

中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

最佳團隊合作獎

030402

切切私語－探討平行四邊形體頂點至對邊等分
點切割的變化

學校名稱：彰化縣立陽明國民中學

作者： 國一 吳沛融 國一 吳沛熏	指導老師： 劉宏偉 楊弼雄
---------------------------------	-----------------------------

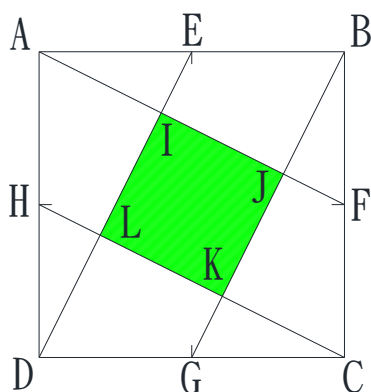
關鍵詞：等分點、切割、平行四邊形體

摘要

本研究以平面為基礎，往內做 N 層切割，往外再向立方體推展，探討四邊形、體進行連線切割後，所剩餘四邊形為何種形式四邊形，且剩餘四邊形、體的面積、體積與原四邊形、體的比值來進行研究。結果發現正方形切割後，所剩餘四邊形仍為正方形；平行四邊形切割後所剩餘四邊形為平行四邊形，且剩餘四邊形面積為原四邊形的 $\frac{(n-m)^2}{n^2+m^2}$ ，長方形、菱形與平行四邊形結果一樣，並發現以此切割法也可以用來反證勾股定律。往內做 N 層切割所得內外面積比為 $\left[\frac{(n-m)^2}{n^2+m^2}\right]^N$ ，往外向立方體推展求得體積比為 $1 - \frac{n+k}{2n} + \frac{2k^3}{3n(n+k)^2}$ 。

壹、研究動機

國中一年級剛開學時，老師說有獨立研究及科展的作品徵選，本組在國小時對數學幾何比較有興趣。記得有一題數學競試考題，題目如下表：雖然當時知道答案為 $\frac{1}{5}$ ，但是並不知道其他等分點切割是否有規律性，更不知道其他種類四邊形又是如何變化？因此，本研究決定以四邊形的四頂點往對邊上任一等分點連線切割，探討所剩餘四邊形為何種四邊形？且剩餘四邊形面積與原四邊形的關係為何？進而往內做 N 層切割，往外做立方體推展。



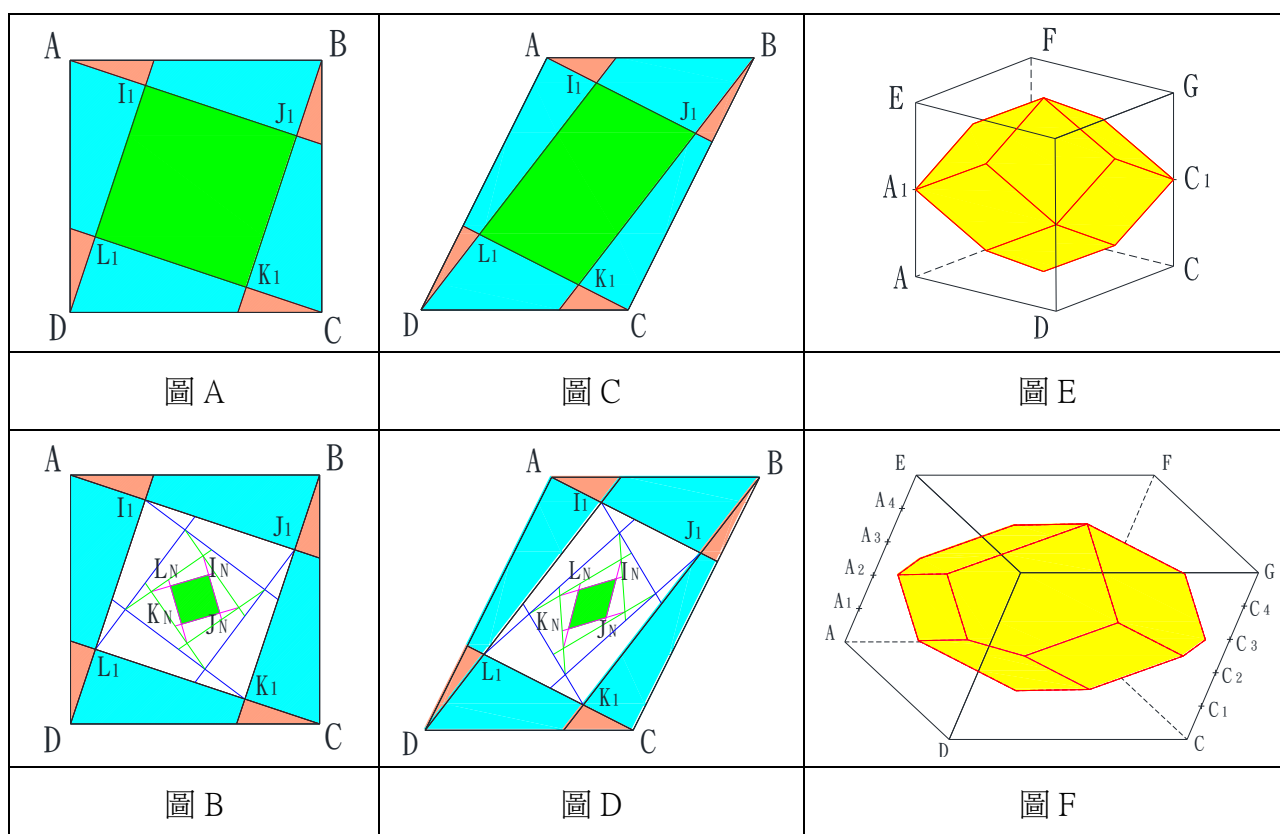
「正方形面積為 1，邊長為 2 等分，各頂點連線至等分點切割後，試求剩餘四邊形的面積？」

貳、符號定義

- 一、 $a_{\triangle ABC}$ 代表三角形 ABC 的面積
- 二、 $a_{\square ABCD}$ 代表四邊形 ABCD 的面積
- 三、 $a_{\square I_1 J_1 K_1 L_1}$ 代表 $\square ABCD$ 在內部第一層連接時所交出四邊形的面積
- 四、 $a_{\square I_N J_N K_N L_N}$ 代表 $\square ABCD$ 在內部第 N 層連接時所交出四邊形的面積
- 五、 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b_1}$ 代表向量 a_1 ，向量 b_1
- 六、 $ABCD-EFGH$ 代表各頂點為 ABCDEFGH 的六面體
- 七、 A_1-ABD 代表 A_1 和 $\triangle ABD$ 各頂點連成的四面體
- 八、 $d(P_1, \overline{AB})$ 代表 P_1 點到 $\overline{AB}$ 的距離

參、研究目的

- 一、 探討正方形四頂點分別往對邊等分點，在內部連接時所交出四邊形的面積，並計算面積與正方形之比值為何？ 如圖 A
- 二、 探討正方形在內部第 N 層連接時所交出四邊形的面積，並計算面積與原正方形之比值為何？ 如圖 B
- 三、 探討平行四邊形四頂點分別往對邊等分點，在內部連接時所交出四邊形的面積，並計算面積與平行四邊形之比值為何？ 如圖 C
- 四、 探討平行四邊形在內部第 N 層連接時所交出四邊形的面積，並計算面積與原平行四邊形之比值為何？ 如圖 D
- 五、 探討正立方體 Z 軸邊長上等分點，往相鄰兩平面的頂點連成切面，切割後剩餘的體積與原正立方體的比值為何？ 如圖 E
- 六、 探討平行六面體 Z 軸邊長上等分點，往相鄰兩平面的頂點連成切面，切割後剩餘的體積與原平行六面體的比值為何？ 如圖 F



肆、研究設備及器材

- 一、 AutoCAD 2004
- 二、 Microsoft Word 8.0
- 三、 Microsoft Equation 3.0
- 四、 直尺
- 五、 三角板
- 六、 紙、方格紙、筆

伍、研究過程或方法

- 一、 先研究從正方形四個頂點往對邊上任一等分數的固定序號等分點進行連線切割後，所剩餘四邊形為何種形式四邊形，且剩餘四邊形面積與原正方形的關係？
 - (一) 邊長為 2 等分有 1 個等分點，於第 1 等分點連線切割，如圖 1。

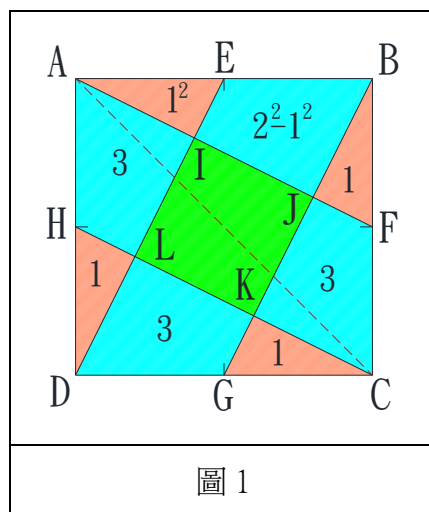


圖 1

1. 四邊形 IJKL 為何種形式四邊形？

(1) $\because \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$, $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$,

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle BCG \cong \triangle CDH \cong \triangle DAE$ (SAS), 且皆為直角三角形

且 $\angle BAF = \angle CBG = \angle DCH = \angle ADE$;

$$\angle BFA = \angle CGB = \angle DHC = \angle AED ,$$

$$\overline{AF} = \overline{BG} = \overline{CH} = \overline{DE}$$

(2) $\because \angle BAF + \angle BFA = 90^\circ$

$$\therefore \angle BAF + \angle AED = 90^\circ$$

$\therefore \triangle AIE$ 為直角三角形, 且 $\angle AIE = 90^\circ$

同理可證 $\angle BJF = \angle CKG = \angle DLH = 90^\circ$

$\therefore \triangle AEI \cong \triangle BFJ \cong \triangle CGK \cong \triangle DHL$ (ASA), 且皆為直角三角形

$$\text{且 } \overline{AI} = \overline{BJ} = \overline{CK} = \overline{DL} , \overline{EI} = \overline{FJ} = \overline{GK} = \overline{HL}$$

(3) 由以上結果可再推得

$$(I) \triangle ABJ \cong \triangle BCK \cong \triangle CDL \cong \triangle DAI ,$$

(II) $\angle LIJ = \angle IJK = \angle JKL = \angle KLI = 90^\circ$ (對頂角相等), 且

$$\overline{IJ} = \overline{JK} = \overline{KL} = \overline{LI}$$

∴ 由此得知四邊形 IJKL 為正方形

2. 求取正方形 IJKL 面積與正方形 ABCD 面積的關係。

(1) ∵ $\angle AIB = 180^\circ - \angle BIF = 90^\circ$ ，且 $\angle AIE = 90^\circ$

∴ $\overline{EI} \parallel \overline{BJ}$

∴ $\triangle AEI \sim \triangle ABJ$

∴ $\overline{AI} : \overline{AJ} = \overline{AE} : \overline{AB} = \overline{EI} : \overline{BJ} = 1 : 2$

