中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030406

小莫比的翻轉世界

學校名稱：雲林縣立飛沙國民中學

作者：	指導老師：
國三 吳宜千 國二 陳佳琪 國二 吳婷茹	廖士鋒

關鍵詞：莫比烏斯環、翻轉、錯位黏接

小莫比的翻轉世界

摘要

莫比烏斯環可謂變化多端，只要賦予一小小操作變因，即產生意想不到的結果。由於其結果會有翻轉或打結的情形發生，故此研究以「讓莫比烏斯環呈現一通順無阻的大環」為目標-----於接頭進行「錯位黏接」與「適當翻轉」，並統整、歸納出其翻轉度數、打結情況、黏接方式的特性、變化和規律。

壹、研究動機

在一本書上有個問題：有隻螞蟻找到一條全部沾到糖水的繩子，牠想在正反兩面都留下費洛蒙，但不能翻越山嶺至另一面，螞蟻有何方法？答案是用「莫比烏斯環」的方法----將緞帶一頭拉住，另一頭翻轉180°後黏接。一般要使繩子黏成一個圈都是直接黏接，但轉180°後卻有不一樣的結果，因此引發我們對莫比烏斯環的好奇。

貳、研究目的

一、使莫比烏斯環最終結果呈現一「無翻轉、無打結」的情況為此研究的主目的。

二、探究莫比烏斯環的延伸、變形，製作了0°、180°、360°的旋轉紙環，並先將接頭分成2或3等份，以進行「錯位黏接」。於實驗中，探討接頭某小部分的翻轉及黏貼順序對整體結果的影響。

參、研究設備及器材

麥克筆、尺、防水帆布、相機、雙面膠、剪刀。

肆、研究過程或方法

一、直接黏接：

把旋轉0°、180°、360°、540°、720°的紙環接頭相黏接並將其等分剪開後記錄結果，進而以下表呈現之。

等份量 旋轉度數	1/2	1/3
0°		
180°		
360°		
540°		

720°		

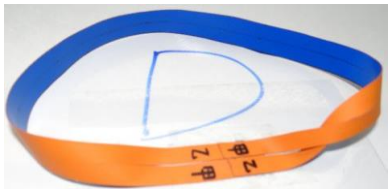
※由於直接黏接有時會有繩結或翻轉的現象產生，因此引起了「如何使之成為一通順大環」的好奇心，於是開始了一連串的延伸探究.....

二、錯位黏接：

此研究中，一改以往製作莫比烏斯環的方法------先將兩端接頭依所需的份數（ex: $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$）剪開一小段（將之稱為小體，而整個莫比烏斯環稱之大體）且旋轉所需度數於大體後，再依排列組合的方式進行錯位黏接（在此不討論有小環出現的情形），並記錄結果於下表。

（一）$\frac{1}{2}$ 等份 錯位黏接的結果

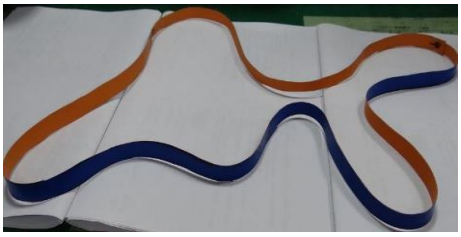
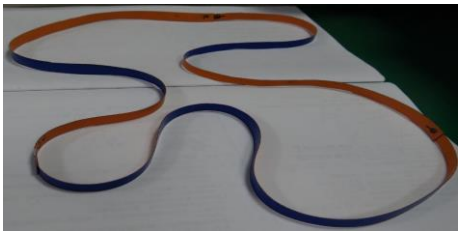
大體翻轉度數	錯位接法	剪開前	剪開後
0°	1.甲＋甲 2.乙＋乙		
	1.乙＋乙 2.甲＋甲		
	1.甲＋乙 2.乙＋甲		

