中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030404

活化△的邊

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃翊暢	張淑敏
國二 張家誠	林耀南
國一 鍾承成	

關鍵詞：切線相似△、活化邊長、NIKE 折線圖

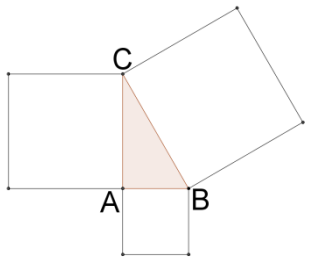
活化△的邊

壹、 摘要

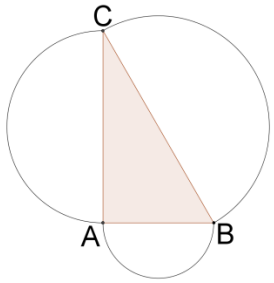
本文用半圓弧來活化△的邊，讓使用者在圓弧上作切線畫出相似形，為方便計算並易於描述這個概念，文中採用國中常用的 30°、45°、60°、90°來操作。首先將半圓弧及圓心角依逆時針置放，分別依不同的圓心角配合各整數倍或分數倍半圓直徑畫出切線相似△，並求得對應邊長比值，再將比值描圖，呈斜率為正的直線或折線狀，並求出各圖形的關係式，以利操作時使用。接著計算半圓弧向外和向內的相似△面積差，在等圓心角條件下，描圖呈直線或拋物線狀。另外討論將一次到位畫出的相似△分成兩段式操作，結果發現兩段式操作的半圓直徑倍數有雙曲線關係。最後使用直角坐標計算上文之系統，當圓心角 90°時，取得相似形邊長比值關係式，有助於對任意△的縮放圖逆向操作。

貳、 研究動機

在相似形的尺規作圖單元中，當選定了相似中心後，做各邊的投射即可做出一相似形，但是在過程中各個邊的角色都是被動的、固定的，我們想說是否可以利用活化各個邊來操作相似形 ？ 這發想起源於畢氏定理那單元，如圖(1)，在直角△ABC 的各邊分別往外做正方形，則兩股的正方形面積和等於斜邊上的正方形面積，延伸題中將正方形換成半圓，如圖(2)，也有相同的現象，當然這現象跟做相似形無關，但我們發現到這半圓的圓弧把生硬的三邊活化起來了，因為在圓弧上可以隨意地做切線，這些切線可以組合出相似形，我們期待這項研究。



圖(1)



圖(2)

參、 研究目的

一、 探討一種創新的相似形作圖法。

二、 觀察半圓弧向內和向外對作圖的影響。

三、 以直角△為例，在特殊角條件下，觀察半圓的倍數和圓心角度數交互作用對相似形邊長比值的影響。

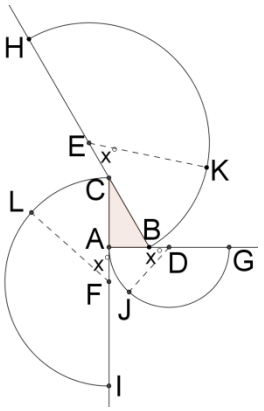
四、 如何利用建立的邊長比值系統，操作指定倍數的相似形。

肆、 研究限制

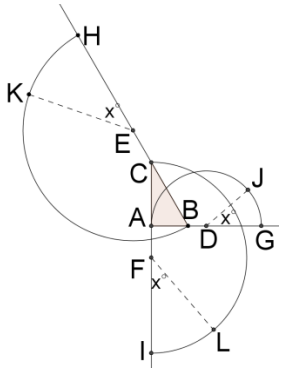
為方便表達本系統的相似形縮放概念，本研究中的圓心角角度僅限制利用30°、45°、60°、90°等國中常用特殊角，或在遇到一般△時，就以該△的三內角當圓心角。

伍、 研究過程

一、 圖形定義



圖(甲)

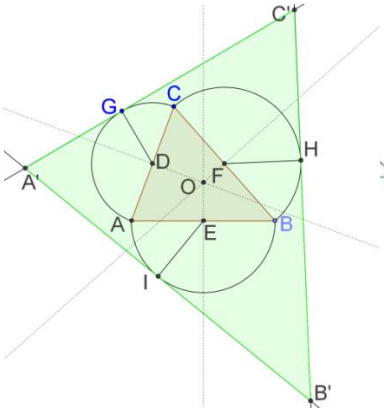


圖(乙)

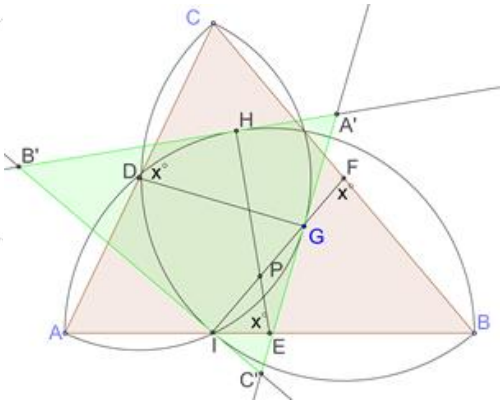
圖(甲)表示逆時針延長原△ABC 三邊長，並以與三邊長等比例的半圓直徑**往外**置放半圓弧，再在半圓弧內以逆時針畫出相等的圓心角，這叫**圓弧向外逆逆置放**。

圖(乙)表示逆時針延長原△ABC 三邊長，並以與三邊長等比例的半圓直徑**往內**置放半圓弧，再在半圓弧內以逆時針畫出相等的圓心角，這叫**圓弧向內逆逆置放**。

二、 任意△各邊向外或向內畫半圓弧，並依逆時針方向取相同的圓心角作出切線△，則此△必與原△相似，順時針方向處理亦同。



圖(3)



圖(4)

(一)半圓弧向外的相似切線△證明

已知：如圖(3)，△ABC 的各邊往外作半圓，圓心各為 D、E、F，
圓心角∠CDG=∠AEI=∠BFH=x°，△ABC 的外心為 O，分別過
G、H、I 作半圓的切線，兩兩相交於 A'、B'、C'

求證：△A'B'C'~△ABC

證明：(1)在四邊形 OFBE 中，∠EOF+∠B=180°…①

(2)在六邊形 OFHB'IE 中

$\angle EOF + 90° + x° + 90° + \angle B' + 90° + \angle IEB + 90° = (6-2) \times 180°$

$\therefore \angle EOF + \angle B' + x° + \angle IEB = 360°$

$\angle EOF + \angle B' + 180° = 360°$　　$\therefore \angle EOF + \angle B' = 180°$…②

(3)由①②得$\angle EOF + \angle B = \angle EOF + \angle B'$　$\therefore \angle B = \angle B'$

(4)同理可證∠A=∠A'、∠C=∠C'，∴△A'B'C'~△ABC(AA 相似)

(二)半圓弧向內的相似切線△證明

已知：如圖(4)△ABC 的各邊往內作半圓，圓心各為 D、E、F，

圓心角∠CDG=∠AEH=∠BFI=x°，分別過

G、H、I 作半圓的切線，兩兩相交於 A'、B'、C'

求證：△A'B'C'~△ABC

證明：

(1) 設$\overline{HE}$、$\overline{IF}$交於 P

(2) 在四邊形 B' HPI 中，∵∠PHB'=∠PIB'=90°　∴∠B'+∠HPI=180°-①

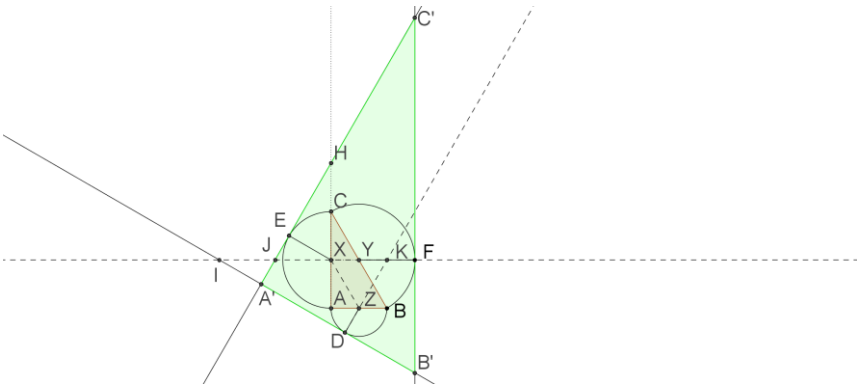
(3) 在四邊形 BFPE 中，∵∠AEH=∠BFI=x°　∴E、P、F、B 四點共圓(外角等於內對角)∴∠B+∠FPE=180°　-②(對角互補)

(4) 由①②式及∠HPI=∠FPE　知∠B'=∠B

(5) 同理可證∠A'=∠A　故△A'B'C'~△ABC(AA 相似)

三、　半圓弧向外逆逆置放的實例操作

(一) 在 30-60-90 的直角三角形中，在各邊上取邊長 1 倍當半圓弧直徑，且半圓弧向外置放，依圓心角30°、45°、60°、90°，各作切線三角形並計算切線△與原△對應邊長比值



圖(5)圓弧向外、半圓直徑 1 倍、圓心角 60 度

已知：如圖(5)，△ABC 為直角三角形，∠A=90°　∠B=60°　∠C=30°　往外畫半圓，三邊中點各為 X、Y、Z，依逆時針各取圓心角 60°　，分別通過 D、E、F 作切線，設三切線兩兩相交於 A'、B'、C'。

試求切線△與原△對應邊長的比值

解：

(1) 延長$\overrightarrow{FY}$、$\overrightarrow{DZ}$，設交$\overline{A'B'}$、$\overline{A'C'}$、$\overrightarrow{XY}$於 I、J、K 點

(2) 設$\overline{AZ}$=a

(3) ∵△ABC 為 30-60-90△，∴$\overline{DZ}$=$\overline{XY}$=a，$\overline{BY}=\overline{FY}$=$\overline{XZ}$=2a $\overline{EX}=\sqrt{3}a$

(4) ∵△EJX 為 30-60-90△，∴$\overline{JX}$=2a，故$\overline{JF}=2a+a+2a=5a$

(5) ∵△C'JF 為 30-60-90△，∴$\overline{C'F}$=$5\sqrt{3}$a

(6) ∵△KXZ 為正△，∴$\overline{ZK}$=$\overline{XZ}$=2a，故$\overline{KD}=2a+a=3a$

(7) ∵△IDK 為 30-60-90△，∴$\overline{IK}$=6a，又$\overline{KF}=2a-a=a$，故$\overline{IF}=7a$

(8) ∵△IFB'為 30-60-90△，∴$\overline{FB'}$=$\frac{7\sqrt{3}a}{3}$

(9) $\overline{B'C'}$：$\overline{BC}$=$\overline{C'F}$+$\overline{FB'}$：$\overline{BC}$=$5\sqrt{3}a+\frac{7\sqrt{3}a}{3}$：4a

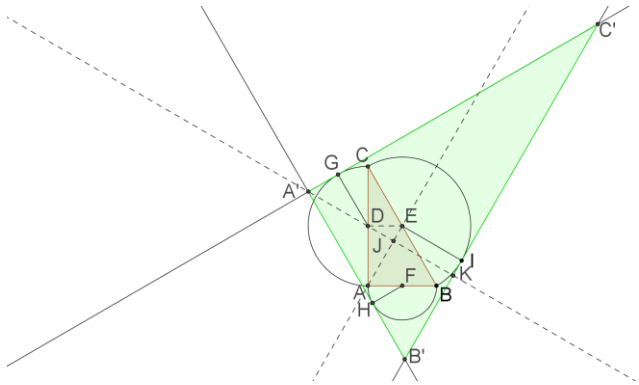
$$=5\sqrt{3}+\frac{7\sqrt{3}}{3}:4=\frac{22\sqrt{3}}{3}:4=\frac{22\sqrt{3}}{12}=\frac{11\sqrt{3}}{6}$$

同理計算其他半圓直徑倍數，得下表(一)

半圓直徑倍數	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
比值	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{25\sqrt{3}}{18}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{11\sqrt{3}}{6}$	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$	$\frac{19\sqrt{3}}{6}$	$\frac{23\sqrt{3}}{6}$

表(一)圓弧向外**圓心角 60 度**各倍數邊長比值

(二)、圓心角 30°



圖(6) 圓弧向外、半圓直徑 1 倍、圓心角 30 度

已知：如圖(6)△ABC 為直角△，∠A=90° ∠B=60° ∠C=30° ，以三角形的 1 倍邊長為直徑畫半圓，取圓心角 30°，分別通過點 G、H、I 各作切線，設三切線兩兩相交於點 A'、B'、C'

試求切線△與原△對應邊長的比值

解：

(1) 設$\overline{AB}$=a，∴$\overline{FH}=\frac{a}{2}$、$\overline{DG}=\frac{\sqrt{3}a}{2}$、$\overline{EI}=a$

(2) 連$\overline{AE}$、$\overline{A'D}$相交於 J，交$\overline{B'C'}$於 K

(3) ∵△A'DG 為 30-60-90△，∴$\overline{A'D}$=a

(4) ∵△DEJ 為 30-60-90△，∴$\overline{DJ}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$

(5) ∵EJKI 為矩形，∴$\overline{JK}$=a，故$\overline{A'K}=a+\frac{\sqrt{3}a}{4}+a=\left(\frac{8+\sqrt{3}}{4}\right)a$

