中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳創意獎

030403

正、負則連分數之性質研究及應用

學校名稱：新北市立文山國民中學

作者：	指導老師：
國二 朱友祈	蕭偉智

關鍵詞：連分數、漸近分數、天文曆法

正、負則連分數之性質研究及應用

摘要

相較正則連分數，本文探討較少人研究的負則連分數，研究結果有：（1）負則漸近分數與正則漸近分數性質相似，具收斂性（單側收斂）；（2）利用矩陣列運算可同步求出正、負則連分數及其漸近分數，本文運用此方法作出「Excel 連分數漸近分數計算器」；（3）相較正則連分數，負則連分數及其倒數表示型態截然不同，本文加入負則連分數及其倒數後，可求得所有「最佳有理數逼近」；（4）關於連分數的天文曆法應用：在「閏月週期」，負則漸近分數比正則精準，本文提出實用的「27 年 10 閏」規則；著名東西方 20 個「日食週期」中，有 19 個可用正、負則連分數估算，其中 5 個僅能以負則漸近分數估算；「金星凌日週期」亦可用正、負則漸近分數估算。

壹、研究動機

林聰源（1978）〈認識連分數〉一文介紹了正則連分數及在曆法週期上的應用，這篇文章引起了我的興趣，形式看似簡單的分數在居然具有巧妙性質且與生活息息相關。2011 年，《傳播》又刊出一篇〈什麼是負正則連分數？〉（張家麟、鄭曉暉，2011），該文為國內首次介紹「負則連分數」之學術著作，該研究證明負則連分數與正則連分數表達式性質如出一轍，然而他並沒有針對負則連分數之漸近分數的應用做討論。因此，我想進一步研究負則連分數。

貳、名詞定義

一、連分數：定義及形式如下，其中，$a_i, b_i \in Z$。稱之為連分數

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \dots}}} \qquad \text{式(1)}$$

$$+ \frac{b_i}{a_i + \dots}$$

二、正則連分數（regular continued fraction, Reg）

在式（1）中，

(a) $\forall i$，有 $a_i \in Z$ 且 $b_i = 1$ 及

(b) $a_i > 0$ 對 $i = 1, 2, 3, \dots$ 成立時

稱這個連分數為「正則連分數（regular continued fraction）」或簡單連分數（simple continued fraction）。形式如下：

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} \qquad \text{式(2)}$$

$$+ \frac{1}{a_i + \dots}$$

正則連分數也可以表示成 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ ，本文以中括號[ ]來表示正則連分數。如：

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$$

$$\frac{22}{7} = [3, 7]$$

三、負則連分數（negative regular continued fraction, Neg）

式（1）中，

$(a)\ \forall\, i$ ，有 $a_i \in \mathrm{Z}$ 且 $b_i = -1$ 及

$(b)\ \ a_i > 0$ 對 $i = 1, 2, 3, \ldots$ 成立時

稱這個連分數為「負則連分數（negative regular continued fraction）」。形式如下：

$$a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \ldots}}} \qquad \text{式(3)}$$

$$- \cfrac{1}{a_i - \ldots}$$

負則連分數也可以表示成 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ ，本文以小括號(　　)表示負則連分數。如：

$$\frac{22}{7} = 4 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2}}}}}$$

$$\frac{22}{7} = (4, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

四、正則漸近分數與負則漸近分數

對任意一個有理數 Q，恆有 $Q = [c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k, \ldots, c_n] = (d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k, \ldots, d_i)$ 。

本文定義

$[c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k]$ 為 Q 的第 k 個正則漸近分數

$(d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k)$ 為 Q 的第 k 個負則漸近分數

例如：

$$\frac{22}{7} = [3, 7] = (4, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

(a) $3=3$ 是$\frac{22}{7}$的「第 0 個」正則漸近分數

(b) $4,2,2=4-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{10}{3}$ 是$\frac{22}{7}$的「第 2 個」負則漸近分數

五、正則漸近分數誤差、負則漸近分數誤差

若有理數$Q=c_0,c_1,c_2,c_3,...,c_k,...,c_n=d_0,d_1,d_2,d_3,...,d_k,...,d_i$ 且 RegQ $E_k=\left|Q-c_0,c_1,...,c_k\right|$ 表示 Q 與其第 k 個正則漸近分數的距離，將「RegQ E_k」稱為「正則漸近分數誤差」；NegQ $E_k=\left|Q-d_0,d_1,...,d_k\right|$表示 Q 與其第 k 個負則漸近分數的距離，將「NegQ E_k」稱為「負則漸近分數誤差」。

六、連分數與其倒數表示法型態相同

若$\frac{p}{q}=a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_n$，若且唯若$\frac{q}{p}=0,a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_n$，或$\frac{p}{q}=a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_n$，若且唯若$\frac{q}{p}=1,a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_n$，其中 $p>q$，定義為$\frac{p}{q}$與$\frac{q}{p}$表示法型態相同。

七、地板符號$\lfloor\ \rfloor$與天花板符號$\lceil\ \rceil$

本文定義$\lfloor x\rfloor\in Z$ 且有$\lfloor x\rfloor\le x<\lfloor x\rfloor+1$，即不大於 x 的最大整數。而$\lceil x\rceil\in Z$ 且有$\lceil x\rceil-1<x\le\lceil x\rceil$，即不小於 x 的最小整數。例如：$\lfloor-3.14\rfloor=-4$、$\lceil-3.14\rceil=-3$

參、文獻探討

一、正則連分數及其漸近分數之應用

關於連分數研究，柯智偉、王裕文、王偲帆（2003）以幾何方式來定義連分數，透過法雷序列（Farey）圖形將實數化成連分數型態，並求得其正則及負則漸近分數，但是沒有將其做曆法應用比較。另外，廖婉妤、黃靖涵、張博睿（2013）以正則連分數分析閏年、閏月的規則，並統計公曆農曆生日重合之比例。柯智偉等人的研究，主要是分開處理正、負則連分數之漸近分數，並沒有針對基本性質進行研究且進行比較，而廖婉妤等人的研究僅限於正則連分數。

二、負則連分數之構造及型態

張家麟、鄭曉暉（2011）簡介負則連分數的定義與構成，並證明「有理數若且唯若它的負則連分數表示是有限的；無理數若且唯若它的負則連分數表示是無限的」，但是沒有討論負則連分數在曆法上的應用。另外，林聰源（1978）證明了正則連分數的基本性質，並且在最後提出 5 個正則應用例題；曲安京（1995）則討論唐宋曆法中的交食周期與連分數之關聯性，但是他們僅以正則連分數作說明。

綜合前人研究，負則連分數的基本性質有待研究，另外正、負則連分數的漸近分數也未被討論，兩者在天文曆法上的應用更沒有被研究比較，因此，我計畫研究：**（1）負則連分數的基本性質；（2）正、負則連分數的漸近分數誤差比較；（3）正、負則連分數的漸近分數在天文曆法中的應用。**

肆、研究目的

一、正則連分數（Reg）構成及漸近分數基本性質及收斂性研究
二、負則連分數（Neg）構成及漸近分數基本性質及收斂性研究
三、正、負則連分數及其漸近分數的「矩陣同步求解法」
四、正、負則連分數之漸近分數誤差性質研究
五、正、負則連分數在天文曆法上的應用

伍、研究工具

紙、筆、電腦、Excel 2010

陸、研究結果

一、預備知識

（一）正則連分數的構作

對任一實數 P 可由下列方法進行 Reg 構作

1.1 當 $i=0$，取 $P_0=P$

1.2 取 $a_i=\lfloor P_i \rfloor$

1.3 若 $P_i \in Z$，則構作停止，令 $a_i=P_i$

1.4 若 $P_i \notin Z$，則構作 $P_{i+1}=\dfrac{1}{P_i-a_i}$

1.5 重複 1.2 到 1.4 步驟

（二）負則連分數的構作

對任一實數 Q 可由下列方法進行 Neg 構作

2.1 當 $i=0$，取 $Q_0=Q$

2.2 取 $a_i=\lceil Q_i \rceil$

2.3 若 $Q_i \in Z$，則構作停止，令 $a_i=Q_i$

2.4 若 $Q_i \notin Z$，則構作 $Q_{i+1}=\dfrac{1}{Q_i-a_i}$

2.5 重複 2.2 到 2.4 步驟

二、正則漸近分數的基本性質及收斂性研究（此部分為前人研究）

關於正則漸近分數的基本性質及收斂性研究證明為林聰源（1978）〈認識連分數〉之文章

內容，如下之性質 1 到性質 6。

（一）正則連分數表示法

性質 1 若任一實數 $Q=\ a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_m$ ，第 k 個正則漸近分數為 $\frac{p_k}{q_k}$ ，則有

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \\ p_0 = a_0,\ \ p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_0 = 1,\quad q_1 = a_1 \end{cases} \text{其中} k \geq 2$$

證明.

以數學歸納法證明

1)當 k=2 時

依據定義，Q 的第 2 個漸近分數為

$$a_0,a_1,a_2\ = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_2 a_1 + 1}{a_2}} = \frac{a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1}$$

此時， $p_2 = a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0 = a_2 p_1 + p_0$ 、 $q_2 = a_2 a_1 + 1 = a_2 q_1 + q_0$ ，原式成立

2) 令 k= n 時，原式成立，即 $\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \\ p_0 = a_0,\ \ p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_0 = 1,\quad q_1 = a_1 \end{cases}$

3) 當 k= n+1 時

$$\left[a_0,a_1,a_2,a_3...a_n,a_{n+1}\right]$$

$$= \left[a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_{n-1},a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right]$$

$$= \left[a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_{n-1},\frac{a_n a_{n+1} + 1}{a_{n+1}}\right]$$

$$= \frac{\left(\frac{a_n a_{n+1} + 1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(\frac{a_n a_{n+1} + 1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{a_n a_{n+1} + 1\ \ p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2}}{a_n a_{n+1} + 1\ \ q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}}$$

$$= \frac{a_{n+1}\ \ a_n p_{n-1} + p_{n-2}\ \ + p_{n-1}}{a_{n+1}\ \ a_n q_{n-1} + q_{n-2}\ \ + q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$ ，原式成立。

□

（二）正則連分數漸近分數收斂性

性質 2 $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = -1^{k-1}$, 其中 $k \geq 1$

證明.