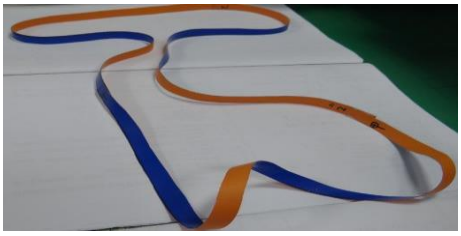
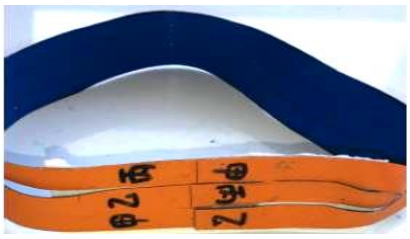
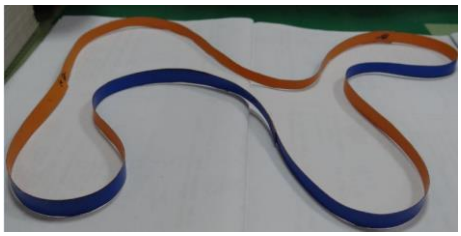
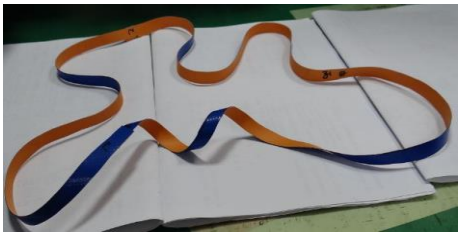
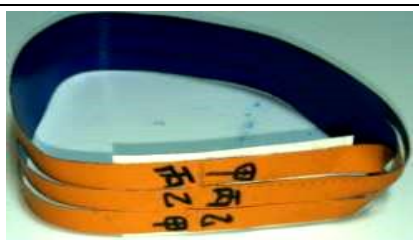
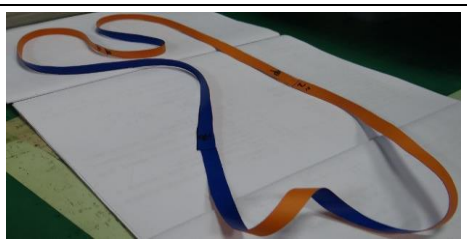
	1.乙＋甲　2.甲＋乙		
180°	1.甲＋甲　2.乙＋乙		

	1.乙＋乙　2.甲＋甲		
	1.甲＋乙　2.乙＋甲		
	1.乙＋甲　2.甲＋乙		
360°	1.甲＋甲　2.乙＋乙		
	1.乙＋乙　2.甲＋甲		
	1.甲＋乙　2.乙＋甲		

	1.乙＋甲　2.甲＋乙		

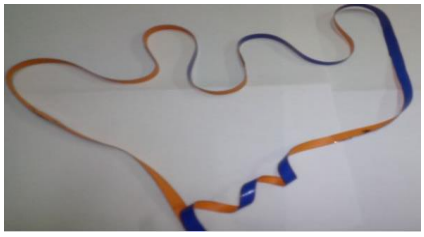
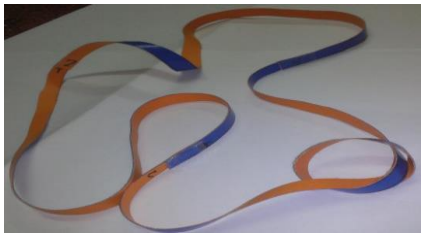
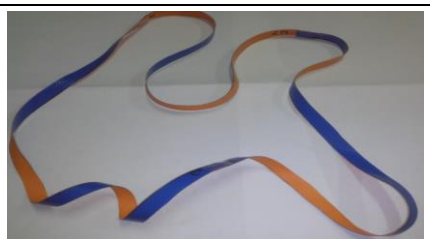
（二）$\frac{1}{3}$等份 0度 錯位黏接的結果

錯位接法	剪開前	剪開後
1.甲＋乙 2.乙＋丙 3.丙＋甲		
1.甲＋乙 2.丙＋甲 3.乙＋丙		
1.乙＋甲 2.丙＋乙 3.甲＋丙		
1.乙＋甲 2.甲＋丙 3.丙＋乙		
1.乙＋丙 2.丙＋甲 3.甲＋乙		