(6) ∵△A'C'K 為 30-60-90△，∴$\overline{A'C'}=(\frac{\sqrt{3}}{2}+4)a$

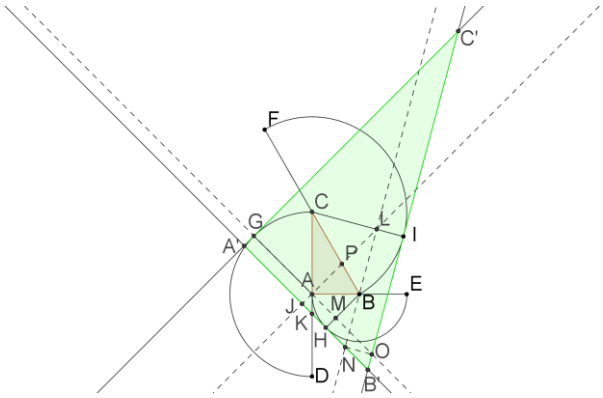
(7) $\overline{A'C'}:\overline{AC}=(\frac{\sqrt{3}}{2}+4)a:\sqrt{3}a=\frac{8\sqrt{3}+3}{6}$

同理計算其他半圓直徑倍數，得下表(二)

半圓直徑倍數	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
比值	$\frac{\sqrt{3}+6}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}+33}{18}$	$\frac{4\sqrt{3}+9}{6}$	$\frac{8\sqrt{3}+3}{6}$	$\frac{16\sqrt{3}-9}{6}$	$\frac{8\sqrt{3}-7}{2}$	$\frac{32\sqrt{3}-33}{6}$

表(二)圓弧向外**圓心角 30 度**各倍數邊長比值

(三)、圓心角 45°



圖(7) 圓弧向外、半圓直徑 2 倍、圓心角 45 度

已知：如圖(7)，△ABC 為直角△，∠A=90° ∠B=60° ∠C=30° ，以三角形的 2 倍邊長為直徑畫半圓，取圓心角 45°，通過切點 G、H、I 作切線，兩兩交於點 A'、B'、C'

試求切線△與原△對應邊長的比值

解：

(1) 設$\overline{AB}$=a，則$\overline{AC}=\overline{AG}=\sqrt{3}a$、$\overline{BC}=\overline{CI}=2a$

(2) 延長$\overline{AG}$，並過 A，作$\overleftrightarrow{AJ}\,//\,\overline{A'C'}$，過 B，作$\overleftrightarrow{BN}\,//\,\overline{B'C'}$

(3) ∵A'GAJ 為矩形，$\overline{A'J}=\sqrt{3}a$

(4) ∵△ABM 為 45-45-90 直角三角形，且AMHJ 為矩形，∴$\overline{JH}=\frac{\sqrt{2}}{2}$a

(5) ∵△BHN 為 30-60-90 直角△，∴$\overline{HN}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

(6) ∵△BCL 為 45-45-90 直角△，∴$\overline{CL}=\sqrt{2}a$　$\overline{LI}=(2-\sqrt{2})a$

(7) ∵$\overline{LI}$ // $\overline{NO}$，且△NOB'為 30-60-90 直角△，∴$\overline{NB'}=\frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{3}a$

$\overline{A'B'}=\frac{8\sqrt{3}}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{2\sqrt{6}}{3}a$

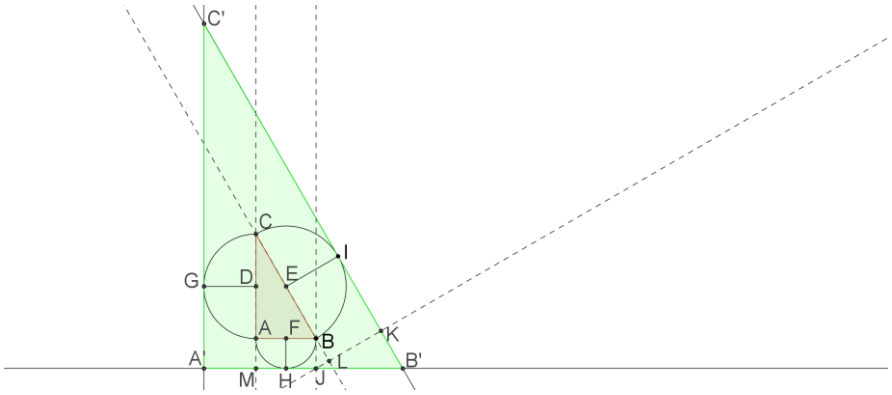
(8) $\overline{A'B'}:\overline{AB}=\frac{8\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

同理計算其他半圓直徑倍數，得下表(三)

半圓直徑倍數	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
比值	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{9}+\frac{4\sqrt{6}}{9}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{8\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+4\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{16\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{6}$

表(三)圓弧向外**圓心角 45 度**各倍數邊長比值

(四)、圓心角 90°



圖(8)圓弧向外、半圓直徑 1 倍、圓心角 90 度

已知：△ABC 為直角△，以三角形的 1 倍邊長為直徑向外畫半圓，取圓心角 90°，通過切點 G、H、I 各作切線，兩兩交於點 A'、B'、C'

試求：切線△與原△對應邊長的比值

(1) 設$\overline{AB}$為 a，則$\overline{AC}=\sqrt{3}a$、$\overline{DG}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

(2) ∵GA'MD 為矩形，∴$\overline{A'M}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

(3) ∵AMJB 為矩形，∴$\overline{MJ}=a$

(4) ∵△BLJ 為 30-60-90 直角△，且EIKL 為矩形、△JKB'為 30-60-90 直角△，∴$\overline{JB'}=\frac{5\sqrt{3}}{6}a$，故 $\overline{A'B'}=\frac{4\sqrt{3}}{3}a+a$

(5) $\overline{A'B'}:\overline{AB}=\frac{4\sqrt{3}}{3}+1$

同理計算其他半圓直徑倍數，得下表(四)

半圓直徑倍數	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
比值	$\frac{\sqrt{3}}{3}+1$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}+1$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}+1$	$\frac{4\sqrt{3}+3}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}+1$	$4\sqrt{3}+1$	$\frac{16\sqrt{3}}{3}+1$

表(四)圓弧向外**圓心角 90 度**各倍數邊長比值

(五)、將表(一)至表(四)資料描點並計算圖形中的直線方程式

名詞定義：

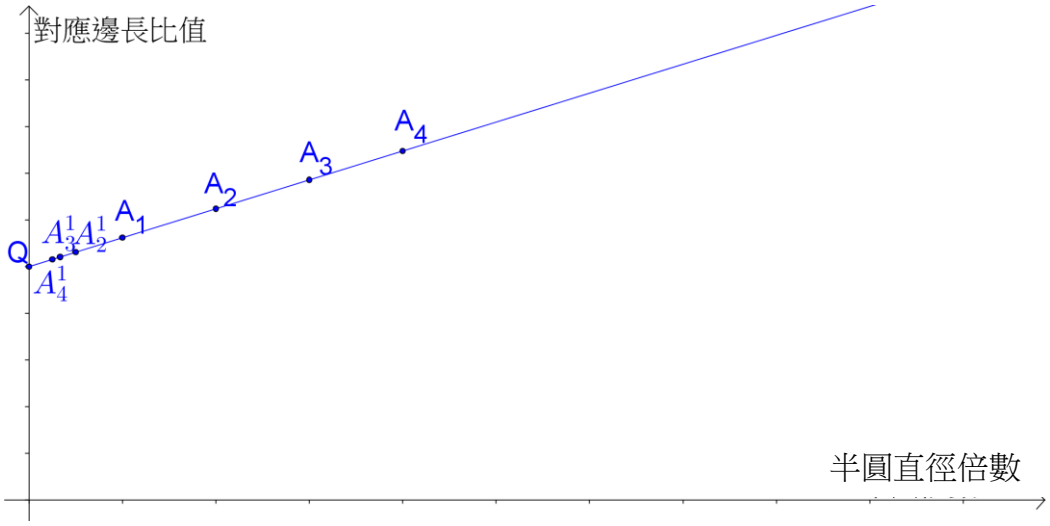
A_n：在相同圓心角下，以原△邊長 n 倍當半圓直徑作出切線△的對應邊長比值

A_n^m：在相同圓心角下，以原△邊長$\frac{m}{n}$倍當半圓直徑作出切線△的對應邊長比值

P：在圖(9)~(12)中，其方程式與 x 軸的交點

Q：在圖(9)~(12)中，其方程式與 y 軸的交點

1. **圓心角 30°**



圖(9)圓弧向外、圓心角 30 度、半圓直徑在不同倍數的對應邊長比值描圖

我們將向外的各倍數半圓圓心角 30 度的比值描點，以半圓直徑倍數為 x 坐標，比值為 y 坐標，做成圖(9)

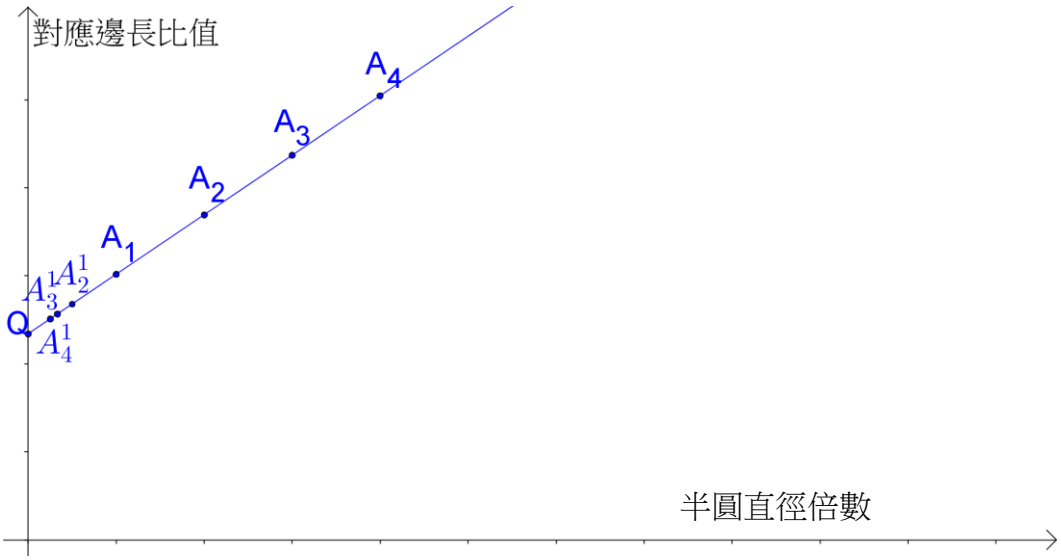
計算：A_1、A_2、A_3、A_4、A_2^1、A_3^1、A_4^1、Q 的直線方程式，如圖(9)

解：

(1) 設 y=ax+b，先任取兩點代入，求得方程式後，再將其他點代入檢查

(2) 檢驗成立後，得方程式為 y=$\frac{(4\sqrt{3}-6)}{3}x+\frac{5}{2}$

2. **圓心角 45°**



圖(10)圓弧向外、圓心角 45 度、半圓直徑在不同倍數的對應邊長比值描圖

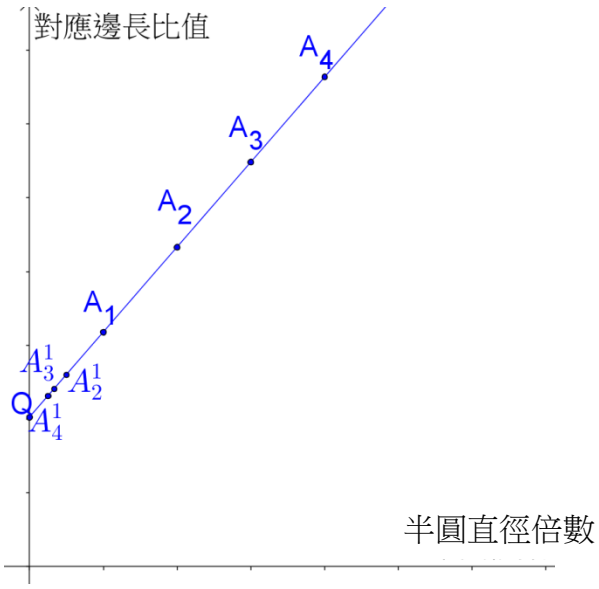
我們將向外的各倍數半圓圓心角 45 度的比值描點，以半圓直徑倍數為 x 坐標，比值為 y 坐標，做成圖(10)。

計算：A_1、A_2、A_3、A_4、A_2^1、A_3^1、A_4^1、Q 的直線方程式，如圖(10)

解：(1)設 y=ax+b，同前文之計算程序

(2)求得直線方程式為 $y=(\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3})x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{3}$