以數學歸納法證明

1) 當 k= 1 時

依據性質 1 有

$p_1 q_0 - p_0 q_1 = a_0 a_1 + 1 \times 1 - a_0 a_1 = 1 = (-1)^0$ ，原式成立。

2) 令 k= n 時，原式成立，即 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = -1^{n-1}$

3) 當 k= n+1 時

依據性質 1 有

$$
\begin{aligned}
& p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} \\
&= a_{n+1} p_n + p_{n-1} \ q_n - p_n \ a_{n+1} q_n + q_{n-1} \\
&= a_{n+1} p_n q_n + p_{n-1} q_n - a_{n+1} p_n q_n - p_n q_{n-1} \\
&= - \ p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n \\
&= - \ -1^{n-1} \\
&= \ -1^{n}
\end{aligned}
$$

原式成立。

□

性質 3 若任一實數 $Q = a_0, a_1, a_2, a_3 ..., a_m$ ，第 k 個正則漸近分數為 $\frac{p_k}{q_k}$ ，則 $(p_k, q_k) = 1$

證明.

令 $(p_k, q_k) = k$ ，依據性質 2 得 $k \mid p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k \Rightarrow k \mid 1$

□

性質 4 $p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = -1^{k} a_k$, 其中 $k \geq 2$

證明.

以數學歸納法證明

1) 當 k= 2 時

依據性質 1 有

$p_2 q_0 - p_0 q_2 = a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0 \ \times 1 - a_0 \times \ a_2 a_1 + 1 \ = a_2$ ，原式成立。

2) 令 k= n 時，原式成立，即 $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = -1^{n} a_n$

3) 當 k= n+1 時

依據性質 1 及性質 2 有

$p_{n+1}q_{n-1}-p_{n-1}q_{n+1}$

$= a_{n+1}p_n+p_{n-1}\ q_{n-1}-p_{n-1}\ a_{n+1}q_n+q_{n-1}$

$=a_{n+1}\ p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n$

$= -1^{n-1}a_{n+1}$

原式成立

□

性質 5 若任一實數 $Q=a_0,a_1,a_2,a_3...,a_n$ ，第 k 個正則漸近分數為 $\frac{p_k}{q_k}$ ，則有

$$\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=-1^{k-1}\frac{1}{q_kq_{k-1}}，其中\ k\geq 1$$

證明.

由性質 2 有 $p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=-1^{k-1}$ ，同除以 q_kq_{k-1} 即得

□

性質 6 若任一實數 $Q=a_0,a_1,a_2,a_3...,a_n$ ，第 k 個正則漸近分數為 $\frac{p_k}{q_k}$ ，則有

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}>\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\ ,\ \frac{p_{2n}}{q_{2n}}>\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}\ ，其中\ n\geq 1$$

證明.

由性質 4 有 $p_kq_{k-2}-p_{k-2}q_k=-1^{k}a_k$ ，同除以 q_kq_{k-2} 得

$$\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}=-1^{k}\frac{a_k}{q_kq_{k-2}}\ ，其中\ k\geq 2$$

當 $k=2n+1$ 時，右式為負，則 $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}>\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$

具有嚴格遞減性

當 $k=2n+2$ 時，右式為正，則 $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}>\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}$

具有嚴格遞增性

□

接下來我仿照林聰源的證明方法處理負則連分數之性質，如下：

三、負則漸近分數的基本性質及收斂性研究（本文研究）

（一）負則連分數表示法

性質 7 若任一實數 $Q=\ a_0,a_1,a_2,a_3...,a_m$ ，第 k 個負則漸近分數為 $\frac{p_k}{q_k}$ ，則有

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} - p_{k-2} \\ q_k = a_k q_{k-1} - q_{k-2} \\ p_0 = a_0,\ \ p_1 = a_0 a_1 - 1 \\ q_0 = 1,\quad q_1 = a_1 \end{cases} \text{其中} k \geq 2$$

證明.

以數學歸納法證明

1)當 k=2 時

依據定義，Q 的第 2 個漸近分數為

$$a_0,a_1,a_2\ = a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2}} = a_0 - \frac{1}{\frac{a_2 a_1 - 1}{a_2}} = \frac{a_2(a_0 a_1 - 1) - a_0}{a_2 a_1 - 1}$$

此時， $p_2 = a_2(a_0 a_1 - 1) - a_0 = a_2 p_1 - p_0$ 、 $q_2 = a_2 a_1 - 1 = a_2 q_1 - q_0$

原式成立

2) 令 k= n 時，原式成立，即 $\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} - p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} - q_{n-2} \\ p_0 = a_0,\ \ p_1 = a_0 a_1 - 1 \\ q_0 = 1,\quad q_1 = a_1 \end{cases}$

3) 當 k= n+1 時

$$a_0,a_1,a_2,a_3...a_n,a_{n+1}$$

$$= \left(a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_{n-1},a_n - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$= \left(a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_{n-1},\frac{a_n a_{n+1} - 1}{a_{n+1}}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{a_n a_{n+1} - 1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} - p_{n-2}}{\left(\frac{a_n a_{n+1} - 1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} - q_{n-2}} = \frac{a_n a_{n+1} - 1\ \ p_{n-1} - a_{n+1} p_{n-2}}{a_n a_{n+1} - 1\ \ q_{n-1} - a_{n+1} q_{n-2}}$$

$$= \frac{a_{n+1}\ \ a_n p_{n-1} - p_{n-2}\ \ - p_{n-1}}{a_{n+1}\ \ a_n q_{n-1} - q_{n-2}\ \ - q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} p_n - p_{n-1}}{a_{n+1} q_n - q_{n-1}}$$ ，原式成立

□

（二）負則連分數漸近分數收斂性

性質 8 $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = -1$, 其中 $k \geq 1$

證明.

以數學歸納法證明

1) 當 k= 1 時

依據性質 7 有

$p_1 q_0 - p_0 q_1 = a_0 a_1 - 1 \times 1 - a_0 a_1 = -1$，原式成立。

2) 令 k= n 時，原式成立，即 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = -1$

3) 當 k= n+1 時

依據性質 7 有

$$
\begin{aligned}
& p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} \\
&= a_{n+1} p_n - p_{n-1} \ q_n - p_n \ a_{n+1} q_n - q_{n-1} \\
&= a_{n+1} p_n q_n - p_{n-1} q_n - a_{n+1} p_n q_n + p_n q_{n-1} \\
&= p_n q_{n-1} - p_{n-1} q \\
&= -1
\end{aligned}
$$

原式成立

□

性質 9 若任一實數 $Q = a_0, a_1, a_2, a_3 ..., a_m$ ，第 k 個正則漸近分數為 $\frac{p_k}{q_k}$ ，則 $(p_k, q_k) = 1$

證明.

令 $(p_k, q_k) = k$ ，依據性質 8 得 $k \mid p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k \Rightarrow k \mid 1$

□

性質 10 若任一實數 $Q = a_0, a_1, a_2, a_3 ..., a_n$ ，第 k 個負則漸近分數為 $\frac{p_k}{q_k}$ ，則有

$\frac{p_k}{q_k} < \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ ，其中 $k \geq 1$

證明.

由性質 8 有 $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = -1$，同除以 $q_k q_{k-1}$ 得

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{-1}{q_k q_{k-1}}, \text{ 其中 } k \geq 1$$

故

$$\frac{p_k}{q_k} < \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \text{ ，其中 } k \geq 1$$

具有嚴格遞減性

□

四、正、負則漸近分數的收斂性討論（本文研究）

（一）正則漸近分數收斂性

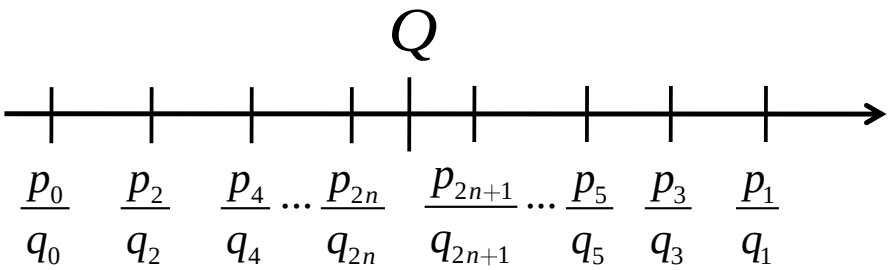
由定義與性質 5 與性質 6 可得

(1)任一實數 Q 的第 0 個正則漸近分數 $\frac{p_0}{q_0}$ 比 Q 小

(2)第 1 個正則漸近分數 $\frac{p_1}{q_1}$ 比 Q 大且 $\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_0}{q_0}$

(3)第 2 個正則漸近分數比 Q 小且 $\frac{p_2}{q_2} > \frac{p_0}{q_0}$ ，以此類推

如下圖，正則漸近分數具有收斂性且左右逼近



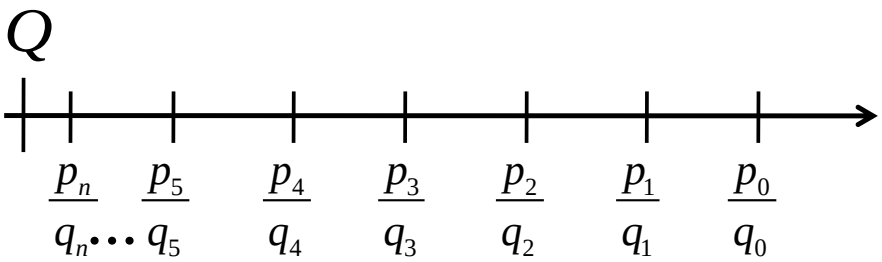
（二）負則漸近分數收斂性

由定義與性質 10 可得，

(1)任一實數 Q 的第 0 個負則漸近分數 $\frac{p_0}{q_0}$ 比 Q 大

(2)第 n 個負則漸近分數 $\frac{p_n}{q_n}$ 比 Q 大且 $\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$

如下圖，負則漸近分數具有收斂性且單側（由右向左）逼近



五、有理數之正、負則連分數的漸進分數之求法（本文研究）

依據正、負則連分數的構成定義與歐基理得輾轉相除法一致，以下用 $\frac{60}{47}$ 為例，即得 $\frac{60}{47} = 1, 3, 1, 1, 1, 1, 2$ 。其中，負則連分數之輾轉相除法過程商數皆取其絕對值即可得 $\frac{60}{47} = 2, 2, 2, 3, 3, 3$ 。

（一）輾轉相除法求正則連分數

步驟一：

$$\frac{60}{47}=1+\frac{13}{47}=1+\frac{1}{\frac{47}{13}}$$

60		47
47	1	
13		

步驟二：

$$\frac{60}{47}=1+\frac{1}{\frac{47}{13}}=1+\frac{1}{3+\frac{8}{13}}=1+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{13}{8}}}$$