∴ $a\triangle AEI : a\triangle ABJ = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$

又 $\triangle AEI \cong \triangle BFJ$

∴ $a\triangle BFJ : a\triangle ABJ = 1 : 4$

∴ $a\triangle AEI : a\square EIJB : a\triangle BFJ = 1 : (4-1) : 1 = 1 : 3 : 1$

(2) 令 $a\triangle AEI$ 為 1 單位面積

則 $a\triangle ABF$ 為 5 ($=1+3+1$) 單位面積

又 $a\square ABCD : a\triangle ABF = 2 \times 2 : \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 4 : 1$

$a\square ABCD = 4 \times a\triangle ABF = 4 \times 5 = 20$ 單位面積

(3) $a\square IJKL$

$= a\square ABCD - a\triangle ABJ - a\triangle BCK - a\triangle CDL - a\triangle DAI$

$= 20 - 4 \times (1+3)$

$= 4$ 單位面積

∴ $\frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

(二) 邊長為 3 等分有 2 個等分點，於第 1 等分點連線切割，如圖 2。

1. $a\triangle AEI : a\square EIJB : a\triangle BFJ = 1^2 : (3^2 - 1^2) : 1^2 = 1 : 8 : 1$

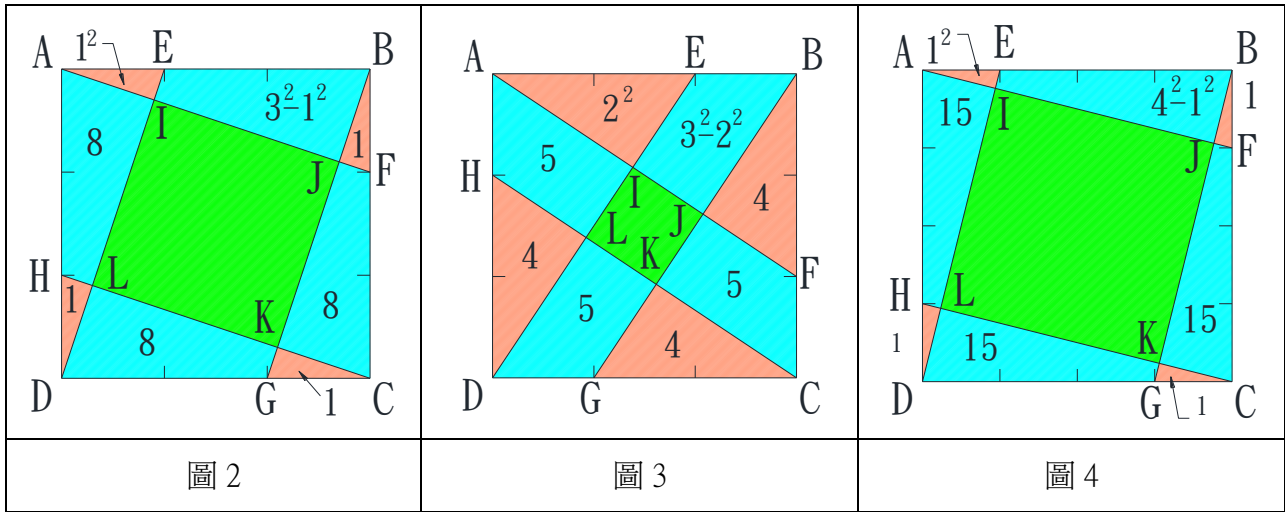
2. 令 $a\triangle ABF$ 為 10 ($=1+8+1$) 單位面積

∴ $a\square ABCD : a\triangle ABF = 3 \times 3 : \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = 6 : 1$

∴ $a\square ABCD = 6 \times a\triangle ABF = 6 \times 10 = 60$ 單位面積

$$\therefore a\Box IJKL = 60 - 4 \times (1 + 8) = 24 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore \frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$



(三) 邊長為 3 等分有 2 個等分點，於第 2 等分點連線切割，如圖 3。

$$1. a\triangle AEI : a\Box EIJB : a\triangle BFJ = 2^2 : (3^2 - 2^2) : 2^2 = 4 : 5 : 4$$

$$2. \text{令 } a\triangle ABF \text{ 為 } 13 (=4+5+4) \text{ 單位面積}$$

$$\therefore a\Box ABCD : a\triangle ABF = 3 \times 3 : \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3 : 1$$

$$\therefore a\Box ABCD = 3 \times a\triangle ABF = 3 \times 13 = 39 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore a\Box IJKL = 39 - 4 \times (4 + 5) = 3 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore \frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}} = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}$$

(四) 邊長為 4 等分有 3 個等分點，於第 1 等分點連線切割，如圖 4。

$$1. a\triangle AEI : a\Box EIJB : a\triangle BFJ = 1^2 : (4^2 - 1^2) : 1^2 = 1 : 15 : 1$$

$$2. \text{令 } a\triangle ABF \text{ 為 } 17 (=1+15+1) \text{ 單位面積}$$

$$\therefore a\Box ABCD : a\triangle ABF = 4 \times 4 : \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 8 : 1$$

$$\therefore a\Box ABCD = 8 \times a\triangle ABF = 8 \times 17 = 136 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore a\Box IJKL = 136 - 4 \times (1 + 15) = 72 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore \frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}} = \frac{72}{136} = \frac{9}{17}$$

(五) 邊長為 4 等分有 3 個等分點，於第 2 等分點連線切割，如圖 5。

$$\frac{2}{4} \text{ 等分即 } \frac{1}{2} \text{ 等分, } \therefore \frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

若以前述方法推算：

$$1. a\triangle AEI : a\square EIJB : a\triangle BFJ = 2^2 : (4^2 - 2^2) : 2^2 = 1 : 3 : 1$$

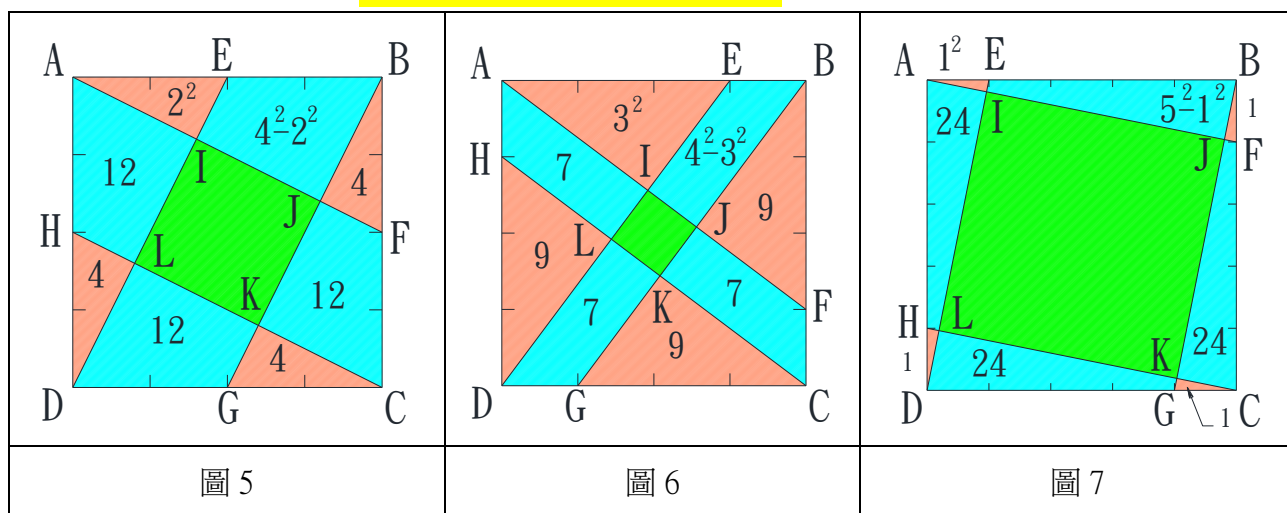
$$2. \text{ 令 } a\triangle ABF \text{ 為 } 5 (=1+3+1) \text{ 單位面積}$$

$$\therefore a\square ABCD : a\triangle ABF = 4 \times 4 : \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4 : 1$$

$$\therefore a\square ABCD = 4 \times a\triangle ABF = 4 \times 5 = 20 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore a\square IJKL = 20 - 4 \times (1+3) = 4 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore \frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$



(六) 邊長為 4 等分有 3 個等分點，於第 3 等分點連線切割，如圖 6。

$$1. a\triangle AEI : a\square EIJB : a\triangle BFJ = 3^2 : (4^2 - 3^2) : 3^2 = 9 : 7 : 9$$

$$2. \text{ 令 } a\triangle ABF \text{ 為 } 25 (=9+7+9) \text{ 單位面積}$$

$$\therefore a\square ABCD : a\triangle ABF = 4 \times 4 : \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 8 : 3$$

$$\therefore a\square ABCD = \frac{8}{3} \times a\triangle ABF = \frac{8}{3} \times 25 = \frac{200}{3} \text{ 單位面積}$$

$$\therefore a\square IJKL = \frac{200}{3} - 4 \times (9+7) = \frac{8}{3} \text{ 單位面積}$$

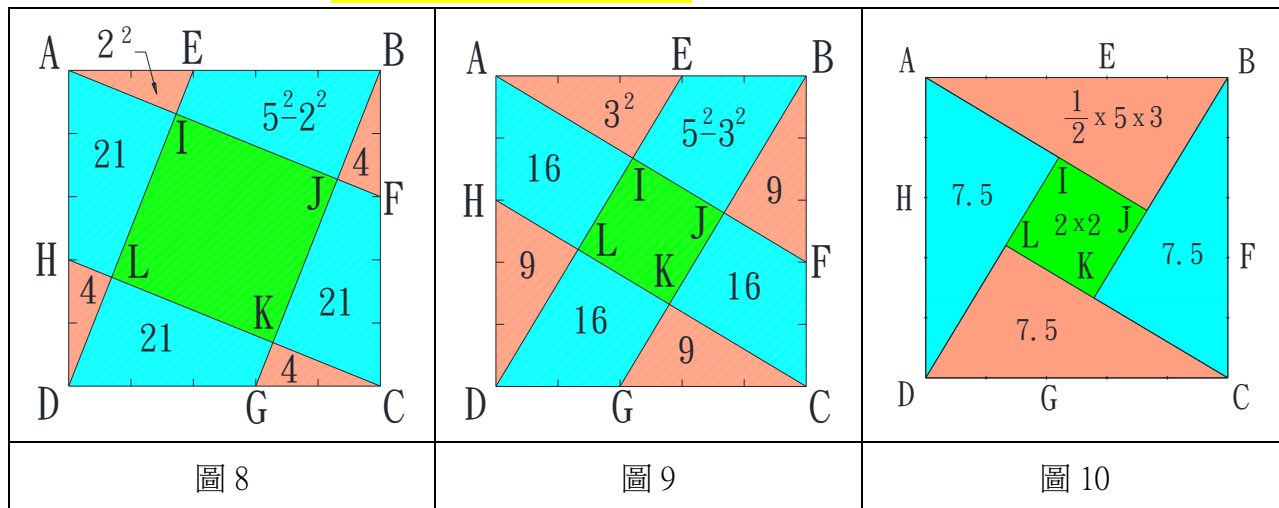
$$\therefore \frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}} = \frac{8}{3} \div \frac{200}{3} = \frac{1}{25}$$

