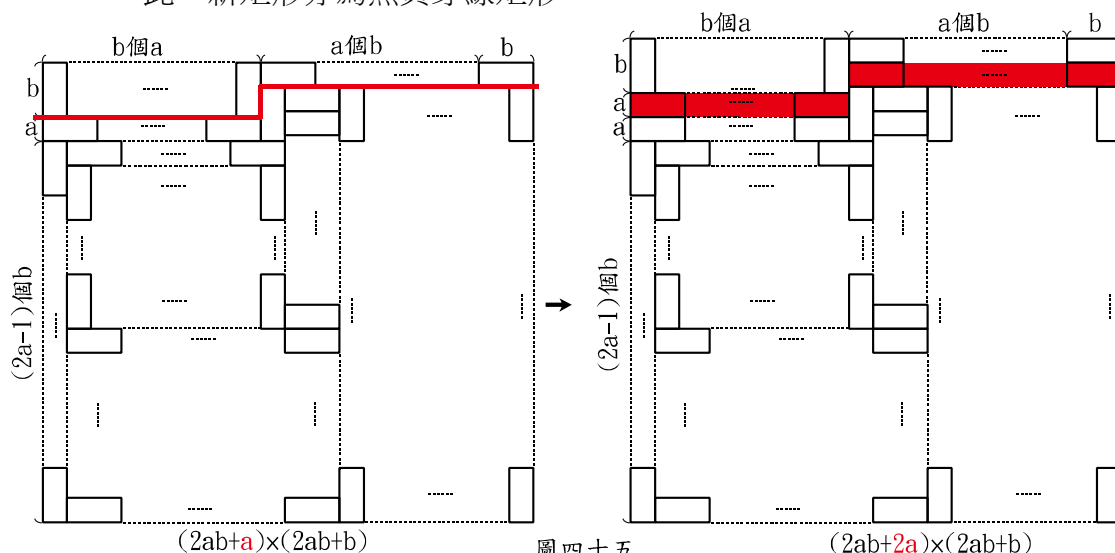
證明：由引理 10 知，若 $a \mid m$ 且 $b \mid n$ ，則最小無貫穿線矩形 $m=2ab+a$ 、 $n=2ab+b$ ，如圖四十四，將這最小無貫穿線矩形往橫向擴大，擴大方法如圖所示，先找一條貫穿此矩形的 $\hookrightarrow$ 形線，在這條 $\hookrightarrow$ 形紅線右邊增加「長為 b 、寬為 $2ab+a$ 」的積木組，此時積木上、下相差一個 a 的長度，不會產生縱向的貫穿線，所以此一新矩形亦為無貫穿線矩形。



圖四十四

引理 14：若 $a \mid m$ 且 $b \mid n$ ，則在最小無貫穿線矩形($m=2ab+a$ 、 $n=2ab+b$)中，縱向增加 $ka(k \in \mathbb{N})$ 的長度，此一新矩形亦為無貫穿線矩形。

證明：由引理 10 知，若 $a \mid m$ 且 $b \mid n$ ，則最小無貫穿線矩形 $m=2ab+a$ 、 $n=2ab+b$ ，如圖四十五，將這最小無貫穿線矩形往縱向擴大，擴大方法如圖所示，先找一條貫穿此矩形的 $\hookrightarrow$ 形線，在這條 $\hookrightarrow$ 形紅線下方增加「長為 $2ab+b$ 、寬為 a 」的積木組，此時積木左、右相差一個 $b-a$ 的長度，不會產生橫向的貫穿線，所以此一新矩形亦為無貫穿線矩形。



圖四十五

定理 9：設 $m \times n$ 的矩形是 $a \times b$ 的積木排出的最小無貫穿線矩形，

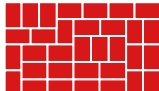
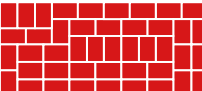
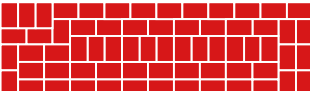
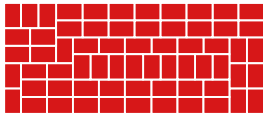
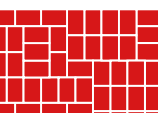
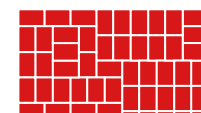
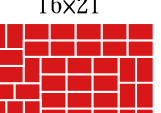
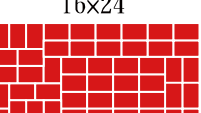
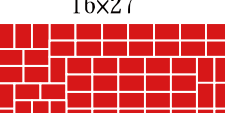
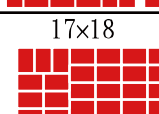
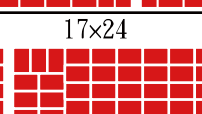
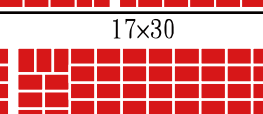
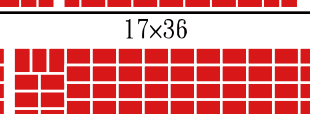
1. 若 $a \mid n$ 且 $b \mid n$ ，則 $m \times (n+kab)$ 和 $(m+sa+tb) \times n$ 亦為無貫穿線矩形，其中 $k \in \mathbb{N}$ ， $s, t \in \mathbb{N}$ 或 0。