60		47
47	1	39
13	3	8

…　　…

步驟七：

$$\frac{60}{47}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}$$

60		47
47	1	39
13	3	8
8	1	5
5	1	3
3	1	2
2	1	1
2	2	
0		

（二）輾轉相除法求負則連分數

步驟一：

$$\frac{60}{47}=2-\frac{34}{47}=2-\frac{1}{\frac{47}{34}}$$

60		47
94	2	
-34		

步驟二：

$$\frac{60}{47}=2-\frac{1}{\frac{47}{34}}=2-\frac{1}{2-\frac{21}{34}}=2-\frac{1}{2-\frac{1}{\frac{34}{21}}}$$

60		47
94	2	68
-34	-2	-21

…　　…

步驟六：

$$\frac{60}{47}=2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3}}}}}$$

60		47
94	2	68
-34	-2	-21
-42	2	-24
8	-3	3
9	3	3
-1	-3	0

透過輾轉相除法可得有理數之正、負則連分數，但是其漸近分數卻需要重新化簡求得，過程繁瑣。因此，考慮性質 1 與性質 7，先構造 1 個 2×3 的特殊矩陣，利用重複上下「列運算」之方式，則可同步求出其漸近分數（此方法參考黃順發、高吉全、胡勇軍（2006）的文章，但他們只針對正則連分數，本文延伸至負則連分數）。

性質 11　一有理數 $\frac{s}{r}$ 的第 k 個正則漸進分數為 $\frac{p_k}{q_k}$，且 $\frac{s}{r}=[a_0,a_1,a_2,...,a_n]$，$n,\ k=0,1,2,...$。

若 2×3 矩陣經由連續列運算直至第 1 行的元素有 0 停止，則可將 $\frac{s}{r}$ 化成正則連分數及同步求得其漸近分數 $\frac{p_0}{q_0}$、$\frac{p_1}{q_1}$、$\frac{p_2}{q_2}$、...、$\frac{p_k}{q_k}$、...、$\frac{p_n}{q_n}$：

$$\begin{vmatrix} s & 1 & 0 \\ r & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-a_0)} \begin{vmatrix} s_0 & q_0 & -p_0 \\ r & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{21}(-a_1)} \begin{vmatrix} s_0 & q_0 & -p_0 \\ r_1 & -q_1 & p_1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-a_2)} \begin{vmatrix} s_2 & q_2 & -p_2 \\ r_1 & -q_1 & p_1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{21}(-a_3)} ... \xrightarrow{R_{12}(-a_{2k})} \begin{vmatrix} s_{2k} & q_{2k} & -p_{2k} \\ r_{2k-1} & -q_{2k-1} & p_{2k-1} \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{21}(-a_{2k+1})} \begin{vmatrix} s_{2k} & q_{2k} & -p_{2k} \\ r_{2k+1} & -q_{2k+1} & p_{2k+1} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{12}(-a_{2k+2})} ...$$

證明.

顯然此 2×3 矩陣的列運算過程與性質 1 相同，故得證。

性質 12　一有理數 $\frac{j}{i}$ 的第 k 個負則漸進分數為 $\frac{p_k}{q_k}$，且 $\frac{j}{i}=(b_0,b_2,b_3,...,b_n)$，$n=0,1,2,...$，$k\in N$。若 2×3 矩陣經由連續列運算直至第 1 行的元素出現 0 停止，則可將 $\frac{j}{i}$ 化成負則連分數及同步求得其漸近分數 $\frac{p_0}{q_0}$、$\frac{p_1}{q_1}$、$\frac{p_2}{q_2}$、...、$\frac{p_k}{q_k}$、...、$\frac{p_n}{q_n}$：

$$\begin{vmatrix} j & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-b_0)} \begin{vmatrix} j_0 & q_0 & -p_0 \\ i & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{21}(b_1)} \begin{vmatrix} j_0 & q_0 & -p_0 \\ i_1 & q_1 & -p_1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-b_2)} \begin{vmatrix} j_2 & q_2 & -p_2 \\ i_1 & -q_1 & p_1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{21}(b_3)} \begin{vmatrix} j_2 & -q_2 & p_2 \\ i_3 & -q_3 & p_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-b_4)} \begin{vmatrix} j_4 & -q_4 & p_4 \\ i_3 & q_3 & -p_3 \end{vmatrix} ... \xrightarrow{R_{21}(-b_{4k})} \begin{vmatrix} j_{4k} & -q_{4k} & p_{4k} \\ i_{4k-1} & q_{4k-1} & -p_{4k-1} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{12}(b_{4k+1})} \begin{vmatrix} j_{4k} & q_{4k} & -p_{4k} \\ i_{4k+1} & q_{4k+1} & -p_{4k+1} \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{21}(-b_{4k+2})} \begin{vmatrix} j_{4k+2} & q_{4k+2} & -p_{4k+2} \\ i_{4k+1} & -q_{4k+1} & p_{4k+1} \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{21}(b_{4k+3})}$$

$$\begin{vmatrix} j_{4k+2} & -q_{4k+2} & p_{4k+2} \\ i_{4k+3} & -q_{4k+3} & p_{4k+3} \end{vmatrix} ...$$

證明.

顯然此 2×3 矩陣的列運算過程與性質 7 相同，故得證。

□

例如：以矩陣同步求 $\frac{60}{47}$ 之正、負則連分數及其漸近分數

正則連分數

$$\begin{vmatrix} 60 & 1 & 0 \\ 47 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-1)} \begin{vmatrix} 13 & 1 & -1 \\ 47 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{21}(-3)} \begin{vmatrix} 13 & 1 & -1 \\ 8 & -3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-1)} \begin{vmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 8 & -3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{21}(-1)}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-1)} \begin{vmatrix} 2 & 11 & -14 \\ 3 & -7 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{21}(-1)} \begin{vmatrix} 2 & 11 & -14 \\ 1 & -18 & 23 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-2)} \begin{vmatrix} 0 & 47 & -60 \\ 1 & -18 & 23 \end{vmatrix}$$

由性質 11 可得

$$\frac{60}{47} = 1, 3, 1, 1, 1, 1, 2$$

其正則漸近分數為 1、$\frac{4}{3}$、$\frac{5}{4}$、$\frac{9}{7}$、$\frac{14}{11}$、$\frac{23}{18}$、$\frac{60}{47}$

負則連分數

$$\begin{vmatrix} 60 & 1 & 0 \\ 47 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-2)} \begin{vmatrix} -34 & 1 & -2 \\ 47 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{21}(2)} \begin{vmatrix} -34 & 1 & -2 \\ -21 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-2)} \begin{vmatrix} 8 & -3 & 4 \\ -21 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{21}(-3)}$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 3 & -7 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{12}(3)} \begin{vmatrix} -1 & 18 & -23 \\ 3 & -7 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_{21}(-3)} \begin{vmatrix} -1 & 18 & -23 \\ 0 & 47 & -60 \end{vmatrix}$$

由性質 12 可得

$$\frac{60}{47} = 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3$$

其負則漸近分數為 2、$\frac{3}{2}$、$\frac{4}{3}$、$\frac{9}{7}$、$\frac{23}{18}$、$\frac{60}{47}$

六、正、負則連分數之漸近分數誤差的比較（本文研究）

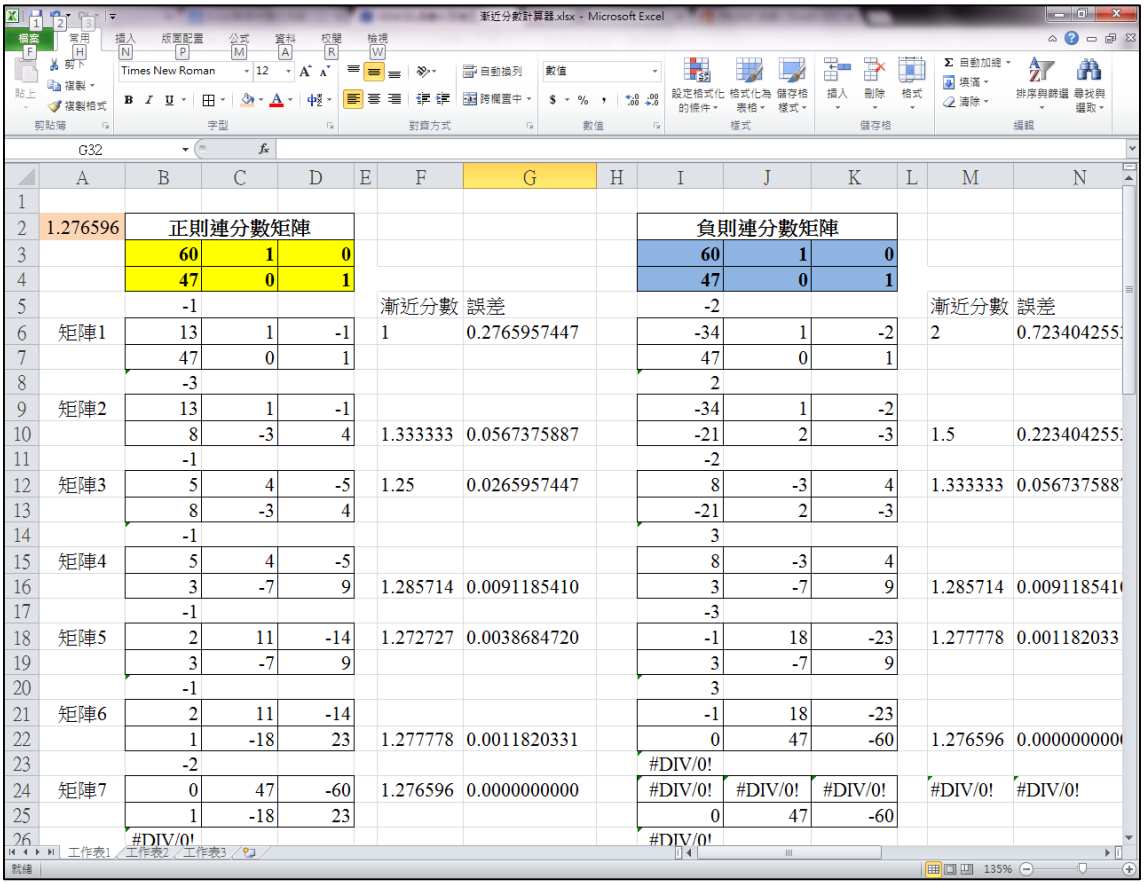
正則連分數的漸近分數有收斂性且左右逼近的特性，負則連分數的漸近分數依舊具備有收斂性，但是是從右向左逼近。我好奇「**相同分數 Q 化成正則連分數與負則連分數後，兩者各自的漸近分數與 Q 的距離（本文稱為誤差）有無規律？何者比較精準？**」

依據性質 11 與性質 12 可知，以簡單的矩陣列運算可以同步求出連分數與漸近分數，所以我先以 Excel 內建的「RoundDown 函數（無條件捨去）、RoundUp 函數（無條件進位）」設計一個簡易的計算器（如下圖）：