(七) 邊長為 5 等分有 4 個等分點，於第 1 等分點連線切割，如圖 7。

$$\frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}} = \frac{8}{13}$$

(八) 邊長為 5 等分有 4 個等分點，於第 2 等分點連線切割，如圖 8。

$$\frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}} = \frac{9}{29}$$



(九) 邊長為 5 等分有 4 個等分點，於第 3 等分點連線切割，如圖 9。

$$\frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}} = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$$

(十) 前面的算法都是由外而內算出 $a\Box IJKL$ 和 $a\Box ABCD$ 的比值，現在試著由內往外計算 $a\Box IJKL$ 和 $a\Box ABCD$ 的比值。

邊長為 5 等分有 4 個等分點，於第 3 等分點連線切割，如圖 10。

$$\overline{AJ} - \overline{AI} = 5 - 3 = 2$$

$$a\Box IJKL = 2 \times 2 = 4 \text{ 單位面積}$$

$$a\triangle ABJ = \frac{1}{2} \overline{AJ} \times \overline{BJ} = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = 7.5 \text{ 單位面積}$$

$$a\Box ABCD = a\triangle ABJ \times 4 + a\Box IJKL = 7.5 \times 4 + 4 = 34 \text{ 單位面積}$$

$$\frac{a\Box IJKL}{a\Box ABCD} = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$$

比對 (九) 和 (十) 的結果，答案是一樣的，所以得知由內往外的算法也是可行的。

(十一) 現在做由內往外算法的公式推導： 如圖 11。

邊長有 $n-1$ 個等分點 (n 個等分數)，於第 m 個等分點 ($\frac{m}{n}$ 等分) 切割。

相似三角形中面積比等於邊長平方比

且 $\triangle AEI \sim \triangle ABJ$

$$\overline{AI} : \overline{AJ} = \overline{AE} : \overline{AB} = \overline{EI} : \overline{BJ} = m : n$$

$$\text{又 } \triangle AEI \cong \triangle BFJ, \quad \therefore \overline{AI} = \overline{BJ}$$

$$a \square IJKL = (n-m)^2, \quad a \triangle ABJ = \frac{n \times m}{2}$$

$$a \square ABCD = 4 \times a \triangle ABJ + a \square IJKL$$

$$= 4 \times \frac{n \times m}{2} + (n-m)^2$$

$$= 2nm + n^2 - 2nm + m^2$$

$$= n^2 + m^2$$

$$\therefore \frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}} = \frac{(n-m)^2}{n^2 + m^2}$$

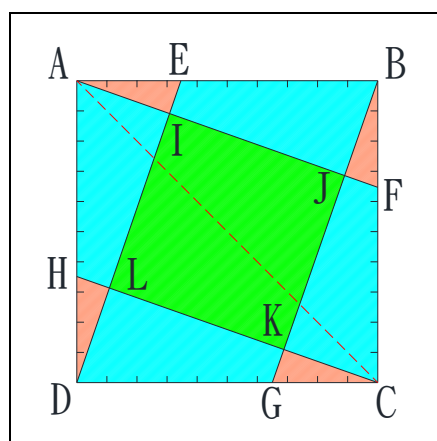


圖 11

(十二) 現在做由外往內算法的公式推導： 如圖 11。

邊長有 $n-1$ 個等分點 (n 個等分數)，於第 m 個等分點 ($\frac{m}{n}$ 等分) 切割。

$$1、a \triangle AEI : a \square EIJB : a \triangle BFJ = m^2 : (n^2 - m^2) : m^2$$

$$2、\text{令 } a \triangle ABF = m^2 + (n^2 - m^2) + m^2 = n^2 + m^2 \text{ 單位面積，}$$

$$\therefore a\triangle ABJ = n^2$$

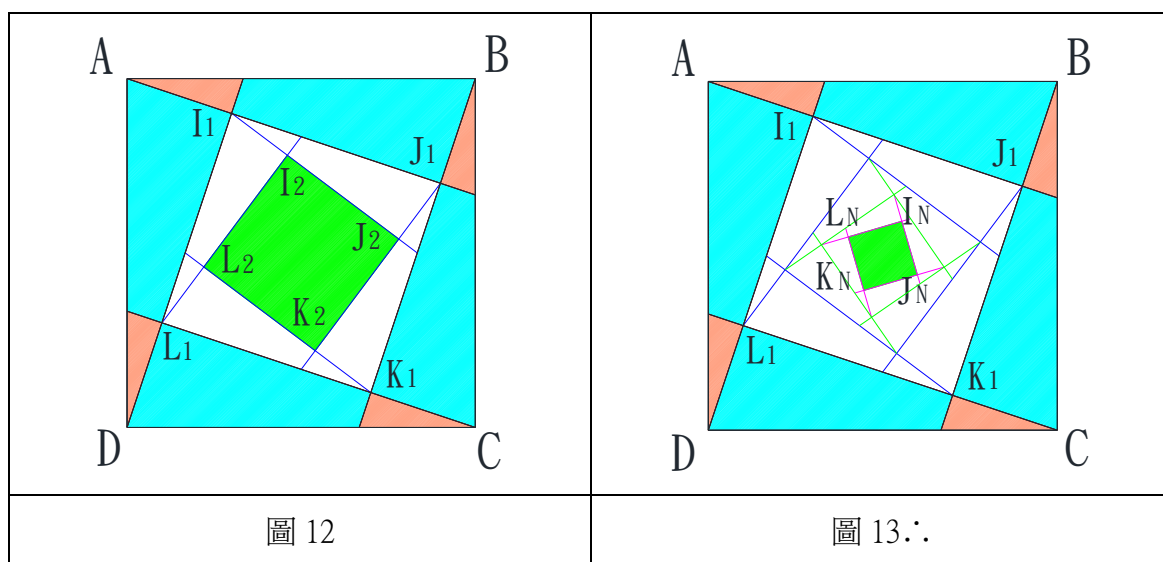
$$a\square ABCD : a\triangle ABF = n \times n : \frac{1}{2}n \times m = 2n : m$$

$$a\square ABCD = \frac{2n}{m} (n^2 + m^2)$$

$$a\square IJKL = \frac{2n}{m} (n^2 + m^2) - 4n^2$$

$$\frac{a\square IJKL}{a\square ABCD} = \frac{\frac{2n}{m}(n^2+m^2)-4n^2}{\frac{2n}{m}(n^2+m^2)} = \frac{\frac{2n(n^2+m^2-2nm)}{m}}{\frac{2n(n^2+m^2)}{m}} = \frac{(n-m)^2}{n^2+m^2}$$

由此得證一公式：
$$\frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}} = \frac{(n-m)^2}{n^2+m^2}$$



(十三) 因為 $\square I_1J_1K_1L_1$ 為正方形，所以探討 $a\square I_2J_2K_2L_2$ 與 $a\square ABCD$ 之比值

時可利用 (十二) 之結果，故可得 $\left[\frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} \right]^2$ ，如圖十二。

(十四) 根據 (十二)、(十三)，可得 $a\square I_NJ_NK_NL_N$ 與 $a\square ABCD$ 比值為

$$\left[\frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} \right]^N$$

(十五) 由伍、一、(一) 至 (十四) 歸納如下表。

從歸納中本研究發現 $\frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}}$ 的分母等於 (等分數² + 等分點²)

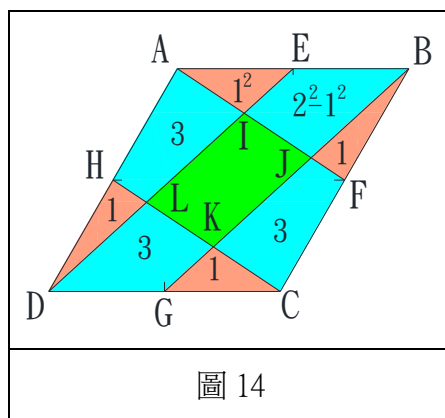
時，分子剛好等於 (等分數 - 等分點)²，因此推論得到規律：

$$\frac{\text{正方形 } I_N J_N K_N L_N \text{ 面積}}{\text{正方形 } ABCD \text{ 面積}} = \left[\frac{(\text{等分數} - \text{等分點})^2}{\text{等分數}^2 + \text{等分點}^2} \right]^N = \left[\frac{(n-m)^2}{n^2 + m^2} \right]^N$$

等分數	等分點	連接情形	$\frac{\text{正方形 } IJKL \text{ 面積}}{\text{正方形 } ABCD \text{ 面積}}$	$\frac{\text{正方形 } I_N J_N K_N L_N \text{ 面積}}{\text{正方形 } ABCD \text{ 面積}}$
2	1	連接第 1 等分點	$\frac{1}{5}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^N$
3	2	連接第 1 等分點	$\frac{2}{5} \left(= \frac{4}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{5}\right)^N \left(= \frac{4}{10}\right)^N$
3	2	連接第 2 等分點	$\frac{1}{13}$	$\left(\frac{1}{13}\right)^N$
4	3	連接第 1 等分點	$\frac{9}{17}$	$\left(\frac{9}{17}\right)^N$
4	3	連接第 2 等分點	$\frac{1}{5} \left(= \frac{4}{20}\right)$	$\left(\frac{1}{5}\right)^N \left(= \frac{4}{20}\right)^N$
4	3	連接第 3 等分點	$\frac{1}{25}$	$\left(\frac{1}{25}\right)^N$
5	4	連接第 1 等分點	$\frac{8}{13} \left(= \frac{16}{26}\right)$	$\left(\frac{8}{13}\right)^N \left(= \frac{16}{26}\right)^N$
5	4	連接第 2 等分點	$\frac{9}{29}$	$\left(\frac{9}{29}\right)^N$
5	4	連接第 3 等分點	$\frac{2}{17} \left(= \frac{4}{34}\right)$	$\left(\frac{2}{17}\right)^N \left(= \frac{4}{34}\right)^N$
5	4	連接第 4 等分點	$\frac{1}{41}$	$\left(\frac{1}{41}\right)^N$
n	n-1	連接第 m 等分點	$\frac{(n-m)^2}{n^2 + m^2}$	$\left[\frac{(n-m)^2}{n^2 + m^2}\right]^N$