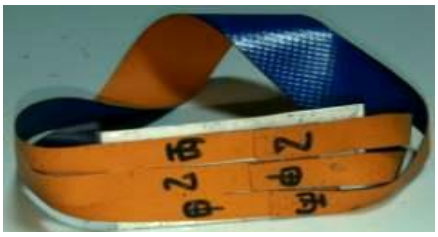
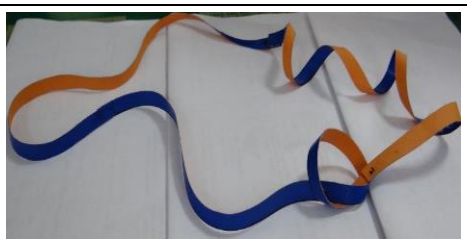
1.乙＋丙 2.甲＋乙 3.丙＋甲		
1.丙＋乙 2.甲＋丙 3.乙＋甲		
1.丙＋乙 2.乙＋甲 3.甲＋丙		
1.丙＋甲 2.甲＋乙 3.乙＋丙		
1.丙＋甲 2.乙＋丙 3.甲＋乙		
1.甲＋丙 2.乙＋甲 3.丙＋乙		
1.甲＋丙 2.丙＋乙 3.乙＋甲		

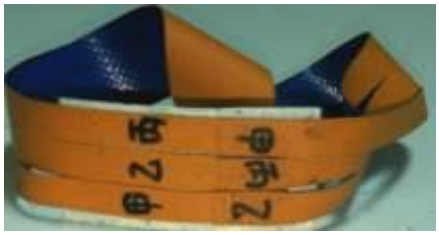
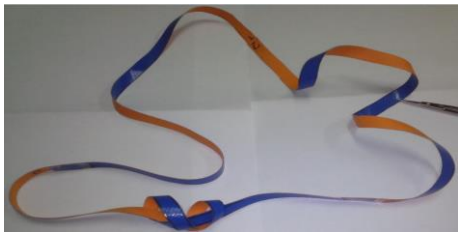
（三）$\frac{1}{3}$等份 180 度 錯位黏接的結果

錯位接法	剪開前	剪開後
1.甲＋乙 2.乙＋丙 3.丙＋甲		
1.甲＋乙 2.丙＋甲 3.乙＋丙		
1.乙＋甲 2.丙＋乙 3.甲＋丙		
1.乙＋甲 2.甲＋丙 3.丙＋乙		
1.乙＋丙 2.丙＋甲 3.甲＋乙		
1.乙＋丙 2.甲＋乙 3.丙＋甲		
1.丙＋乙 2.甲＋丙 3.乙＋甲		

1.丙＋乙 2.乙＋甲 3.甲＋丙		
1.丙＋甲 2.甲＋乙 3.乙＋丙		
1.丙＋甲 2.乙＋丙 3.甲＋乙		
1.甲＋丙 2.乙＋甲 3.丙＋乙		
1.甲＋丙 2.丙＋乙 3.乙＋甲		

（四）$\frac{1}{3}$等份 360 度 錯位黏接的結果

錯位接法	剪開前	剪開後
1.甲＋乙 2.乙＋丙 3.丙＋甲		
1.甲＋乙 2.丙＋甲 3.乙＋丙		
1.乙＋甲 2.丙＋乙 3.甲＋丙		
1.乙＋甲 2.甲＋丙 3.丙＋乙		
1.乙＋丙 2.丙＋甲 3.甲＋乙		
1.乙＋丙 2.甲＋乙 3.丙＋甲		
1.丙＋乙 2.甲＋丙 3.乙＋甲		

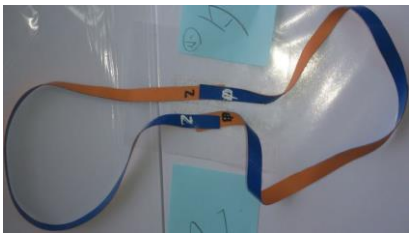
1.丙＋乙 2.乙＋甲 3.甲＋丙		
1.丙＋甲 2.甲＋乙 3.乙＋丙		
1.丙＋甲 2.乙＋丙 3.甲＋乙		
1.甲＋丙 2.乙＋甲 3.丙＋乙		
1.甲＋丙 2.丙＋乙 3.乙＋甲		

※紙帶的內側、外側定義 及基準面:

使紙帶和自己平行，較靠近自己的一側稱為「內」，而另一側則為「外」，由內而外依序寫上：甲、乙、丙。並以貼有雙面膠的那一面為基準（不動，並且以左手固定之），若接法記為「甲＋乙」，則表示乙為基準。

三、翻轉小體後直接黏接：

把接頭事先分成$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$，並於大體旋轉完所需度數後，做某一小體的部分翻轉，再將之依原本該有的順序黏貼上去，進而記錄結果於下表。