（1）以矩陣計算正、負則連分數

（2）比較漸近分數與原有理數 Q 的差異值

（3）將正、負則誤差製作折線圖做比較



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	1.276596	正則連分數矩陣							負則連分數矩陣					
3		60	1	0					60	1	0			
4		47	0	1					47	0	1			
5		-1				漸近分數	誤差		-2				漸近分數	誤差
6	矩陣1	13	1	-1		1	0.2765957447		-34	1	-2		2	0.723404255
7		47	0	1					47	0	1			
8		-3							2					
9	矩陣2	13	1	-1					-34	1	-2			
10		8	-3	4		1.333333	0.0567375887		-21	2	-3		1.5	0.223404255
11		-1							-2					
12	矩陣3	5	4	-5		1.25	0.0265957447		8	-3	4		1.333333	0.056737588
13		8	-3	4					-21	2	-3			
14		-1							3					
15	矩陣4	5	4	-5					8	-3	4			
16		3	-7	9		1.285714	0.0091185410		3	-7	9		1.285714	0.009118541
17		-1							-3					
18	矩陣5	2	11	-14		1.272727	0.0038684720		-1	18	-23		1.277778	0.001182033
19		3	-7	9					3	-7	9			
20		-1							3					
21	矩陣6	2	11	-14					-1	18	-23			
22		1	-18	23		1.277778	0.0011820331		0	47	-60		1.276596	0.000000000
23		-2							#DIV/0!					
24	矩陣7	0	47	-60		1.276596	0.0000000000		#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!		#DIV/0!	#DIV/0!
25		1	-18	23					0	47	-60			
26		#DIV/0!							#DIV/0!					

針對上述問題，先做實例的觀察與猜想，我先用幾個有理數實驗觀察。

第 1 類　正則誤差恆小於負則誤差，$\frac{123}{100}$

考慮 $\frac{123}{100}$ 可得

$$\frac{123}{100} = 1, 4, 2, 1, 7 \ = \ 2, 2, 2, 2, 4, 8$$

正則漸近分數為 1、$\frac{5}{4}$、$\frac{11}{9}$、$\frac{16}{13}$、$\frac{123}{100}$；負則漸近分數為 2、$\frac{3}{2}$、$\frac{4}{3}$、$\frac{5}{4}$、$\frac{16}{13}$、$\frac{123}{100}$

項數	正則誤差	負則誤差	正-負
0	0.2300000000	0.7700000000	-0.5400000000
1	0.0200000000	0.2700000000	-0.2500000000
2	0.0077777778	0.1033333333	-0.0955555556
3	0.0007692308	0.0200000000	-0.0192307692
4	0.0000000000	0.0007692308	-0.0007692308
5	--	0.0000000000	--

第 2 類 正則誤差先小於負則誤差，之後負則誤差小於正則誤差，$\frac{139}{100}$

考慮$\frac{139}{100}$可得

$$\frac{139}{100} = 1, 2, 1, 1, 3, 2, 2 = 2, 3, 5, 2, 3$$

正則漸近分數為1、$\frac{3}{2}$、$\frac{4}{3}$、$\frac{7}{5}$、$\frac{25}{18}$、$\frac{57}{41}$、$\frac{139}{100}$；負則漸近分數為2、$\frac{3}{2}$、$\frac{7}{5}$、$\frac{32}{23}$、$\frac{57}{41}$、$\frac{139}{100}$

項數	正則誤差	負則誤差	正-負
0	0.3900000000	0.6100000000	**-0.2200000000**
1	0.1100000000	0.1100000000	0.0000000000
2	0.0566666667	0.0100000000	0.0466666667
3	0.0100000000	0.0013043478	0.0086956522
4	0.0011111111	0.0002439024	0.0008672087
5	0.0002439024	0.0000000000	0.0002439024
6	0.0000000000	--	--

第 3 類 負則誤差先小於正則誤差，之後正則誤差小於負則誤差，$\frac{177}{100}$

考慮$\frac{177}{100}$可得

$$\frac{177}{100} = 1, 1, 3, 2, 1, 7 = 2, 5, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2$$

正則漸近分數為1、2、$\frac{7}{4}$、$\frac{16}{9}$、$\frac{23}{13}$、$\frac{177}{100}$；

負則漸近分數為2、$\frac{9}{5}$、$\frac{16}{9}$、$\frac{39}{22}$、$\frac{62}{35}$、$\frac{85}{48}$、$\frac{108}{61}$、$\frac{131}{74}$、$\frac{154}{87}$、$\frac{177}{100}$

項數	正則誤差	負則誤差	正-負
0	0.7700000000	0.2300000000	0.5400000000
1	0.2300000000	0.0300000000	0.2000000000
2	0.0200000000	0.0077777778	0.0122222222
3	0.0077777778	0.0027272727	0.0050505051
4	0.0007692308	0.0014285714	**-0.0006593407**
5	0.0000000000	0.0008333333	**-0.0008333333**
6	--	0.0004918033	--

7	--	0.0002702703	--
8	--	0.0001149425	--
9	--	0.0000000000	--

第 4 類 負則誤差恆小於正則誤差，$\frac{197}{100}$

考慮$\frac{197}{100}$可得

$$\frac{197}{100} = 1, 1, 32, 3 = 2, 34, 2, 2$$

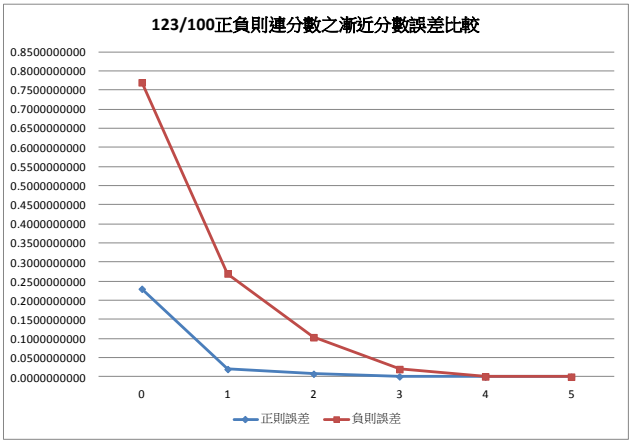
正則漸近分數為1、2、$\frac{65}{33}$、$\frac{197}{100}$；負則漸近分數為2、$\frac{67}{34}$、$\frac{132}{67}$、$\frac{197}{100}$

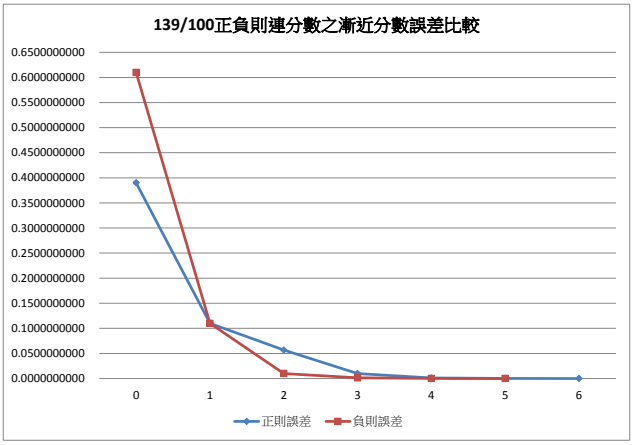
項數	正則誤差	負則誤差	正-負
0	0.9700000000	0.0300000000	0.9400000000
1	0.0300000000	0.0005882353	0.0294117647
2	0.0003030303	0.0001492537	0.0001537766
3	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

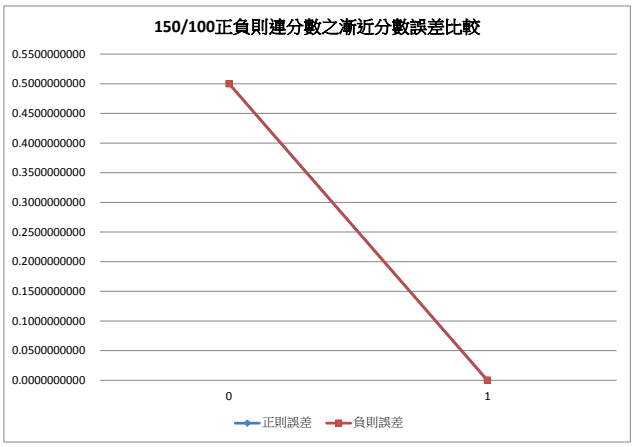
我將此五類連分數的誤差圖（下圖），從大到小排列，猜想可能的誤差大小規律：

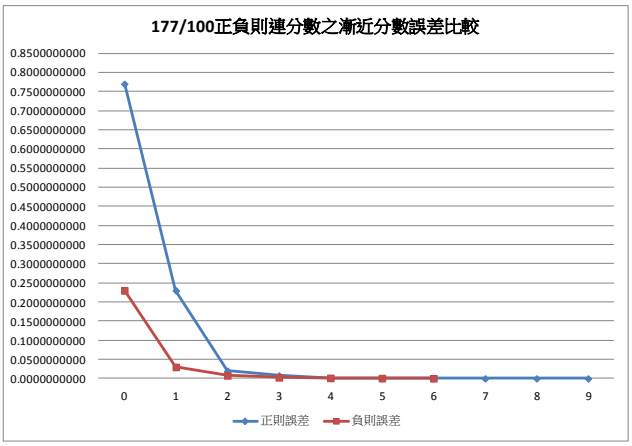
正則＜負則 或 正則＜負則 變 正則＞負則 → 正則＝負則

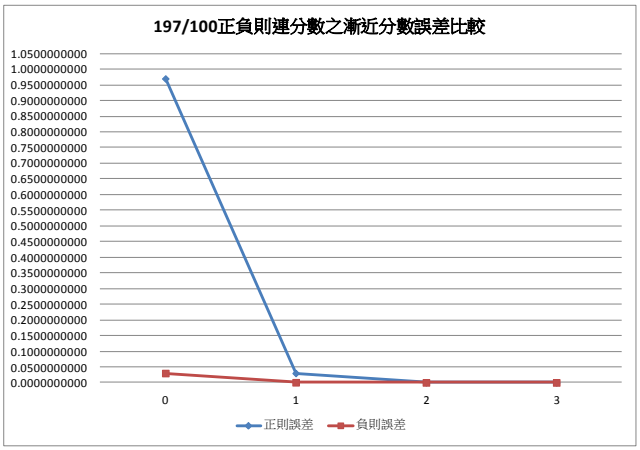
→ 正則＞負則 變 正則＜負則 或 正則＞負則











再進行更多的數據實驗（不考慮整數），下表誤差結果表示誤差較小的漸近分數。考慮以 7 為分母的分數，結果發現「$\frac{1}{7}$ 之正、負則漸近分數誤差」和「$\frac{8}{7}$ 之正、負則漸近分數誤差」兩者型態相同。