3. **圓心角 60°**



圖(11)圓弧向外、圓心角 60 度、半圓直徑在不同倍數的對應邊長比值描圖

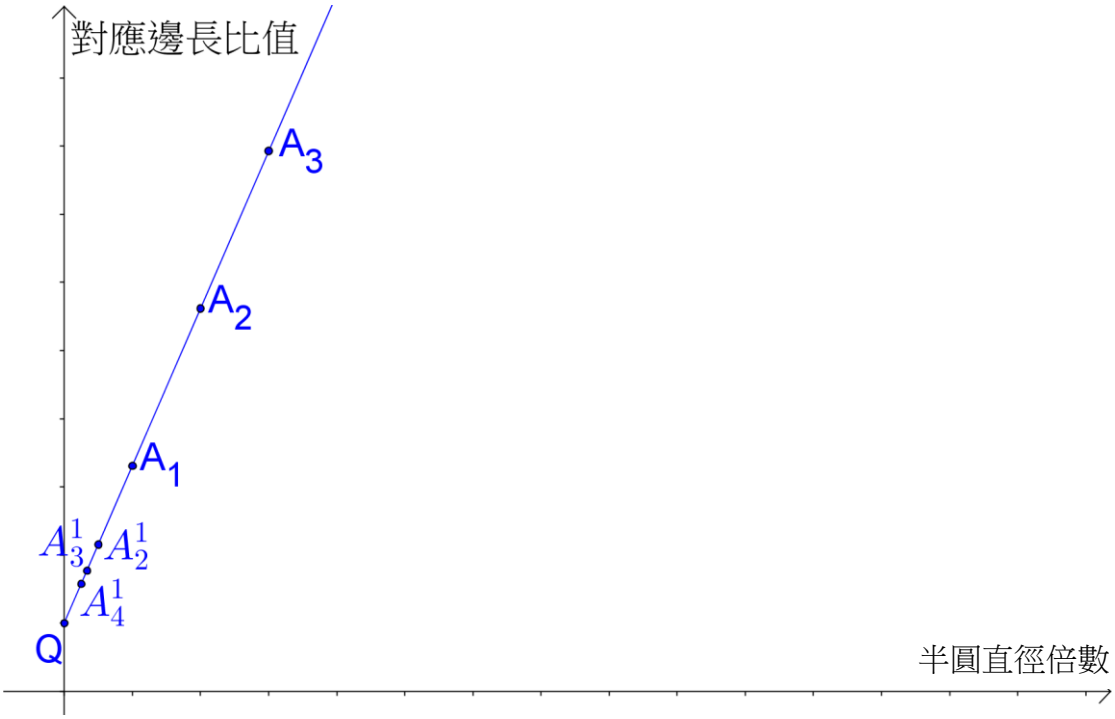
我們將向外的各倍數半圓圓心角 60 度的比值描點，以半圓直徑倍數為 x 坐標，比值為 y 坐標，做成圖(11)。現在要求出這條方程式

計算：A_1、A_2、A_3、A_4、A_2^1、A_3^1、A_4^1、Q 的直線方程式，如圖(11)

解：(1)設 y=ax+b，同前文之計算程序

(2)解方程式之後，得方程式 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{7\sqrt{3}}{6}$

4. 圓心角 90°



圖(12)圓弧向外、圓心角 90 度、半圓直徑在不同倍數的對應邊長比值描圖

我們將向外的各倍數半圓圓心角 90 度的比值描點，以半圓直徑倍數為 x 坐標，比值為 y 坐標，做成圖(12)。

計算：A_1、A_2、A_3、A_4、A_2^1、A_3^1、A_4^1、Q 的直線方程式，如圖(11)

解：(1)設 y=ax+b，同前文之計算程序

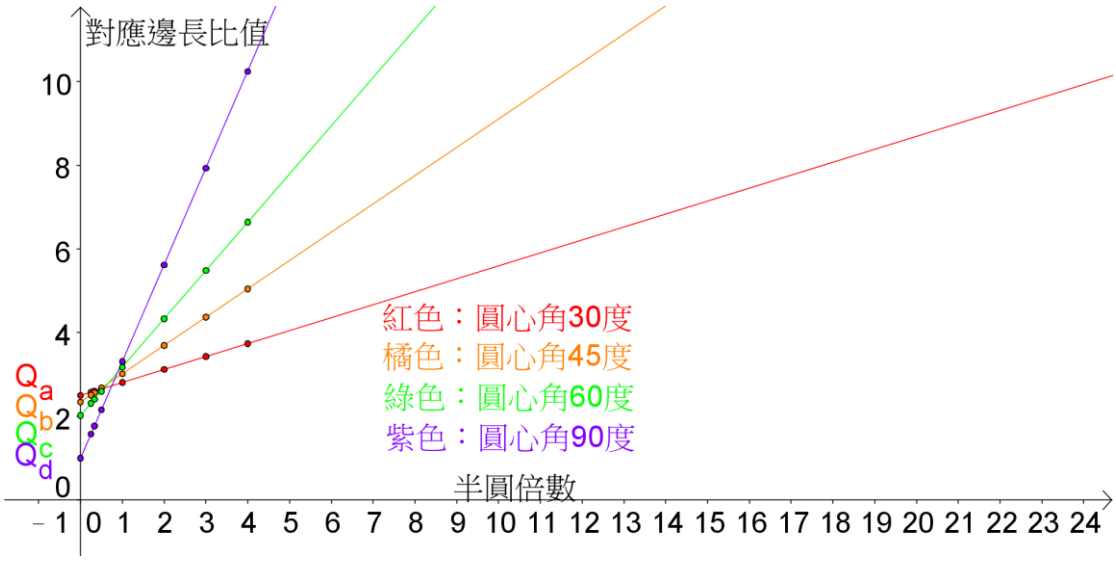
(2)解方程式後得方程式$y=\frac{4}{3}\sqrt{3}x+1$

5. 綜合表(一)至表(四)，並利用各比值描圖的直線方程式，歸納出在半圓直徑倍數為 n 倍、$\frac{1}{n}$倍及$\frac{m}{n}$倍時，切線△與原△的邊長比值的一般式，見表(五)。

圓心角 / 直徑倍數	30 度	45 度	60 度	90 度
$\frac{m}{n}$倍	$\frac{\frac{8\sqrt{3}m}{n}-\frac{12m}{n}+15}{6}$	$\frac{\left(-\frac{4m}{n}+4\right)\sqrt{6}+\frac{8\sqrt{3}m}{n}+3\sqrt{2}}{6}$	$\frac{(\frac{4m}{n}+7)\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}m}{3n}+1$
$\frac{1}{n}$倍	$\frac{\frac{8\sqrt{3}}{n}-\frac{12}{n}+15}{6}$	$\frac{\left(-\frac{4}{n}+4\right)\sqrt{6}+\frac{8\sqrt{3}}{n}+3\sqrt{2}}{6}$	$\frac{\left(\frac{4}{n}+7\right)\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3n}+1$
$\frac{1}{4}$倍	$\frac{\sqrt{3}+6}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}+1$

$\frac{1}{3}$倍	$\frac{4\sqrt{3}}{9}+\frac{11}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{9}+\frac{4\sqrt{6}}{9}$	$\frac{25\sqrt{3}}{18}$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}+1$
$\frac{1}{2}$倍	$\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}+1$
1 倍	$\frac{8\sqrt{3}+3}{6}$	$\frac{3\sqrt{2}+8\sqrt{3}}{6}$	$\frac{11\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}+1$
2 倍	$\frac{16\sqrt{3}-9}{6}$	$\frac{3\sqrt{2}+16\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{6}$	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}+1$
3 倍	$\frac{8\sqrt{3}-7}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}+24\sqrt{3}-8\sqrt{6}}{6}$	$\frac{19\sqrt{3}}{6}$	$4\sqrt{3}+1$
4 倍	$\frac{32\sqrt{3}-33}{6}$	$\frac{3\sqrt{2}+32\sqrt{3}-12\sqrt{6}}{6}$	$\frac{23\sqrt{3}}{6}$	$\frac{16\sqrt{3}}{3}+1$
n 倍	$\frac{8\sqrt{3}n-12n+15}{6}$	$\frac{(-4n+4)\sqrt{6}+8\sqrt{3}n+3\sqrt{2}}{6}$	$\frac{(4n+7)\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}n+1$

表(五)圓弧向外，逆逆置放，歸納得 n 倍、$\frac{1}{n}$倍及$\frac{m}{n}$倍直徑倍數的邊長比值一般式



圖(13) 半圓弧向外、逆逆置放、半圓直徑在不同倍數的對應邊長比值合併描圖

6. 討論與說明

(1) 表(五)中的半圓倍數n倍、$\frac{1}{n}$倍 、$\frac{m}{n}$倍的代數式，印證本文主題"活化△的邊"，

不論使用者要做多大或多小的半圓，在30°、45°、60°、90°的圓心角條件下，都可輕易取得該相似形放大或縮小的比值。

(2) 反過來說，在指定的圓心角下，欲作放大或縮小圖時，只要指定要放大或縮小的倍數，代入該公式，即可求得相對的半圓直徑倍數，並畫出圖來。

(3) 圖(13)中，這些直線和 y 軸的交點Q_a、Q_b、Q_c、Q_d的意義是各圓心角做出的相似△對原△邊長比值有最小值，例如：$Q_d = 1$，表示最小和原△全等；

$Q_a = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$，表示最小是原△的 2.5 倍大，反過來說若要利用該圓心角操作相似形，那至少要是操作 2.5 倍大的才行。

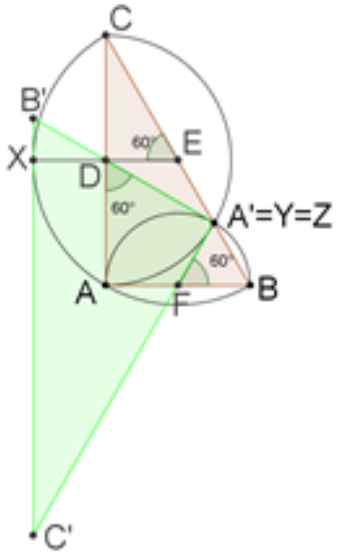
(4) 在圖(13)中的各直線間有交點，表示在同一半圓倍數時，有兩種不同的圓心角可做出同樣大小的相似△。

上文都是討論半圓弧向外置放，接下來我們想要探討半圓弧向內置放時，各切線△與原△邊長比值，是否也有一定的規律，我們仍然先以$30° - 60° - 90°$的直角△為例，研究如下：

四、 半圓弧向內逆逆置放的實際操作

在 30-60-90 的直角三角形中，採半圓弧向內逆逆置放，依圓心角 $30°$、$45°$、$60°$、$90°$，各作切線三角形並計算兩相似形對應邊長比值

(一)圓心角 60 度



圖(14)圓弧向內、直徑 1 倍圓心角 60 度

已知：△ABC 為直角△，∠A=90° ∠B=60° ∠C=30° ，以三角形各邊長的 1 倍為直徑往內做半圓，取圓心角 60° ，分別通過 X、Y、Z 做三切線，兩兩交於 A'、B'、C'

試求切線△與原△對應邊長的比值

解：

(1) 設 D、E、F 分別為$\overline{BC}$、$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點，且$\overline{AB}$= 1

(2) D 為$\overline{EX}$的中點，$\overline{DE} = \overline{DX} = \frac{1}{2}$， Δ B′DX 為 $30 - 60 - 90$ Δ ，

$\therefore \overline{B'\mathrm{D}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ，$\triangle A'\mathrm{DE}$ 為 $30-30-120\triangle$ ，$\therefore \overline{A'D} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore \overline{A'\mathrm{B}'} = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

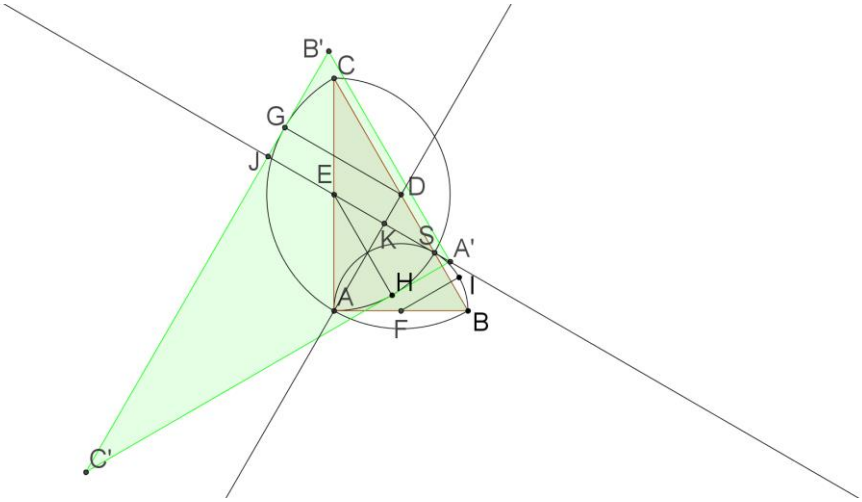
(3) $\overline{A'\mathrm{B}'}:\overline{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{6}:1 = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

同理計算其他半圓直徑倍數，得下表(六)

半圓直徑倍數	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
比值	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$	$\frac{17\sqrt{3}}{6}$	$\frac{29\sqrt{3}}{6}$	$\frac{41\sqrt{3}}{6}$

表(六)圓弧向內**圓心角 60 度**各倍數邊長比值

(二)圓心角 30°



圖(15)圓弧向內、直徑 1 倍圓心角 30 度

已知：△ABC 為直角△，D、E、F 為各邊中點，以三角形的 1 倍邊長為直徑往內畫半圓，在每個半圓弧上各取圓心角 30°，分別通過 G、H、I 做三切線，兩兩交於點 A'、B'、C'