二、再討論從平行四邊形四個頂點往對邊邊長上任一等分數的固定序號等分點進行連線切割後，所剩餘四邊形為何種形式四邊形，且剩餘四邊形的面積與原平行四邊形的關係？

(一) 邊長為 2 等分有 1 個等分點，於第 1 等分點連線切割，如圖 14。



1. 四邊形 IJKL 為何種形式四邊形？

$$(1) \because \overline{AB} = \overline{CD}, \overline{BF} = \overline{DH}, \angle ABF = \angle CDH$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDH \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \overline{AF} = \overline{CH}, \angle BAF = \angle DCH, \angle BFA = \angle DHC$$

$$\text{同理可證 } \triangle BCG \cong \triangle DAE \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \overline{BG} = \overline{DE}, \angle CBG = \angle ADE, \angle CGB = \angle AED$$

$$(2) \because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

$$\therefore \angle CDE = \angle AED$$

$$\therefore \angle CGB = \angle CDE$$

$$\therefore \overline{BG} \parallel \overline{DE} \text{ (同位角相等)}$$

$$\text{同理可證 } \overline{AF} \parallel \overline{CH}$$

$\therefore$ 由此得知四邊形 IJKL 為平行四邊形

$$(3) \because \overline{AE} = \overline{CG}, \angle EAI = \angle BAF = \angle DCH = \angle GCK,$$

$$\angle AEI = \angle AED = \angle CGB = \angle CGK$$

$$\therefore \triangle AEI \cong \triangle CGK \text{ (ASA)}, \therefore \overline{AI} = \overline{CK}, \overline{EI} = \overline{GK}$$

$$\text{同理可證 } \triangle BFJ \cong \triangle DHL, \therefore \overline{BJ} = \overline{DL}, \overline{FJ} = \overline{HL}$$

(4) 由以上結果可再推得

$$(I) \triangle ABJ \cong \triangle CDL$$

$$(II) \triangle BCK \cong \triangle DAI$$

2. 求取平行四邊形 IJKL 面積與平行四邊形 ABCD 面積的關係。

$$(1) \because \overline{EI} \parallel \overline{BJ}$$

$$\therefore \triangle AEI \sim \triangle ABJ$$

$$\therefore \overline{AI} : \overline{AJ} = \overline{AE} : \overline{AB} = \overline{EI} : \overline{BJ} = 1 : 2$$

$$\therefore a\triangle AEI : a\triangle ABJ = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$$

$$(2) \because \overline{FJ} \parallel \overline{CK}$$

$$\therefore \overline{FJ} : \overline{CK} = \overline{BF} : \overline{BC} = 1 : 2$$

$$\text{又} \because \overline{AI} = \overline{CK}$$

$$\therefore \overline{FJ} : \overline{AI} = 1 : 2, \text{ 且 } \overline{FJ} : \overline{AI} : \overline{AJ} = 1 : 2 : 4$$

$$\therefore a\triangle BFJ : a\triangle ABJ = 1 : 4 \text{ (三角形同高)}$$

$$\therefore a\triangle AEI : a\triangle EIJ : a\triangle BFJ = 1 : (4-1) : 1 = 1 : 3 : 1$$

(3) 同理可證

$$a\triangle BFJ : a\triangle FJLC : a\triangle CGL = 1 : 3 : 1$$

$$a\triangle CGL : a\triangle GLKD : a\triangle DHK = 1 : 3 : 1$$

$$a\triangle DHK : a\triangle HKIA : a\triangle AEI = 1 : 3 : 1$$

(4) $a\triangle ABCD = 2 \times a\triangle ABC$ (平行四邊形對角線切割)

$$a\triangle ABC = 2 \times a\triangle ABF \text{ (三角形同高)}$$

$$a\triangle ABCD = 4 \times a\triangle ABF$$

(5) 令 $a\triangle AEI$ 為 1 單位面積

$$\text{則 } a\triangle ABF \text{ 為 } 5 \text{ (} = 1 + 3 + 1 \text{) 單位面積}$$

$$a\triangle ABCD = 4 \times a\triangle ABF = 4 \times 5 = 20 \text{ 單位面積}$$

(6) $a\triangle IJKL$

$$= a\triangle ABCD - a\triangle ABJ - a\triangle BCL - a\triangle CDK - a\triangle DAI$$

$$= 20 - 4 \times (1 + 3)$$

$$= 4 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore \frac{\text{平行四邊形 IJKL 面積}}{\text{平行四邊形 ABCD 面積}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

(二) 邊長為 3 等分有 2 個等分點，於第 1 等分點連線切割，如圖 15。

$$1. a\triangle AEI : a\square EIJB : a\triangle BFJ = 1^2 : (3^2 - 1^2) : 1^2 = 1 : 8 : 1$$

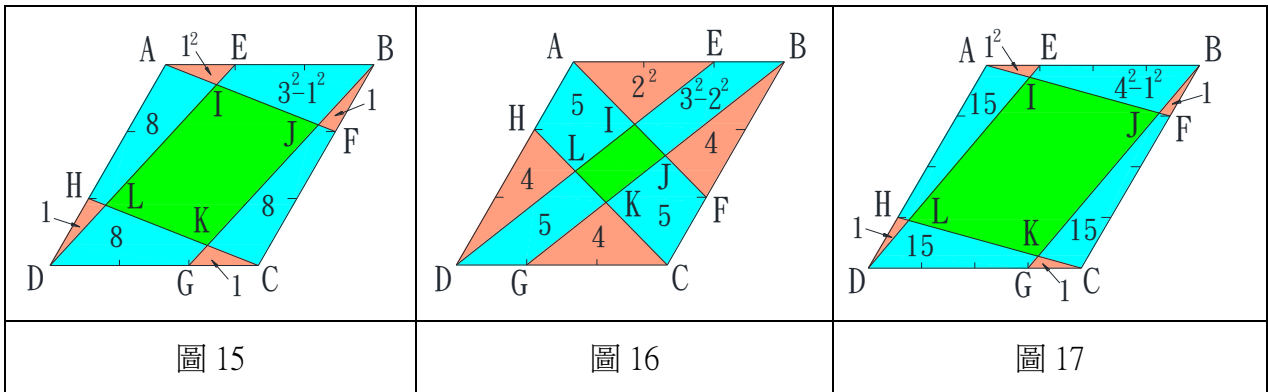
2. 令 $a\triangle ABF$ 為 10 ($=1+8+1$) 單位面積

$$a\triangle ABC = 3 \times a\triangle ABF \text{ (三角形同高)}$$

$$a\square ABCD = 2 \times a\triangle ABC = 6 \times a\triangle ABF = 6 \times 10 = 60 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore a\square IJKL = 60 - 4 \times (1+8) = 24 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore \frac{\text{平行四邊形 IJKL 面積}}{\text{平行四邊形 ABCD 面積}} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$



(三) 邊長為 3 等分有 2 個等分點，於第 2 等分點連線切割，如圖 16。

$$1. a\triangle AEI : a\square EIJB : a\triangle BFJ = 2^2 : (3^2 - 2^2) : 2^2 = 4 : 5 : 4$$

2. 令 $a\triangle ABF$ 為 13 ($=4+5+4$) 單位面積

$$a\triangle ABC = \frac{3}{2} \times a\triangle ABF \text{ (三角形同高)}$$

$$a\square ABCD = 2 \times a\triangle ABC = 3 \times a\triangle ABF = 3 \times 13 = 39 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore a\square IJKL = 39 - 4 \times (4+5) = 3 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore \frac{\text{平行四邊形 IJKL 面積}}{\text{平行四邊形 ABCD 面積}} = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}$$

(四) 邊長為 4 等分有 3 個等分點，於第 1 等分點連線切割，如圖 17。

$$1. a\triangle AEI : a\square EIJB : a\triangle BFJ = 1^2 : (4^2 - 1^2) : 1^2 = 1 : 15 : 1$$

2. 令 $a\triangle ABF$ 為 17 ($=1+15+1$) 單位面積

$$a\triangle ABC = 4 \times a\triangle ABF \text{ (三角形同高)}$$

$$a\Box ABCD = 2 \times a\triangle ABC = 8 \times a\triangle ABF = 8 \times 17 = 136 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore a\Box IJKL = 136 - 4 \times (1 + 15) = 72 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore \frac{\text{平行四邊形 IJKL 面積}}{\text{平行四邊形 ABCD 面積}} = \frac{72}{136} = \frac{9}{17}$$

(五) 邊長為 4 等分有 3 個等分點，於第 2 等分點連線切割，如圖 18。

$$\frac{2}{4} \text{ 等分即 } \frac{1}{2} \text{ 等分，} \therefore \frac{\text{平行四邊形 IJKL 面積}}{\text{平行四邊形 ABCD 面積}} = \frac{1}{5}$$

若以前述方法推算：

$$1. a\triangle AEI : a\Box EIJB : a\triangle BFJ = 2^2 : (4^2 - 2^2) : 2^2 = 1 : 3 : 1$$

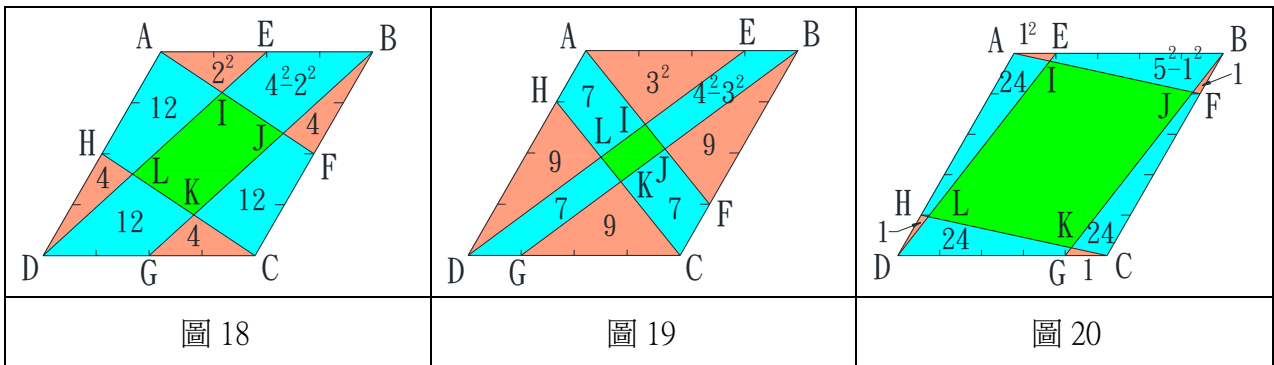
$$2. \text{ 令 } a\triangle ABF \text{ 為 } 5 (=1+3+1) \text{ 單位面積}$$

$$a\triangle ABC = \frac{4}{2} \times a\triangle ABF = 2 \times a\triangle ABF \text{ (三角形同高)}$$

$$a\Box ABCD = 2 \times a\triangle ABC = 4 \times a\triangle ABF = 4 \times 5 = 20 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore a\Box IJKL = 20 - 4 \times (1 + 3) = 4 \text{ 單位面積}$$

$$\therefore \frac{\text{平行四邊形 IJKL 面積}}{\text{平行四邊形 ABCD 面積}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$



(六) 邊長為 4 等分有 3 個等分點，於第 3 等分點連線切割，如圖 19。

$$1. a\triangle AEI : a\Box EIJB : a\triangle BFJ = 3^2 : (4^2 - 3^2) : 3^2 = 9 : 7 : 9$$

$$2. \text{ 令 } a\triangle ABF \text{ 為 } 25 (=9+7+9) \text{ 單位面積}$$

$$a\triangle ABC = \frac{4}{3} \times a\triangle ABF \text{ (三角形同高)}$$

$$a\Box ABCD = 2 \times a\triangle ABC = \frac{8}{3} \times a\triangle ABF = \frac{8}{3} \times 25 = \frac{200}{3} \text{ 單位面積}$$

$$\therefore a_{\square IJKL} = \frac{200}{3} - 4 \times (9+7) = \frac{8}{3} \text{ 單位面積}$$