分數	誤差結果	分數	誤差結果
$\frac{1}{7}$	項數 / 正則誤差 / 負則誤差 0 / 0.1428571429 / 0.8571428571 1 / 0.0000000000 / 0.3571428571 2 / #DIV/0! / 0.1904761905 3 / #DIV/0! / 0.1071428571 4 / #DIV/0! / 0.0571428571 5 / #DIV/0! / 0.0238095238 6 / #DIV/0! / 0.0000000000	$\frac{8}{7}$	項數 / 正則誤差 / 負則誤差 0 / 0.1428571429 / 0.8571428571 1 / 0.0000000000 / 0.3571428571 2 / #DIV/0! / 0.1904761905 3 / #DIV/0! / 0.1071428571 4 / #DIV/0! / 0.0571428571 5 / #DIV/0! / 0.0238095238 6 / #DIV/0! / 0.0000000000
$\frac{2}{7}$	項數 / 正則誤差 / 負則誤差 0 / 0.2857142857 / 0.7142857143 1 / 0.0476190476 / 0.2142857143 2 / 0.0000000000 / 0.0476190476 3 / #DIV/0! / 0.0000000000	$\frac{9}{7}$	項數 / 正則誤差 / 負則誤差 0 / 0.2857142857 / 0.7142857143 1 / 0.0476190476 / 0.2142857143 2 / 0.0000000000 / 0.0476190476 3 / #DIV/0! / 0.0000000000
$\frac{3}{7}$	項數 / 正則誤差 / 負則誤差 0 / 0.4285714286 / 0.5714285714 1 / 0.0714285714 / 0.0714285714 2 / 0.0000000000 / 0.0000000000	$\frac{10}{7}$	項數 / 正則誤差 / 負則誤差 0 / 0.4285714286 / 0.5714285714 1 / 0.0714285714 / 0.0714285714 2 / 0.0000000000 / 0.0000000000

<table>
<tr>
<td>$\frac{4}{7}$</td>
<td>
<table>
<tr><td>項數</td><td>正則誤差</td><td>負則誤差</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0.5714285714</td><td>0.4285714286</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.4285714286</td><td>0.0952380952</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.0714285714</td><td>0.0285714286</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.0000000000</td><td>0.0000000000</td></tr>
</table>
</td>
<td>$\frac{11}{7}$</td>
<td>
<table>
<tr><td>項數</td><td>正則誤差</td><td>負則誤差</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0.5714285714</td><td>0.4285714286</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.4285714286</td><td>0.0952380952</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.0714285714</td><td>0.0285714286</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.0000000000</td><td>0.0000000000</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{5}{7}$</td>
<td>
<table>
<tr><td>項數</td><td>正則誤差</td><td>負則誤差</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0.7142857143</td><td>0.2857142857</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.2857142857</td><td>0.0357142857</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.0476190476</td><td>0.0000000000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.0000000000</td><td>#DIV/0!</td></tr>
</table>
</td>
<td>$\frac{12}{7}$</td>
<td>
<table>
<tr><td>項數</td><td>正則誤差</td><td>負則誤差</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0.7142857143</td><td>0.2857142857</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.2857142857</td><td>0.0357142857</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.0476190476</td><td>0.0000000000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.0000000000</td><td>#DIV/0!</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{6}{7}$</td>
<td>
<table>
<tr><td>項數</td><td>正則誤差</td><td>負則誤差</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0.8571428571</td><td>0.1428571429</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.1428571429</td><td>0.0000000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.0000000000</td><td>#DIV/0!</td></tr>
</table>
</td>
<td>$\frac{13}{7}$</td>
<td>
<table>
<tr><td>項數</td><td>正則誤差</td><td>負則誤差</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0.8571428571</td><td>0.1428571429</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.1428571429</td><td>0.0000000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.0000000000</td><td>#DIV/0!</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

性質 13 若有理數 $Q = c_0, c_1, c_2, c_3, ..., c_m, ..., c_n = d_0, d_1, d_2, d_3, ..., d_m, ..., d_i$ ，且

RegQ $E_k = \left| Q - c_0, c_1, ..., c_k \right|$ 表示 Q 與其第 k 個正則漸近分數的誤差、

NegQ $E_k = \left| Q - d_0, d_1, ..., d_k \right|$ 表示 Q 與其第 k 個負則漸近分數的誤差，

則 RegP E_k =RegQ E_k 且 NegP E_k =NegQ E_k ，其中 $P = Q + m$, $m \in Z$

證明.

依據定義可得

$$P = Q + m = (m + c_0), c_1, c_2, c_3, ..., c_m, ..., c_n = (m + d_0), d_1, d_2, d_3, ..., d_m, ..., d_i$$

因此

$$\text{RegP } E_k = \left| (Q + m) - (m + c_0), c_1, ..., c_k \right| = \left| Q - c_0, c_1, ..., c_k \right| = \text{RegQ } E_k$$

同理

$$\text{NegP } E_k = \text{NegQ } E_k$$

□

依據性質 11 就可解釋，「$\frac{1}{7}$ 之正、負則漸近分數誤差」和「$\frac{8}{7}$ 之正負則漸近分數誤差」型態相同的原因。

（後來發現猜想是錯誤的）

猜想 1 有理數 $Q = \frac{s}{r}$ ，其中 $(k+1)r > s > kr,\ k \in Z$ 。若將 $\frac{s}{r}$ 化成正、負則連分數之形式，則其正、負則漸近分數誤差有

a) 當 $\frac{(2k+1)}{2} r > s > kr$ 時，其漸近分數誤差情形為「 RegQ $E <$ NegQ E 」或

「先 RegQ E< NegQ E ，後轉為 RegQ E > NegQ E 」

b) 當 $(k+1)r > s > \frac{(2k+1)}{2}r$ 時，其漸近分數誤差情形為「 RegQ E> NegQ E 」或「先 RegQ E > NegQ E ，後轉為 RegQ E < NegQ E 」

證明.

1.依據性質 13 可得，有理數 $\frac{s}{r}$ 之正、負則漸近分數誤差僅需考慮以 r 為分母的真分數，也就是考慮 $\frac{1}{r}$ 、 $\frac{2}{r}$ 、 $\frac{3}{r}$ 、…、 $\frac{r-1}{r}$ 即可。

2.考慮 $\frac{37}{100}$ 之正、負則漸近分數誤差，依序可得

RegQ E_0< NegQ E_0 、 RegQ E_1= NegQ E_1 、 RegQ E_2> NegQ E_2 、 RegQ E_3= NegQ E_3 、 RegQ E_4> NegQ E_4 、 RegQ E_5> NegQ E_5

項數	正則誤差	負則誤差	正-負
0	0.3700000000	0.6300000000	**-0.2600000000**
1	0.1300000000	0.1300000000	0.0000000000
2	0.0366666667	0.0300000000	0.0066666667
3	0.0050000000	0.0050000000	0.0000000000
4	0.0015789474	0.0003703704	0.0012085770
5	0.0003703704	0.0000000000	0.0003703704
6	0.0000000000	#DIV/0!	#DIV/0!

3.再考慮 $\frac{6371}{29160}$ 之正、負則漸近分數誤差，更驚人的是誤差型態又不一樣，第 0 至 4 項為 RegQ E< NegQ E ，第 5 項 RegQ E_5= NegQ E_5 ，第 6 至 10 項為 RegQ E > NegQ E ，第 11 項居然又轉變為 RegQ E_{11}< NegQ E_{11}

項數	正則誤差	負則誤差	正-負
0	0.2184842250	0.7815157750	**-0.5630315501**
1	0.0315157750	0.2815157750	**-0.2500000000**
2	0.0184842250	0.1148491084	**-0.0963648834**
3	0.0037379973	0.0315157750	**-0.0277777778**
4	0.0010929206	0.0037379973	**-0.0026450766**
5	0.0002657750	0.0002657750	0.0000000000
6	0.0000934204	0.0000031700	0.0000902504
7	0.0000031700	0.0000000634	0.0000031066
8	0.0000000796	0.0000000172	0.0000000624
9	0.0000000634	0.0000000077	0.0000000556
10	0.0000000065	0.0000000037	0.0000000028
11	0.0000000000	0.0000000014	**-0.0000000014**
12	#DIV/0!	0.0000000000	#DIV/0!

4.從 $\frac{37}{100}$ 和 $\frac{6371}{29160}$ 的例子發現正、負則漸近分數誤差沒有一致型態，所以猜想 1 所列規律並非

通則。但能確定的是第 0 項正、負則漸近分數誤差是可以判斷的。

□

性質 14 有理數 $Q=\frac{s}{r}$，其中 $r>s>0,\ k\in Z$。若將 $\frac{s}{r}$ 化成正、負則連分數之形式，則其正、負則漸近分數誤差有

a) 當 $\frac{r}{2}>s>0$ 時，其第 0 項漸近分數誤差情形為「$\mathrm{RegQ}\,E_0<\mathrm{NegQ}\,E_0$」

b) 當 $r>s>\frac{r}{2}$ 時，其第 0 項漸近分數誤差情形為「$\mathrm{RegQ}\,E_0>\mathrm{NegQ}\,E_0$」

證明.