等份	大體翻轉度數(外)	小體總旋轉度數	剪開前	剪開後
$\frac{1}{2}$	180°	360° 內		
	180°	360° 外		
	360°	360° 內		
	360°	360° 外		
	540°	360° 內		
	540°	360° 外		

	720°	360° 內		
	720°	360° 外		
1/3	180°	360° 內		
	180°	360° 外		
	360°	360° 內		
	360°	360° 外		

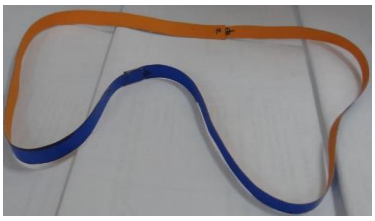
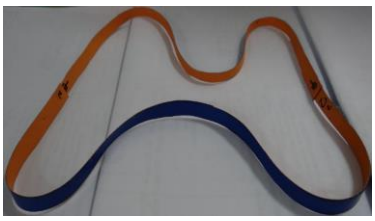
※紙帶向內轉、向外轉：

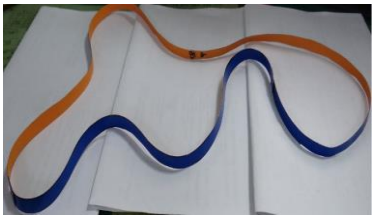
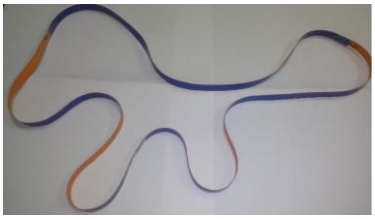
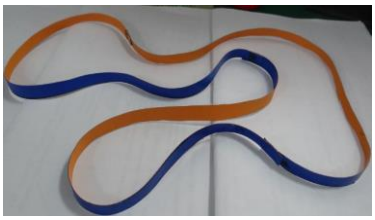
使紙帶和自己平行，朝自己的身體方向旋轉稱之為「向內轉」，若朝反方向轉，則稱為「向外轉」。

＊因為以上兩種方式大部分只能解決打結、翻轉其中一項問題，故在此將兩者融合，以達成「讓整體成為一通順無阻大環」的目的，並做更深入的研究。

四、翻轉小體後錯位黏接：

接頭等分且大體旋轉完之後，再將小體施以適當的翻轉，並進行錯位黏接，記錄結果於下表。

等份	大體翻轉度數(內)	小體旋轉總度數	錯位接法	剪開前	剪開後
$\frac{1}{2}$	0°	360°內	1.甲＋乙 2.乙＋甲		
	0°	360°外	1. 乙＋甲 2. 甲＋乙		
	180°	720°外	1. 甲＋乙 2. 乙＋甲		
	360°	1080°外	1. 甲＋乙 2. 乙＋甲		
$\frac{1}{3}$	0°	720°內	1. 甲＋乙 2. 乙＋丙 3. 丙＋甲		
	0°	720°內	1. 乙＋丙 2. 甲＋乙 3. 丙＋甲		

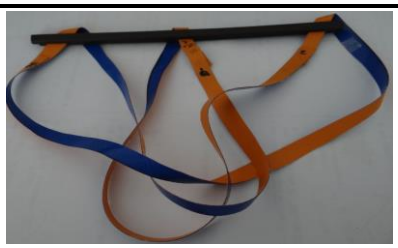
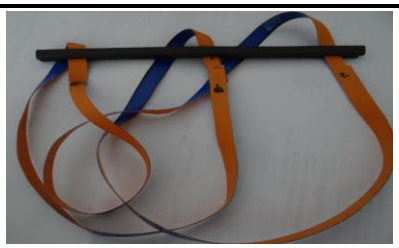
	0°	720° 內	1. 甲＋丙 2. 丙＋乙 3. 乙＋甲		
	0°	720° 內	1. 甲＋丙 2. 乙＋甲 3. 丙＋乙		
	0°	720° 外	1. 乙＋甲 2. 丙＋乙 3. 甲＋丙		
	0°	720° 外	1. 丙＋乙 2. 乙＋甲 3. 甲＋丙		
	0°	720° 外	1. 丙＋甲 2. 甲＋乙 3. 乙＋丙		
	0°	720° 外	1. 丙＋甲 2. 乙＋丙 3. 甲＋乙		
	180°	1260° 外	1. 丙＋甲 2. 乙＋丙 3. 甲＋乙		
	180°	1260° 外	1. 乙＋丙 2. 丙＋甲 3. 甲＋乙		

