中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第二名

030405

數字夾心餅

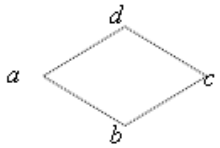
學校名稱：新北市立江翠國民中學

作者：	指導老師：
國一 高佳晏	呂家軒 顏榮皇

關鍵詞：Frieze Patterns、倍數與互質、轉換

摘要

本作品研究一種梯形，梯形裡含有許多個菱形，菱形四個角均有數字 a 、b 、c 、d ，滿足 $a\times c=b\times d+1$。



這些菱形排列成，上下底都是 1，列數 7 層梯形如下圖。由正整數矩陣在平面上拼貼，屬於 Frieze Patterns 的一種形式。

不同於 Henry 使用遞迴方式尋找 Frieze Patterns 的週期。我們使用國中教材所提到多項式四則運算進行結構分析。

本研究證明相鄰正整數的互質與倍數關係、梯形存在性、兩種研究策略、轉換、結構設計準則、n 層結構週期為 $n+1$ 及第 2 列任意連續 $n+1$ 個自然數總和的不變量，並討論 1 層與 2 層結構的退化。

我們討論生成數列最大值、是否同構判斷準則、降階關係及非同構組數上下界，得到一個和非同構組數有關的不等式。

本研究可應用於「檢查碼」；同時透過顏色與結構週期的對應，得到美麗圖案。

```
1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
  1   3   2   1   5   1   2   3   1   3   2   1   5
    2   5   1   4   4   1   5   2   2   5   1   4
      3   2   3   3   3   2   3   3   3   2   3
        1   5   2   2   5   1   4   4   1   5
          2   3   1   3   2   1   5   1   2
            1   1   1   1   1   1   1   1
```

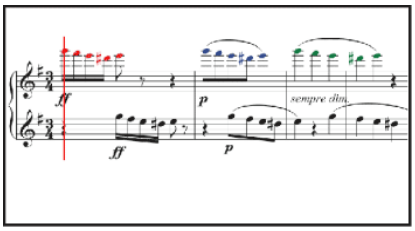
壹、前言

一、研究動機

自然界可以很容易的看到 Frieze Patterns，如花豹花紋、欄杆花紋、音樂符號。
本研究是討論 Frieze Patterns 的數學形式，如圖四。
在前年的一場科學展覽教師研習被提出來討論。當時，我們是國小五年級升六年級的暑假。

圖一、花豹花紋

圖二、欄杆花紋



圖三、音樂符號

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5
2 5 1 4 4 1 5 2 2 5 1 4
3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3
1 5 2 2 5 1 4 4 1 5
2 3 1 3 2 1 5 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1

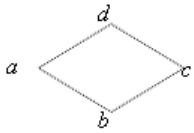
圖四

題目一

請觀察圖四結構。圖四是由許多小菱形所構成，並且遵循下列的規則：
一、菱形的四個角均有自然數所構成數字 a 、b 、c 、d ，如圖五，且滿足

$$a \times c = b \times d + 1 \text{。} \qquad (1)$$

二、在圖四中菱形排列成:上下底都為 1、第 1 列有 14 個 1、第 7 列有 8 個 1、列數有 7 層的梯形。



圖五

等式(1)的表示，如圖六的黃色區域， 2×5=3×3+1；4×4=5×3+1；
5×2=3×3+1；5×1=2×2+1。

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	2	1	5	1	2	3	1	3	2	1	5	
2	5	1	4	4	1	5	2	2	5	1	4		
3	2	3	3	3	2	3	3	3	2	3			
1	5	2	2	5	1	4	4	1	5				
2	3	1	3	2	1	5	1	2					
1	1	1	1	1	1	1	1						

圖六

將圖四著色如圖七，將圖五座標訂定為由上而下的列數，由左而右數過來的個數，我們會有

$G^7_{2,5}$=5，以粉紅色標示；$G^7_{3,4}$=4，以黃色標示；

$G^7_{3,5}$=4，以綠色標示；　$G^7_{4,4}$=3，以藍色標示。

第一列	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
第二列	1	3	2	1	5	1	2	3	1	3	2	1	5	
第三列	2	5	1	4	4	1	5	2	2	5	1	4		
…	3	2	3	3	3	2	3	3	3	2	3			
	1	5	2	2	5	1	4	4	1	5				
	2	3	1	3	2	1	5	1	2					
	1	1	1	1	1	1	1	1						

圖七

定義二

$G^n_{i,j}$ 表示 n 層梯形中的第 i 列第 j 行的數字。

透過圖四的觀察，我們把可能排的數字列出來找到一些關係並發現一個通則：

通則三

給定某一個 n 層梯形結構:

最上面的第一列全部擺 1，第二列填入任意的自然數，第三列到第 i 列數字依照

$$G^n_{i,j} \times G^n_{i,j+1} = G^n_{i-1,j+1} \times G^n_{i+1,j} + 1 \text{。其中，} 3 \le i \le n-1 \text{。} \qquad (2)$$

圖上的第一列的兩旁沒有使用到此通則。

若第 i 列所產生數字都是自然數，且最後一列都是 1，則是本研究將研究的 Frieze Patterns。

二、文獻探討

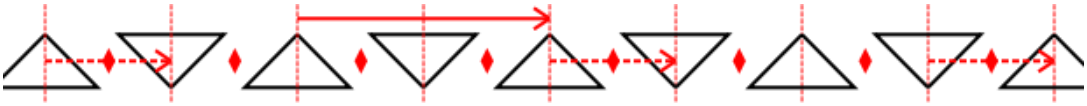
（一）國外文獻

1. Frieze groups 已知有 7 種形式。本研究屬於「PMA2」型，如圖八，實線箭頭是平移 ，虛線是反射，鑽石是 180 度旋轉，[5]。
2. Coxeter 對於 Frieze patterns，提出解釋，即，通則三所填入第 2 列的自然數，就是凸 $n+1$ 邊形各個頂點內接三角形的數量，[6]。
3. Coxeter 發現 Frieze patterns 斜邊的任意 3 個整數的倍數關係，[7]。
4. Henry 利用雙遞迴證明 $G_{i,j}^{n}=G_{2,i}^{n}\times G_{i-1,j}^{n}-G_{i-2,j}^{n}$ 再利用此一公式證明 Frieze patterns 的週期是 $n+1$，[6]。
5. 本研究將直觀觀察非同構的組數「1、1、4、6、19」輸入數列大全，得到一般式 $a(n)$：

$$a(n)=\frac{C_{n+1}}{n+3}+\frac{C_{\frac{n+1}{2}}}{2}+\frac{2}{3}\times C_{\frac{n}{3}}$$ ，其中，C_n 為第 n 個卡特蘭數。 (3)

