中華民國第 54 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030401

三角形等角、等截、角比例共軛點之推廣研究

學校名稱：新北市立文山國民中學

作者：	指導老師：
國二 鄭容濤 國二 郭立生	蕭偉智

關鍵詞：齊次坐標、二次變換、二次曲線

三角形等角、等截、角比例共軛點之推廣研究

摘要

本文透過齊次坐標研究三角形的等角、等截、角比例共軛點變換，其中角比例共軛點是全新主題，接著研究自創的Q_n共軛變換。首先，我們證明三種共軛點「存在性」，並提出統整性定理「無窮遠點的Q_n共軛軌跡為二次曲線S」與「S曲線上過三頂點切線交點的三線坐標」，透過前述定理證明無窮遠點關於ΔABC的角比例共軛點軌跡是內切於其旁心三角形的橢圓，這是本文獨創發現。第二，我們一般化推廣「無窮遠點」關於ΔABC的「Q_n共軛點」為二次曲線及找出其判別式（橢圓、拋物線、雙曲線的判別式），並類推到「直線」關於ΔABC的Q_n共軛點軌跡為二次曲線及其判別條件。最後，本文討論更一般化情形無窮遠點及直線的 Cremona 變換。

壹、研究動機

《數學傳播》曾刊登〈角比例共軛點〉一文，該文首次提出「角比例共軛點」，結論十分美麗且具有對稱之美（陳建燁，2011），引起我們極高興趣。然而，該文討論角比例共軛點僅限於三角形內部討論，所以我們想將共軛點存在性作探討與推廣，並研究共軛點的重心坐標、三線坐標、三極坐標系統。最後目標將等角、等截、角比例共軛變換整合，透過合成函數推廣新的Q_n共軛點、並且一般化證明「無窮遠點」與「直線」的Q_n共軛軌跡及其判別式。

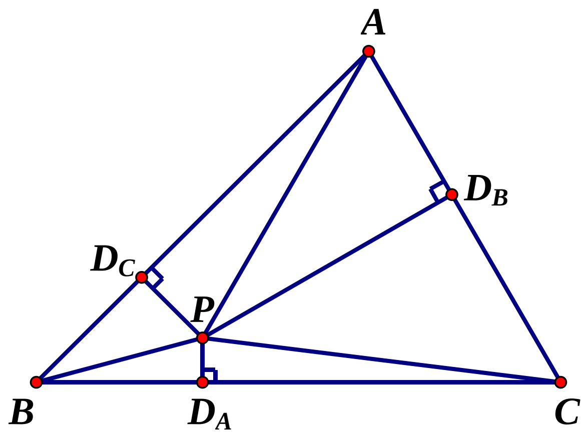
貳、名詞定義

一、坐標系統：

1.重心坐標（Barycentric Coordinates）：在ΔABC所在平面上取一點 P，將三角形有向面積比$(\Delta PBC:\Delta PCA:\Delta PAB)=(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$定義為 P 點的重心坐標。

2.三線坐標（Trilinear Coordinates）：在ΔABC所在平面上取一點 P，自點 P 分別作直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$的垂足D_A、D_B、D_C，則定義 P 點的三線坐標為有向線段比$(\overrightarrow{PD_A}:\overrightarrow{PD_B}:\overrightarrow{PD_C})$。

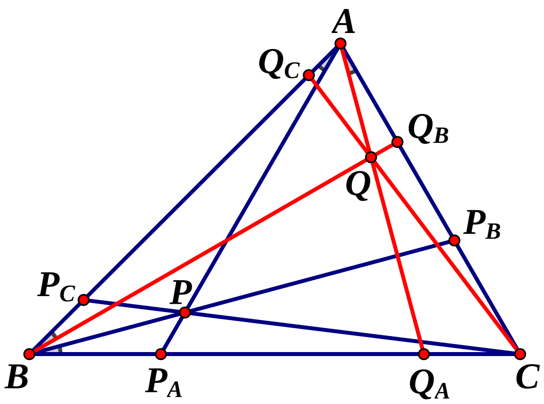
3.三極坐標（Tripolar Coordinates）：在ΔABC所在平面上取一點 P，連接$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$，則定義 P 點的三極坐標為線段距離比$(\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC})$。