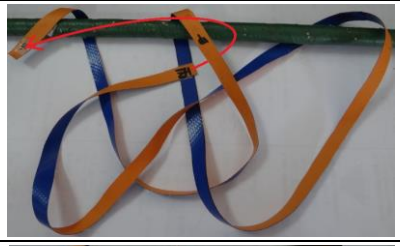
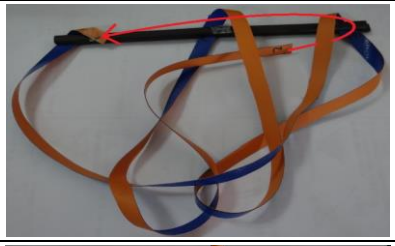
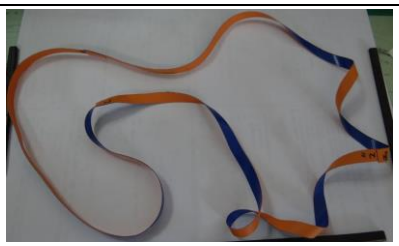
	180°	1260° 外	1. 乙＋丙 2. 甲＋乙 3. 丙＋甲		
	180°	1260° 外	1. 丙＋乙 2. 甲＋丙 3. 乙＋甲		
	180°	1260° 外	1. 丙＋乙 2. 乙＋甲 3. 甲＋丙		
	180°	1260° 外	1. 甲＋丙 2. 丙＋乙 3. 乙＋甲		

※　由於大體旋轉 360°且等分 3 等份者，無法單以錯位和小體翻轉來解決其打結情形，故另外找了一個方法來解開所面臨的問題，並將此方法稱之為「穿繞」(穿：將其一小體延著相鄰小體所形成的環下方穿過；　繞：小體穿過之後，繞回原點黏接。)。

然而，結果所呈現的繩結不同，小體需穿繞的方式亦隨之改變(ex：穿一環、穿二環、穿繞一次、穿繞二次)，以下為各繩結的解法步驟：

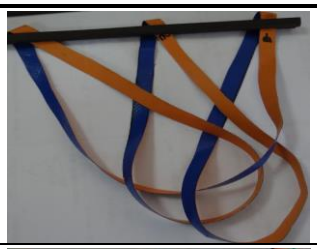
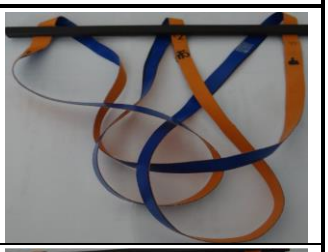
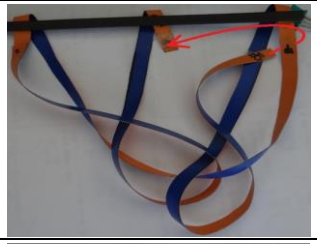
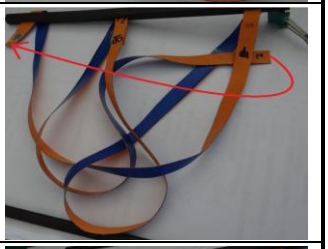
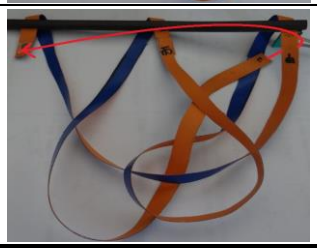
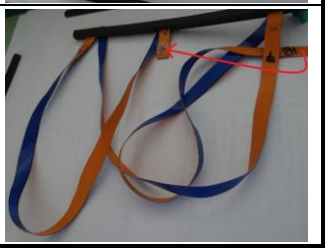
1.單結和穿單結：