試求切線△與原△對應邊長的比值

解：

(1) 設$\overline{\mathrm{AB}}$=a，則$\overline{AC} = \sqrt{3}a$，$\overline{BC} = 2a$

(2) 連$\overline{AD}$，過 E 作$\overline{JK} \,/\!/\, \overline{GD}$、過 F 作$\overline{FS} \,/\!/\, \overline{AD}$，交$\overline{AB}$於 S

(3) ∵GDKJ 為矩形，$\therefore \overline{\mathrm{GD}} = \overline{\mathrm{JK}} = 1$

(4) 已知$\overline{\mathrm{AF}}$=0.5，$\overline{FS} = \frac{1}{2}\overline{AD}$，$\overline{DS} = \frac{1}{2}$，又△DKS 為 30-60-90△，$\therefore \overline{\mathrm{KS}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{DS} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

(5) $\overline{SA'}=\frac{\sin 15}{2\sin 75}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(6) $\overline{JA'}=2-0.25\sqrt{3}$，$\overline{A'B'}=\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{JA'}=\frac{2}{\sqrt{3}}(2-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}$

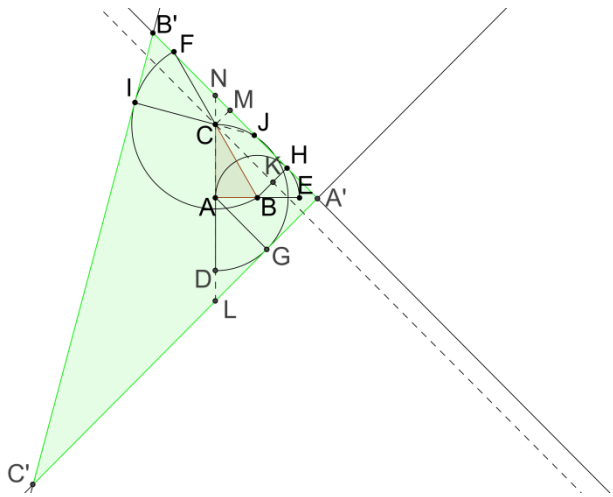
(7) $\overline{A'B'}=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}$，$\therefore\overline{A'B'}:\overline{AB}=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}$

同理計算其他半圓直徑倍數，得下表(七)

半圓直徑倍數	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
比值	$2-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{11}{6}-\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\frac{3}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}+\frac{3}{2}$	$4\sqrt{3}+\frac{7}{2}$	$\frac{16\sqrt{3}}{3}+\frac{11}{2}$

表(七)圓弧向內**圓心角 30 度**各倍數邊長比值

(三)圓心角 45°



圖(16)圓弧向內、直徑 2 倍圓心角 45 度

已知：△ABC 為直角△，以三角形的 2 倍邊長為直徑往內畫半圓，取圓心角 45°，通過點 G、H、I 做三切線，兩兩交於點 A'、B'、C'，$\overline{CD}$、$\overline{AE}$、$\overline{BF}$各為半圓直徑。試求切線△與原△對應邊長的比值

解：

(1) 設$\overline{AB}=1$，$\overline{AC}=\sqrt{3}$、$\overline{BC}=2$、則$\overline{AG}=\sqrt{3}$

(2) 延長$\overleftrightarrow{AC}$設交$\overline{A'B'}$、$\overline{A'C'}$於 N、L，過 C，作$\overline{CK}\perp\overline{BH}$，作$\overline{CM}\perp\overline{A'B'}$

(3) △BCK 為 15-75-90△，$\therefore\overline{BK}=\frac{2\sin 15}{\sin 90}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，$\overline{KH}=1-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

(4) ∵KHMC 為矩形，且△CMJ 為 30-60-90△，$\overline{CJ}=2-\sqrt{6}+\sqrt{2}$、$\overline{MJ}=\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$、$\overline{JI}=4+\sqrt{2}-\sqrt{6}$

(5) $\overline{B'J}=\frac{8\sqrt{3}+2\sqrt{6}-6\sqrt{2}}{3}$，$\overline{MN}=\overline{CM}=\overline{BM}=1-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，$\overline{CN}=\sqrt{2}-\sqrt{3}+1$，$\overline{AG}=\overline{GL}=\sqrt{3}$，$\overline{AL}=\sqrt{6}$，$\overline{NL}=\overline{NC}+\overline{CA}+\overline{AL}=\sqrt{6}+\sqrt{2}+1$.$\therefore\overline{A'N}=\sqrt{3}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

(6) 故$\overline{A'B'}=\overline{B'J}-\overline{MN}-\overline{JM}+\overline{A'N}=\frac{8\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{3}$

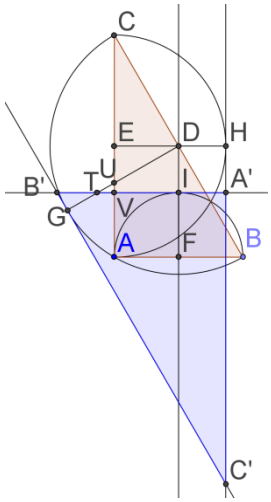
(7) $\overline{A'B'}\div\overline{AB}=\frac{8\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{3}\div 1=\frac{8\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{3}$

同理計算其他半圓直徑倍數，得下表(八)

半圓直徑倍數	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
比值	$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4\sqrt{3}}{9}+\frac{4\sqrt{6}}{9}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{8\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$4\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{16\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{6}$

表(八)圓弧向內**圓心角 45 度**各倍數邊長比值

(四)圓心角 90°



圖(17)圓弧向內、直徑 1 倍圓心角 90 度

已知：△ABC 為直角△，以三角形的 1 倍邊長為直徑往內畫半圓，取圓心角 90°，通過切點做三切線，兩兩交於點 A'、B'、C'，D、E、F 為各邊中點

試求：切線△與原△對應邊長的比值

解：

(1) 設$\overline{AB}=1$，過 D，作$\overline{DE}$的垂線，交$\overline{A'B'}$於 I，交$\overline{AB}$於 F

(2) $\because\triangle$ CDE 為 $30-60-90\triangle$，$\therefore\overline{DE}=\frac{1}{2}$、$\overline{DH}=\overline{A'I}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$

(3) $\because\overline{DF}=\frac{\sqrt{3}}{2}$、$\overline{FI}=\frac{1}{2}$、$\therefore\overline{DI}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$、$\overline{TI}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

(4) $\because \overline{DG}=1$、$\overline{TD}=\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{TI}=\sqrt{3}-1$、且 $\triangle B'TG$ 為 $30-60-90\triangle$，$\therefore \overline{TG}=$

$2-\sqrt{3}$、$\overline{B'T}=\frac{4\sqrt{3}-6}{3}$

(5) 故$\overline{A'B'}=\overline{A'I}+\overline{TI}+\overline{B'T}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{3}-2=\frac{4\sqrt{3}}{3}-1$，$\therefore$

$\overline{A'B'}:\overline{AB}=\frac{4\sqrt{3}}{3}-1$

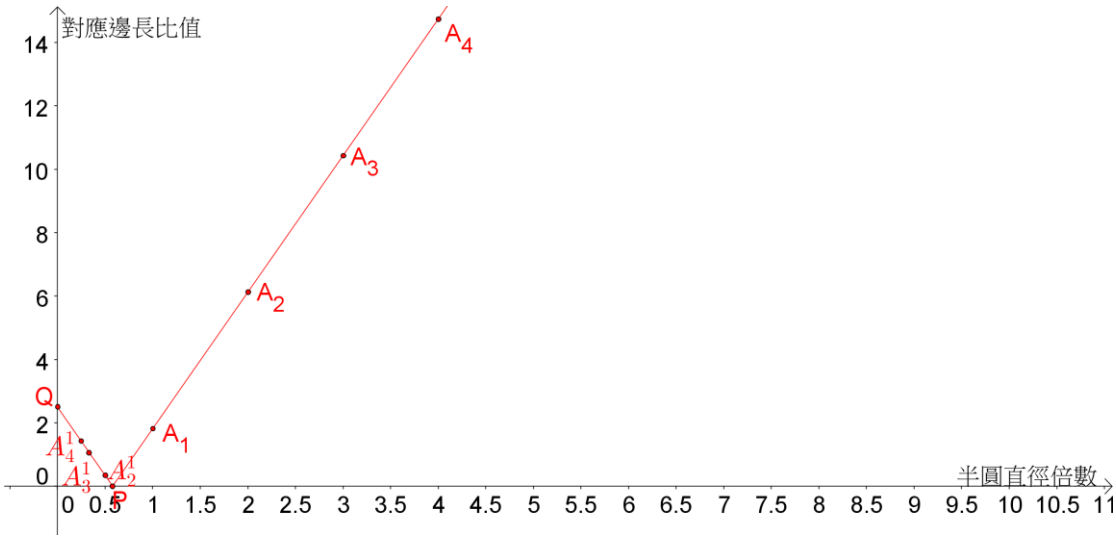
同理計算其他半圓直徑倍數，得下表(九)

半圓直徑倍數	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
比值	$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$1-\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}-1$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}-1$	$4\sqrt{3}-1$	$\frac{16\sqrt{3}}{3}-1$

表(九)圓弧向內各倍數圓心角 90 度比值

(五)、將表(六)至表(九)資料描點，並計算圖形中的直線方程式

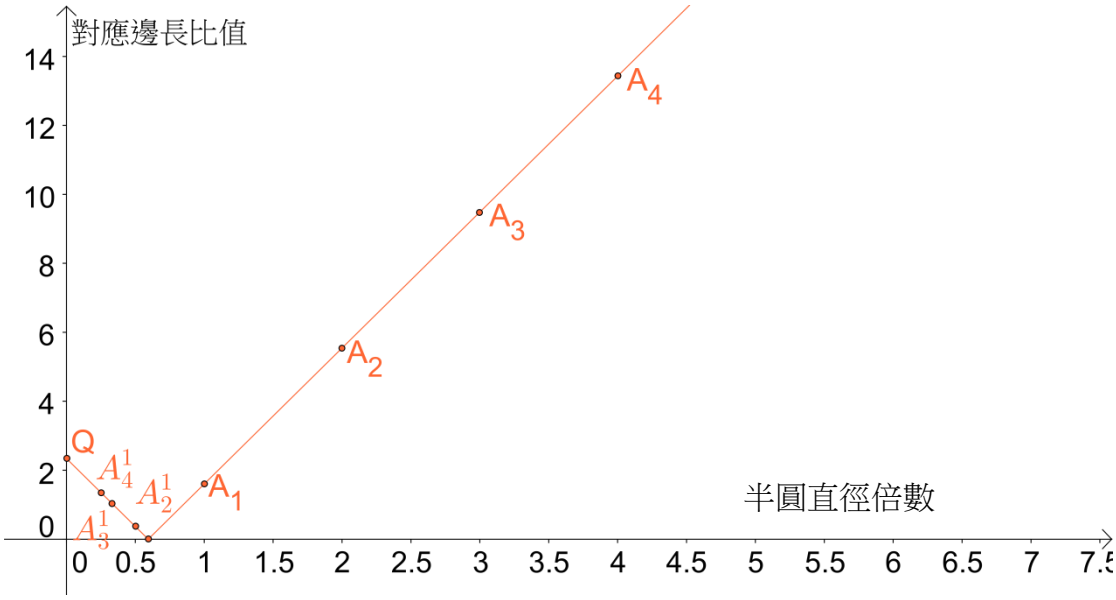
1. 圓心角 30°



圖(18)圓弧向內、圓心角 30 度、半圓直徑在各倍數下的對應邊長比值描圖

我們將向內的各倍數半圓圓心角 30 度的比值描點，以半圓直徑倍數為 x 坐標，比值為 y 坐標，做成圖(18)，我們發現到圖形成折線狀，轉折點在$(\frac{10\sqrt{3}-15}{4},0)$，經過計算後，得知那兩條直線方程式為$y=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}+2\right)x-2.5$，其中 $x\geqq\frac{10\sqrt{3}-15}{4}$ 及 $y=\left(-2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)x+2.5$，其中 $0\leqq x\leqq\frac{10\sqrt{3}-15}{4}$