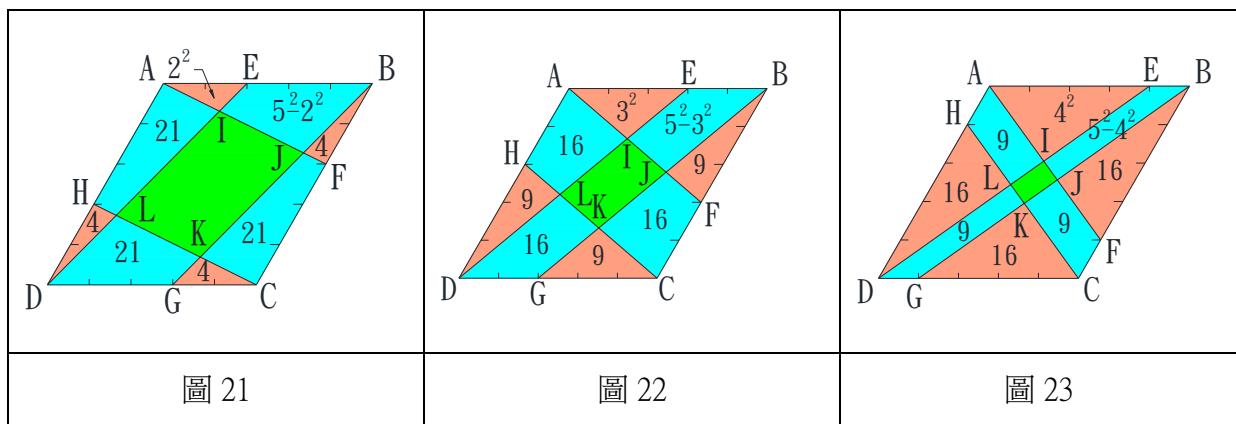
$$\therefore \frac{\text{平行四邊形 IJKL 面積}}{\text{平行四邊形 ABCD 面積}} = \frac{8}{3} \div \frac{200}{3} = \frac{1}{25}$$

(七) 邊長為 5 等分有 4 個等分點，於第 1 等分點連線切割，如圖 20。

$$\frac{\text{平行四邊形 IJKL 面積}}{\text{平行四邊形 ABCD 面積}} = \frac{8}{13}$$

(八) 邊長為 5 等分有 4 個等分點，於第 2 等分點連線切割，如圖 21。

$$\frac{\text{平行四邊形 IJKL 面積}}{\text{平行四邊形 ABCD 面積}} = \frac{9}{29}$$



(九) 邊長為 5 等分有 4 個等分點，於第 3 等分點連線切割，如圖 22。

$$\frac{\text{平行四邊形 IJKL 面積}}{\text{平行四邊形 ABCD 面積}} = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$$

(十) 邊長為 5 等分有 4 個等分點，於第 4 等分點連線切割，如圖 23。

$$\frac{\text{平行四邊形 IJKL 面積}}{\text{平行四邊形 ABCD 面積}} = \frac{1}{41}$$

(十一) 邊長有 $n-1$ 個等分點 (n 個等分數)，於第 m 個等分點 ($\frac{m}{n}$ 等分) 切割。

如圖 24， $\overline{AB} = \overline{CD}$ 為 n_x 單位長， $\overline{BC} = \overline{DA}$ 為 n_y 單位長， $\overline{AE} = \overline{CG}$ 為 m_x 單位長， $\overline{BF} = \overline{DH}$ 為 m_y 單位長，


$$\therefore \overline{AI} : \overline{AJ} = \overline{AE} : \overline{AB} = \overline{EI} : \overline{BJ} = m : n$$

$$\therefore a \triangle AEI : a \triangle ABJ = m^2 : n^2$$

$$\therefore \overline{FJ} : \overline{CK} = \overline{BF} : \overline{BC} = m : n \quad \text{又} \quad \overline{AI} = \overline{CK}$$

$$\therefore \overline{\text{FJ}} : \overline{\text{AI}} = m : n$$

$$\therefore \overline{FJ} : \overline{AI} : \overline{AJ} = m^2 : mn : n^2$$

$$\therefore a\triangle BFJ : a\triangle ABJ = m^2 : n^2 \text{ (三角形同高)}$$

$$3、a\triangle BFI=a\triangle AEI，且 a\triangle ABJ=\frac{n^2}{n^2+m^2}\times a\triangle ABF$$

$$4、a\triangle CDL=a\triangle ABJ=\frac{n^2}{n^2+m^2}\times a\triangle ABF$$

$$\text{同理可證 } a\triangle BCK = a\triangle DAI = \frac{n^2}{n^2 + m^2} \times a\triangle BCG$$

$$5、a\triangle ABC=\frac{1}{2}\times a\square ABCD$$

$$a\triangle ABF = \frac{m}{n} \times a\triangle ABC = \frac{m}{n} \times \frac{1}{2} \times a\Box ABCD \quad (\text{三角形同高})$$

$$a_{\triangle ABJ} = \frac{n^2}{n^2 + m^2} \times a_{\triangle ABF}$$

$$= \frac{n^2}{n^2 + m^2} \times \frac{m}{n} \times \frac{1}{2} \times a_{\square ABCD} = \frac{nm}{n^2 + m^2} \times \frac{1}{2} \times a_{\square ABCD}$$

$$a\triangle CDK = a\triangle ABJ = \frac{nm}{n^2 + m^2} \times \frac{1}{2} \times a\square ABCD$$

$$\text{同理可證 } a\triangle BCL = a\triangle DAI = \frac{nm}{n^2 + m^2} \times \frac{1}{2} \times a\Box ABCD$$

6、平行四邊形 IJKL 面積

$$= a\Box ABCD - a\triangle ABJ - a\triangle BCL - a\triangle CDK - a\triangle DAI$$

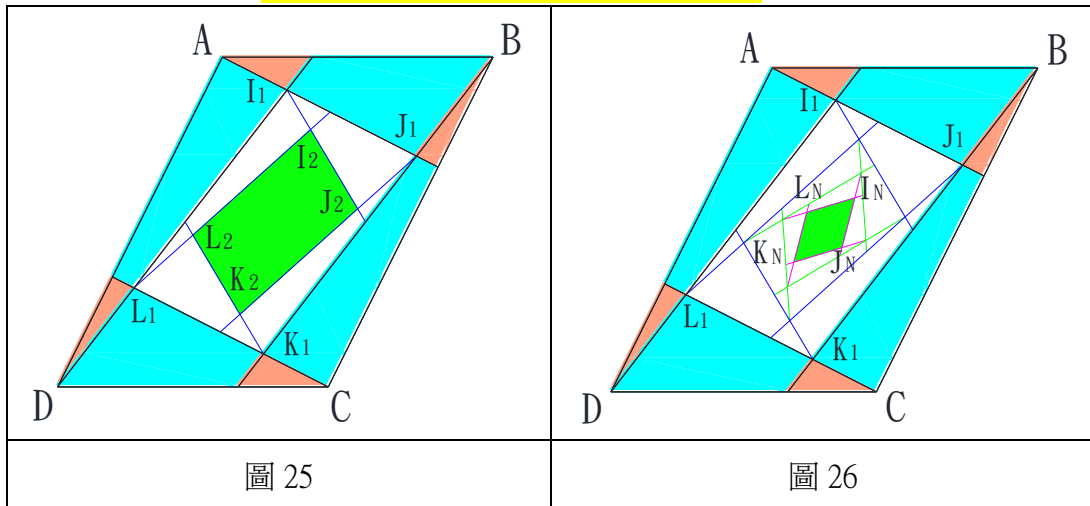
$$= a\Box ABCD - 4 \times \frac{nm}{n^2 + m^2} \times \frac{1}{2} \times a\Box ABCD$$

$$= \left(1 - \frac{2nm}{n^2 + m^2}\right) \times a\Box ABCD$$

$$= \frac{n^2 + m^2 - 2nm}{n^2 + m^2} \times a\Box ABCD$$

$$= \frac{(n-m)^2}{n^2 + m^2} \times \text{平行四邊形 ABCD 面積}$$

$$\therefore \frac{\text{平行四邊形 IJKL 面積}}{\text{平行四邊形 ABCD 面積}} = \frac{(n-m)^2}{n^2 + m^2}$$



(十二) 因為 $\Box I_1J_1K_1L_1$ 為平行四邊形，所以探討 $a\Box I_2J_2K_2L_2$ 與 $a\Box ABCD$ 之

比值時可利用 (十一) 之結果，故可得 $\left[\frac{(n-m)^2}{n^2 + m^2}\right]^2$ ，如圖 25。

(十三) 根據 (十一)、(十二)，可得 $a\Box I_NJ_NK_NL_N$ 與 $a\Box ABCD$ 比值為

$$\left[\frac{(n-m)^2}{n^2 + m^2}\right]^N，\text{如圖 26。}$$

(十四) 由伍、二、(一) 至 (十三) 歸納如下表。

從歸納中本組發現 $\frac{\text{平行四邊形 IJKL 面積}}{\text{平行四邊形 ABCD 面積}}$ 的分母等於 $(\text{等分數}^2 + \text{等分點}^2)$

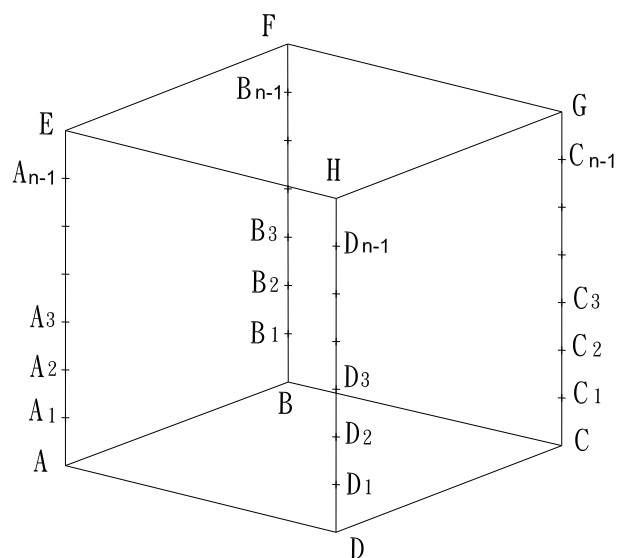
時，分子剛好等於 $(\text{等分數} - \text{等分點})^2$ ，因此推論得到規律

$$\frac{\text{平行四邊形 } I_N J_N K_N L_N \text{ 面積}}{\text{平行四邊形 } ABCD \text{ 面積}} = \left[\frac{(\text{等分數} - \text{等分點})^2}{\text{等分數}^2 + \text{等分點}^2} \right]^N = \left[\frac{(n-m)^2}{n^2 + m^2} \right]^N$$