設 Q 的第 0 個正則漸近分數 d_0 、第 0 個負則漸近分數 c_0 、

d_0 與 c_0 必為 2 個相鄰的正整數，顯然 $d_0=0,\ \ c_0=1$

故，當 $\frac{r}{2}>s>0$ 時，$\mathrm{RegQ}\,E_0<\mathrm{NegQ}\,E_0$；當 $r>s>\frac{r}{2}$ 時，「$\mathrm{RegQ}\,E_0>\mathrm{NegQ}\,E_0$」

□

柒、正則連分數、負則連分數的應用及討論

連分數的漸近分數具有最佳逼近性可作為曆法週期的估計值，因此漸近分數的誤差就會決定週期估算的精準度。下文應用部分，以「Excel 漸近分數計算器」實際求解作比較。

另外，關於 $\frac{p}{q}$ 與其倒數 $\frac{q}{p}$ 的正則連分數的表示法型態可視為相同，然而兩者的**負則連分數表示法型態截然不同**：

$$\frac{100}{37}=2,1,2,2,1,3\ 、\ \frac{37}{100}=0,2,1,2,2,1,3$$

$$\frac{100}{37}=3,4,2,3,2,2\ 、\ \frac{37}{100}=1,2,3,2,4,4$$

性質 15 若實數 $\frac{p}{q}=a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$，若且唯若 $\frac{q}{p}=0,a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$，其中 $p>q$

證明.

$$\frac{q}{p}=0+\frac{1}{\frac{p}{q}}=0+\frac{1}{[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n]}=[0,a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n]$$

□

性質 16 若實數 $\frac{p}{q}$ 與其倒數 $\frac{q}{p}$ 化為負則連分數的表示法截然不同，其中 $p>q$

證明.

$$\frac{q}{p}=1-\frac{1}{\frac{p}{p+q}}$$

假設 $\frac{p}{q}$ 與 $\frac{q}{p}$ 化為負則連分數表示法型態相同（兩者只差在第 0 項漸近分數）

又連分數的表示法是唯一，考慮

$$\frac{p}{p+q}=\frac{p}{q}\Rightarrow p=0$$

矛盾不合，所以兩者表示法截然不同

□

因此，下文估算週期常數皆將原分數及其倒數，計算其正、負則漸近分數，可求出所有最佳有理數逼近。

一、19 年 7 閏？27 年 10 閏？

第 53 屆全國科展〈一本萬「曆」〉（廖婉妤等人，2013）討論閏月「19 年 7 閏」規則，該研究發現「19 年 7 閏」規則運行 323 年(1673 年到 1995 年)均無任何問題，且規律為「8+11」或「11+8」模式，之後會出現有一個 11 年周期無法配對（1996 年到 2006 年）。我發現這篇研究有推論錯誤，說明如下：

由於現行農曆沿襲自清康熙九年（1670 年）重新推行的時憲曆，計算閏月週期應以 1670 年為起始，所以我重新自 1670 年開始計算，19 年 7 閏只能運行「152 年（8 個週期）」，1822 到 1841 年則是「19 年 8 閏」，並非廖婉妤等人所推論的 323 年！

參考〈認識連分數〉一文算法，地球繞日週期平均為 365.2422 天、月球繞地週期平均為 29.5306 天，兩者相除 365.2422÷29.5306≒12.37，將 $\frac{37}{100}$ 化做連分數，可得 $\frac{7}{19}$ 是其第 4 個正則漸近分數，再求其第 4 個負則漸近分數為 $\frac{10}{27}$，利用「Excel 漸近分數計算器」可得：

$\frac{37}{100}$ 的第 4 個正則漸近分數 $\frac{7}{19}$ 誤差大於第 4 個負則漸近分數 $\frac{10}{27}$ 誤差

$$\left(\left|\frac{7}{19}-\frac{37}{100}\right|\fallingdotseq 0.0015789>\left|\frac{10}{27}-\frac{37}{100}\right|\fallingdotseq 0.0003703\right)$$

項數	正則誤差	負則誤差	正-負
0	0.3700000000	0.6300000000	**-0.2600000000**
1	0.1300000000	0.1300000000	0.0000000000
2	0.0366666667	0.0300000000	0.0066666667
3	0.0050000000	0.0050000000	0.0000000000
4	0.0015789474	0.0003703704	0.0012085770
5	0.0003703704	0.0000000000	0.0003703704
6	0.0000000000	#DIV/0!	#DIV/0!

因此，以「**27 年 10 閏**」規則來說，運行時間應該比「19 年 7 閏」還要長。實際計算發現「**27 年 10 閏**」可運行「459 年」（17 個週期）（自 1670 年至 2128 年）（表 1）。換句話說，**由於同項的負則漸近分數的誤差比正則漸近分數誤差還要小，所以用「27 年 10 閏」來解釋現行農曆中的置閏（月）週期會更佳恰當**。

表 1 1670 年到 2012 年農曆閏月

序號	週期1	週期2	週期3	週期4	週期5	週期6	週期7	週期8	週期9	週期10	週期11	週期12	週期13	週期14	週期15	週期16	週期17
1	***1670-2***	***1697-3***	***1724-4***	***1751-5***	***1778-6***	***1805-6***	***1832-9***	1859	1886	1913	1940	1967	1994	2021	2048	2075	2102
2	1671	1698	1725	1752	1779	1806	1833	***1860-3***	***1887-4***	***1914-5***	***1941-6***	***1968-7***	***1995-8***	2022	2049	2076	2103
3	***1672-7***	***1699-7***	1726	1753	1780	1807	1834	1861	1888	1915	1942	1969	1996	***2023-2***	***2050-3***	***2077-4***	***2104-5***
4	1673	1700	***1727-3***	***1754-4***	***1781-5***	***1808-5***	***1835-6***	***1862-8***	1889	1916	1943	1970	1997	2024	2051	2078	2105
5	1674	1701	1728	1755	1782	1809	1836	1863	***1890-2***	***1917-5***	***1944-4***	***1971-5***	***1998-5***	***2025-6***	***2052-8***	2079	2106
6	***1675-5***	***1702-6***	***1729-7***	***1756-9***	1783	1810	1837	1864	1891	1918	1945	1972	1999	2026	2053	***2080-3***	***2107-4***
7	1676	1703	1730	1757	***1784-3***	***1811-3***	***1838-4***	***1865-5***	***1892-6***	***1919-7***	1946	1973	2000	2027	2054	2081	2108
8	1677	1704	1731	1758	1785	1812	1839	1866	1893	1920	***1947-2***	***1974-4***	***2001-4***	***2028-5***	***2055-6***	***2082-7***	***2109-9***
9	***1678-3***	***1705-4***	***1732-5***	***1759-6***	***1786-7***	1813	1840	1867	1894	1921	1948	1975	2002	2029	2056	2083	2110
10	1679	1706	1733	1760	1787	***1814-2***	***1841-3***	***1868-4***	***1895-5***	***1922-5***	***1949-7***	***1976-8***	2003	2030	2057	2084	2111
11	***1680-8***	1707	1734	1761	1788	1815	1842	1869	1896	1923	1950	1977	***2004-2***	***2031-3***	***2058-4***	***2085-5***	***2112-6***
12	1681	***1708-3***	***1735-4***	***1762-4***	***1789-5***	***1816-6***	***1843-7***	***1870-4***	1897	1924	1951	1978	2005	2032	2059	2086	2113
13	1682	1709	1736	1763	1790	1817	1844	1871	***1898-3***	***1925-4***	***1952-5***	***1979-6***	***2006-7***	***2033-11***	2060	2087	2114
14	***1683-6***	***1710-7***	***1737-9***	1764	1791	1818	1845	1872	1899	1926	1953	1980	2007	2034	***2061-3***	***2088-4***	***2115-4***
15	1684	1711	1738	***1765-2***	***1792-4***	***1819-4***	***1846-5***	***1873-6***	***1900-8***	1927	1954	1981	2008	2035	2062	2089	2116
16	1685	1712	1739	1766	1793	1820	1847	1874	1901	***1928-2***	***1955-3***	***1982-4***	***2009-5***	***2036-6***	***2063-7***	***2090-8***	2117
17	***1686-4***	***1713-5***	***1740-6***	***1767-7***	1794	1821	1848	1875	1902	1929	1956	1983	2010	2037	2064	2091	***2118-3***
18	1687	1714	1741	1768	***1795-2***	***1822-3***	***1849-4***	***1876-5***	***1903-5***	***1930-6***	***1957-8***	***1984-10***	2011	2038	2065	2092	2119
19	1688	1715	1742	1769	1796	1823	1850	1877	1904	1931	1958	1985	***2012-4***	***2039-5***	***2066-5***	***2093-6***	***2120-7***
20	***1689-3***	***1716-3***	***1743-4***	***1770-5***	***1797-6***	***1824-7***	***1851-8***	1878	1905	1932	1959	1986	2013	2040	2067	2094	2121
21	1690	1717	1744	1771	1798	1825	1852	***1879-3***	***1906-4***	***1933-5***	***1960-6***	***1987-6***	***2014-9***	2041	2068	2095	2122
22	***1691-7***	***1718-8***	1745	1772	1799	1826	1853	1880	1907	1934	1961	1988	2015	***2042-2***	***2069-4***	***2096-4***	***2123-5***
23	1692	1719	***1746-3***	***1773-3***	***1800-4***	***1827-5***	***1854-7***	***1881-7***	1908	1935	1962	1989	2016	2043	2070	2097	2124
24	1693	1720	1747	1774	1801	1828	1855	1882	***1909-2***	***1936-3***	***1963-4***	***1990-5***	***2017-6***	***2044-7***	2071-8	2098	2125
25	***1694-5***	***1721-6***	***1748-7***	***1775-10***	1802	1829	1856	1883	1910	1937	1964	1991	2018	2045	2072	***2099-2***	***2126-4***
26	1695	1722	1749	1776	***1803-2***	***1830-4***	***1857-5***	***1884-5***	***1911-6***	***1938-7***	1965	1992	2019	2046	2073	2100	2127
27	1696	1723	1750	1777	1804	1831	1858	1885	1912	1939	***1966-3***	***1993-3***	***2020-4***	***2047-5***	***2074-6***	***2101-7***	***2128-11***

註：1670-2表示「1670年閏二月」

二、連分數與日食周期

日食的形成原因是太陽、月球、地球在同一條直線上，月球恰巧將太陽遮住，所以在地球上的某些區域無法看到太陽。地球繞太陽公轉的軌道平面（黃道面）與月球繞地球公轉的軌道平面（白道面）有一個大約 5 度的夾角，日、月兩者的視位置相距在 0.5 度內，才會產生日食現象；所以並不是每次逢朔就會產生日食現象，必須等到地球繞太陽公轉的位置，剛好位於白道面與黃道面升交點、降交點之一的附近才有可能發生日食的現象，滿足這兩個條件才有可能發生日食的現象。

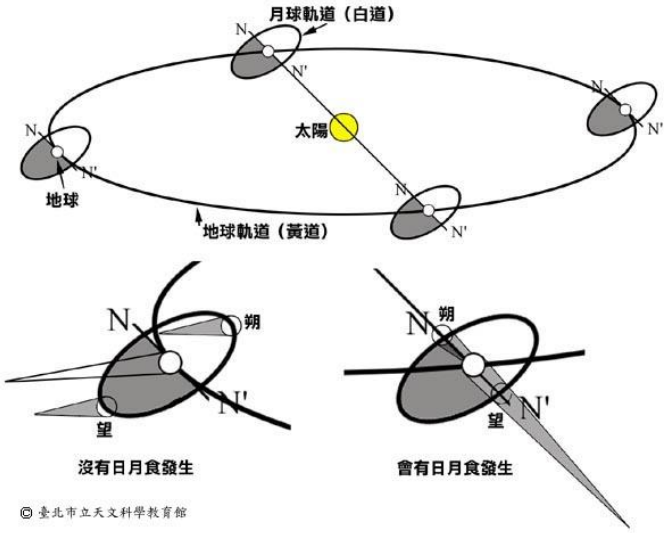


圖 1 來源：網路天文館（2012 年 5 月 21 日）

因此，日食週期可用下式表達：

$$\boxed{P = m\times\text{朔望月} = n\times\text{交點月} = l\times\text{交點年}}$$

日食週期可利用連分數來作簡易估算，以下分兩部分討論西方與中國唐宋的日食周期。

（一）西方日食週期

西方著名日食週期有：第三（Tritos Cycle）、沙羅週期（Solar Cycle）、默冬章（Metonic Cycle）、依內克斯（Inex Cycle）（維基百科，2013a）：