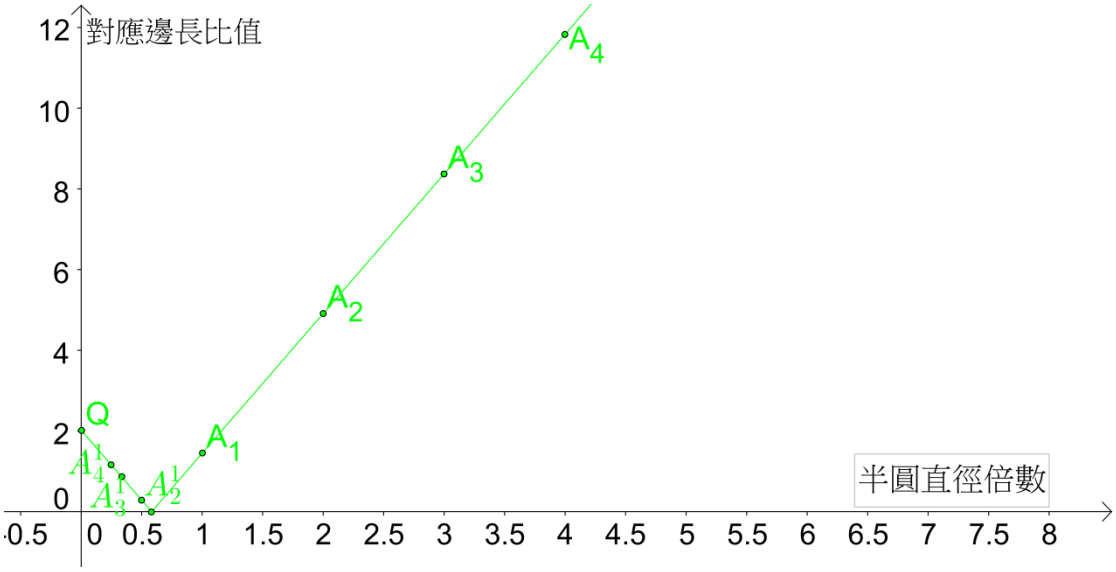
2. 圓心角 45°



圖(19) 圓弧向內、圓心角 45 度、半圓直徑在不同倍數下的對應邊長比值描圖

我們將向內的各倍數半圓圓心角 45 度的比值描點，以半圓直徑倍數為 x 坐標，比值為 y 坐標，做成圖(19)，圖形亦呈折線狀，轉折點為$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+4\sqrt{2}-4}{4},0\right)$，經過計算後，得知那兩條直線方程式為$y=(\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3})x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{6}}{3}$，其中 $x\geqq\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+4\sqrt{2}-4}{4}$及$y=(\frac{-4\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{3})x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{3}$，其中 $0\leqq x\leqq\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+4\sqrt{2}-4}{4}$

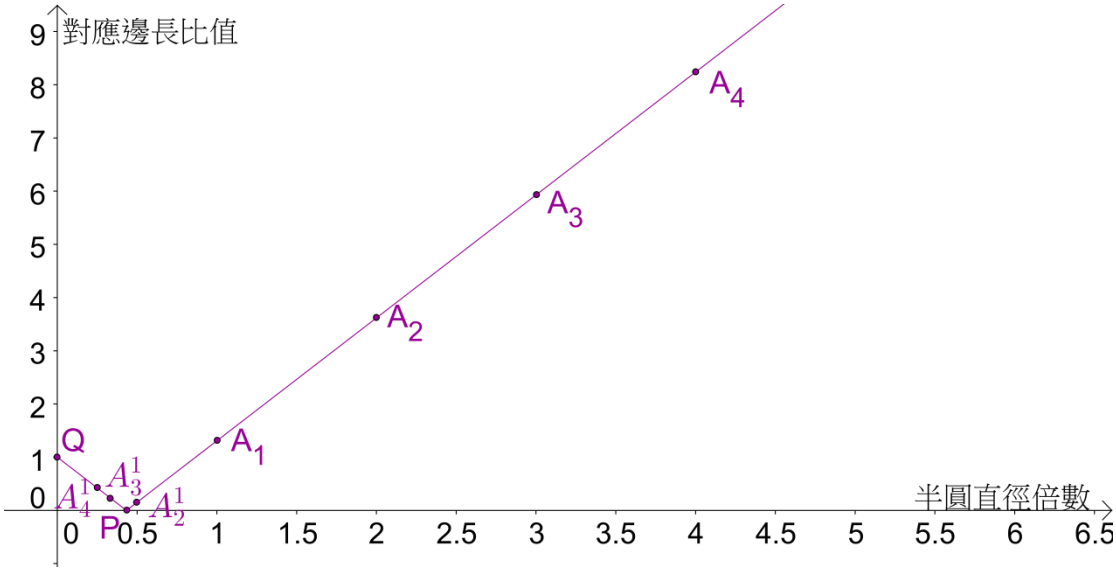
3. 圓心角 60°



圖(20) 圓弧向內、圓心角 60 度、半圓直徑在不同倍數下的對應邊長比值描圖

圖(20)中，同樣的圖形呈折線狀，轉折點為$(\frac{7}{12},0)$，經過計算後，得知那兩條直線方程式為$y=2\sqrt{3}x-\frac{7\sqrt{3}}{6}$，其中 $x\geqq\frac{7}{12}$及 $y=-2\sqrt{3}x+\frac{7\sqrt{3}}{6}$，其中 $0\leqq x\leqq\frac{7}{12}$

4. 圓心角 90°



圖(21)圓弧向內、圓心角 90 度、半圓直徑在不同倍數下的對應邊長比值描圖

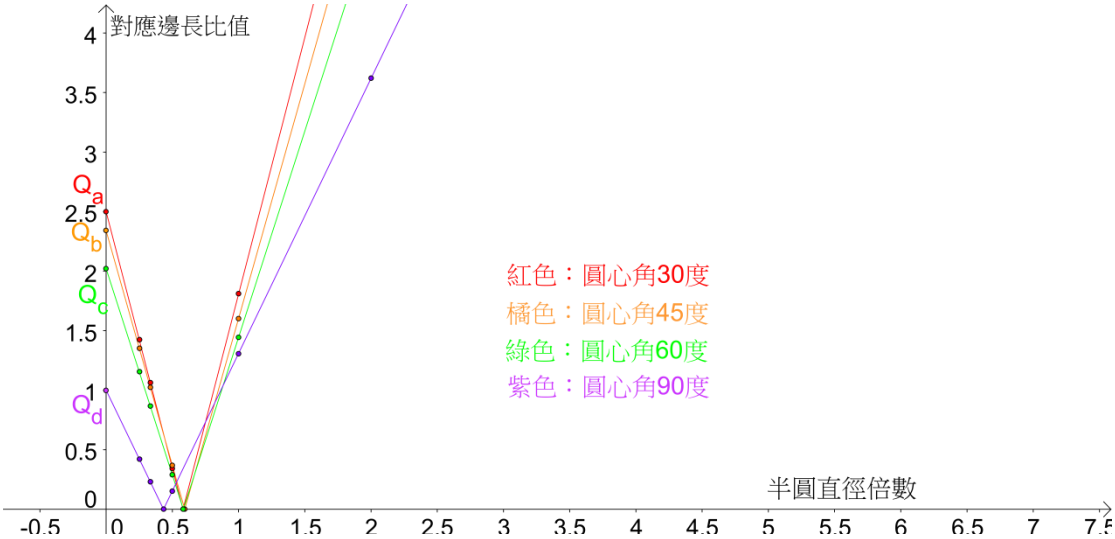
我們將向內的各倍數半圓圓心角90度的比值描點，做成圖(21)，圖形仍呈折線狀，轉折點為$\left(\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$，經過計算後，得知那兩條直線方程式為$y=\frac{4\sqrt{3}x}{3}-1$，其中 $x\geqq\frac{\sqrt{3}}{4}$ 及 $y=\frac{-4\sqrt{3}x}{3}+1$，其中 $0\leqq x\leqq\frac{\sqrt{3}}{4}$

5. **綜合表(六)至表(九)，並利用各比值描圖的直線方程式，歸納出在半圓直徑倍數為 n 倍、$\frac{1}{n}$倍及$\frac{m}{n}$倍時，切線△與原△的邊長比值的一般式，見表(十)。**

圓心角 / 直徑倍數	30 度	45 度	60 度	90 度
$\frac{m}{n}$倍 (m≦n)	$\left\lvert\frac{(-6-4\sqrt{3})m}{3n}+2.5\right\rvert$	$\left\lvert\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4\sqrt{3}m}{3n}+\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{2\sqrt{6}m}{3n}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{-2\sqrt{3}m}{n}+\frac{7\sqrt{3}}{6}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{-4\sqrt{3}m}{3n}+1\right\rvert$
$\frac{1}{n}$倍	$\left\lvert\frac{-6-4\sqrt{3}}{3n}+2.5\right\rvert$	$\left\lvert\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4\sqrt{3}}{3n}+\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3n}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{-2\sqrt{3}}{n}+\frac{7\sqrt{3}}{6}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{-4\sqrt{3}}{3n}+1\right\rvert$
$\frac{1}{4}$倍	$2-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{3}$倍	$\frac{11}{6}-\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4\sqrt{3}}{9}+\frac{4\sqrt{6}}{9}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1-\frac{4\sqrt{3}}{9}$

$\frac{1}{2}$倍	$\frac{3}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$
1 倍	$\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}-1$
2 倍	$\frac{8\sqrt{3}}{3}+\frac{3}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{8\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\frac{17\sqrt{3}}{6}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}-1$
3 倍	$4\sqrt{3}+\frac{7}{2}$	$4\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{29\sqrt{3}}{6}$	$4\sqrt{3}-1$
4 倍	$\frac{16\sqrt{3}}{3}+\frac{11}{2}$	$\frac{16\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{6}$	$\frac{41\sqrt{3}}{6}$	$\frac{16\sqrt{3}}{3}-1$
n 倍	$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}+2\right)\mathrm{n}-2.5$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}n-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{6}n-2\sqrt{6}}{3}$	$2\sqrt{3}\mathrm{n}-\frac{7\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}n}{3}-1$

表(十)圓弧向內，逆逆置放，歸納得 n 倍、$\frac{1}{n}$倍及$\frac{m}{n}$倍直徑倍數的邊長比值一般式



圖(22)向內半圓弧、圓心角取逆時針、半圓直徑在不同倍數的對應邊長比值描圖

6. 討論與說明

(1) 表(十)中歸納出的$\frac{1}{n}$、$\frac{m}{n}$、n倍向內半圓直徑，在各圓心角條件下的對應邊長比值一般式，可讓使用者計算所要的任意切線相似△邊長大小，明顯的當 m、n 為無理數時，亦可使用此一般式

(2) 反過來，若使用者選定了放大或縮小的倍數，可以利用圖(22)的各不同圓心角折線圖，選擇一個較易操作的半圓直徑倍數(即活化△邊長的倍數)操作。

(3) 不同於半圓弧向外的比值圖，圖(13)，向內的比值圖呈折線狀，這表示所操作出的切線相似△可以小到面積為 0。在真分數倍半圓直徑時，選取的半圓直徑倍數愈小，操作出的相似△卻愈大(但有上限，上限值各為Q_a, Q_b, Q_c, Q_d)。

(4) 某些整數倍半圓直徑倍數和真分數倍半圓直徑倍數操作出來的相似△邊長大小相等，以圓心角 30 度為例，當操作活化 1 倍的半圓直徑和操作活化 $\frac{10\sqrt{3}-17}{2}$倍的半圓直徑時，所分別得到的相似△邊長相等，即兩△全等，真神奇!!

(5) 在各折線圖中，若取轉折點處的 x 值當半圓直徑作圖，則切線△面積為 0，即三切線共點。

五、計算面積差

完成向外逆逆置放及向內逆逆置放的切線相似△邊長比值圖表後，我們想觀察半圓直徑倍數及圓心角兩者，對面積差的影響，針對圓心角 90°，我們給出詳細計算的圖表，其他圓心角只給圖，敘述如下：

(一)向外半圓，做出之各切線相似形面積

半圓直徑倍數	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
向外的半圓切線△面積	$\frac{2\sqrt{3}}{3}+1$	$\frac{43\sqrt{3}}{54}+\frac{4}{3}$	$\frac{7\sqrt{3}}{6}+2$	$\frac{19\sqrt{3}}{6}+4$	$\frac{67\sqrt{3}}{6}+8$	$\frac{49\sqrt{3}}{2}+12$	$\frac{259\sqrt{3}}{6}+16$

表(十一)圓弧向外、圓心角 90 度、半圓直徑不同倍數時的切線△面積

(二)向內半圓，做出之各切線相似形面積

半圓直徑倍數	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
向內的半圓切線△面積	$\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$	$\frac{43\sqrt{3}}{54}-\frac{4}{3}$	$\frac{7\sqrt{3}}{6}-2$	$\frac{19\sqrt{3}}{6}-4$	$\frac{67\sqrt{3}}{6}-8$	$\frac{49\sqrt{3}}{2}-12$	$\frac{259\sqrt{3}}{6}-16$

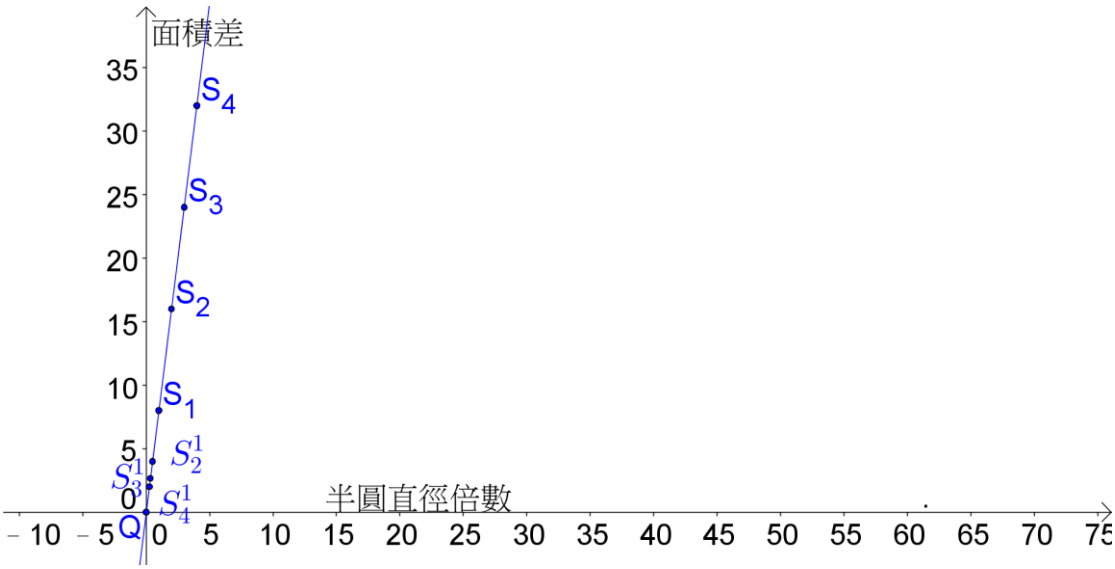
表(十二)圓弧向內、圓心角 90 度、半圓直徑不同倍數時的切線△面積

(三)將向外半圓切線△的面積減去向內半圓切線△的面積得各面積差

半圓直徑倍數	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
面積差 S (外-內)	2	$\frac{8}{3}$	4	8	16	24	32