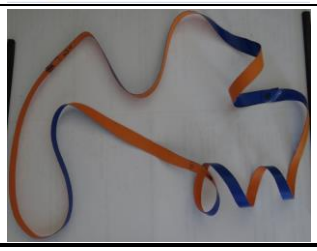
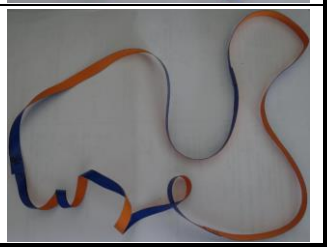
	圖例	
步驟、解說	單結	穿單結
Step 1. 將莫比烏斯環依附加條件黏接好。		

Step 2. 將其一小體延著相鄰小體所形成的環下方穿過（單結穿一環；穿單結穿二環）。		
Step 3. 小體穿過之後，重新繞回原點黏接。		
Step 4. 整理結果。		

2.雙單結：

因為它是由 2 個單結所組成，因此有較不一樣的變化。需要穿繞 2 次、有 2 種解法：先將雙單結變為單結或穿單結，再參照上列表格的解法，依情況做適當的穿繞。以下為雙單結的解法步驟：

	方法一		方法二	
步驟	解說	圖例	解說	圖例
Step 1	將莫比烏斯環依附加條件黏接好。		將莫比烏斯環依附加條件黏接好。	
Step 2	取其中一小體穿過其餘的任一環。（結果：穿單結＋900˚）。		取其中一小體穿過其餘的二環。（ 結果：單結＋1260˚）。	
Step 3	另取一條小體穿過其餘的二環。		另取一條小體穿過其餘的任一環。	

Step 4	小體穿過之後，重新繞回原點黏接。		小體穿過之後，重新繞回原點黏接。	
Step 5	整理結果		整理結果	

伍、研究結果

將實驗結果分為主要的兩部分：大體翻轉後 1.接頭無任何變化、直接黏接的莫比烏斯環，及 2.於接頭做錯位和旋轉的莫比烏斯環。以下分別針對這兩種類進行分析、探究。

一、探討接頭無變化之莫比烏斯環的最終結果-----旋轉度數與所有環數。以下為剪開後的結果彙整：

等份	大體旋轉度數	結果度數	環數
$\frac{1}{2}$	0°	0°	2
	180°	720°	1
	360°	360°	2
	540°	1440°	1
	720°	720°	2

等份	大體旋轉度數	結果度數	環數
$\frac{1}{3}$	0°	0°	3
	180°	大:720° 小: 180°	2
	360°	360°	3
	540°	大: 1440° 小: 540°	2
	720°	720°	3

二、探究接頭錯位及旋轉的變化莫比烏斯環（接法以「整體就一大環」為主）結果彙整：

賦予條件				結果	
等份	大體翻轉度數(向內)	小體旋轉總度數	錯位接法	旋轉度數	打結情形
$\frac{1}{2}$	0°	360°內	1.甲+乙 2.乙+甲	0°	無
	0°	360°外	1.乙+甲 2.甲+乙	0°	無
	180°	720°內	1.甲+乙 2.乙+甲	1440°	無
	180°	720°外	1.甲+乙 2.乙+甲	0°	無
	360°	1080°內	1.甲+乙 2.乙+甲	2160°	無
	360°	1080°外	1.甲+乙 2.乙+甲	0°	無
	360°	540°外	1.乙+甲 2.甲+乙	0°	單結
$\frac{1}{3}$	0°	720°內	1.甲+乙 2.乙+丙 3.丙+甲	0°	無
	0°	720°內	1.乙+丙 2.甲+乙 3.丙+甲	0°	無
	0°	720°內	1.甲+丙 2.丙+乙 3.乙+甲	0°	無
	0°	720°內	1.甲+丙 2.乙+甲 3.丙+乙	0°	無
	0°	720°外	1.乙+甲 2.丙+乙 3.甲+丙	0°	無
	0°	720°外	1.丙+乙 2.乙+甲 3.甲+丙	0°	無
	0°	720°外	1.丙+甲 2.甲+乙 3.乙+丙	0°	無
	0°	720°外	1.丙+甲 2.乙+丙 3.甲+乙	0°	無
	0°	0°	1.甲+乙 2.丙+甲 3.乙+丙	0°	無
	0°	0°	1.乙+甲 2.甲+丙 3.丙+乙	0°	無
	0°	0°	1.乙+丙 2.丙+甲 3.甲+乙	0°	無
	0°	0°	1.丙+乙 2.甲+丙 3.乙+甲	0°	無