2. 若 $a \mid m$ 且 $b \mid n$ ，則 $m \times (n+tb)$ 和 $(m+sa) \times n$ 亦為無貫穿線矩形，其中 $s, t \in \mathbb{N}$ 或 0。

證明：由引理 11、引理 12、引理 13、引理 14，可得定理 9。■

(四)將定理 8、定理 9 的結果，用 2×3 的積木排出，並將排出結果整理成表六

表六 用 2×3 的積木排出的無貫穿線矩形

m 值	m×n 的無貫穿線矩形				
m=11	11×18	11×24	11×30	11×36	
					
m=13	13×18	13×24	13×30	13×36	
					
m=14	14×15	14×18	14×21	14×24	14×27
					
m=15	15×14	15×16	15×18	15×20	15×22
					
m=16	16×15	16×18	16×21	16×24	16×27
					
m=17	17×18	17×24	17×30	17×36	
					

(五) m 、 n 要符合甚麼條件，才能用 $a \times b$ 的積木排出無貫穿線矩形？

用 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，只要 m 、 n 均可表示成「 $ab+sa+tb$ 」的形式 (s 、 $t \in \mathbb{N}$)，就可以用 $a \times b$ 的積木排出 $m \times n$ 的無貫穿線矩形。

由引理 9 知，若用 $a \times b$ 的積木可排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，則 m 、 n 都可表示成「 $ab+sa+tb$ 」的形式，其中 s 、 $t \in \mathbb{N}$ 。反之亦成立，即以下的定理 10。

定理 10：若 a 、 b 為 m 或 n 的因數，且 m 、 n 均可表示成「 $ab+sa+tb$ 」的形式，其中 s 、 $t \in \mathbb{N}$ ，則 $m \times n$ 可排出無貫穿線矩形。

證明：設 $m=ab+s_1a+t_1b$ ， $n=ab+s_2a+t_2b$

- ① 當 $a \nmid m$ 、 $b \nmid m$ 且 $a \mid n$ 、 $b \mid n$ 時， $\therefore a \mid n \therefore a \mid t_2$ ， $\therefore b \mid n \therefore b \mid s_2$ ，此時 $n=kab$ ，其中 $k \geq 3$ 。由引理 8、引理 11、引理 12 知，可排出無貫穿線矩形。
- ② $a \mid m$ 且 $b \mid n$ 時， $\therefore a \mid m \therefore a \mid t_1$ ， $\therefore b \mid n \therefore b \mid s_2$ ，設 $t_1=k_1a$ 且 $s_2=k_2b$ ，此時 $m=2ab+a+(s_1+k_1b-b-1)a$ ， $n=2ab+b+(t_2+k_2a-a-1)b$ 。由引理 10、引理 13、引理 14 知，可排出無貫穿線矩形。■

由定理 10 知，若 a 、 b 為 m 或 n 的因數，只要 m 、 n 均可表示成「 $ab+sa+tb$ 」的形式 (s 、 $t \in \mathbb{N}$)，就可以用 $a \times b$ 的積木排出 $m \times n$ 的無貫穿線矩形。

(六) 用 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形之結論是「 $m \times n$ 」可表示成「 $(ab+s_1a+t_1b) \times (ab+s_2a+t_2b)$ 」的形式，其中 a, b 為 m 或 n 的因數，且 $\forall s, t \in \mathbb{N}$ 。

伍、討論

R.L.Graham(原著)告訴我們，用 $a \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形，必須符合兩個條件，(一) a, b 要為 m 或 n 的因數；(二) m, n 要有二種 a, b 組合，即 $m = s_1a + t_1b = s_2a + t_2b$ ， $n = s_3a + t_3b = s_4a + t_4b$ ，但原著未解釋原因，現在給予證明。

證明：(一)證明詳見定理 7。

(二) 1. m, n 只有一種 a, b 組合，無法排出無貫穿線矩形

設 $m = sa + tb$ ，若 $s > b$ ，則 $m = sa + tb = (s-b)a + (t+a)b$ ，此時 m 有兩種組合，

同理若 $t > a$ ，則 m 亦有兩種組合，故若 m 只有一種組合，則 $m = sa + tb$ ，此時 $s \leq b$ 且 $t \leq a$ ，由引理 5 知，無法排出無貫穿線矩形。

2. 若 a, b 為 m 或 n 的因數，且 m, n 有 2 種 a, b 組合，證明可排出無貫穿線矩形

設 $m = s_1a + t_1b = s_2a + t_2b$ ， $n = s_3a + t_3b = s_4a + t_4b$ ，其中 $\forall s, t \in \mathbb{N}$ ，

且 $s_1 \neq s_2, t_1 \neq t_2, s_3 \neq s_4, t_3 \neq t_4$ ，可設 $s_1 > s_2, t_4 > t_3$