表(十三)圓心角 90° 各切線△(外減內)面積差

接著我們將表(十三)中這七點以半圓倍數為 x 軸、面積差為 y 軸，將各點描出，並計算向外半圓及向內半圓其相似形面積差的直線方程式



圖(23)圓心角 90° 面積差直線圖

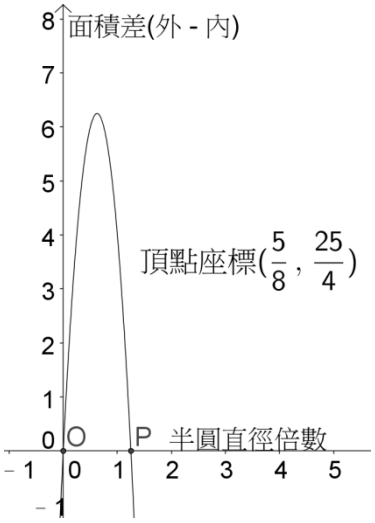
由圖(23)我們發現在半圓圓心角為 90° 時，往外畫及往內畫半圓在不同半圓直徑倍數下所繪出的切線△的面積差，會呈一條通過原點的斜直線，我們明顯的發現此直線方程式為 y=8x

說明：(1)圖(23)是一條通過原點的斜直線，這表示在圓心角都是 90°下活化的半圓直徑倍數和面積差呈正比，但其他圓心角卻不是這樣(見下圖)。

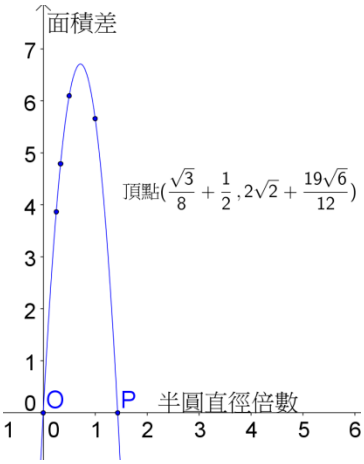
(2)這 y=8x 的關係式，很簡潔好用，若其他條件充足，只要知道半圓向外的△面積即可算出半圓向內的△面積，反過來也可以。

(四)其他圓心角的面積差

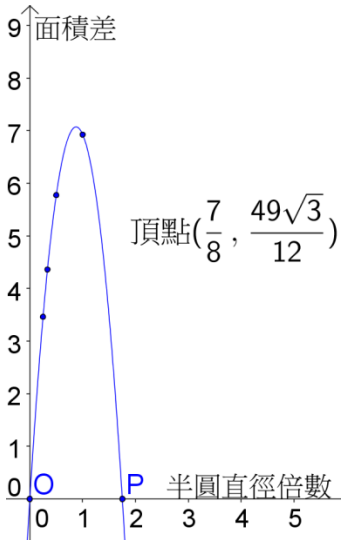
不同於圓心角 90°時，面積差呈線性相關，圓心角 30°時，$y = 20x - 16x^2$、圓心角 45°時、$y = 4\sqrt{2}x + \frac{16}{3}\sqrt{6}x - \frac{16}{3}\sqrt{6}x^2$、圓心角 60°時，$y = \frac{28\sqrt{3}}{3}x - \frac{16\sqrt{3}}{3}x^2$，三者皆呈拋物線，這些拋物線開口向下，由頂點坐標知，在適當的半圓直徑倍數時，有面積差的最大值。

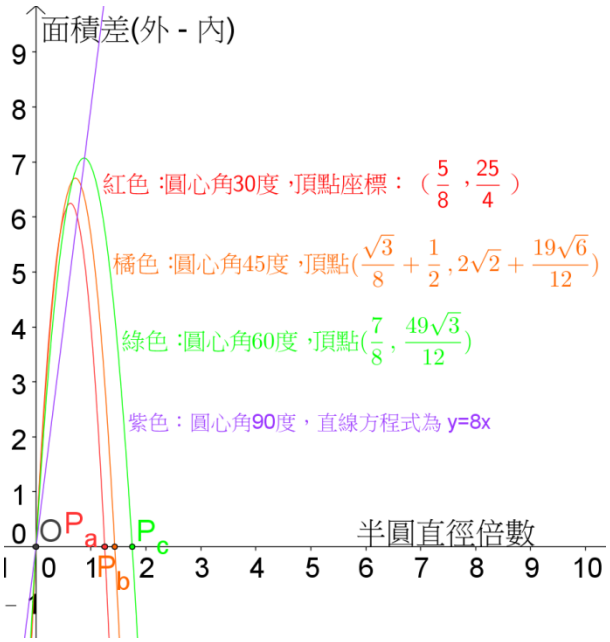


圖(24) 圓心角 30° 面積差拋物線圖



圖(25) 圓心角 45° 面積差拋物線圖





圖(26) 圓心角 60° 面積差拋物線圖　　圖(27)面積差總圖

說明：(1)由圖(27)面積差總圖中可看出來面積差的最大值隨著圓心角由小而大(0°~90°)也逐漸變大，當圓心角到達 90°時，面積差的最大值可達無限大。

(2)由拋物線和 x 軸的交點 P(非原點)知，在特定的半圓直徑倍數下，圓弧逆逆置放向外和向內的切線相似△會全等，例如圓心角 30°時，取半圓直徑$\frac{5}{4}$倍，兩者面積差為 0，又相似，故兩△全等。同理圓心角 45°及 60°時，半圓直徑倍數為$\frac{4+\sqrt{3}}{4}$及$\frac{7}{4}$倍時，也會全等

六、一次到位作圖與兩段式作圖

在獲得前文中的半圓弧向外及向內的各項切線△資料及其整數倍和分數倍的對應邊長比值方程式後，我們想更細膩的做一個有趣的實驗，實驗分成四個部分，

甲、由母 Δ ABC，直接一次就操作出$4\sqrt{3}$倍的放大圖△A′B′C′，如圖(28)。

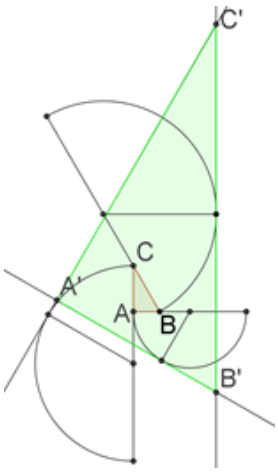
乙、先利用半圓弧向外直徑$\frac{1}{2}$倍操作出第一層的相似△後，緊接著經過計算找出第二層的向外半圓直徑倍數$\frac{16\sqrt{3}-21}{12}$倍，得$4\sqrt{3}$倍的放大圖△A"B"C"，如圖(29)。

丙、如圖(30)，先向外畫第一層$\frac{1}{2}$倍，再向內畫第二層$\frac{16\sqrt{3}+21}{36}$倍，得$4\sqrt{3}$倍放大圖。

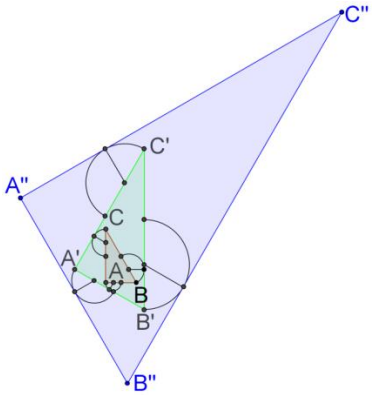
丁、如圖(31)，先向內畫第一層$\frac{1}{2}$倍，再向內畫第二層$\frac{48\sqrt{3}+7}{12}$倍，得$4\sqrt{3}$倍放大圖。

我們發現四個最後放大圖都全等，實驗操作結果顯示直接一次到位的作圖，可以

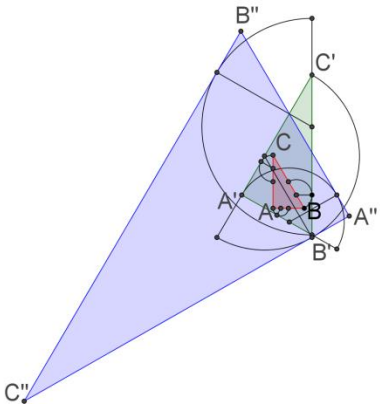
分解成兩段式作圖且先向外或先向內可任意搭配，只是要利用之前的比值方程式先計算好半圓直徑倍數。



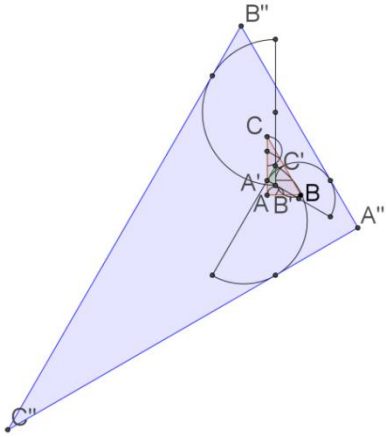
圖(28)一次到位(甲)



圖(29)先外、再外(乙)



圖(30)先外、再內(丙)



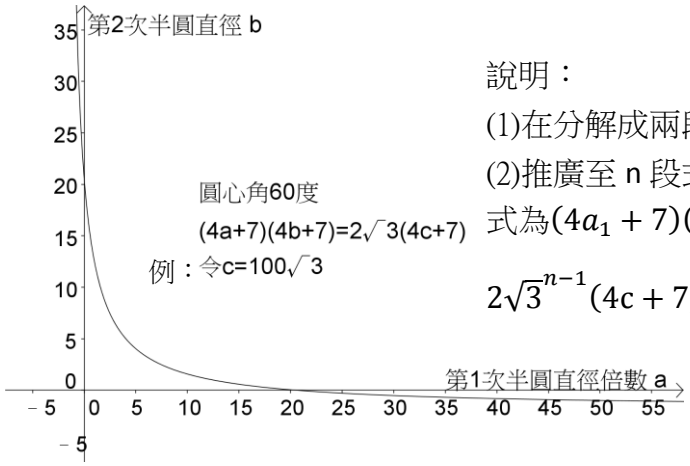
圖(31)先內、再內(丁)

而在做完這兩個作圖法，我們在想一次到位作圖法及兩段式作圖法，他們的半圓直徑倍數會有什麼關係呢？我們假設兩段式作圖法第一次所需的半圓直徑倍數為 a，第二次的半圓直徑倍數為 b，而一次到位作圖法所需的半圓直徑倍數為 c，設法找出 a、b、c 之間的關係式，以圓心角 60°及 90°為例，列表如下：

60 度	a	b	c	關係式
目標 k 倍放大圖	$\frac{1}{4}$	$\frac{3k-14}{8}$	$\frac{2\sqrt{3}k-7}{4}$	$(4a+7)(4b+7)$ $=2\sqrt{3}(4c+7)$
目標 k 倍放大圖	$\frac{1}{3}$	$\frac{36k-175}{100}$		
目標 k 倍放大圖	$\frac{1}{2}$	$\frac{4k-21}{12}$		

目標 k 倍放大圖	1	$\frac{12k-77}{44}$		
目標 k 倍放大圖	2	$\frac{4k-35}{20}$		
目標 k 倍放大圖	3	$\frac{12k-133}{76}$		
目標 k 倍放大圖	4	$\frac{12k-161}{92}$		

表(十四)半圓向外，圓心角 60°，a、b、c 的關係式



說明：

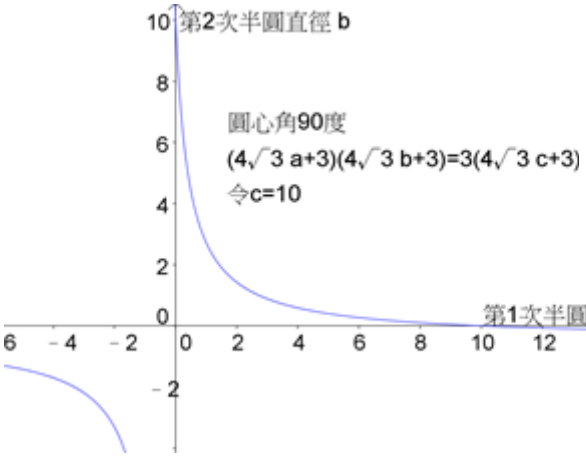
(1)在分解成兩段式時，a 和 b 成反比

(2)推廣至 n 段式的a_1、$a_2 \cdots a_n$與 c 的關係式為$(4a_1+7)(4a_2+7)\cdots\cdots(4a_n+7) = 2\sqrt{3}^{n-1}(4c+7)$