等分數	等分點	連接情形	$\frac{\text{平行四邊形 } IJKL \text{ 面積}}{\text{平行四邊形 } ABCD \text{ 面積}}$	$\frac{\text{平行四邊形 } I_N J_N K_N L_N \text{ 面積}}{\text{平行四邊形 } ABCD \text{ 面積}}$
2	1	連接第 1 等分點	$\frac{1}{5}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^N$
3	2	連接第 1 等分點	$\frac{2}{5} \left(= \frac{4}{10} \right)$	$\left(\frac{2}{5}\right)^N \left(= \frac{4}{10} \right)^N$
3	2	連接第 2 等分點	$\frac{1}{13}$	$\left(\frac{1}{13}\right)^N$
4	3	連接第 1 等分點	$\frac{9}{17}$	$\left(\frac{9}{17}\right)^N$
4	3	連接第 2 等分點	$\frac{1}{5} \left(= \frac{4}{20} \right)$	$\left(\frac{1}{5}\right)^N \left(= \frac{4}{20} \right)^N$
4	3	連接第 3 等分點	$\frac{1}{25}$	$\left(\frac{1}{25}\right)^N$
5	4	連接第 1 等分點	$\frac{8}{13} \left(= \frac{16}{26} \right)$	$\left(\frac{8}{13}\right)^N \left(= \frac{16}{26} \right)^N$
5	4	連接第 2 等分點	$\frac{9}{29}$	$\left(\frac{9}{29}\right)^N$
5	4	連接第 3 等分點	$\frac{2}{17} \left(= \frac{4}{34} \right)$	$\left(\frac{2}{17}\right)^N \left(= \frac{4}{34} \right)^N$
5	4	連接第 4 等分點	$\frac{1}{41}$	$\left(\frac{1}{41}\right)^N$
n	n-1	連接第 m 等分點	$\frac{(n-m)^2}{n^2 + m^2}$	$\left[\frac{(n-m)^2}{n^2 + m^2} \right]^N$

三、 探討正立方體 Z 軸邊長上等分點，往相鄰兩平面的頂點連成切面，切割後剩餘的體積與原正立方體的關係為何？

(一) 正六面體使用符號之說明。如下圖：



ABCD — EFGH 為正六面體，其中 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ 為 $\overline{AE}$ 之 $n-1$ 個等分點

$B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}$ 為 $\overline{BF}$ 之 $n-1$ 個等分點

$C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}$ 為 $\overline{CG}$ 之 $n-1$ 個等分點

$D_1, D_2, D_3, \dots, D_{n-1}$ 為 $\overline{DH}$ 之 $n-1$ 個等分點

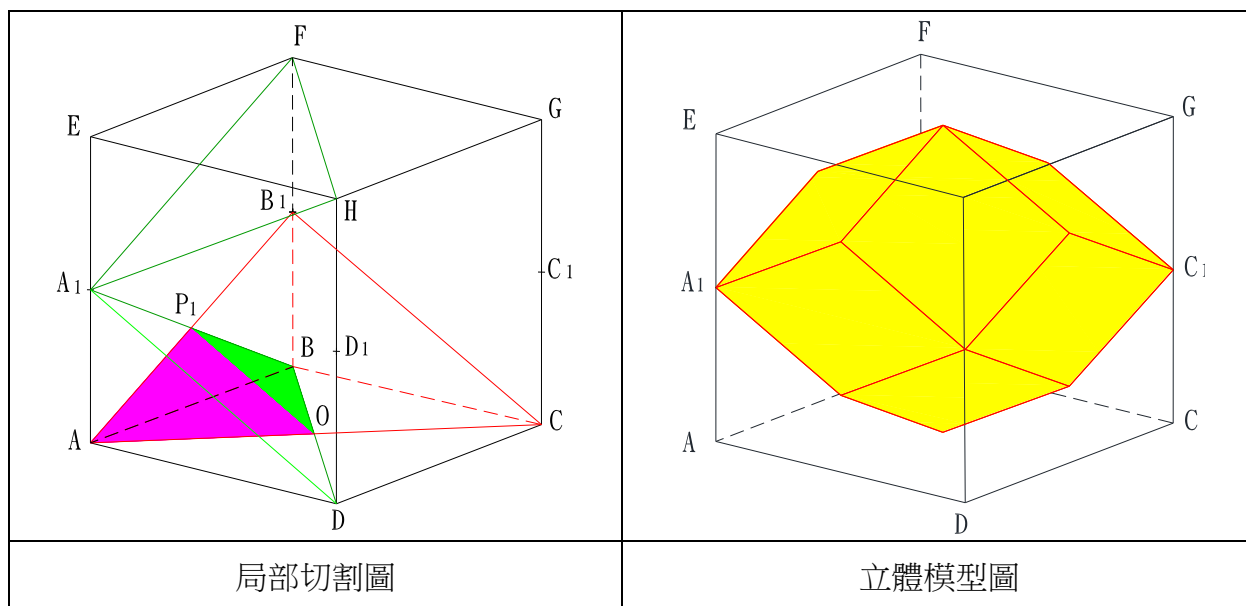
令 $\overline{A_i A_j}, \overline{B_i B_j}, \overline{C_i C_j}, \overline{D_i D_j}$ 分別為其中位於最中間的 k 個等分所成之線段，當然 k 與 n 的奇、偶性相同，其中 $i \leq j, k = j - i$ 。

若切去下列四面體 $A_j - ABD, B_j - BCA, C_j - CBD, D_j - DAC$

$A_i - EFH, B_i - FEG, C_i - GFH, D_i - HEG$

我們想探討所剩下的多面體之體積是原正方體的幾倍，不妨令原正方體之邊長為 1。

(二) Z 軸邊長上為 2 等分、有 1 個等分點，從等分點往相鄰兩平面的頂點連成切面，如下圖：



$n=2, k=0$ 時, (此時, $i=j=1$)

考慮四面體 A_1-ABD 與 B_1-BAC 的重疊部分為四面體 P_1-ABO

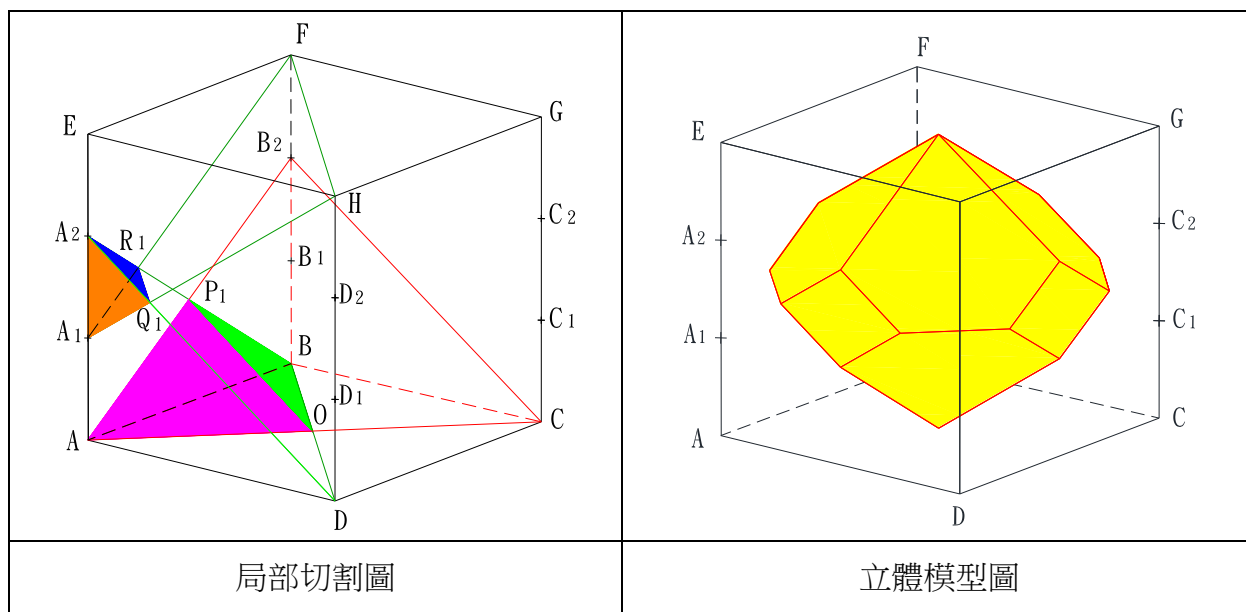
其中四面體 A_1-ABD 體積為 $\frac{1}{6} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \overline{AA_1} = \frac{1}{12}$

四面體 P_1-ABO 體積為 $\frac{1}{3} \times (\triangle OAB) \times d(P_1, \overline{AB}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$

其中 $d(P_1, \overline{AB})$ 表示 P_1 到 $\overline{AB}$ 之距離

所以, 所剩下多面體的體積為 $1 - \frac{1}{12} \times 8 + \frac{1}{48} \times 8 = \frac{1}{2}$

(三) Z 軸邊長上為 3 等分、有 2 個等分點, 從等分點往相鄰兩平面的頂點連成交叉切面, 如下圖:



$n=3, k=1$ 時, (此時 $i=1, j=2$)

考慮四面體 A_2-ABD 與 B_2-BAC 的重疊部分為四面體 P_1-ABO

四面體 A_1-EFH 與 A_2-ABD 的重疊部分為四面體 $Q_1-A_1A_2R_1$

其中四面體 A_2-ABD 體積為 $\frac{1}{6} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \overline{AA_2} = \frac{1}{9}$

四面體 P_1-ABO 體積為 $\frac{1}{3} \times (\Delta OAB) \times d(P_1, \overline{AB}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$

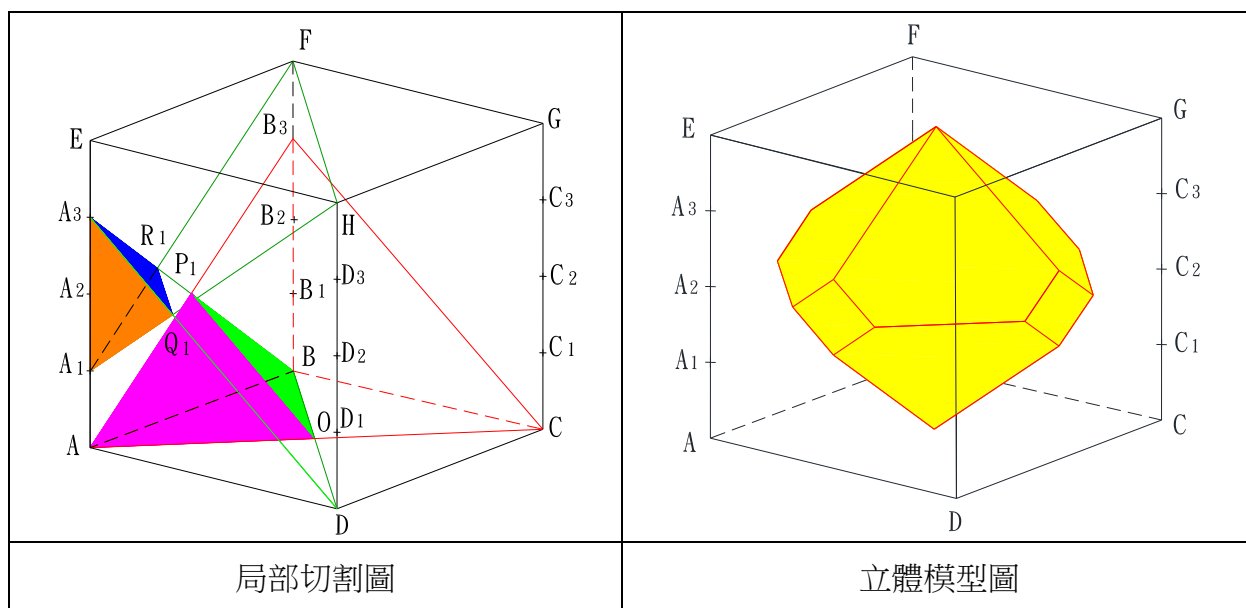
四面體 $Q_1-A_1A_2R_1$ 體積為 :

$$\frac{1}{3} \times (\Delta A_1A_2R_1) \times d(Q_1, \overline{AE}) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \right) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{288}$$