接著，取「朔望月」為 29.530588 天、「交點月」為 27.212220 天，以「Excel 漸近分數計算器」計算 $\frac{27212220}{29530588}(a\text{分數})$、$\frac{29530588}{27212220}(b\text{分數})$ 的正、負則漸近分數，**結果發現這四個週期皆與正、負則漸近分數有關。以精準性來說，依內克斯（Inex Cycle）週期誤差最小（小於 10^{-6}），其次為沙羅週期（Solar Cycle）（小於 10^{-5}）**。

1、第三（tritos） $\frac{135}{146.501}\approx\frac{270}{293}$ 是第 3 項負則漸近分數(a)

2、沙羅（Solar） $\frac{223}{241.999}\approx\frac{223}{242}$ 是第 6 項正則漸近分數、第 16 項負則漸近分數(b)

3、默冬章（Metonic） $\frac{235}{255.021}\approx\frac{47}{51}$ 是第 5 項正則漸近分數、第 2 項負則漸近分數(a)

4、依內克斯（Inex） $\frac{358}{388.5}\approx\frac{716}{777}$ 是第 7 項正則漸近分數、第 5 項負則漸近分數(a)

表 2 西方日食週期常數

週期	提出者	時間	*m*	*n*	*l*	常數取值研究結果
第三（Tritos）	--	--	135	146.501	11.501	第 3 項負則漸近(a)
沙羅（Solar）	古巴比倫人	--	223	241.999	18.999	第 6 項正則漸近 第 16 項負則漸近(b)
默冬章（Metonic）	Meton	432 B.C.	235	255.021	20.021	第 5 項正則漸近 第 2 項負則漸近(a)
依內克斯（Inex）	Crommelin	1901	358	388.5	30.5	第 7 項正則漸近
紐康（Newcomb）	Newcomb	19 世紀末				第 5 項負則漸近(a)

（二）唐宋日食週期

曲安京（1995）在〈唐宋曆法中的交食周期與連分數算法〉一文中，給了唐宋 16 部曆法關於「交食周期」的數據，並且提出唐宋曆法中的交食周期 *m, n, l* 之常數是由「朔望月/交點月」所推演出來的！曲安京認為 16 部曆法中的 10 部曆取周期 $\frac{n}{m}$ 為 $\frac{\text{朔望月}}{\text{交點月}}$ 的正則漸近分數，其餘 6 部的情形如下：

1、有 3 部曆法（崇天曆、統元曆、觀天曆）由加成算法而來

2、有 1 部曆法（乾道曆）沿用過去之曆法

3、有 1 部曆法（乾元曆）為原始數據約分

4、有 1 部分曆法（儀天曆）不知原因

我將這 16 部曆法的數據以「Excel 漸近分數計算器」計算各曆法 $\frac{\text{朔望月}}{\text{交點月}}$(分數$a$)、$\frac{\text{交點月}}{\text{朔望月}}$(分數$b$)的正、負則漸近分數，結果發現有 15 部曆法與連分數有關（表 3）：

1、正則漸近分數取值：淳熙曆、會元曆

2、負則漸近分數取值：儀天曆、崇天曆、統元曆、乾道曆

3、正、負則漸近分數取值：麟德曆、大衍曆、五紀曆、正元曆、宣明曆、崇玄曆、觀天曆、紀元曆、統天曆

比較曲安京和我的研究：

第一，曲安京忽略了「觀天曆」的取值 $\frac{2331}{2148}$ 是可以約分的，$\frac{2331}{2148}=\frac{777}{716}$，所以觀天曆其實還是由正、負則漸近分數取值而來！

第二，曲安京研究指出不知原因的「儀天曆」、加成算法的「崇天曆」和「統元曆」以及沿用過去曆法的「乾道曆」，四部曆法可視作由負則漸近分數取值而來。

表 3 唐宋日食週期常數

曆名	作者	年代	朔望月/交點月	m	n	l	常數取值研究結果
麟德曆	李淳風	664	$\frac{11871300}{10939313}$	716	777	61	第 6 項正則漸近 第 5 項負則漸近(b)
大衍曆	一行	724	$\frac{89773}{82725.1322}$	4026	4369	343	第 9 項正則漸近 第 19 項負則漸近(a)
五紀曆	郭獻之	762	$\frac{39571}{36464.3767}$	716	777	61	第 6 項正則漸近 第 5 項正則漸近(b)
正元曆	徐承嗣	784	$\frac{32336}{29797.3815}$	716	777	61	第 6 項正則漸近 第 5 項正則漸近(b)
宣明曆	徐昂	822	$\frac{248057}{228582.6512}$	2371	2573	202	第 7 項正則漸近 第 19 項負則漸近(a)
崇玄曆	邊岡	892	$\frac{398663}{367364.9673}$	3087	3350	263	第 8 項正則漸近 第 6 項正則漸近(b)
乾元曆	吳昭素	981	$\frac{86820}{80003.9455}$	1667	1809	142	原數約分而成
儀天曆	史序	1001	$\frac{298259}{274843.2279}$	528 (176)	573 (191)	45 (15)	第 15 項負則漸近(a)
崇天曆	楚衍	1024	$\frac{312729}{288177.4277}$	1655	1796	141	第 18 項負則漸近(a)

觀天曆	皇居卿	1092	$\frac{355253}{327362.9944}$	2148 (716)	2331 (777)	183 (61)	第 6 項正則漸近 第 5 項負則漸近(b)
紀元曆	姚舜輔	1106	$\frac{215278}{198377.088}$	3803	4127	324	第 7 項正則漸近 第 21 項負則漸近(a)
統元曆	陳得一	1135	$\frac{204647}{188580.6457}$	493	535	42	第 4 個負則漸近(b)
乾道曆	劉孝榮	1167	$\frac{885917}{816366.6034}$	939	1019	80	第 17 項負則漸近(a)
淳熙曆	劉孝榮	1176	$\frac{166552.56}{153476.9543}$	716	777	61	第 6 項正則漸近
會元曆	劉孝榮	1191	$\frac{1142834}{1053113.2140}$	5951	6458	507	第 7 項正則漸近
統天曆	楊忠輔	1199	$\frac{354368}{326547}$	223	242	19	第 5 項正則漸近 第 16 項負則漸近(a)

三、連分數與金星凌日周期

2012 年 6 月 6 日出現重要天文現象「金星凌日」，當時一篇新聞報導：

「金星凌日是指太陽、金星、地球連成一直線時，從地球可看見金星在太陽盤面上成為移動的小黑點。今天上午六點十一分，金星會從太陽的東北側慢慢移進，之後太陽表面出現一個小黑點，也是一種「日食」。中午十二時四十八分時，金星將移出日面，全程歷時六小時卅六分。金星凌日是相當罕見的天文現象，每隔二百四十三年僅發生四次…錯過今天，下回要見金星凌日，要等一〇五年。」

（取自：自由時報（2012 年 6 月 6 日）：錯過金星凌日，再見等下輩子）

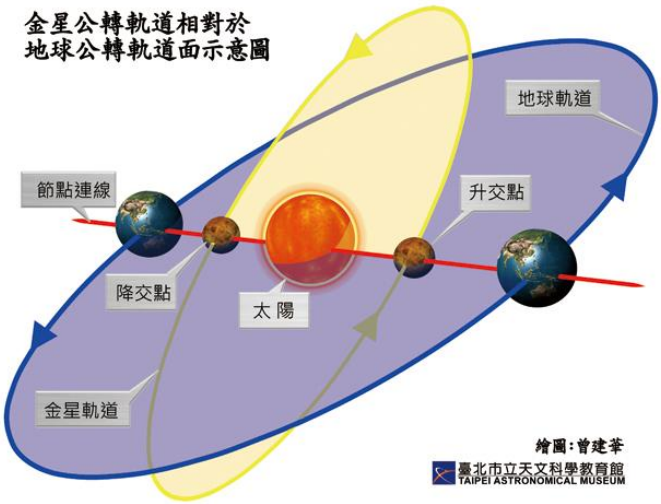


圖 2 來源：網路天文館（2012 年 6 月 6 日）

從新聞可知「金星凌日」現象發生的原因與「日食」類似。依據資料「**金星繞太陽公轉**

一週 224.701 天，地球繞太陽公轉一週為 365.256 天，會合週期 583.923 天

（$\dfrac{1}{\dfrac{1}{224.701}-\dfrac{1}{365.256}}\approx 583.923$）。精確的循環週期，是 8 年—121.5 年—8 年—105.5 年，所以，金星凌日的真實循環週期應是 8+121.5+8+105.5=243 年」（網路天文館，2012 年 6 月 6 日）。

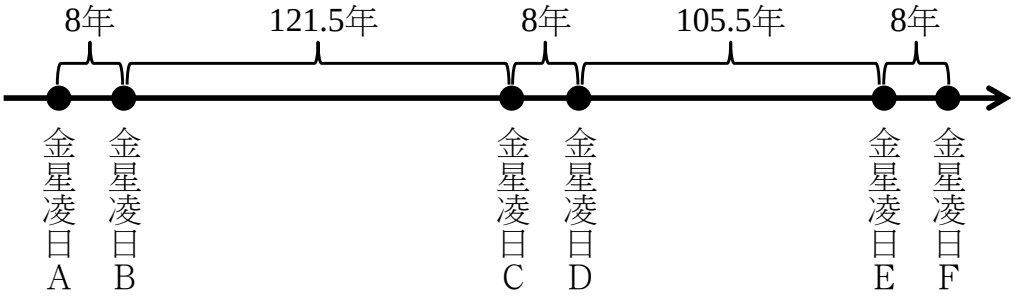


圖 3 金星凌日 243 年週期示意圖

接著，以連分數的方式來計算驗證金星凌日週期，週期公式為：

$$\boxed{Q = h\times\text{金星公轉週期} = j\times\text{地球金星公轉週期} = k\times\text{會合週期}}$$

以「Excel 漸近分數計算器」計算 $\dfrac{\text{地球}}{\text{金星}}=\dfrac{365256}{224701}$ 的正、負則漸近分數。