圖(32)當 c 為定值時，a 和 b 呈雙曲線關係

90 度	A	b	c	關係式
目標 k 倍放大圖	$\frac{1}{4}$	$\frac{9\sqrt{3}k-9k-6\sqrt{3}}{24}$	$\frac{\sqrt{3}k-\sqrt{3}}{4}$	
目標 k 倍放大圖	$\frac{1}{3}$	$\frac{27\sqrt{3}k-36k-11\sqrt{3}}{44}$	$\frac{\sqrt{3}k-\sqrt{3}}{4}$	
目標 k 倍放大圖	$\frac{1}{2}$	$\frac{6k-3\sqrt{3}k-\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}k-\sqrt{3}}{4}$	
目標 k 倍放大圖	1	$\frac{12k-3\sqrt{3}k-13\sqrt{3}}{52}$	$\frac{\sqrt{3}k-\sqrt{3}}{4}$	$(4\sqrt{3}a+3)(4\sqrt{3}b+3)$ $=3(4\sqrt{3}c+3)$
目標 k 倍放大圖	2	$\frac{24k-3\sqrt{3}k-61\sqrt{3}}{244}$	$\frac{\sqrt{3}k-\sqrt{3}}{4}$	
目標 k 倍放大圖	3	$\frac{12k-\sqrt{3}k-47\sqrt{3}}{188}$	$\frac{\sqrt{3}k-\sqrt{3}}{4}$	
目標 k 倍放大圖	4	$\frac{48k-3\sqrt{3}k-253\sqrt{3}}{1012}$	$\frac{\sqrt{3}k-\sqrt{3}}{4}$	

表(十五) 半圓向外，圓心角 90°，a、b、c 的關係式



說明：

(1)在分解成兩段式時，a 和 b 成反比

(2)推廣至 n 段式的a_1、$a_2 \cdots a_n$與 c 的關係式為

$$(4\sqrt{3}a_1+3)(4\sqrt{3}a_2+3)\cdots(4\sqrt{3}a_n+3) = 3^{n-1}(4\sqrt{3}c+3)$$

圖(33)當 c 為定值時，a 和 b 呈雙曲線關係

60 度	a	b	c	關係式
目標 k 倍放大圖	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12} \leqq \frac{3k+7}{12}$	$\frac{7}{12} \leqq \frac{2\sqrt{3}k+7}{12}$	$\left\lvert 2\sqrt{3}a-\frac{7\sqrt{3}}{6}\right\rvert \times \left\lvert 2\sqrt{3}b-\frac{7\sqrt{3}}{6}\right\rvert = \left\lvert 2\sqrt{3}c-\frac{7\sqrt{3}}{6}\right\rvert$
		$0 \leqq \frac{-3k+7}{12} < \frac{7}{12}$		
目標 k 倍放大圖	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12} \leqq \frac{4k+7}{12}$		
		$0 \leqq \frac{-4k+7}{12} < \frac{7}{12}$		
目標 k 倍放大圖	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12} \leqq \frac{12k+7}{12}$		
		$0 \leqq \frac{-12k+7}{12} < \frac{7}{12}$		
目標 k 倍放大圖	1	$\frac{7}{12} \leqq \frac{12k+35}{60}$		
		$0 \leqq \frac{-12k+35}{60} < \frac{7}{12}$	$0 \leqq \frac{-2\sqrt{3}k+7}{12} < \frac{7}{12}$	
目標 k 倍放大圖	2	$\frac{7}{12} \leqq \frac{12k+119}{204}$		
		$0 \leqq \frac{-12k+119}{204} < \frac{7}{12}$		
目標 k 倍放大圖	3	$\frac{7}{12} \leqq \frac{12k+203}{348}$		
		$0 \leqq \frac{-12k+203}{348} < \frac{7}{12}$		
目標 k 倍放大圖	4	$\frac{7}{12} \leqq \frac{12k+287}{492}$		
		$0 \leqq \frac{-12k+287}{492} < \frac{7}{12}$		

表(十六) 半圓向內，圓心角 60°，a、b、c 的關係式

90 度	A	b	c	關係式
目標 k 倍放大圖	$\frac{1}{4}$	$0 \le \frac{-3\sqrt{3}k-3k+2\sqrt{3}}{8} < \frac{\sqrt{3}}{4}$	$0 \le \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}k}{4} < \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\left\lvert \frac{4\sqrt{3}}{3}a-1\right\rvert \times \left\lvert \frac{4\sqrt{3}}{3}b-1\right\rvert = \left\lvert \frac{4\sqrt{3}}{3}c-1\right\rvert$
		$\frac{\sqrt{3}}{4} \le \frac{3\sqrt{3}k+3k+2\sqrt{3}}{8}$		
目標 k 倍放大圖	$\frac{1}{3}$	$0 \le \frac{-27\sqrt{3}k-36k+11\sqrt{3}}{44} < \frac{\sqrt{3}}{4}$		
		$\frac{\sqrt{3}}{4} \le \frac{27\sqrt{3}k+36k+11\sqrt{3}}{44}$		

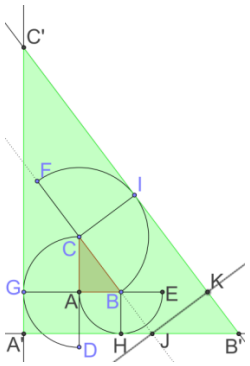
目標 k 倍放大圖	$\frac{1}{2}$	$0 \le \frac{-6k-3\sqrt{3}k+\sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \le \frac{\sqrt{3}k+\sqrt{3}}{4}$	
		$\frac{\sqrt{3}}{4} \le \frac{6k+3\sqrt{3}k+\sqrt{3}}{44}$		
目標 k 倍放大圖	1	$0 \le \frac{-12k-3\sqrt{3}k+13\sqrt{3}}{52} < \frac{\sqrt{3}}{4}$		
		$\frac{\sqrt{3}}{4} \le \frac{12k+3\sqrt{3}k+13\sqrt{3}}{52}$		
目標 k 倍放大圖	2	$0 \le \frac{-24k-3\sqrt{3}k+61\sqrt{3}}{244} < \frac{\sqrt{3}}{4}$		
		$\frac{\sqrt{3}}{4} \le \frac{24k+3\sqrt{3}k+61\sqrt{3}}{244}$		
目標 k 倍放大圖	3	$0 \le \frac{-12k-\sqrt{3}k+37\sqrt{3}}{188} < \frac{\sqrt{3}}{4}$		
		$\frac{\sqrt{3}}{4} \le \frac{12k+\sqrt{3}k+37\sqrt{3}}{188}$		
目標 k 倍放大圖	4	$0 \le \frac{-48k-3\sqrt{3}k+253\sqrt{3}}{1012} < \frac{\sqrt{3}}{4}$		
		$\frac{\sqrt{3}}{4} \le \frac{48k+3\sqrt{3}k+253\sqrt{3}}{1012}$		

表(十七) 半圓向內，圓心角 90°，a、b、c 的關係式

說明：在表(十六)及表(十七)中，因為半圓弧向內置放邊長比值呈折線狀，當要作兩段式操作時，在指定 a 之後，就要考慮 b 和 c 各落在哪一段，因此 k 值的大小決定了 b 和 c 的大小。

以上之研究內容都是從國中常用的特殊角 30°、45°、60°、90°為探討方向，我們發現其比值圖形都呈直線狀或 NIKE 折線狀，但若改成用整數倍邊長(如 3:4:5)的直角△為母△，並用這母△的三內角當圓心角，則比值圖不知道會呈什麼樣？

七、邊長比為 3:4:5 之直角△當母△，利用三內角當圓心角，觀察比值圖。



圖(34)邊長比為 3:4:5 的△圓弧向外逆逆置放，半圓直徑 2 倍畫出相似形△A'B'C'

已知：如圖(34)，△ABC 為直角三角形，$\overline{AB}$=3　$\overline{AC}$=4　$\overline{BC}$=5，半圓弧往外以原△2 倍的邊長畫半圓，三邊中點各為 A、B、C，取圓心角 90°(等同於內角∠A)，通過 G、H、I 做三切線，兩兩相交於 A'、B'、C'。

試求：切線△與原△對應邊長的比值

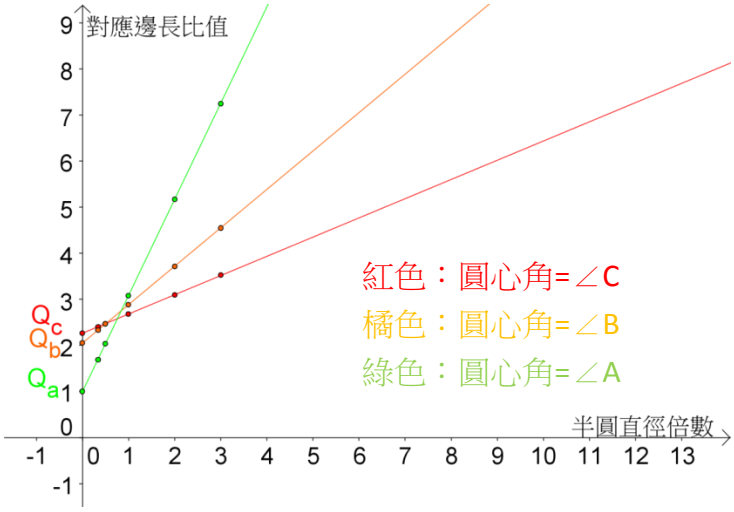
解：　(1) 延長$\overline{BC}$，設其交$\overline{A'B'}$於 J，過 J，作$\overline{JK}\perp\overline{B'C'}$

(2) $\overline{HJ}=\frac{9}{4}$，$\overline{A'H}=7$，$\overline{B'J}=\frac{25}{4}$，∴ $\overline{A'B'}=\frac{62}{4}$，∴$\overline{A'B'}:\overline{AB}=\frac{62}{12}=\frac{31}{6}$

以下是邊長比 3:4:5 直角△的比值，取半圓倍數$\frac{1}{3}$倍~3 倍，圓心角為△的三內角。

半圓直徑倍數	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	n
∠C	$\frac{25}{12n}+\frac{34}{15}$	$\frac{433}{180}$	$\frac{297}{120}$	$\frac{161}{60}$	$\frac{93}{30}$	$\frac{211}{60}$	$\frac{25n+136}{60}$
∠B	$\frac{5}{6n}+\frac{41}{20}$	$\frac{419}{180}$	$\frac{74}{30}$	$\frac{173}{60}$	$\frac{223}{60}$	$\frac{91}{20}$	$\frac{50n+123}{60}$
∠A	$\frac{25}{12n}+1$	$\frac{61}{36}$	$\frac{49}{18}$	$\frac{37}{12}$	$\frac{31}{6}$	$\frac{29}{4}$	$\frac{25}{12}n+1$

表(十八)邊長比為 3:4:5 的直角△的對應邊長比值(∠A=90°>∠B>∠C)



圖(35)圓弧向外、逆逆置放，半圓直徑在不同倍數的對應邊長比值描圖

說明：

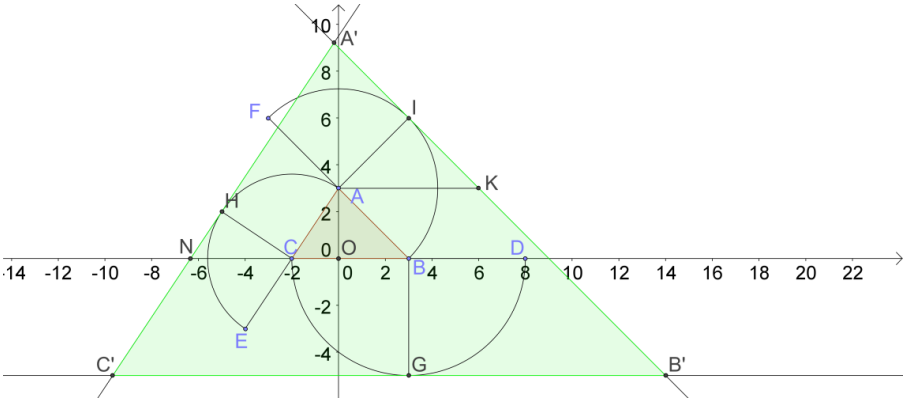
1.此圖(35)和圖(13)非常相似，成斜率為正的直線狀

2.觀察圓弧向內逆逆置放的各圓心角比值圖，亦呈 NIKE 折線狀(見研究日誌)

八、將前文中的母△代換成一般△，利用直角坐標計算其比值方程式

對於特殊直角△，如前文的 30°-60°-90°△及 3:4:5 直角△，雖然都已詳盡討論過，但若沒試探一下一般△的話，就好像有點意猶未盡，但一般△的計算對我們國中生而言不太容易，因此我們改個方法，利用直角座標系統來稍作觀察。

(一)半圓弧向外，逆逆置放，觀察切線△對應邊長比值



圖(36)任意△往外作半圓，取 2 倍半圓直徑，圓心角 90°做出的切線△

已知：在坐標平面，A(0,a)、B(b,0)、C(c,0)，分別以△2 倍邊長為直徑往外作半圓，A、B、C 為其圓心，取圓心角 90°，過 G、H、I 作三切線，相交於 A'、B'、C'。