	180°	1260°外	1.丙+甲 2.乙+丙 3.甲+乙	0°	無
	180°	1260°外	1.乙+丙 2.丙+甲 3.甲+乙	0°	無
	180°	1260°外	1.乙+丙 2.甲+乙 3.丙+甲	0°	無
	180°	1260°外	1.丙+乙 2.甲+丙 3.乙+甲	0°	無
	180°	1260°外	1.丙+乙 2.乙+甲 3.甲+丙	0°	無
	180°	1260°外	1.甲+丙 2.丙+乙 3.乙+甲	0°	無
	180°	720°外	1.丙+甲 2.甲+乙 3.乙+丙	0°	單結
	180°	720°外	1.甲+乙 2.乙+丙 3.丙+甲	0°	單結
	180°	720°外	1.甲+乙 2.丙+甲 3.乙+丙	0°	單結
	180°	720°外	1.乙+甲 2.丙+乙 3.甲+丙	0°	單結
	180°	720°外	1.乙+甲 2.甲+丙 3.丙+乙	0°	單結
	180°	720°外	1.甲+丙 2.乙+甲 3.丙+乙	0°	單結
	360°	1260°外	1.乙+丙 2.甲+乙 3.丙+甲	0°	單結
	360°	1260°外	1.甲+丙 2.丙+乙 3.乙+甲	0°	單結
	360°	1260°外	1.甲+乙 2.乙+丙 3.丙+甲	0°	單結
	360°	1260°外	1.甲+丙 2.乙+甲 3.丙+乙	0°	單結
	360°	900°外	1.乙+丙 2.丙+甲 3.甲+乙	0°	穿單結
	360°	900°外	1.丙+乙 2.甲+丙 3.乙+甲	0°	穿單結

	360°	900°外	1.甲+乙 2.丙+甲 3.乙+丙	0°	穿單結
	360°	900°外	1.乙+甲 2.甲+丙 3.丙+乙	0°	穿單結
	360°	900°外	1.丙+甲 2.乙+丙 3.甲+乙	0°	雙單結
	360°	900°外	1.丙+乙 2.乙+甲 3.甲+丙	0°	雙單結
	360°	900°外	1.丙+甲 2.甲+乙 3.乙+丙	0°	雙單結
	360°	900°外	1.乙+甲 2.丙+乙 3.甲+丙	0°	雙單結

陸、討論

一、討論直接黏接的結果特性：

(一) 由於接頭沒有錯位就直接黏接，所以在黏接的過程中便會出現：同名稱的接頭相黏，故容易出現小環。

(二) 莫比烏斯環分為 n 等份，且無翻轉、或轉了 180° 的偶數倍，若 n 為偶數，則出現 n 個小環，但如果將莫比烏斯環分為單數等份，則中間那一條接頭無論如何，所接都是同名稱者，故結果為大環和小環。

二、個別探究錯位黏接及小體旋轉對整體的影響：

(一) 討論錯位黏接對整體的影響：

1. 因為在錯位黏接的過程中，能藉由錯位而抵消或增加原本線條交錯的部分，因此莫比烏斯環所呈現的結果，可以不再是好幾個環，且能解決大部分的打結問題。

2. 若接頭的配對是一樣的，那麼所呈現出來的結果應該也要一致，但經實驗證實，這項說法是錯誤的！因為在錯位時，「涉及到接頭的交錯、重疊情形」。因此若要使整體成為一個無阻的大環，接頭的黏接順序扮演著極重要的角色，因為它決定了「莫比烏斯環是否打結」的命運。

3. 由各個沒有打結情形的莫比烏斯環接法來做觀察，可以發現：若接頭有 2 條，則翻轉後「位於外側者，應最後黏接」；相同道理，若接頭為 3 條，則固定其中一條後，居外側者後黏接，如此一來，即不會有打結的情況發生。

(二) 討論小體旋轉對整體的影響：

要想抵消掉莫比烏斯環的旋轉度數，必須先得求出整體將會旋轉的度數，再於小體施予反方向、同度數的附加條件。 此處的莫比烏斯環分為 2 種情形：

1. 只有翻轉　　2. 翻轉 + 單結 ，所以度數的求法亦有 2 種，整理如下表所示：

等份	情形	大體翻轉度數	結果(小體應旋轉總度數)
a	翻轉	n°	a×n° +360° ×(a－1)
	翻轉＋單結	n°	a×n° +360° ×(a－1)－3×180°