由 $m = s_1a + t_1b = s_2a + t_2b \rightarrow s_1a - s_2a = t_2b - t_1b \rightarrow a(s_1 - s_2) = b(t_2 - t_1) \rightarrow b \mid a(s_1 - s_2)$

$\because (a, b) = 1 \quad \therefore b \mid (s_1 - s_2)$ ，令 $s_1 - s_2 = br_1 (r_1 \in \mathbb{N}) \rightarrow s_1 = s_2 + br_1$ 代入 $m = s_1a + t_1b$ 得 $m = r_1ab + s_2a + t_1b$ ，同理 $n = r_2ab + s_4a + t_3b$ ，由定理 10 知，可排出無貫穿線矩形。

■

陸、結論

- 一、若用 1×2 的積木可完全覆蓋 $m \times n$ 的矩形，則 m 、 n 中有一為偶數。
- 二、用 1×2 的積木可排 $m \times n$ 的最小無貫穿線矩形，當 $2 \nmid m$ 且 $2 \mid n$ ，則 $m=5$ 、 $n=6$ ，
當 $2 \mid m$ 且 $2 \mid n$ ，則 $m=8$ 、 $n=6$ 。
- 三、用 1×2 的積木排 $m \times n$ 的矩形，若 $m \times n$ 為一無貫穿線矩形，則 $m \times (n+2)$ 和 $(m+2) \times n$ 亦為無貫穿線矩形。
- 四、若用 1×2 的積木可排成 $m \times n$ 的無貫穿線矩形 $\Leftrightarrow m \times n$ 可表示成「 $(2x+1) \times 2y$ 」的形式，
其中 $x \geq 2$ 且 $y \geq 3$ ，或表示成「 $2x \times 2y$ 」的形式，其中 $x \geq 3$ 且 $y \geq 4$ 。
- 五、若用 $1 \times b$ 的積木可完全覆蓋 $m \times n$ 的矩形，則 m 、 n 中至少有一個是 b 的倍數。
- 六、若用 $1 \times b$ 的積木可排 $m \times n$ 的最小無貫穿線矩形，則 $m=2b+1$ ， $n=3b$ 。
- 七、用 $1 \times b$ 的積木排 $m \times n$ 的矩形，若 $m \times n$ 為無貫穿線矩形，且 $b \mid n$ ，
則 $m \times (n+b)$ 和 $(m+1) \times n$ 亦為無貫穿線矩形。
- 八、若用 $1 \times b$ 的積木可排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形 $\Leftrightarrow m \times n$ 可表示成「 $m \times kb$ 」的形式，其中
 $k \geq 3$ 且 $m \geq 2b+1$ 。
- 九、若用 $a \times b$ 的積木可完全覆蓋 $m \times n$ 的矩形，則(1) $a \mid m$ 且 $b \mid n$ 或 $a \mid n$ 且 $b \mid m$ ，或(2) $a \mid n$ 、
 $b \mid n$ 且 $m=ax_1+by_1$ 或 $a \mid m$ 、 $b \mid m$ 且 $n=ax_2+by_2$ ，其中 x_1 、 x_2 、 y_1 、 y_2 均為正整數。
- 十、若用 $a \times b$ 的積木可排 $m \times n$ 的最小無貫穿線矩形，(1)當 $a \nmid m$ 、 $b \nmid m$ 且 $a \mid n$ 、 $b \mid n$ ，
則 $m=ab+a+b$ ， $n=3ab$ (2)當 $a \mid m$ 且 $b \mid n$ ，則 $m=2ab+a$ ， $n=2ab+b$ 。
- 十一、若 $m \times n$ 是由 $a \times b$ 的積木排出的最小無貫穿線矩形，(1)若 $a \mid n$ 且 $b \mid n$ ，則 $m \times (n+kab)$
和 $(m+sa+tb) \times n$ 亦為無貫穿線矩形，其中 $k \geq 1$ ， $s、t \in \mathbb{N}$ 或 0 。(2)若 $a \mid m$ 且 $b \mid n$ ，
則 $m \times (n+tb)$ 和 $(m+sa) \times n$ 亦為無貫穿線矩形，其中 $s、t \in \mathbb{N}$ 或 0 。
- 十二、若用 $a \times b$ 的積木可排 $m \times n$ 的無貫穿線矩形 $\Leftrightarrow m \times n$ 可表示成「 $(ab+s_1a+t_1b) \times (ab+s_2a+t_2b)$ 」
的形式，其中 a 、 b 為 m 或 n 的因數，且 $\forall s、t \in \mathbb{N}$ 。

柒、參考資料

- 一、R.L.Graham Fault-free Tilings of Rectangles, *The Mathematical Gardner*, D. Klarner ed.,
Wadsworth, Belmont, (1981), 120-126

【評語】 030407

Tiling 問題是極具實用性的有趣問題。Fault-free tiling 的問題在之前的科展曾經多次被討論過，但結果都不是很完整。雖然問題是早有答案了，但要給予清楚的說明並不容易。作者藉由巧妙的分析技巧，先找出最小可能的無貫穿矩形，再經由簡單的擴充方式，推出無貫矩形存在的條件。說理清楚，分析問題的手法也很適切，非常難得。