試求：$\overline{B'C'}$：$\overline{BC}$的比值

解： (1)令 A(0,a)、B(b,0)、C(c,0)可推得$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$的直線方程式，分別為

$\overleftrightarrow{AB}$：$\mathrm{ax+by=ab}$、$\overleftrightarrow{BC}$：$\mathrm{y=0}$、$\overleftrightarrow{AC}$：$\mathrm{ax+cy=ac}$

(2)$\overline{AI}=\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$、$\overline{BG}=\overline{BC}=b-c$、$\overline{CH}=\overline{CA}=\sqrt{a^2+c^2}$

(3)由△AIK~△AOB，$\therefore \overline{AK}:\overline{AB}=\overline{AI}:\overline{AO}$，$\therefore \overline{AK}:\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}:\mathrm{a}$，故$\overline{AK}=\frac{a^2+b^2}{a}$

(4)同理由△CHN~△AOC，$\therefore \overline{CN}:\overline{AC}=\overline{CH}:\overline{AO}$，$\therefore \overline{CN}:\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{a^2+c^2}:\mathrm{a}$，故$\overline{CN}=\frac{a^2+c^2}{a}$

(5)$\overleftrightarrow{A'B'}$方程式可由$\overleftrightarrow{AB}$向右平移$\overline{AK}$長而得，即$\overleftrightarrow{A'B'}$方程式為

$\mathrm{a}\left(\mathrm{x}-\frac{a^2+b^2}{a}\right)+by=ab$ 推得 $\mathrm{ax+by}=a^2+ab+b^2$

(6) $\overleftrightarrow{B'C'}$方程式可由$\overleftrightarrow{BC}$向下平移$\overline{BG}$長而得，即$\overleftrightarrow{B'C'}$方程式為

$\mathrm{y=-(b-c)}$推得 $\mathrm{y=c-b}$

(7) $\overleftrightarrow{C'A'}$方程式可由$\overleftrightarrow{CA}$向下平移$\overline{CN}$長而得，即$\overleftrightarrow{C'A'}$方程式為

$\mathrm{a}\left(\mathrm{x}+\frac{a^2+c^2}{a}\right)+cy=ac$ 推得 $ax+cy=-a^2+ac-c^2$

(8)現在可以求 A'、B'、C'

$\begin{cases} ax+by=a^2+ab+b^2 \\ y=c-b \end{cases}$ 解得 B'$\left(\frac{a^2+ab-bc+2b^2}{a},\mathrm{c-b}\right)$

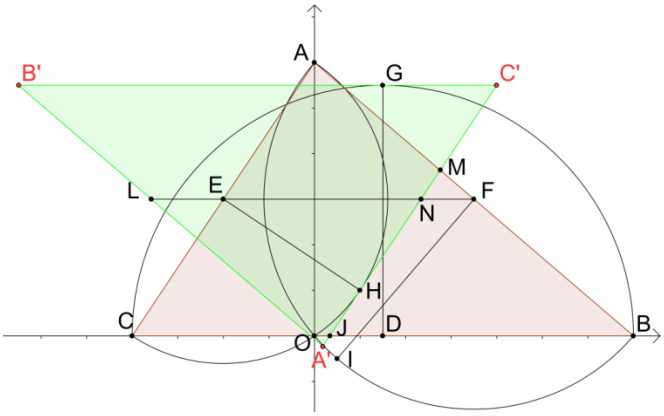
$\begin{cases} ax+cy=-a^2+ac-c^2 \\ y=c-b \end{cases}$ 解得 C' $\left(\frac{-a^2+ac+bc-2c^2}{a},\mathrm{c-b}\right)$

(9)故$\overline{B'C'}=\frac{2a^2+2b^2+2c^2+ab-2bc-ca}{a}$，$\therefore \overline{B'C'}:\overline{BC}=\frac{2a^2+2b^2+2c^2+ab-2bc-ca}{ab-ac}$

算出任意△以原△邊長 2 倍為直徑往外作半圓切線△與原△對應邊長比值，嘗試將半圓直徑擴展為原△邊長 n 倍，求出切線△與原△對應邊長比值，敘述如下：
已知：在坐標平面，A(0,a)、B(b,0)、C(c,0)，分別以△n 倍邊長為直徑往外作半圓，P、Q、R 為其圓心，圓心角 90°，過 G、H、I 作三切線，兩兩相交於 A'、B'、C'。
試求：$\overline{B'C'}$：$\overline{BC}$的比值
解：仿照上文中 2 倍的解法方式，可求得在半圓直徑倍數為 n

倍時　　$\overline{B'C'}$：$\overline{BC}$的比值為 $\frac{na^2+nb^2+nc^2+ab-nbc-ac}{ab-ac}$----------①

接下來我們也討論任意△半圓往內置放時，切線△與原△的比值
(二) 半圓弧向內，逆逆置放，觀察切線△對應邊長比值



圖(37)任意△往內作半圓取半圓直徑倍數 1 倍，圓心角 90°做出的切線△
已知：在坐標平面，A(0,a)、B(b,0)、C(c,0)，分別以△1 倍的邊長為直徑往內作半圓，D、E、F 分別為其圓心，過 G、H、I 作三切線，兩兩相交於 A'、B'、C'。
試求：$\overline{B'C'}$：$\overline{BC}$的比值
解：(1)由 A(0,a)、B(b,0)、C(c,0)可推得$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$的直線方程式，分別為
$\overleftrightarrow{AB}$：$\mathrm{ax+by=ab}$、$\overleftrightarrow{BC}$：$\mathrm{y=0}$、$\overleftrightarrow{AC}$：$\mathrm{ax+cy=ac}$

(2)$\overline{FI}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$、$\overline{DG}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{b-c}{2}$、$\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{2}$

(3)△AOB~△FIL，得$\overline{FL}$：$\overline{AB}=\overline{FI}$：$\overline{AO}$，∴ $\overline{FL}=\frac{a^2+b^2}{2a}$

(4)同理由△EHN~△AOC，得$\overline{EN}$：$\overline{AC}=\overline{EH}$：$\overline{AO}$，∴ $\overline{EN}=\frac{a^2+c^2}{2a}$

(5)$\overleftrightarrow{A'B'}$方程式可由$\overleftrightarrow{AB}$向左平移$\overline{FL}$長而得，即$\overleftrightarrow{A'B'}$方程式為

$\mathrm{a}\left(\mathrm{x}+\frac{a^2+b^2}{2a}\right)+by=ab$ 推得 $ax+by=-\frac{a^2}{2}+ab-\frac{b^2}{2}$

(6)$\overleftrightarrow{B'C'}$方程式可由$\overleftrightarrow{BC}$向上平移$\overline{DG}$長而得，即$\overleftrightarrow{B'C'}$方程式為 $\mathrm{y}=\frac{b-c}{2}$

(7)$\overleftrightarrow{A'C'}$方程式可由$\overleftrightarrow{AC}$向右平移$\overline{EN}$長而得，即$\overleftrightarrow{A'C'}$方程式為

$$a\left(x-\frac{a^2+c^2}{2a}\right)+cy=ac \text{ 推得 } ax+cy=\frac{a^2}{2}+ac+\frac{c^2}{2}$$

(8)現在可以求 A'、B'、C'

由 $\begin{cases} ax+by=-\frac{a^2}{2}+ab-\frac{b^2}{2} \\ y=\frac{b-c}{2} \end{cases}$ 解得 $B'(\frac{-a^2+2ab-2b^2+bc}{2a},\frac{b-c}{2})$

由 $\begin{cases} ax+cy=\frac{a^2}{2}+ac+\frac{c^2}{2} \\ y=\frac{b-c}{2} \end{cases}$ 解得 $C'(\frac{a^2+2ac+2c^2-bc}{2a},\frac{b-c}{2})$

(9)故$\overline{B'C'}=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a+c)^2}{2a}$，$\therefore \overline{B'C'}:\overline{BC}=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a+c)^2}{2ab-2ac}$

我們求完任意△以原△邊長的 1 倍為直徑往內作半圓的切線△與原△的對應邊長比值後，嘗試將半圓直徑擴展為原△邊長的 n 倍，求出其切線△與原△對應邊長的比值公式，敘述如下：

已知：在坐標平面，A(0,a)、B(b,0)、C(c,0)，分別以△n 倍的邊長為直徑往內作半圓，P、Q、R 分別為其圓心，過 G、H、I 作三切線，兩兩相交於 A'、B'、C'。

試求：$\overline{B'C'}:\overline{BC}$的比值

解：仿照上文中 1 倍的解法方式，可求得在半圓直徑倍數為 n 倍時

$\overline{B'C'}:\overline{BC}$的比值為$\frac{na^2+nb^2+nc^2-ab-nbc+ac}{ab-ac}$----------②

(三)說明：

1. 在上文的①、②式中，若以 n 倍半圓直徑為 x 軸，對應邊長比值為 y 軸放在座標平面上，則圖形都是一條斜率為正$(a^2+b^2+c^2-bc)$的直線，印證了之前採用特殊角計算的比值圖。
2. 在其他的圓心角作圖時，半圓向外的比值圖還是呈直線形，但半圓向內則為 NIKE 狀的折線圖。
3. 對於任意△，利用座標平面，採用圓心角 90°，如上文的活化△的邊的系統，由上文的①或②式，都可畫出指定的相似圖。

陸、 未來展望

一、 未來希望利用三角函數建立一個完整的方程式表，方便使用。

柒、 結論

一、 順時針或逆時針延長△的三邊，向外或向內置放同比例直徑的半圓弧並在各半圓上依順時針或逆時針方向取相等的圓心角，並畫出切線，則此三切線圍成的△必與原△相似，這系統不同於課本中以相似中心作圖的方法。

二、 在半圓弧和圓心角都逆時針置放的系統中，半圓弧向外操作得到的相似△，

放大圖可無限放大，但縮小圖依不同圓心角各有其下限。然而半圓弧向內操作得到的相似△，放大圖可無限大，縮小圖可無限小。

三、 在半圓弧和圓心角都是逆時針置放的系統中，設 x 表半圓直徑倍數，y 表切線△與原△對應邊長比值，則各圓心角對應的比值方程式為

(1) 半圓弧向外置放

圓心角	30	45	60	90
方程式	$y=\frac{(4\sqrt{3}-6)}{3}x+\frac{5}{2}$	$y=(\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3})x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$y=\frac{4\sqrt{3}x+7\sqrt{3}}{6}$	$y=\frac{4}{3}\sqrt{3}x+1$

(2) 半圓弧向內置放

圓心角	30	45	60	90
方程式(1)	$y=\left(-2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)x+2.5$	$y=(-\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3})x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$y=-2\sqrt{3}x+\frac{7\sqrt{3}}{6}$	$y=\frac{-4\sqrt{3}x}{3}+1$
(2)	$y=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}+2\right)x-2.5$	$y=(\frac{4\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{6}}{3})x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$y=2\sqrt{3}x-\frac{7\sqrt{3}}{6}$	$y=\frac{4\sqrt{3}x}{3}-1$

(1)是前段、(2)是後段，這些方程式可讓我們計算操作指定倍數大小相似△

四、 在半圓弧向內置放的系統中，像 NIKE 折線狀的比值圖轉折點列如下表

	30	45	60	90
轉折倍數點	$(\frac{10\sqrt{3}-15}{4},0)$	$(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+4\sqrt{2}-4}{4},0)$	$(\frac{7}{12},0)$	$(\frac{\sqrt{3}}{4},0)$

當半圓直徑倍數是該值時，切線△面積是 0，三切線共點，可稱為邊長比值的轉折點。而在半圓弧向外置放的系統中就沒有這些轉折點。

五、 在等圓心角下，半圓弧向外和向內的面積差與半圓直徑倍數有特殊的關係

(1) 圓心角=90°時，兩者成線性正比關係

(2) 圓心角≠90°時，兩者成拋物線關係，拋物線開口向下，各有面積差最大值。又在拋物線與 x 軸的交點處(非原點)，面積差為 0，兩△全等。

六、 在兩段式操作(先 a 倍再 b 倍)和一次到位操作(直接 c 倍)的比較表中，在 c 為定值時(例如$2\sqrt{3}$)的狀態下，a 和 b 成雙曲線反比關係。

七、 將半圓弧向外，逆逆置放的任意△的三頂點分別放在直角坐標的兩軸上，當圓心角是 90°時，半圓直徑倍數和對應邊長比值成線型函數關係，利用這關係式可畫出指定倍數的任意△的相似形。

捌、 參考資料

一、 黃家禮 幾何明珠 一版 台北市信義區 3 段 147 巷 15 弄 5-1 號 7 樓 九章出版社 2001 年 10 月

二、 考克塞特・格雷策 初版 新竹市建新路 22 號 幾何學的新探索 凡異出版社 2002 年 8 月

三、 國中課本第 2 冊第一章二元一次聯立方程式、第 3 冊第 2 章畢氏定理 翰林出版社

【評語】030404

在△的三邊向外或向內作圖，並固定切點角度，從而考慮其圖形的外切三角形的性質。想法雖然簡單，但可精確求出外切三角形的面積。建議可考慮二類三角形的面積差距，並用向量的工具處理，應可得出更簡潔的數學結果。