所以, 所剩下多面體之體積為 $1 - \frac{1}{9} \times 8 + \frac{1}{36} \times 8 + \frac{1}{288} \times 4 = \frac{25}{72}$

(四) Z 軸邊長上為 4 等分、有 3 個等分點, 從等分點往相鄰兩平面的頂點連成交叉

切面，如下圖：



$n=4, k=2$ 時，（此時 $i=1, j=3$ ）

考慮四面體 A_3-ABD 與 B_3-BAC 之重疊部分為四面體 P_1-ABO

四面體 A_1-EFH 與 A_3-ABD 之重疊部分為四面體 $Q_1-A_1A_3R_1$

其中四面體 A_3-ABD 體積為 $\frac{1}{6} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \overline{AA_3} = \frac{1}{8}$

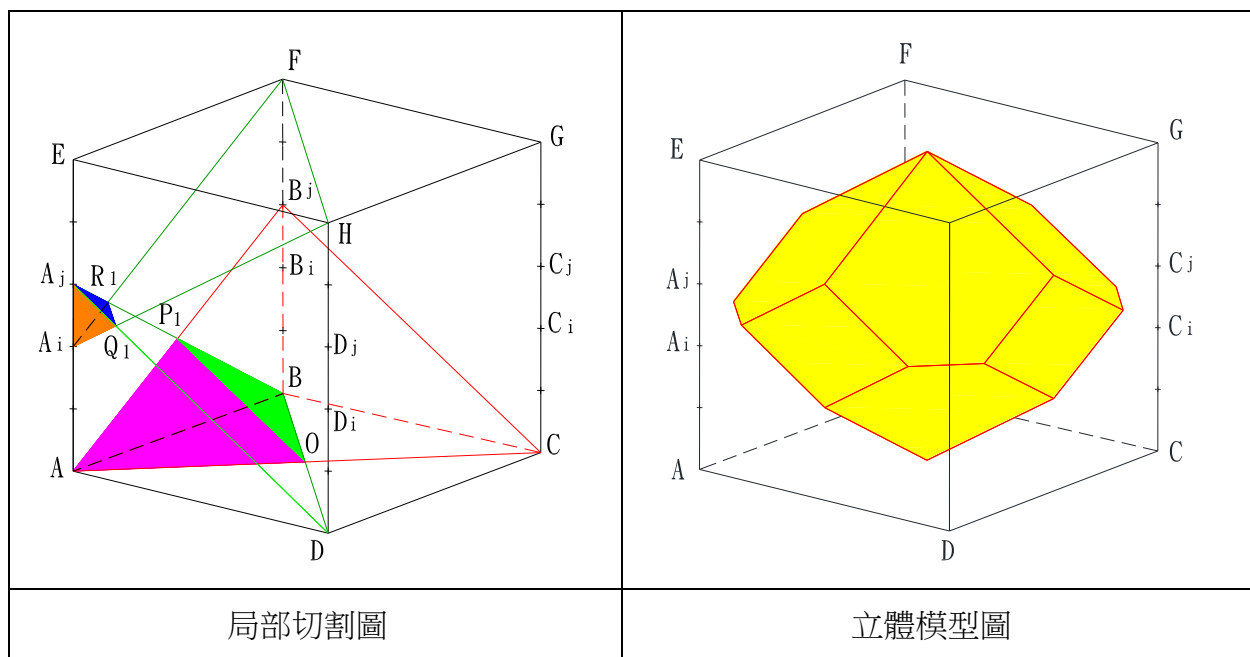
四面體 P_1-ABO 體積為 $\frac{1}{3} \times (\Delta OAB) \times d(P_1, \overline{AB}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{32}$

四面體 $Q_1-A_1A_3R_1$ 體積為

$$\frac{1}{3} \times (\Delta A_1A_3R_1) \times d(Q_1, \overline{A_1A_3}) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{108}$$

所以，所剩下多面體之體積為 $1 - \frac{1}{8} \times 8 + \frac{1}{32} \times 8 + \frac{1}{108} \times 4 = \frac{31}{108}$

（五） Z 軸邊長上為 n 等分、有 $n-1$ 個等分點，從等分點往相鄰兩平面的頂點連成交叉切面，如下圖：



現在推一般情形的公式，

考慮四面體 A_j-ABD 與 B_j-BAC 之重疊部分為四面體 P_1-ABO

四面體 A_i-EFH 與 A_j-ABD 之重疊部分為四面體 $Q_1-A_iA_jR_1$

其中四面體 A_j-ABD 之體積為 $\frac{1}{6} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \overline{AA_j} = \frac{n+k}{12n}$

四面體 P_1-ABO 之體積為

$$\frac{1}{3} \times (\triangle OAB) \times d(P_1, \overline{AB}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{n+k}{4n} = \frac{n+k}{48n}$$

四面體 $Q_1-A_iA_jR_1$ 體積為：

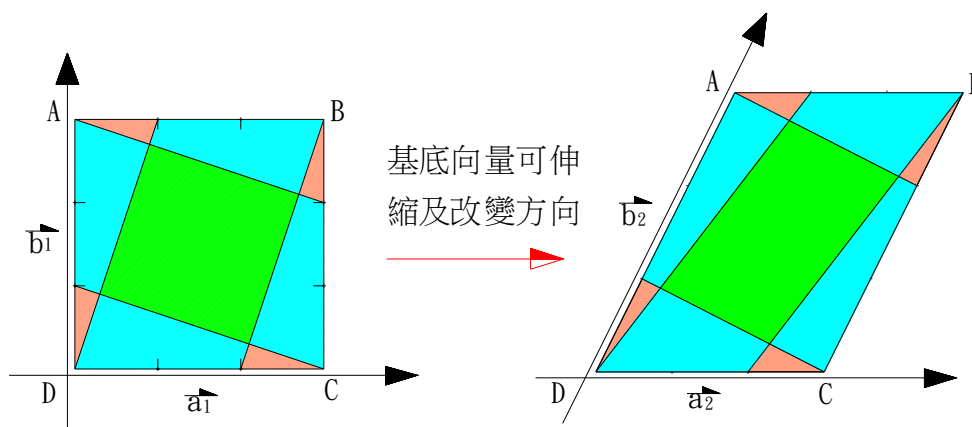
$$\frac{1}{3} \times (\triangle A_iA_jR_1) \times d(Q_1, \overline{AE}) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{k}{n} \times \frac{k}{n+k} \right) \times \frac{k}{n+k} = \frac{k^3}{6n(n+k)^2}$$

所以，所剩下之多面體之體積為：

$$1 - \frac{n+k}{12n} \times 8 + \frac{n+k}{48n} \times 8 + \frac{k^3}{6n(n+k)^2} \times 4 = 1 - \frac{n+k}{2n} + \frac{2k^3}{3n(n+k)^2}$$

四、 探討平行六面體 Z 軸邊長上等分點，往相鄰兩平面的頂點連成切面，切割後
剩餘的體積與原平行六面體的比值為何？

(一) 引入向量空間基底的概念



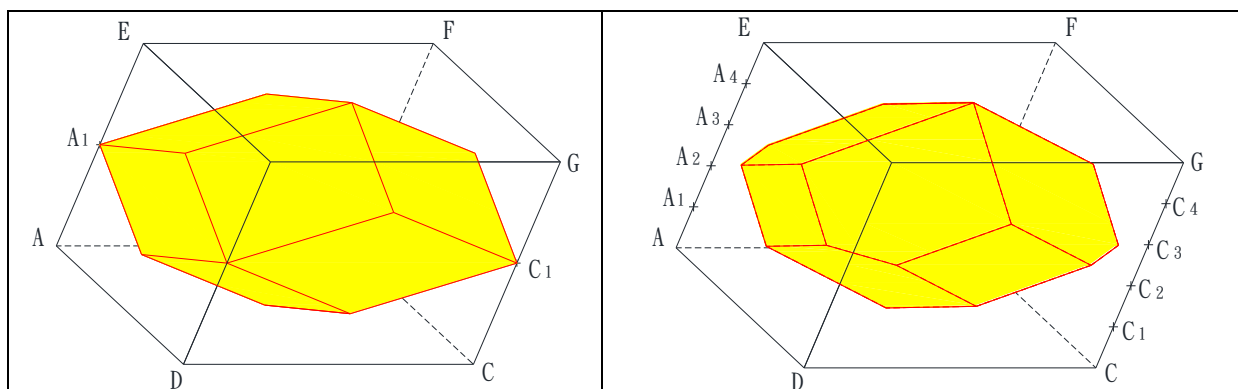
以上兩種不同的基底，所對應產生的座標系統並無差別，所有新舊對應點的座標皆不變，所有對應直線之方程式皆不變，所有交點的座標亦不變，所以同一個圖裡的各區域之面積比不變。

由以上的概念得知，**正方形中的結論**(指中間區域與整個圖形之面積比) **可推廣至平行四邊形**。

現在**考慮三度空間的情形**，由上述的討論得知，**只要討論正立方體的情形**，所得之體積比可推廣至平行六面體，仍可成立。

(二) 由以上結論得知：平行六面體切割後，所剩下之多面體的體積與原六面體之

比值為：
$$1 - \frac{n+k}{2n} + \frac{2k^3}{3n(n+k)^2}$$



以下列舉了兩種不同等分數，切割後呈現出的立體模型圖。

陸、研究結果

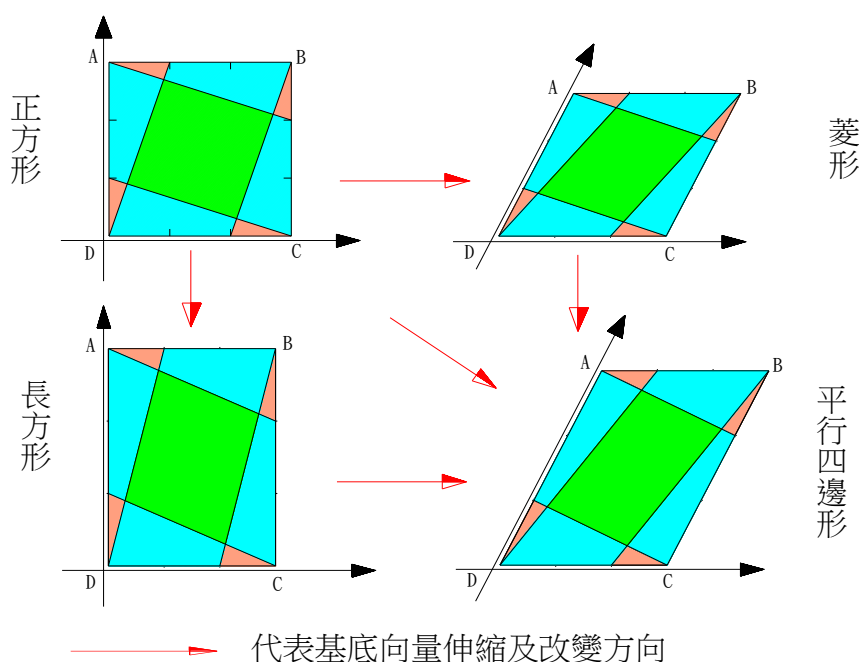
- 一、 從正方形四個頂點往對邊上任一等分點連線切割後，所剩餘四邊形為正方形，且