n 為奇數，一般式要加上 $\frac{C_{\frac{n+1}{2}}}{2}$ 。

n 為 3 的倍數，一般式要加上 $\frac{2}{3}\times C_{\frac{n}{3}}$ 。



圖八、「PMA2」型

（二）國內研究

去年，我們以「貼磁磚的工人」(以下簡稱前作品）發表於＊＊市科學展覽國小數學科比賽。前作品的重要發現有

1、存在性：針對 n 層結構，至少找到一種鋪滿的方式，如演算方法四。

2、研究策略：填入第 2 列方式可更改為從第 1 行填入數字模式構造數學結構，參看定理五。

3、倍數問題：在構造好的梯形中，不考慮上端的兩旁，斜向的連續三個數字，兩旁數字的和是中間數字的倍數，參看定理六。

4、互質問題: 在構造好的梯形中，任意斜向的連續二個數字互質，參看定理七。

5、發現 Frizer Patterns 中的 PMA2 型，參看事實十二。

三、研究目的

最近，我們發現圖四的第一列與最後一列都是數字 1，其他列的數字都依照通則三的規定填入自然數，因此本作品稱為【數字夾心餅】，以下簡稱「本研究」。

本研究的目的：

一、結構分析：依定理六及定理七，重新以變數填入圖四的梯形結構，觀察其變化。

二、生成數列：定義生成數列，並嘗試引入同構的概念。

三、轉換：　延伸 n 層結構中各行或各列連續 3 個數之間的倍數關係，做轉換。

四、同構判斷：尋找一種方法來判斷兩個生成數列是否同構。

五、週期問題：利用轉換探討週期的問題。

六、組數問題：給定 n 層的非同構組數為 $S(n)$，觀察 $n \le 10$ 非同構的組合，並探討上下界與文獻中「數列大全」的關係。

七、不變量　：給定 n 層，討論我們對於第 2 列連續 $n+1$ 個整數和的不變量。

八、降階關係：探討組數問題的降階關係。

四、研究設備及材料

個人電腦、紙、筆。

貳、研究過程

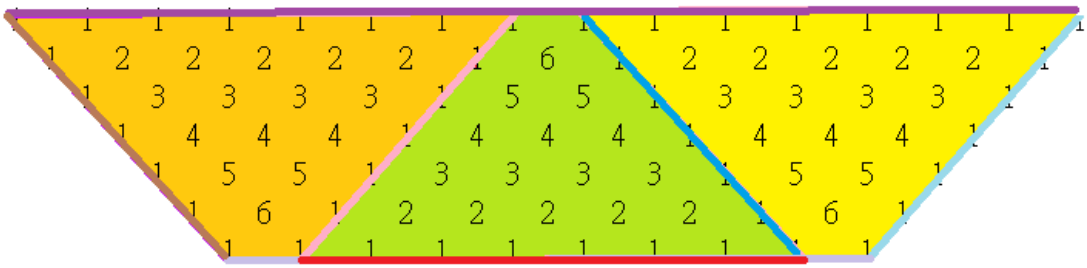
一、結構分析

（一）存在性

給定 n 層結構，可使用下列的演算方法構造，並利用數學歸納法證明之。

演算方法四

給定自然數 n，第 2 列先擺 1，然後擺 2 連續 $n-2$ 次，再放一個 1，再擺一個 $n-1$，就可以構成一種 n 層的一般式，如圖九是 $n=7$ 的例子。



圖九

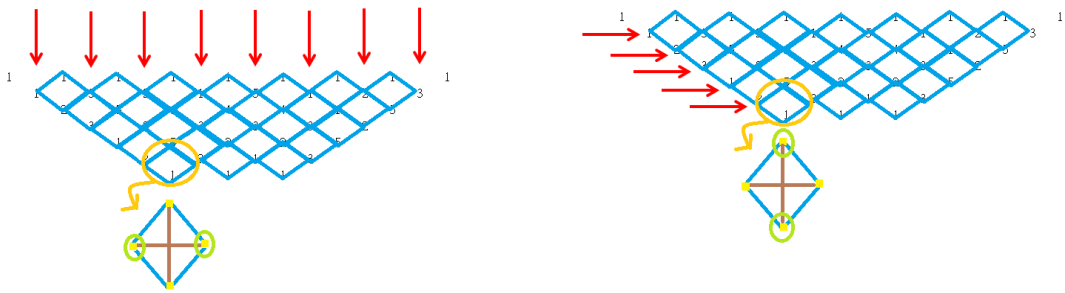
（二）研究策略

透過觀察圖九，

$$G_{i,1}^{n}=1，1\le i\le 7。$$

我們從圖形的第 2 列構造梯形，如圖十的甲。後來觀察到圖九的第 1 行都是由 1 組成的數列，所以猜測也可以從第一行去構造，如圖十的乙。

因此，圖十的甲和圖十的乙，均可以當我們的研究策略。



甲　　乙

圖十

透過通則三的等式(2)，得到

定理五

$$G_{i,j+1}^{n}=\frac{G_{i-1,j+1}^{n}\times G_{i+1,j}^{n}+1}{G_{i,j}^{n}}。$$

（三）倍數與互質關係

本研究針對圖十一相鄰的整數，提出一種證明方式。

定理六

梯形結構中，不考慮上端的兩旁，斜向的連續三個數字，兩旁數字和是中間數字的倍數。

【證明】

不失一般性，如圖十一，將證明 f 整除 $d+h$。依通則三，得到

$$cd = af + 1\text{，}ef = ch + 1\text{，則}$$

$$a = \frac{cd-1}{f}\text{，且 } e = \frac{ch+1}{f}\text{，}$$

$$a + e = \frac{cd - 1 + ch + 1}{f} = \frac{c(d+h)}{f} = c \times \frac{d+h}{f}\text{。}$$

由於梯形中，都是自然數，故，

$$a + e = c \times \frac{d+h}{f} \text{ 為自然數。}$$

$$\text{又依 } cd - af = 1\text{，}$$

$$\gcd(c, f) = 1\text{。} \qquad (4)$$

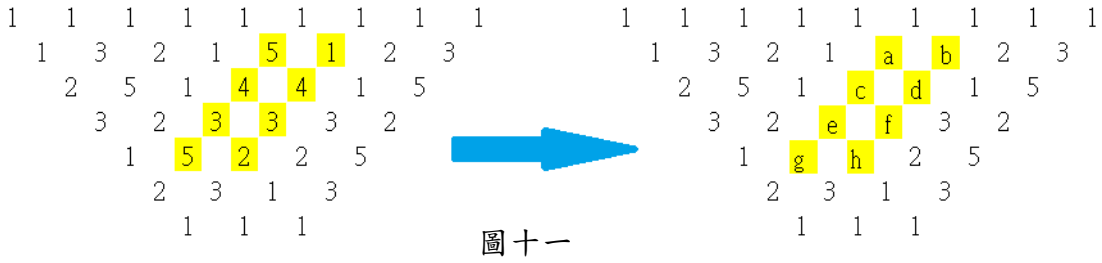
$$\frac{d+h}{f} \in N\text{。}$$

□

依定理六証明過程，式子(4)的 $\gcd(c, f) = 1$，得到

定理七

在構造好的梯形中，任意斜向的連續二個數字互質。



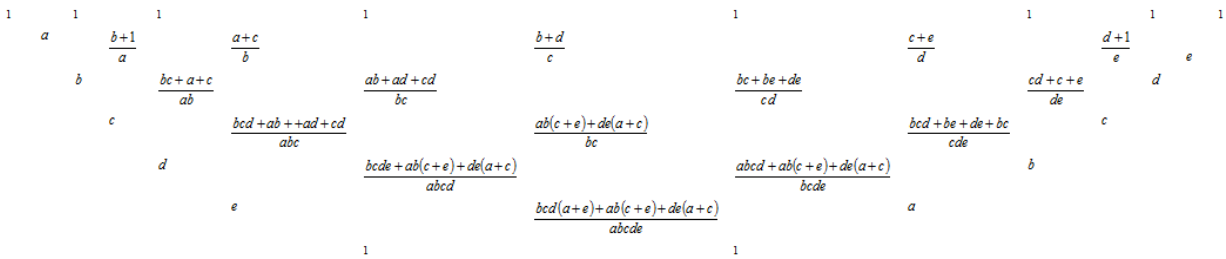
圖十一

（四）7 層結構的分析

如圖十二，針對 7 層結構，依通則三、定理六及定理七，將數列$(1,a,b,c,d,e,1)$填入第 1 行。

得到：

對應關係如事實八，請參考資料 5「PMA2」型的反射，如圖八。
退化關係如事實九。
週期關係如事實十，請參考資料 5「PMA2」型的平移，如圖八。
分式多項式結構如事實十一。
「PMA2」型如補充說明十二，請參考資料 5「PMA2」型，如圖八。



圖十二

觀察圖十二，得到

事實八（對應關係）：
a 和 e 互相對應，b 和 d 互相對應。

考慮圖十二變數，設 $e=1$，由$(1,a,b,c,d,e,1)$變成以$(1,a,b,c,d,1)$填入第一行，規定圖十二第 6 列均填入 1，刪除第 7 列，構造 6 層結構。

考慮圖十二變數，設 $d=e=1$，由$(1,a,b,c,d,e,1)$變成以$(1,a,b,c,1)$填入第一行規定圖十二第 5 列均填入 1，刪除第 6 列及第 7 列，可以構造 5 層結構。

考慮圖十二變數，設 $c=d=e=1$，由$(1,a,b,c,d,e,1)$變成以$(1,a,b,1)$填入第一行規定圖十二第 4 列均填入 1，刪除第 5 列、第 6 列第 7 列，可以構造 4 層結構。