（一）8 年與 243 年週期

$\dfrac{13}{8}$ 是第 4 項正則漸近分數；$\dfrac{395}{243}$ 是第 6 項正則漸近分數

檢驗 $\dfrac{13}{8}$，金星 224.701×13=2921.113 天、地球 365.256×8=2922.048 天，兩者相差 0.935 天（約 22 小時），因此網路天文館也提到「**金星抵達節點的時間會比地球早 22 小時，所以這 8 年一組的事件一過，下一次金星抵達節點時，地球還沒抵達，因此地球上看不到金星凌日的現象。這樣的狀況約需過了 100 多年左右，才會再出現金星過內合同時過節點的金星凌日事件**」。再檢驗 $\dfrac{395}{243}$，金星 224.701×395=88756.895 天、地球 365.256×243=88757.208 天，兩者相差 0.313 天（約 7.512 小時），顯然誤差小很多。

（二）105.5 年與 121.5 年週期

然而，**121.5 年（圖 3 的 B 到 C）和 105.5 年（圖 3 的 D 到 E）該如何解釋？**，由於連分數的漸近分數的分子、分母皆為整數，因此我先將前述常數乘以 2 得，**121.5×2=243、105.5×2=221（此時金星時間分別為 395 年、343 年）**，從這裡很明顯看出 $\dfrac{197.5}{121.5}=\dfrac{395}{243}$ 是正則漸近分數而來，但正則漸近分數中是完全沒有接近 $\dfrac{171.5}{105.5}=\dfrac{343}{211}$ 的常數。

若從**負則漸近分數觀察**，結果發現第 27 項負則漸近分數是 $\frac{343}{211}=\frac{171.5}{105.5}$，就是 105.5 週期的估算常數。

驗證 $\frac{197.5}{121.5}$，金星 224.701×197.5=44378.604 天、地球 365.256×121.5=44378.640 天，兩者相差 0.0364 天（約 0.874 小時）；驗證 $\frac{171.5}{105.5}$，金星 224.701×171.5=38534.508 天、地球 365.256×105.5=38534.540 天，兩者相差 0.0316 天（約 0.759 小時）。

（三）113.5 年與 129.5 年週期

然而，**圖 3 的 A 到 C 的 8+121.5＝129.5 年與 C 到 E 的 8+105.5＝113.5 年週期呢？**這些可利用性質 17 來解釋。

性質 17 若有兩相異正有理數 $\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$，兩數之費瑞和（Fary Sum）為 $\frac{b+d}{a+c}$，則 $\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$

證明.

$\because \frac{b}{a}<\frac{d}{c} \quad \therefore bc<ad$

得 $\frac{b+d}{a+c}-\frac{b}{a}=\frac{ad-bc}{a(a+c)}>0$

再得 $\frac{b+d}{a+c}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{c(a+c)}<0$

故 $\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$

□

依據性質 17，兩個漸近分數的費瑞和（Fary Sum）也是良好的估算常數！

$$\frac{13}{8}<\frac{197.5+13}{121.5+8}=\frac{210.5}{129.5}<\frac{197.5}{121.5}、\frac{13}{8}<\frac{171.5+13}{105.5+8}=\frac{184.5}{113.5}<\frac{171.5}{105.5}$$

表 4 金星凌日週期常數

地球/金星	*h*	*j*	*k*	常數取值研究結果
$\frac{365256}{224701}$	13	8	5	第 4 項正則漸近
	171.5 (343)	105.5 (221)	66	第 27 項負則漸近
	197.5 (395)	121.5 (243)	76	第 6 項正則漸近
	395	243	152	第 6 項正則漸近

捌、結論

一、正、負則連分數漸近分數基本性質及收斂性研究

本文發現實數可以化作正則、負則連分數，其漸近分數具有收斂性：

若 $\frac{P_k}{q_k}$ 、$\frac{P_{k-1}}{q_{k-1}}$ 為兩相鄰正則漸近分數，則 $\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=-1^{k-1}\frac{1}{q_k q_{k-1}}$ 且連續奇（偶）項的正則漸近分數滿足 $\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}>\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$ ，$\frac{p_{2k}}{q_{2k}}>\frac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}}$ 。

若 $\frac{P_k}{q_k}$ 、$\frac{P_{k-1}}{q_{k-1}}$ 為兩相鄰負則漸近分數，則 $p_k q_{k-1}-p_{k-1}q_k=-1$ 。

具體來說，偶數項正則漸近分數，從左側向右逼近，奇數項正則漸近分數，從右側向左逼近；負則漸近分數皆從右向左逼近。

二、有理數正、負則連分數及其漸近分數求法

輾轉相除法可將有理數化成正則連分數 $a_0,a_1,a_2,a_3...,a_n$ 或負則連分數 $a_0,a_1,a_2,a_3...,a_n$ ，再由性質 1 和性質 7 求出漸近分數。這樣的方式需要透過兩階段計算才能計算出漸近分數，較為繁複。本文參考黃順發、高吉全、胡勇軍（2006）用於求正則連分數及其漸近分數的同步方法，發現適用於負則連分數，導出性質 11 和性質 12。具體來說，構造特定 2×3 的矩陣，利用「列運算」之方式，就可同步求出其漸近分數。

為了減少計算時間，本文將矩陣同步求解方法寫成簡易的「Excel 漸近分數計算器」。

三、有理數正、負則連分數之漸近分數誤差性質研究

原先我對有理數正、負則連分數之漸近分數誤差性質有許多猜想，例如：同項正負則漸近分數誤差的大小具有一定規律，但經過實際計算數個分數後，已證明猜想為錯誤的。但是仍發現有理數 $\frac{p}{q}$ 與 $m\frac{p}{q}$ 的正負則漸近分數誤差分佈相同，如性質 13。

四、正、負則漸近分數與最佳有理逼近

已知實數的「第二類最佳有理逼近」恰是正則漸近分數（見參考資料 8）。本文加入 $\frac{p}{q}$ 與其倒數 $\frac{q}{p}$ 之負則漸近分數後，則可將所有「第一類最佳有理逼近」求出。

例如：$\frac{87}{32}=2,1,2,1,1,4$

第二類最佳逼近依序為 $2,\ \frac{8}{3},\ \frac{11}{4},\ \frac{19}{7},\ \frac{87}{32}$

第一類最佳逼近依序為 $2,\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{11}{4},\ \frac{19}{7},\ \frac{30}{11},\ \frac{49}{18},\ \frac{68}{25},\ \frac{87}{32}$

利用本文漸近分數計算器可得：$\frac{30}{11}$，$\frac{49}{18}$，$\frac{68}{25}$為$\frac{87}{32}$的負則漸近分數，$\frac{2}{5}$為$\frac{32}{87}$負則漸近分數。

五、正、負則連分數在天文曆法上的應用

關於$\frac{p}{q}$與其倒數$\frac{q}{p}$之正則連分數表示型態相同，然而兩者化成負則連分數截然不同（性質 15 與 16），因此本文估算週期常數皆將原分數及其倒數進行負則漸近分數之計算，以充實研究完整性。

（一）連分數與農曆閏月

本文與第 53 屆全國科展作品〈一本萬「曆」〉比較：〈一本萬「曆」〉提出「19 年 7 閏」（正則漸近分數計算而來）規則可運行 323 年（1673 年到 1995 年）是有問題的！現行農曆理應從 1670 年算起，若從 1670 年算起，「19 年 7 閏」只能運行 152 年；本文研究發現若負則漸近分數所算出來的「27 年 10 閏」規則，可以運行 459 年（自 1670 年至 2128 年），比「19 年 7 閏」更實用準確。

（二）連分數與日食周期

1、漸近分數估算週期常數

以正、負則漸近分數算出 4 個西方日食週期：第三（Tritos Cycle）、沙羅（Solar Cycle）、默冬章（Metonic Cycle）、依內克斯（Inex Cycle），其中第三（Tritos Cycle）週期只能從負則漸近分數而來。

此外，本文依據曲安京〈唐宋曆法中的交食周期與連分數算法〉給出唐宋 16 部曆法的「交食周期」的數據，並提出其中 10 部曆法可以用連分數解釋。然而本文納入負則連分數後，事實上有 15 部曆法可以用連分數解釋，其中有 4 部曆法只能從負則漸近分數而來。

2、西方與唐宋的日食週期共同性討論

西方日食週期與唐宋交食週期中，有 6 個取$\frac{716}{777}$為週期，佔 30%為最高比例，其次有 2 個取$\frac{223}{242}$為週期，佔 10%。為何取這兩個比例常數？我認為一方面食的發生誤差小，另一方面常數不至於太大到人的一生無法觀測（依內克斯週期約為 60.89 年、沙羅週期約為 18.031 年），所以取這兩個常數並非偶然。

（三）連分數與金星凌日

金星凌日的週期為 8 年—121.5 年—8 年—105.5 年，完整週期 243 年。8 年、243 年可由正則漸近分數求出；121.5 年和 105.5 年可由負則漸近分數求出。另外，利用費瑞和（性質 17）可求出由兩個漸近分數所組成的估算值，也就是 8+121.5=129.5 年、8+105.5=113.5 年的週期。

玖、參考資料

1.曲安京（1995）。唐宋曆法中的交食周期與連分數算法。**數學傳播季刊**，**19**(4)，73-79。

2.林聰源（1978）。認識連分數。**數學傳播季刊**，**2**(3)，33-41。

3.柯智偉、王裕文、王偲帆（2003）。**法雷圖連分數**。第 43 屆全國科展高中組數學科作品。

4.張家麟、鄭曉暉（2011）。什麼是負正則連分數?--漫談 Reg 與 Neg。**數學傳播季刊**，**35**(3)，50-63。
5.黃順發、高吉全、胡勇軍（2006）。有理數的連分數展開及其漸近分數的矩陣同步求解方法探討。**景德鎮高專學報**，**21**(4)，3,6。
6.廖婉妤、黃靖涵、張博睿（2013）。**一本萬「曆」--農曆 19 年 7 閏之探討**。第 53 屆全國科展國中組數學科作品。
7.維基百科（2013a）。**食的週期**。取自：http://ppt.cc/dhV8
8.維基百科（2013b）。**丟番圖逼近**。取自：http://ppt.cc/nOwV
9.網路天文館（2012 年 5 月 21 日）。**睽違半世紀的日環食**。取自：http://ppt.cc/QPXb
10.網路天文館（2012 年 6 月 6 日）。**一生僅有兩次的美麗邂逅**。取自：http://ppt.cc/cYkF

【評語】030403

作者研究聚焦於「負則連分數」的相對於正則連分數的性質。主要證明了負則連分數所成的漸近分數會遞減趨近到原數。並且利用其中結果考慮了農曆閏年，如何閏年會更為準確。是一件有實際應用亦有數學內容的作品。