(1) 只有翻轉：若要將此莫比烏斯環分為 a 等分，則在大體翻轉 n° 時，已將整個環旋轉了 a×n° (∵大體在翻轉時，即等於 a 條小體同時翻轉)，又將莫比烏斯環每剪開一次，其必須翻轉兩次（360° ）以回到原點，分為 a 等分，需剪（a－1）次，故整體的度數求法為「an° +360° ×(a－1)」

(2) 翻轉+單結： 由以上各實驗結果可知：一樣的接頭配對，但因黏接順序不同，而使結果有「打結」與「沒有打結」兩種情況。結果有打結的整體旋轉度數皆比沒有打結的「少了 540°」。所以一個單結可抵消掉 540°。

※由於「大體翻轉 360° 且等分 3 份者」不管錯位接法如何，都會有打結的情況發生，故於此個別探討其打結的結構，並給予名稱。總共可分為 3 種情形，統整如下表。

名稱	單結	穿單結	雙單結
結構說明	經整理後，可發現： 其為一般的單結打法。	單結的變形----繞了一圈後，才又打一單結。	多變化的結…單結連續打了兩次，且都打在對方之上。
圖示			

三、探討雙單結先「穿繞一環」及「穿繞二環」的差別、影響：

(一) 打結情形的轉變：

原本雙單結的結構為三環相扣（每環皆內扣二環），穿繞一環後，相扣的結構已解開了一部分，但仍有三個圈且內扣的環數減少；若穿繞二環，則結構更趨簡易——已解開一環，只剩二圈，即單結。

(二) 整體翻轉度數的變化：

1. 以結果來看： 穿單結本身較單結多繞了一圈 360°才打結，所以整體翻轉的度數比單結少了 360°。

2. 以結構來說明： 穿繞一環後，三個圈都還在，故整體翻轉度數只增加小體所穿繞的 180°。但穿繞二環時，便多一個圈被解開，又增加了 360°。 所以穿繞一環較原本多 180°，穿繞二環則多 540°。

柒、結論

一、 若名稱相同的接頭互相黏接（ex:甲+甲、乙+乙……），則結果會出現小環，且出現的環個數依同名稱相接的組數而定。

二、 大體翻轉後，位於外側者（或先固定一條，再分內、外），最後黏接，則整體結果便不會有打結的情況發生。

三、 若大體分為 a 等分且翻轉 n° ，那麼小體總共須旋轉「a×n° ＋360° ×(a－1)」，以抵消大體翻轉所造成的度數。

四、 小體和大體旋轉的方向必須相反，才可有效抵消度數，否則只會使度數持續增加。

五、 雖然只有 3 等份對 3 等份的黏接，但因為對應的組合數及重疊順序不同，所以總共產生了 30 多種情形。

六、 大體翻轉 360° 且等分 3 份的部分 皆會有繩結產生，並且可分為 3 種類型：單結、穿單結及雙單結。

七、 大體翻轉 360° 且等分 3 份者，若不探討有小環產生的部分，所剩餘的排列組合還有 12 組，而以上 3 種類型的單結各占 $\frac{1}{3}$ （4 組）。

八、 穿單結穿繞二環，單結穿繞一環即可解決打結問題。

九、 雙單結需要 2 步驟方可解開：第一步穿繞，若穿繞一環成穿單結、多 180°、穿繞二環成單結、多 540°；第二步則視前者的變化作適當穿繞。

十、 解開一個單結整體增加 540°；抵消一個穿單結則增添 900°；若是消掉一個雙單結，整體則多了 1020°。

捌、參考資料及其他

一、Brian Blot（1995）。Mathematical activities: a resource book for teachers.

譯 林傑斌 數學遊樂園之茅塞頓開（繆比烏斯帶 p.24~p.26）。 台北市：牛頓。

二、維基百科，自由的百科全書---莫比烏斯

http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%B8%A6

【評語】030406

本作品主要是在 Möbius Banel 的應用，數學上的著墨較少。想法是有創意，尤其是多條莫比斯帶的組合，可以參酌造成"Knots"的形成做更進一步的探討，成果會更好。