考慮圖十二變數，設 $b=c=d=e=1$，由$(1,a,b,c,d,e,1)$變成以$(1,a,1)$填入第一行，規定圖十二第 3 列均填入 1，刪除第 4 列、第 5 列、第 6 列第 7 列，可以構造 4 層結構。

事實九（退化關係）

當 $4 \le n \le 7$，數列 $\left(1, G_{2,1}^{n}, G_{3,1}^{n}, G_{4,1}^{n}, \cdots, G_{n-1,1}^{n}, 1\right)$ 填入第 1 行，若可以構成 n 層梯形結構，且 $G_{n-1,1}^{n} = 1$，可以退化成 $n-1$ 層梯形結構。

事實十（週期關係）

由 $G_{2,1}^{7}$ 開始，數列的週期為 8，依序為 a、$\frac{b+1}{a}$、$\frac{a+c}{b}$、$\frac{b+d}{c}$、$\frac{c+e}{d}$、$\frac{d+1}{e}$、e、

$$\frac{bcd(a+e)+ab(c+e)+de(a+c)}{abcde}。$$

由 $G_{3,1}^{7}$ 開始，數列的週期為 8，依序為 b、$\frac{bc+a+c}{ab}$、$\frac{ab+ad+cd}{bc}$、$\frac{bc+be+de}{cd}$、$\frac{cd+c+e}{de}$、

$$d、\frac{bcde+ab(c+e)+de(a+c)}{abcd}、$$

$$\frac{abcd+ab(c+e)+de(a+c)}{bcde}。$$

由 $G_{4,1}^{7}$ 開始，數列的週期為 4，依序為 c、$\frac{bcd+ab+ad+cd}{abc}$、$\frac{ab(c+e)+de(a+c)}{bc}$、

$$\frac{bcd+be+de+bc}{cde}。$$

其中，7 為奇數，則其週期為 $\left[\frac{7+1}{2}\right]=4$。

由 $G_{5,1}^{7}$ 開始，數列的週期為 8，依序為 d、$\frac{bcde+ab(c+e)+de(a+c)}{abcd}$、

$$\frac{abcd+ab(c+e)+de(a+c)}{bcde}、b、\frac{bc+a+c}{ab}、$$

$$\frac{ab+ad+cd}{bc}、\frac{bc+be+de}{cd}、\frac{cd+c+e}{de}。$$

其中，$G_{5,j}^{7} = G_{3,j+4}^{7}$，$1 \le j \le 4$。

由 $G_{6,1}^{7}$ 開始，數列的週期為 8，依序為 e、$\frac{bcd(a+e)+ab(c+e)+de(a+c)}{abcde}$、$a$、$\frac{b+1}{a}$、$\frac{a+c}{b}$、

$$\frac{b+d}{c}、\frac{c+e}{d}、\frac{d+1}{e}。$$

其中，$G_{6,j}^{7} = G_{2,j+6}^{7}$，$1 \le j \le 6$。

事實十一（分式多項式結構）

圖八的分式多項式，分母為變數的相乘，各變數為 1 次式或是零次。且保證所有的分式多項式的值是自然數。

如圖四，針對第一行數列 $(1,1,2,3,1,2,1)$ 所建構的數學結構研究，

發現

藍色線條的數列(3, 2, 1, 5, 1)出現 2 次； (5)

紫色線條的數列(5, 1, 4, 4) 出現 2 次； (6)

綠色線條的數列(2, 3, 3) 出現 2 次； (7)

褐色線條的數列(5, 2) 出現 2 次； (8)

紅色線條的數列(3) 出現 2 次。 (9)

也就是，

將式子(5)藍色線條的數列(3, 2, 1, 5, 1)當做一個藍點；

將式子(6)紫色線條的數列(5, 1, 4, 4) 當做一個紫點；

將式子(7)綠色線條的數列(2, 3, 3) 當做一個綠點；

將式子(8)褐色線條的數列(5, 2) 當做一個褐點；

將式子(9)紅色線條的數列(3) 當做一個紅點；

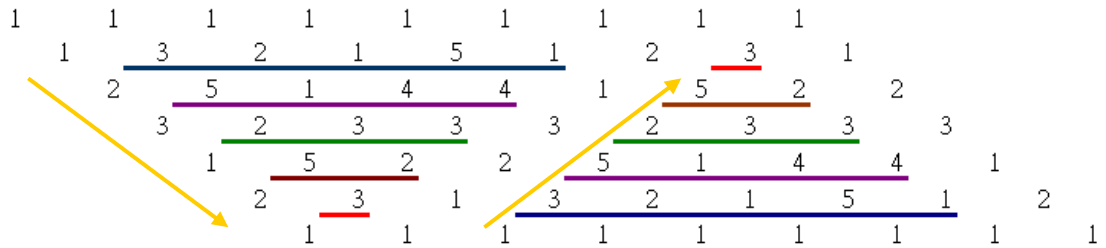
再以 $G_{4,5}^{7}=3$ 為對稱中心，$G_{i,1}^{7}=G_{8-i,i+1}^{7}$，$1\le i\le 7$；發現「PMA2」型，如圖十三及圖十四。

觀察圖十二，帶入文字變項，得到

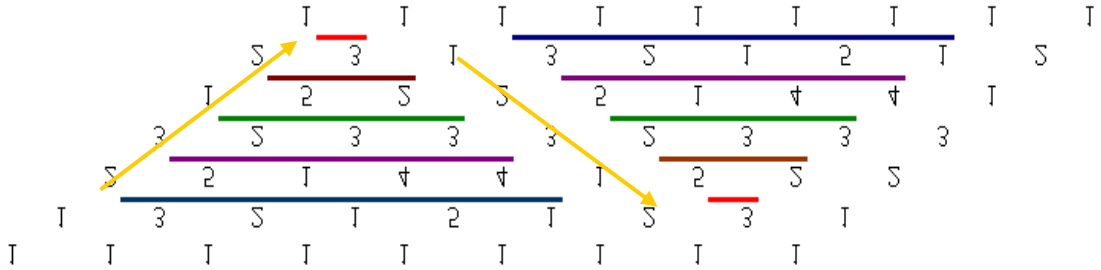
事實十二(PMA2 型)

數列 $\left(1,G_{2,1}^{7},G_{3,1}^{7},G_{4,1}^{7},G_{5,1}^{7},G_{6,1}^{7},1\right)$ 填入第 1 行，若可以構成 7 層梯形結構，則 $G_{i,1}^{7}=G_{8-i,i+1}^{7}$，

$1\le i\le 7$。



圖十三



圖十四

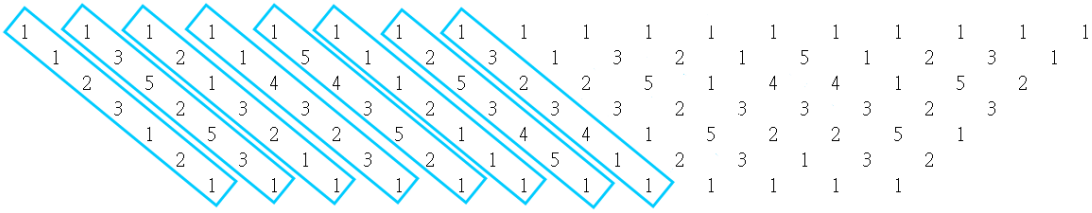
二、轉換

（一）生成數列

考慮圖四，取前 8 個數列，如圖十五及圖十六。

$$
\begin{aligned}
&(1,1,2,3,1,2,1)\\
&\to (1,3,5,2,5,3,1)\\
&\to (1,2,1,3,2,1,1)\\
&\to (1,1,4,3,2,3,1)\\
&\to (1,5,4,3,5,2,1)\\
&\to (1,1,1,2,1,1,1)\\
&\to (1,2,5,3,4,5,1)\\
&\to (1,3,2,3,4,1,1)\\
&\to (1,1,2,3,1,2,1)
\end{aligned}
$$