剩餘四邊形面積為原正方形的 $\left[\frac{(\text{等分數}-\text{等分點})^2}{\text{等分數}^2+\text{等分點}^2} \right]^N$ 。 N 代表第 N 層切割。

- 二、 從平行四邊形四個頂點往對邊上任一等分點連線切割後，所剩餘四邊形為平行四

邊形，且剩餘四邊形面積為原平行四邊形的 $\left[\frac{(\text{等分數}-\text{等分點})^2}{\text{等分數}^2+\text{等分點}^2} \right]^N$ 。

- 三、 矩形及菱形的初步結果與平行四邊形一樣，所剩餘四邊形為平行四邊形，因此納入平行四邊形討論。本組用伍、四、(一) 向量概念加以驗證，此論點是正確的。



- 四、 從正立方體 Z 軸邊長上等分點，往相鄰兩平面的頂點連成切面，切割後剩餘的體積與原正立方體的比值為：

$$1 - \frac{\text{等分數} + \text{重疊等分數}}{2 \times \text{等分數}} + \frac{2 \times \text{重疊等分數}^3}{3 \times \text{等分數} (\text{等分數} + \text{重疊等分數})^2}$$

- 五、 從平行六面體 Z 軸邊長上等分點，往相鄰兩平面的頂點連成切面，切割後

剩餘的體積與原平行六面體的比值為：

$$1 - \frac{\text{等分數} + \text{重疊等分數}}{2 \times \text{等分數}} + \frac{2 \times \text{重疊等分數}^3}{3 \times \text{等分數}(\text{等分數} + \text{重疊等分數})^2}$$

柒、討論

一、 在研究的過程中，本組應用了

(一) 國小課程中的幾何基礎，再加上國中課程中三角形基本性質（全等三角形）

【參考資料一、三、五】、平行（對頂角相等）、相似三角形

【參考資料 三、六】以及幾何與證明

【參考資料一、二、六】等幾何概念，順利完成本研究。

(二) 幾何圖形的製作【參考資料一、三、五】，應用 AutoCAD 2004 電腦繪圖。

(三) 勾股定律【參考資料一、二、四】，此結果是否可用來證明勾股定律？

$$(1) \text{ 令 } \overline{AI} = mx, \overline{AJ} = nx$$

$$\text{則 } \overline{IJ} = (n-m)x, \overline{BJ} = \overline{AI} = mx$$

$$\text{正方形 IJKL 面積} = \overline{IJ}^2 = [(n-m)x]^2 = (n-m)^2 x^2$$

(2) 由伍、一、(一) 證得

$$\text{正方形 IJKL 面積} = \frac{(n-m)^2}{n^2 + m^2} \times \text{正方形 ABCD 面積}$$

$$(3) \text{ 正方形 ABCD 面積} = \frac{n^2 + m^2}{(n-m)^2} \times \text{正方形 IJKL 面積} \\ = (n^2 + m^2)x^2$$

以直角三角形 ABJ 而言

$$\overline{AJ}^2 + \overline{BJ}^2 = n^2 x^2 + m^2 x^2 = (n^2 + m^2)x^2 = \overline{AB}^2$$

故可以用此結果來證明勾股定律。

二、 在研究的結果中，本研究發現了

(一) 若已知內外面積比為 $\frac{25}{53}$ ，則可由公式反推原四邊形為幾個等分數？連接至第幾個等分點？

$$\therefore \frac{\text{正方形 IJKL 面積}}{\text{正方形 ABCD 面積}} = \frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} = \frac{25}{53}$$

$$\therefore \frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} = \frac{n^2-2nm+m^2}{n^2+m^2} = \frac{25}{53}$$

$$53n^2 - 106nm + 53m^2 = 25n^2 + 25m^2$$

$$28n^2 - 106nm + 28m^2 = 0$$

$$14n^2 - 53nm + 14m^2 = 0$$

$$(7n - 2m)(2n - 7m) = 0$$

$$\therefore n > m \quad \therefore 2n = 7m$$

$$\frac{m}{n} = \frac{2}{7} \quad \text{即為 7 個等分數，連接第 2 個等分點}$$

(二) 若已知第四層的面積和原四邊形面積的比值為 $\frac{1}{625}$ ，反推原四邊形為幾個等分數？連接至第幾個等分點？

$$\therefore \frac{\text{平行四邊形 } I_4J_4K_4L_4 \text{ 面積}}{\text{平行四邊形 } ABCD \text{ 面積}} = \left[\frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} \right]^4 = \frac{1}{625} = \left(\frac{1}{5} \right)^4$$

$$\therefore \frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} = \frac{n^2-2nm+m^2}{n^2+m^2} = \frac{1}{5}$$

$$5n^2 - 10nm + 5m^2 = n^2 + m^2$$

$$4n^2 - 10nm + 4m^2 = 0$$

$$(2n - 4m)(2n - m) = 0$$

$$\therefore n > m \quad \therefore 2n = m$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2} \quad \text{即為 2 個等分數，連接第 1 個等分點，連續做四層切割。}$$

(三) 已知內外面積比為 $\frac{32}{3125}$ ，反推原四邊形為幾個等分數？連接至第幾個等分點？並連續做幾層切割？

$$\frac{32}{3125} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{2^5}{5^5} \quad (\text{因式分解})$$

$$\frac{\text{正方形 } I_N J_N K_N L_N \text{ 面積}}{\text{正方形 } ABCD \text{ 面積}} = \left[\frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} \right]^N = \frac{32}{3125} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{2^5}{5^5} = \left(\frac{2}{5} \right)^5$$

得知 $N=5$ ，即為第 5 層

$$\frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} = \frac{n^2-2nm+m^2}{n^2+m^2} = \frac{2}{5}$$

$$5n^2 - 10nm + 5m^2 = 2n^2 + 2m^2$$

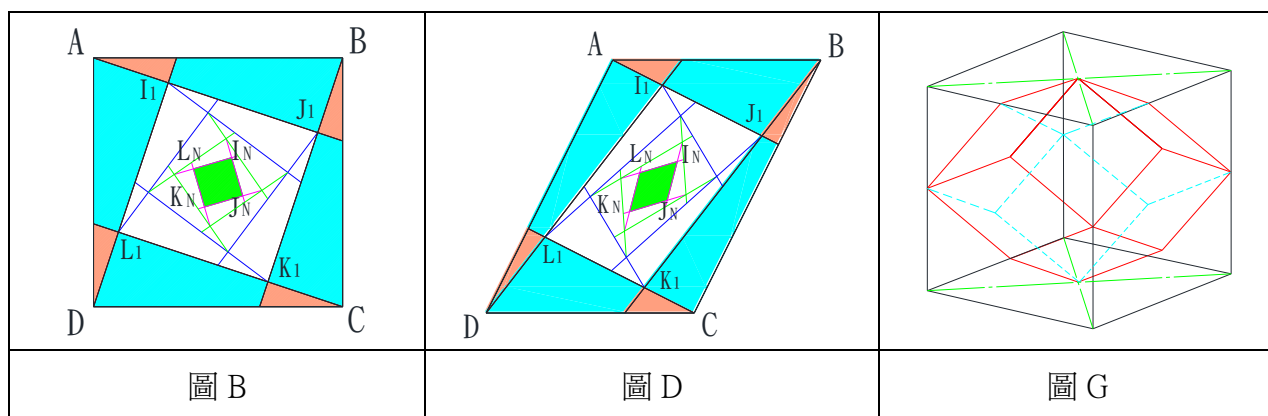
$$3n^2 - 10nm + 3m^2 = 0$$

$$(3n-m)(n-3m) = 0$$

$$\therefore n > m \quad \therefore n = 3m$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{3} \quad \text{即為 3 個等分數，連接第 1 個等分點，連續做 5 層切割。}$$

捌、結論



一、研究目的一與二之結果，得知正方形切割後的內外面積比可歸納為：

$$\frac{\text{正方形 } I_N J_N K_N L_N \text{ 面積}}{\text{正方形 } ABCD \text{ 面積}} = \left[\frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} \right]^N$$

其中 N 代表第 N 層、 n 為等分數、 m 為等分點。

二、研究目的三與四之結果，得之平行四邊形切割後的內外面積比可歸納為：

$$\frac{\text{平行四邊形 } I_N J_N K_N L_N \text{ 面積}}{\text{平行四邊形 } ABCD \text{ 面積}} = \left[\frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} \right]^N$$

三、研究目的五之結果，得知正立方體切割後的內外面積比： $1 - \frac{n+k}{2n} + \frac{2k^3}{3n(n+k)^2}$

其中 n 代表等分數、 k 代表重疊的等分數。

四、 研究目的六之結果，得知平行六面體切割後的內外面積比： $1 - \frac{n+k}{2n} + \frac{2k^3}{3n(n+k)^2}$

玖、參考資料

- 一、 黃家禮（1997）：幾何明珠。九章出版社。
- 二、 沈文選等（2005）：四邊形——從分解到組合。九章出版社。
- 三、 何尚儒等：國中幾何——證題法要訣。建弘出版社。
- 四、 國中數學課本：第3冊第二章勾股定律。康軒文教。
- 五、 國中數學課本：第4冊第二章幾何圖形。第三章三角形基本性質。
第四章平行。康軒文教。
- 六、 國中數學課本：第5冊第一章相似形。第三章幾何與證明。康軒文教。
- 七、 陳一禮（2012）：空間向量。建興出版社。
- 八、 第47屆全國科展：正多邊形母子面積比。
- 九、 第49屆全國科展：巢狀切割對內部子圖的探討。

【評語】 030402

本作品探討四邊形各邊取一點連接後，所得新的四邊形，與原四邊形面積之比，也討論若干相關問題，並給適當的推廣。此為一適合國中生程度，且能引發學生對於幾何之興趣的問題。作品推導過程若能加以歸納，將可更簡潔地呈現。另外，若能考慮各邊取點之比例不同，將會更有價值。