圖十五



圖十六

發現這 8 個數列所生成的結構都相同。

定義十四

可構成同一結構梯形的數列稱為生成數列。

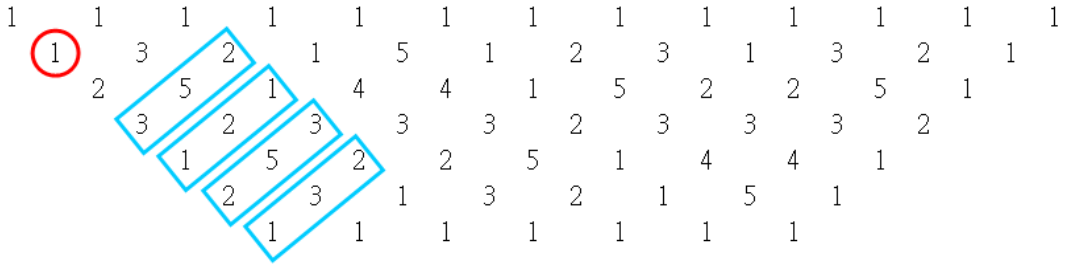
（二）相鄰三個數的倍數問題

觀察圖十七、圖十八及圖十九，發現

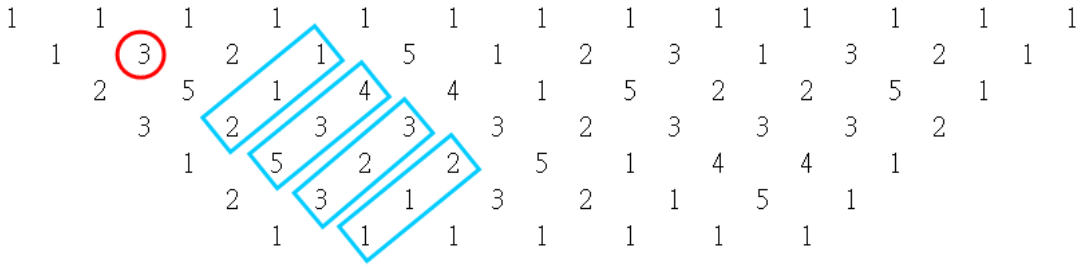
$$G_{2,1}^{7}=\frac{G_{i-1,3}^{7}+G_{i+1,1}^{7}}{G_{i,2}^{7}}\text{，}2\le i\le 6\text{。}$$

$$G_{2,2}^{7}=\frac{G_{i-1,4}^{7}+G_{i+1,2}^{7}}{G_{i,3}^{7}}\text{，}2\le i\le 6\text{。}$$

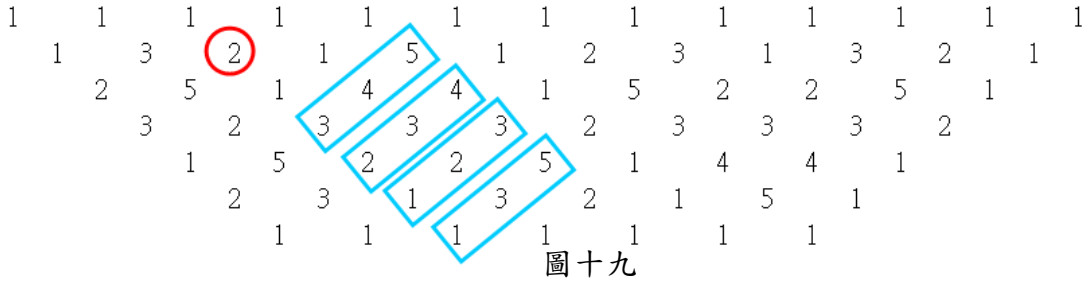
$$G_{2,3}^{7}=\frac{G_{i-1,5}^{7}+G_{i+1,3}^{7}}{G_{i,4}^{7}}\text{，}2\le i\le 6\text{。}$$



圖十七



圖十八



圖十九

不失一般性，以(1、a、b、、c、d、e、1)填入第 1 行，形成 7 層結構，如圖十二，得到

$$a=\frac{1+b}{\frac{b+1}{a}}=\frac{\frac{a+c}{b}+c}{\frac{bc+a+c}{ab}}=\frac{\frac{ab+ad+cd}{bc}+d}{\frac{bcd+ab+ad+cd}{abc}}$$

$$=\frac{\frac{ab(c+e)+de(a+c)}{bcd}+e}{\frac{bcde+ab(c+e)+de(a+c)}{abcd}}=\frac{\frac{abcd+ab(c+e)+de(a+c)}{bcde}+1}{\frac{bcd(a+e)+ab(c+e)+de(a+c)}{abcde}}\text{。}$$

$$\frac{b+1}{a}=\frac{1+\frac{bc+a+c}{ab}}{\frac{a+c}{b}}=\frac{\frac{b+d}{c}+\frac{bcd+ab+ad+cd}{abc}}{\frac{ab+ad+cd}{bc}}$$

$$=\frac{\frac{bc+be+de}{cd}+\frac{bcde+ab(c+e)+de(a+c)}{abcd}}{\frac{ab(c+e)+de(a+c)}{bcd}}$$

$$=\frac{\frac{bcd+be+de+bc}{cde}+\frac{bcd(a+e)+ab(c+e)+de(a+c)}{abcde}}{\frac{abcd+ab(c+e)+de(a+c)}{bcde}}\text{。}$$

$$\frac{a+c}{b}=\frac{1+\frac{ab+ad+cd}{bc}}{\frac{b+d}{c}}=\frac{\frac{c+e}{d}+\frac{ab(c+e)+de(a+c)}{bcd}}{\frac{bc+be+de}{cd}}$$

$$=\frac{\frac{cd+c+e}{de}+\frac{abcd+ab(c+e)+de(a+c)}{bcde}}{\frac{bcd+bc+be+de}{cde}}\text{。}$$

$$\frac{b+d}{c}=\frac{1+\frac{bc+be+de}{cd}}{\frac{c+e}{d}}=\frac{\frac{d+e}{e}+\frac{bcd+bc+be+de}{cde}}{\frac{cd+c+e}{de}}\text{。}$$

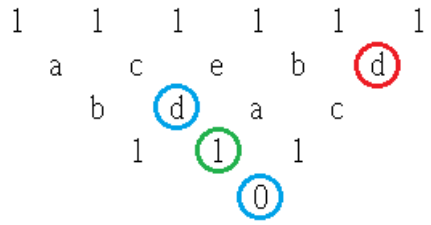
$$\frac{c+e}{d}=\frac{1+\frac{cd+c+e}{de}}{\frac{d+1}{e}}\text{。}$$

發現

7 層結構中，$G_{2,j}^{7}=\frac{G_{i,j}^{7}+G_{i-2,j+2}^{7}}{G_{i-1,j+1}^{\bullet 7}}$，$2\le i\le 6$，$\forall\ j\in N$。

再考慮通則三的等式(2)，如圖二十的 4 層結構，

$G_{2,5}^4 = d = \dfrac{d+0}{1} = \dfrac{G_{3,2}^4 + G_{5,2}^4}{G_{4,2}^4}$ 。其中，虛擬圖二十的 $G_{5,2}^4 = 0$ 。



圖二十

我們虛擬 $G_{0,j}^n = 0 = G_{n+1,j}^n$ ，$\forall\, j \in N$ ，得到

定理十五

n 層結構中，$G_{2,j}^n = \dfrac{G_{i-1,\,j+2}^n + G_{i+1,\,j}^n}{G_{i,\,j+1}^n}$ ，$2 \le i \le n-1$ ，$\forall\, j \in N$ 同時，

$$G_{2,j}^n = \frac{G_{i,j-i}^n + G_{i+2,j-i}^n}{G_{i+1,j-i}^n} \text{ ，} 2 \le i \le n-1 \text{ ，} \quad \forall\, j \in N \text{ 。}$$

定理十六（結構設計準則）

第一行填入自然數，若第二行全部出現自然數，則可以構成數學結構。

【證明】

使用通則三及等式(2)。$G_{i,j}^n \times G_{i,j+1}^n = G_{i-1,j+1}^n \times G_{i+1,j}^n + 1$。4 個變項中，若 3 個有相鄰三個數的倍數關係則第 4 個整數也一定有相鄰三個數的倍數關係。

再依定理十五，$G_{2,j}^n = \dfrac{G_{i-1,\,j+2}^n + G_{i+1,\,j}^n}{G_{i,\,j+1}^n}$，得到 $G_{i-1,\,j+2}^n$ 是正整數，可以依序證明 $G_{i-1,\,j+2}^n$ 是自然數。

□

（三）轉換

取圖四的第 1 行數列 $(1,1,2,3,1,2,1)$，如圖二十一，依據定理十五，得到

$1=\dfrac{0+1}{1}$；

$3=\dfrac{1+2}{1}$，如圖二十一，綠色數字；

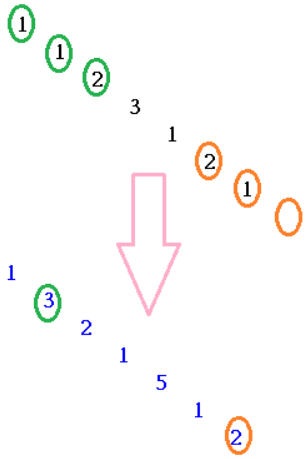
$2=\dfrac{1+3}{2}$；

$1=\dfrac{2+1}{3}$；

$5=\dfrac{3+2}{1}$；

$1=\dfrac{1+1}{2}$；

$2=\dfrac{2+0}{1}$，如圖二十一，橘色數字，其中，0 為虛擬的數字。



圖二十一

如圖二十一，依定理十五可以把數列 $(1,1,2,3,1,2,1)$ 轉換成數列 $(1,3,2,1,5,1,2)$。

依此種方法，再取圖四前 8 個數列，經過轉換，如圖二十二及圖二十三。規定

定義十七

給定一個 n 層數學結構第 j 行的數列 $(G^n_{1,j},G^n_{2,j},G^n_{3,j},G^n_{4,j},\ldots,G^n_{n-2,j},G^n_{n-1,j},G^n_{n,j})$ 依照

$$R^n_{i,j}=\frac{G^n_{i-1,j}+G^n_{i+1,j}}{G^n_{i,j}}\text{，其中，}G^n_{0,j}=0=G^n_{n+1,j}\text{，}1\le i\le n\text{，}j\in N$$

轉換成 $(R^n_{1,j},R^n_{2,j},R^n_{3,j},R^n_{4,j},\ldots,R^n_{n-2,j},R^n_{n-1,j},R^n_{n,j})$ 稱為 R 轉換。

$$(1,1,2,3,1,2,1) \to (1,3,2,1,5,1,2)$$
$$(1,3,5,2,5,3,1) \to (3,2,1,5,1,2,3)$$
$$(1,2,1,3,2,1,1) \to (2,1,5,1,2,3,1)$$
$$(1,1,4,3,2,3,1) \to (1,5,1,2,3,13)$$
$$(1,5,4,3,5,2,1) \to (5,1,2,3,1,3,2)$$
$$(1,1,1,2,1,1,1) \to (1,2,3,1,3,2,1)$$
$$(1,2,5,3,4,5,1) \to (2,3,1,3,2,1,5)$$
$$(1,3,2,3,4,1,1) \to (3,1,3,2,1,5,1)$$

圖二十二

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5
2 5 1 4 4 1 5 2 2 5 1 4
3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3
1 5 2 2 5 1 4 4 1 5
2 3 1 3 2 1 5 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1

1 3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5 1
3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5 1
2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5 1
1 5 1 2 3 1 3 2 1 5 1
5 1 2 3 1 3 2 1 5 1
1 2 3 1 3 2 1 5 1
2 3 1 3 2 1 5 1

圖二十三、R 轉換

依照定理十五，得到

定理十八

$R_{i,j}^{n} = G_{2,i+j-1}^{n}$ 。

【證明】

原來梯形結構的第 2 列數字經過 R 轉換後，變成新的梯形結構的第 1 列。同時，新的梯形結構的第 1 列的數列，依序出現在其他各列。

□

因為式子(1)，$a \times c = b \times d + 1$，同時，自然數乘法具有交換性；我們可以模仿定義十七的轉換方式將圖四經過 L 轉換如圖二十四。

定義十九

給定一個 n 層數學結構，數列 $(G^n_{1,j+n-1}, G^n_{2,j+n-2}, G^n_{3,j+n-3}, \ldots, G^n_{n-2,j+2}, G^n_{n-1,j+1}, G^n_{n,j})$ 依照

$$L^n_{i,j} = \frac{G^n_{i-1,j+2} + G^n_{i+1,j}}{G^n_{i,j+1}} \text{，其中，} G^n_{0,j} = 0 = G^n_{n+1,j} \text{，} 1 \le i \le n \text{，} j \in N \text{。}$$

轉換成 $(L^n_{1,j+n-1}, L^n_{2,j+n-2}, L^n_{3,j+n-3}, \ldots, L^n_{n-2,j+2}, L^n_{n-1,j+1}, L^n_{n,j})$ 稱為 L 轉換。

依定理十五，得到

定理二十

$L^n_{i,j} = G^n_{2,j-1}$ ，$1 \le i \le n$ 。

```
3     1     3     2     1     5     1     2     3     1     3     2     1     5     1
   3     1     3     2     1     5     1     2     3     1     3     2     1     5
      3     1     3     2     1     5     1     2     3     1     3     2     1
         3     1     3     2     1     5     1     2     3     1     3     2
            3     1     3     2     1     5     1     2     3     1     3
               3     1     3     2     1     5     1     2     3     1
                  3     1     3     2     1     5     1     2     3
```

圖二十四、L 轉換

本研究，遵守等式(2)，

$$G^n_{i,j} \times G^n_{i,j+1} = G^n_{i-1,j+1} \times G^n_{i+1,j} + 1 \text{，}$$

但是，經過轉換後，發現

$$R^n_{i,j} \times R^n_{i,j+1} = R^n_{i-1,j+1} \times R^n_{i+1,j} \text{。}$$
$$L^n_{i,j} \times L^n_{i,j+1} = L^n_{i-1,j+1} \times L^n_{i+1,j} \text{。}$$

發現 R 轉換或 L 轉換後的代數結構運算的特性，和原來的等式(1)的運算有所不同。

三、週期

(一)週期

如圖二十，我們虛擬 $G^n_{n+1,j}=0=G^n_{0,j+n-1}$，$\forall j\in N$。使用 R 轉換及 L 轉換，依通則三得到：

定理二十一

給定 n 層結構有 $G^n_{i,j}=G^n_{i,n+1+j}$，其中，$1\le i\le n$ 且 $\forall j\in N$。

【證明】

第一部分：如圖二十五的甲，$G^n_{n-1,j}$ 的數值以黃色表示，$G^n_{2,j+n-1}$ 的數值以紅色表示。

如圖二十五的乙，將甲的數值經過 R 轉換後，黃色數值和紅色數值相同。

$$G^n_{n-1,j}=\frac{G^n_{n-1,j}+G^n_{n+1,j}}{G^n_{n,j}}=R^n_{n,j}=R^n_{1,n+j-1}=\frac{G^n_{0,j+n-1}+G^n_{2,j+n-1}}{G^n_{1,j+n-1}}=G^n_{2,j+n-1}\text{，即，}$$

$$G^n_{n-1,j}=G^n_{2,j+n-1}\text{。}\qquad(10)$$

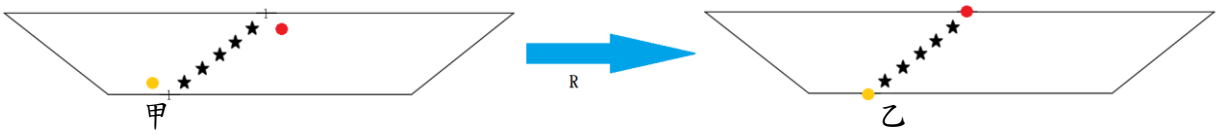
第二部分：依式子(10)，可推理得到 $G^n_{n-1,j}=G^n_{2,j+n-1}$，且 $G^n_{n-1,j+1}=G^n_{2,j+n}$，

考慮 $G^n_{n,j}=1=G^n_{1,j+n}$，再依式子(1)與通則三得到

$$G^n_{n-2,j+1}=\frac{G^n_{n-1,j}\times G^n_{n-1,j+1}-1}{G^n_{n,j}}=\frac{G^n_{2,j+n-1}\times G^n_{2,j+n}}{G^n_{1,j+n}}=G^n_{3,j+n-1}\text{。}$$

即，$G^n_{n-2,j+1}=G^n_{3,j+n-1}$，推理得到 $G^n_{n-2,j}=G^n_{3,j+n-2}$。

可逐步證明 $G^n_{n-i+1,j}=G^n_{i,j+n-i+1}$，$1\le i\le n$，$\forall\ j\in N$。



圖二十五

第三部分：如圖二十六的甲，$G^n_{2,j}$ 的數值以黃色表示，$G^n_{n-1,\ j+2}$ 的數值以紅色表示。

如圖二十六的乙，將甲的數值經過 L 轉換後，黃色數值和紅色數值相同。

即，$G_{2,j}^{n}=\dfrac{G_{0,j+2}^{n}+G_{2,j}^{n}}{G_{1,j+1}^{n}}=L_{1,j+1}^{n}=L_{n,j+1}^{n}=\dfrac{G_{n-1,j+2}^{n}+G_{n-1,j+1}^{n}}{G_{n,j}^{n}}=G_{n-1,\ j+2}^{n}$。

$$G_{2,j}^{n}=G_{n-1,\ j+2}^{n}\text{，}\tag{11}$$

第四部份：依照式子(11)，可推理得到 $G_{2,j}^{n}=G_{n-1,\ j+2}^{n}$ 及 $G_{2,j+1}^{n}=G_{n-1,\ j+3}^{n}$

考慮 $G_{1,j+1}^{n}=1=G_{n,j+2}^{n}$，再依式子(1)與通則三得到

$$G_{3,j}^{n}=\frac{G_{2,j}^{n}\times G_{2,j+1}^{n}-1}{G_{1,j}^{n}}=\frac{G_{n-1,j+2}^{n}\times G_{n-1,j+3}^{n}}{G_{n,j+2}^{n}}=G_{n-2,j+3}^{n}\text{。}$$

$G_{3,j}^{n}=G_{n-2,j+3}^{n}$，可逐步證明 $G_{i,j}^{n}=G_{n-i+1,j+i}^{n}$，$1\le i\le n$，$\forall\ j\in N$。

甲　　乙

圖二十六

□

（二）Conway 和 Coxeter 定理

今年 4 月 20 日以前，我們認為這一題屬於 NP hard 問題，儘可能就有限的資料尋找有趣的問題。如附錄一研究歷程，我們做一些工作：存在性、倍數與互質、連續三個整數的倍數關係、只要兩個連續的生成數列就可以產生結構的準則、R 轉換、L 轉換、非同構的判斷準則、生成數列的極大值、非同構組數的上下界及降階，當然我們也提出這個結構第 2 列任意連續 $n+1$ 個數總和是 $3n-3$ 的猜想。

我們是多次和原來的科展教師研習的授課教授聯絡，直到今年 4 月，經由授課教授通知，方得知本研究屬於 Frieze Pattern 進而利用網路搜尋得知 Conway 和 Coxeter 定理。

我們將利用 Conway 和 Coxeter 定理探討第 2 列任意連續 $n+1$ 個數總和是 $3n-3$ 的定理。

引理二十二(Conway 和 Coxeter 定理)

本研究的數字梯形第二列任意連續 $n+1$ 個數，和從下列方式產生的數列之間，存在一種對射。對於一個內部分割成 $n-1$ 個三角形的凸 $n+1$ 邊形，每一頂點帶有一數值表示含該頂點的三角形數目，依順(逆)時鐘取每一頂點的數值，可得一組 $n+1$ 個數的數列。

（三）連續$n+1$個整數和的不變量

從定理二十一可知本研究的n層結構，第二列數列的週期為$n+1$。
再依據引理二十二，給定凸$n+1$多邊形可以分割成$n-1$個三角形。每個三角形剛好是 3 個頂點。

得到

定理二十三
給定n層結構，第 2 列的連續$n+1$個數字和為$3n-3$。

考慮R轉換和L轉換都是對射的位置轉換，我們可以推理，得到

定理二十四
給定n層結構，經過R轉換後，新的梯形結構任何一列，連續$n+1$個數字和為$3n-3$。
給定n層結構，經過L轉換後，新的梯形結構任何一列，連續$n+1$個數字和為$3n-3$。

定理二十五
給定n層的梯形結構，第 2 列任意一個數字可填入的上界為$n-1$。
【證明】
據引理二十二，n層結構，給定一個頂點，為了要讓該點內接三角形個數達到最大，必須由該點和其他$n-2$個頂點作$n-2$條對角線，則內接三角形為$n-1$個。也就是此$n+1$個自然數的極大值為$n-1$。
此時，內接 1 個三角形的頂點有 2 個，內接 2 個三角形的頂點有$(n-2)$個，內接$n-1$個三角形的頂點有 1 個。

□

事實上，定理二十五所構造的結構，就是演算方法四，找尋存在性的方法。

（四）退化

依定理二十，得到$G_{i,j}^{n}=G_{i,j+n+1}^{n}$。當$3\le n\le 7$時，如表一，發現

事實二十六
1. 若$n+1$是質數時，則給定n層的週期均為$n+1$。
2. 若$n+1>4$不是質數時，則給定n層的週期為$n+1$或是$n+1$的因數。

也就是，給定 n 層結構第 2 列任意連續 $n+1$ 個數字，若出現 d 個循環，每個循環週期為 $\frac{n+1}{d}$ 。

此時，第 2 列任意連續 $\frac{n+1}{d}$ 個整數總和為 $\frac{3(n-1)}{d}$ 。

請注意多邊形的頂點內接三角形個數至少要 1 個，我們會有

$$\frac{3(n-1)}{n+1} \geq 1，3n-3 \geq n+1，n \geq 2。$$

得到

事實二十七

當 $n=1$，就無法找到引理二十一的多邊形和 1 層結構做對射關係。

但，我們可以規定每逢第 $4k+1$ 列填入全部填入 1，

第 $4k-1$ 列全部填入-1，

每個偶數列都填入 0，

就可以得到式子(1)的條件。

當 $n=2$，我們必須要定義第-1 列及第 3 列全部填入 0，方可以得到式子(1)的規定。

此時，第 1 列全部填入 1，而第 2 列填入三角形的內接三角形頂點的個數。

也就是，三角形每個頂點都是 1 個的時候，得到 2 層的結構。只有一組，週期是 1。

再由表一，觀察 3 層至 7 層數學結構的週期，得到

猜想二十八

給定 n 層結構，若第 2 列的數字的週期是 $\frac{n+1}{d}$ ，則這些連續 $\frac{n+1}{d}$ 個數字最小值為 1；同時，這些連續 $\frac{n+1}{d}$ 個數字中，可能會出現最大數值 $\frac{n+1}{d}$ 。

表一、3 層至 7 層數學結構的週期

n 層	$S(n)$	$n+1$	原始數學結構中第 2 列數字出現比 $n+1$ 小的週期
3	1	4	
4	1	5，質數	
5	4	6	(1，3)，　(1，3，2)，　(1，2，3)
6	6	7，質數	
7	19	8	(1，2，2，4)，　(1，2，3，3)，　(1，3，1，4) (1，3，3，2)，　(1，4，2，2)

四、非同構組數

本研究從直觀觀察，思考策略是從有限的組數、數值採用數字 1 或數字 2 填入生成數列、第 2 列連續整數和及降階關係來探討非同構的組數。

(一)直觀觀察

規定

定義二十九

符號$\cong$為同構。

即，3 層生成數列$(1,1,1)\cong(1,2,1)$表示$(1,1,1)$所生成數學結構和$(1,2,1)$所生成數學結構是相同。

4 層生成數列$(1,1,1,1)\cong(1,2,1,1)\cong(1,1,2,1)$。

5 層生成數列$(1,1,1,1,1)\cong(1,2,1,2,1)$。

6 層生成數列$(1,1,1,2,1,1)\cong(1,1,2,1,2,1)$或$(1,1,2,1,1,1)\cong(1,2,1,2,1,1)$。

同構判斷標準三十

兩個相異的生成數列可以構成兩個數學結構。若這個兩個相異的生成數列經過R轉換後，新的數列的數值前後順序相同，則這兩個相異的生成數列所構成的數學結構相同。

定義三十一

給定n層數學結構，非同構的組數為$S(n)$。

考慮引理二十二，得到給定n層梯形結構組數有上界的結果。

再不考慮上下翻轉，使用定理十六建構梯形結構，利用判斷準則三十的R轉換避免同構發生，再利用電腦軟體計算。得到

梯形結構中，3 層的組數是 1 組；$S(3)=1$，如附錄圖一。

4 層的組數是 1 組；$S(4)=1$，如附錄圖二。

5 層的組數是 4 組；$S(5)=4$，如附錄圖三。

6 層的組數是 6 組；$S(6)=6$。

7 層的組數是 6 組；$S(7)=19$。

（二）生成數列的最大值

考慮圖四，第 1 個生成數列取最大值為 3，第 2 個生成數列取最大值為 5，
第 3 個生成數列取最大值為 3，第 4 個生成數列取最大值為 4，
第 5 個生成數列取最大值為 5，第 6 個生成數列取最大值為 2，
第 7 個生成數列取最大值為 5，第 8 個生成數列取最大值為 4，

取這些最大值 $\{3、5、3、4、5、2、5、4\}$ 中的最小值為 2。

得到

演算方法三十二：

第一步：找出 n 層數學結構全部的非同構梯形結構。

第二步：尋找 n 層第 k 個數學結構第 j 列生成數列最大值為 $e_{k,j}^{n}$。

第三步：將 n 層第 k 個數學結構的 $e_{k,j}^{n}$ 數值中選擇最小值為 e_{k}^{n}。取數列 $\{e_{k}^{n}\}$ 中的最大值為 $e(n)$。

得到

$e(3)=1$，$e(4)=1$，$e(5)=2$，$e(6)=2$，$e(7)=3$。

猜想三十三

若 $3 \le n \le 7$，則 $e(n)=F_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$，其中，$F_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ 為費氏數列第 $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 個數字。

討論 $e(n)$ 值，得到給定 n 層數學結構，各個生成數列有其極大值下界，可觀察 $S(n)$ 特性。

（三）$S(n)$ 的上界

定理三十四

$S(n) \le C_n^{3n-4}$ 。

【證明】

第一部分，直觀觀察，$S(3)=1$，$S(4)=1$，$S(5)=4$，$S(6)=6$，$S(7)=19$。

第二部分，當 $n \ge 3$，考慮定理二十三，第 2 列中任意連續 $n+1$ 個數字和為 $3n-3$。

連續 $n+1$ 個自然數和是 $3n-3$ 的組合，則

$$3n-3-(n+1)=2n-4 \text{ 。}$$

$$2n-4+n=3n-4$$

$$S(n) \le C_n^{3n-4} \text{ 。得証。}$$

□

（四）$S(n)$ 的下界

觀察圖四，發現同構關係式中，有一個生成數列 $(1,1,1,2,1,1,1)$ 是唯一全部由數字 1 或 2 組成。再搜尋及實驗其他情形的生成數列。得到

定理三十五

$F_{n-2} \le S(n)$。其中，F_{n-2} 是費氏數列第 $n-2$ 個數字。

【證明】

存在性：分五種情形討論，給定 n 層，存在生成數列可以全部由數字 1 或 2 組成。

情形一：如演算方法四的構造，我們可以找到全部是 1 的一個生成數列。

以下四種情形都假設 $G_{i,j}^n$、$G_{i+1,j}^n$ 全部由數字 1 或 2 組成，給定 $G_{i-1,j+1}^n$ 條件，

求證 $G_{i,j+1}^n$ 為自然數。

情形二：給定 $G_{2,j}^n=2$，$G_{3,j}^n=1$，依通則三，$G_{2,j+1}^n=1 \in N$，如圖二十七。

情形三：給定 $G_{n-1,\ j}^n=2$，$G_{n-2,\ j+1}^n=2a-1 \in N$，依通則三，$G_{n-1,j+1}^n=a \in N$，

如圖二十八。

情形四：給定 $G_{i,j}^n=1$，$G_{i+1,j}^n=2$，$G_{i+2,j}^n=1$，$G_{i-1,j+1}^n=b \in N$，其中，$2<i<n-1$。

依通則三，$G_{i,j+1}^n=2b+1 \in N$，$G_{i+1,j+1}^n=b+1 \in N$，如圖二十九。

情況五，給定 $G_{i,j}^n=2$，$G_{i+1,j}^n=1$，$G_{i+2,j}^n=2$，$G_{i-1,j+1}^n=2c-1 \in N$，其中，$2<i<n-1$。

依通則三，$G_{i,j+1}^n=c \in N$，$G_{i+1,j+1}^n=2c+1 \in N$，如圖三十。

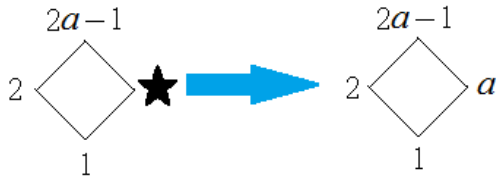
一般式：第一部分：第 1 列及第 n 列需填入數字 1，每一行的生成數列只有 $n-2$ 個位置可填。

第二部分：已知相鄰數互質，填入由數字 1 與 2 組成的生數列，分成兩種情形。

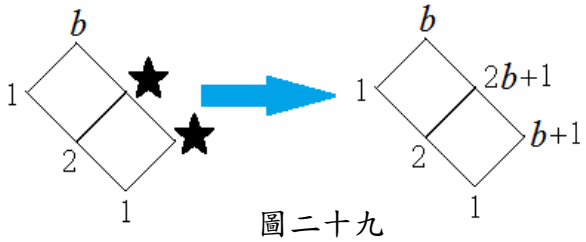
情形一：填入數字 1 後，下一個連續的空格可以填入數字 1 或數字 2。

情形二：填入數字 2 後，下一個連續的空格只能填入數字 1。

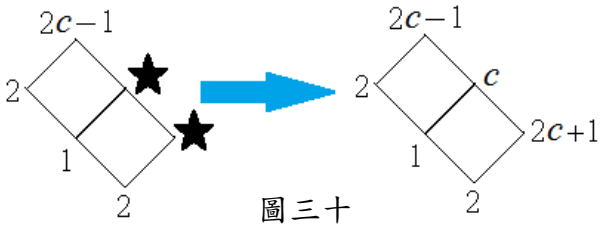
圖二十七



圖二十八



圖二十九



圖三十

□

由定理三十四及定理三十五得到

定理三十六

$F_{n-2} \le S(n) \le C_n^{3n-4}$，其中，$F_{n-2}$ 為費氏數列第 $n-2$ 個數字，C_n^{3n-4} 為組合數。

（五）降階關係

將 $\left(G_{1,j}^n G_{2,j}^n, G_{3,j}^n, \ldots G_{n-1,j}^n G_{n,j}^n\right)$ 填入第 j 行。由通則三及定理六得到

$$G_{n-1,j}^n \,\Big|\, (G_{n-2,j}^n + 1) \qquad (12)$$

式子(12)代表兩種情形，

$$G_{n-1,j}^n = G_{n-2,j}^n + 1 \text{ 或 } G_{n-1,j}^n < (G_{n-2,j}^n + 1)\text{，}$$

得到

定理三十七

n 層梯形結構，將 $\left(G_{1,j}^{n}G_{2,j}^{n},G_{3,j}^{n},\ldots G_{n-1,j}^{n}G_{n,j}^{n}\right)$ 填入第 j 行，

若 $G_{n-1,j}^{n}=G_{n-2,j}^{n}+1$，則 $S(n-1)=S(n)$；

若 $G_{n-1,j}^{n}<(G_{n-2,j}^{n}+1)$，則 $S(n-1)<S(n)$。

定義三十八

$U(n)=S(n)-S(n-1)$。

研究題目一的 n 層結構非同購的組數問題等價於研究 $U(n)$ 問題。

五、應用

日常生活，身分證及信用卡都使用檢查碼確定資料是否正確。而在現實的時空，無線傳輸是一種趨勢。以本研究所討論的結構當作檢查碼，可以當作選擇的選項。

不失一般性， 7 層的數學結構，我們可以先送 $(1,1,2,3,1,2,1)$ 數列當做資料最前面 7 個數字。再規定 $(1,1,2,3,1,2,1)\cong(1,a,b,c,d,e,1)$，且以 $(1,a,b,c,d,e,1)$ 當作最後 7 個數字，當作檢查碼，以確定如圖三十一所示。

本研究所建議的檢查碼措施，依據需要選擇取 n 層結構的一個生成數列，當作最前面 n 個數字並以最後 n 個數字。兩個同構的數列做檢查碼，其間的數字不需要使用 n 的倍數資料，增加無線傳輸的方便。

同時，我們可以利用本研究梯形結構生成數列，當作資料傳輸否正確的工具。

```
1 ----------------------------------------- 1
  1                                         a
    2                                         b
      3                                         c
        1                                         d
          2                                         e
            1 ----------------------------------------- 1
```

圖三十一

實作週期結構，將圖四的數字，轉換成

封面上圖，如瓷磚的貼上，因此，前作品被稱為「貼磁磚的工人」。

封面中圖，如上下均為 1 的淺藍色，夾著各式各樣的藍色，本作品稱為「數字夾心餅」。

封面下圖，圖四係 7 層結構，其週期為 8，把圖四的結構畫成圓形，週而復始。

我們透過顏色的對應與此結構的週期，而得到 Frieze Pattern 的圖案。

參、結論

一、存在性：　給定n層結構，至少找到一種鋪滿的方式。

二、研究策略：給定n層結構，可從第 2 列連續$n+1$自然數或任意連續兩行生成數列研究。

三、倍數問題：藉由n層結構中各行或各列連續 3 個數之間的倍數關係，與與梯形結構第 2 列的關係，發現「轉換」。

四、互質問題: 在構造好的梯形中，任意斜向的連續二個數字互質。

五、結構分析：以變數填入圖四的梯形結構，發現結構的退化關係、對應關係、週期關係、分式多項式結構、PMA2 型。

六、結構生成：第一行填入自然數，若第二行全部出現自然數，則可以構成數學結構。

七、同構判斷：發現R轉換和L轉換，可以當作是否同構的判斷準則。

八、週期問題：給定n層結構，$G_{i,j}^{n}=G_{n+i+1,j}^{n}$，其中，$\forall\ i\in N$，且$1\le j\le n$。

若連續$n+1$個數出現d個循環，則第 2 列任意每隔$\dfrac{n+1}{d}$個整數總和$\dfrac{3(n-1)}{d}$。

九、不變量：　梯形結構第 2 列中連續$n+1$個數字總和的不變量為$3(n-1)$。

十、組數問題：考慮n層結構，本研究透過各行的數字觀察、相鄰數字的互質與倍數關係討論梯形結構的非同構組數問題。由第 2 列連續$n+1$個自然數和的不變量，發現給定n層的非同構組數的上下界。

給定n層的非同構組數為$S(n)$，估算一個不等式，

$$F_{n-2}\le S(n)=\frac{C_{n+1}}{n+3}+\frac{C_{\frac{n+1}{2}}}{2}+\frac{2}{3}\times C_{\frac{n}{3}}\le C_{n}^{3n-4}\ ,$$

其中，F_{n-2}為費式數列，C_n為卡特蘭數，C_n^{3n-4}為組合數。

若，n為奇數，一般式$S(n)$要加上$\dfrac{C_{\frac{n+1}{2}}}{2}$。

若，n為 3 的倍數，一般式$S(n)$要加上$\dfrac{2}{3}\times C_{\frac{n}{3}}$。

十一、應用：　本研究數學結構的生成數列可以當作資料傳輸的檢查碼的應用。

參考資料

參考資料 1：2014 年 5 月 14 日，花豹花紋，
bbs.creaders.net/sports/bbsviewer.php?trd_id=913185&language=big5。

參考資料 2：2014 年 5 月 18 日，欄杆花紋，
rich.maths.org/content/98/11/art1/gallery/gate.gif。

參考資料 3：2014 年 5 月 20 日，音樂符號，
ucsmp.uchicago.edu/secondary/curriculum/geometry/

參考資料 4：科教館辦理科展教師研習，數學問題的探索實作。2012 年 8 月 2 日，未出版。

參考資料 5：2014 年 4 月 20 日，**pma2**；euler.slu.edu/escher/index.php/Frieze_Patterns

參考資料 6：C.-S. Henry, Coxeter friezes and triangulations of polygons, Amer. Math. Monthly 120 (2013), 553~558.

參考資料 7：2014 年 6 月 8 日
www.link.cs.cmu.edu/15859-s11/notes/frieze-patterns-lighter-side.pdf

參考資料 8：2014 年 5 月 19 日，整數數列大全，oeis.org

參考資料 9：2014 年 5 月 18 日，科教館，science.ntsec.edu.tw。

附錄一、研究歷程

截至 2014 年 5 月 18 日，查閱科學教育館刊登的台灣國際科學展覽與全國科學展覽作品集，尚沒有發現 Frieze patterns 的任何數學形式的研究。

本研究所有的歷程，如下表。

附錄表一、研究歷程

時間	重大事蹟	說明
2012 年 8 月	科學展覽教師研習。	剛好我們是小五升小六
2012 年 10 月	發現圖五 $a\times c=b\times d+1$ 的規律。(p2)	沒有得到暗示就發現規律。
2012 年 11 月	發現演算方法四，可建構一般式。(p6)	存在性被證明。
2012 年 11 月	提出研究策略。(p6)	
2012 年 12 月	證明定理六。(p7)	相鄰三個整數的倍數問題
2012 年 12 月	證明定理七。(p7)	相鄰整數互質
2012 年 12 月	發現「PMA2」型。(p8、p9 及 p10)。	前作品稱為「擬對稱姓」
2013 年 3 月	提出週期為 $n+1$ 的猜想。	國小六年級就提出的猜想。
2013 年 4 月	前作品參加**市國小組數學科展。	
2013 年 6 月	提出定理十六。(p14) 。	可生成數學結構的條件。
2013 年 10 月	轉換。(p15、p16 及 p17)。	判斷是否同構的標準。
2014 年 1 月	非同構組數的直觀觀察。(附錄二)	使用微軟試算表
2014 年 1 月	非同構組數的上界(p24)	
2014 年 1 月	非同構組數的下界。(p24 及 p25)	
2014 年 2 月	降階關係。(p25 及 26)	應用相鄰三個整數的倍數
2014 年 2 月	分析生成數列的最大值特性(p21)	
2014 年 4 月	當 $3\le n\le 7$，將 $S(n)$ **輸入數列大全**	發現有一般式。
2014 年 4 月	授課教授提出本研究是 Frieze Patterns。	
2014 年 5 月	本研究的應用。(p26)	檢查碼應用
2014 年 5 月	週期為 $n+1$ 的證明。(p18 及 19)	週期為 $n+1$ 的另一種證明。
2014 年 6 月	週期是 $\frac{n+1}{d}$ 觀察（p20 及 p21）	最大值及最小值猜想
2014 年 6 月	第 2 列連續 $n+1$ 個整數和 $3(n-1)$ 。(p20)	利用 Conway 和 Coxeter 定理
2014 年 6 月	退化。(P20 及 P21)	討論 1 層與 2 層結構

附錄二、非同構組數的直觀觀察

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

附錄圖一，3 層梯形只有唯一一組

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 2 1 3 1 2 2 1 3 1 2 2 1 3
1 3 1 2 2 1 3 1 2 2 1 3 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

附錄圖二，4 層梯形只有唯一一組

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 2 2 1 4 1 2 2 2 1 4 1 2 2
1 3 3 1 3 3 1 3 3 1 3 3 1 3
1 4 1 2 2 2 1 4 1 2 2 2 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 1 3 2 1 3 2 1 3 2 1 3 2 1 3
1 2 5 1 2 5 1 2 5 1 2 5 1 2
1 3 2 1 3 2 1 3 2 1 3 2 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5
2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

附錄圖三、5 層梯形有 4 組

【評語】030405

本作品是探討 Frieze Pattern 的一種形式，由於定義的規則 "ac=bd+1"能夠有很強的組合意義，所造出來的 Pattern 能夠很清楚地加以描述，是很不錯的科展作品。後續可以繼續研究不同形式的 Frieze Pattern，希望會出現更令人驚奇的成果。