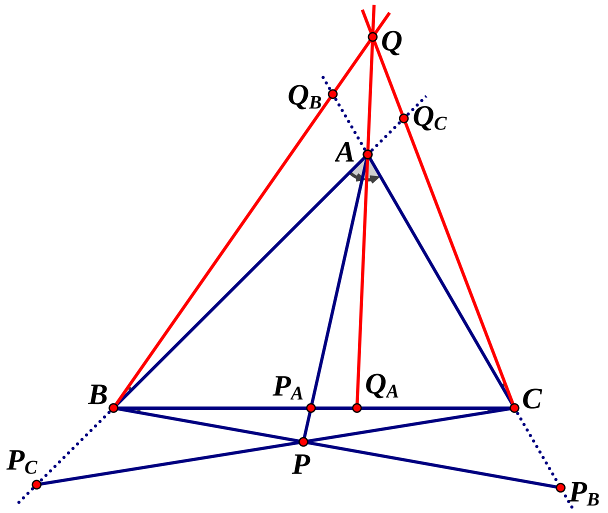


二、共軛點：

1.等角共軛點：在ΔABC所在平面上取一點 P，將$\overline{AP}$、$\overline{BP}$、$\overline{CP}$分別延長至$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$或其延長線上，其交點分別為點P_A、P_B、P_C。在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$或其延長線上作點Q_A、Q_B、Q_C，使得有向角$\angle CAQ_A = \angle P_AAB$、有向角$\angle ABQ_B = \angle P_BBC$、有向角$\angle ACQ_C = \angle P_CCB$。若直線$\overleftrightarrow{AQ_A}$、$\overleftrightarrow{BQ_B}$、$\overleftrightarrow{CQ_C}$三線共點於 Q，則定義點 Q 為點 P 對ΔABC的「**等角共軛點**」，反之亦然。

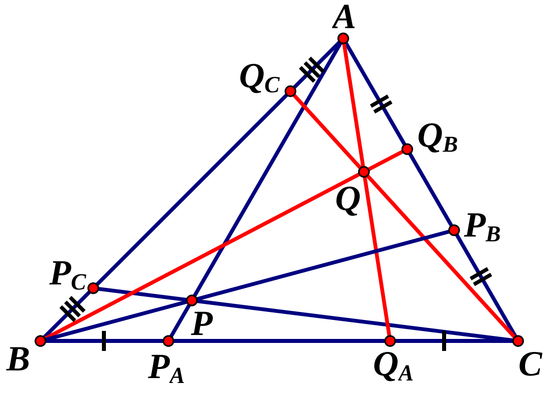
2.等角自共軛點：若點 P 的等角共軛點 Q 點與其重合，則定義其為等角自共軛點。

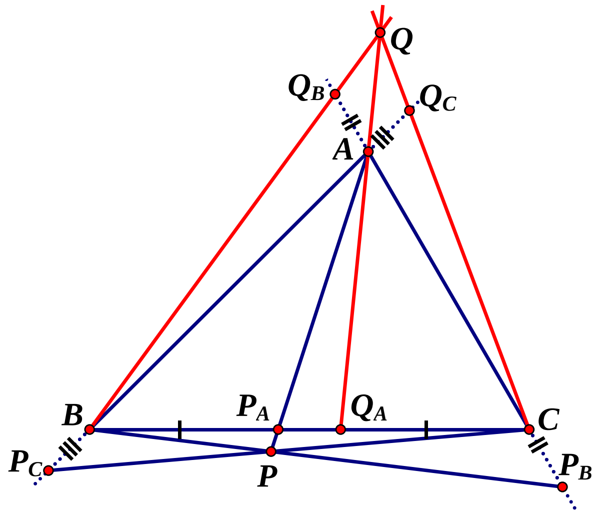




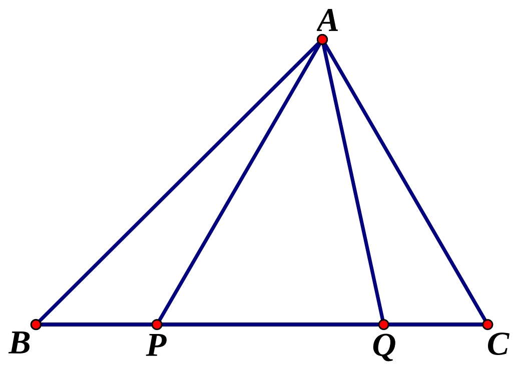
3.等截共軛點：在ΔABC所在平面上取一點 P，將$\overline{AP}$、$\overline{BP}$、$\overline{CP}$分別延長至$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$或其延長線上，其交點分別為點P_A、P_B、P_C。在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$或其延長線上作點Q_A、Q_B、Q_C，使得向量$\overrightarrow{Q_AC} = \overrightarrow{BP_A}$、向量$\overrightarrow{Q_BA} = \overrightarrow{CP_B}$、向量$\overrightarrow{Q_CA} = \overrightarrow{BP_C}$。若直線$\overleftrightarrow{AQ_A}$、$\overleftrightarrow{BQ_B}$、$\overleftrightarrow{CQ_C}$三線共點於 Q，則定義點 Q 為點 P 對ΔABC的「**等截共軛點**」，反之亦然。

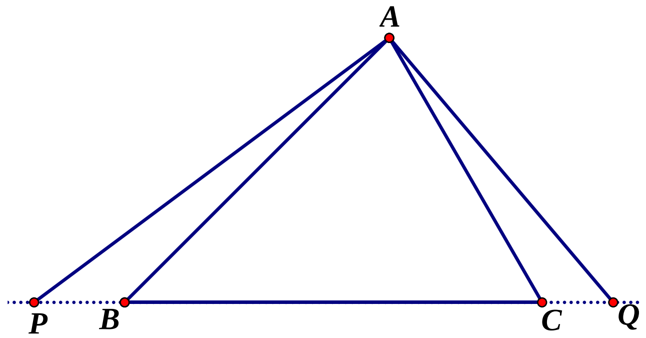
4.等截自共軛點：若點 P 的等截共軛點 Q 點與其重合，則定義其為等截自共軛點。





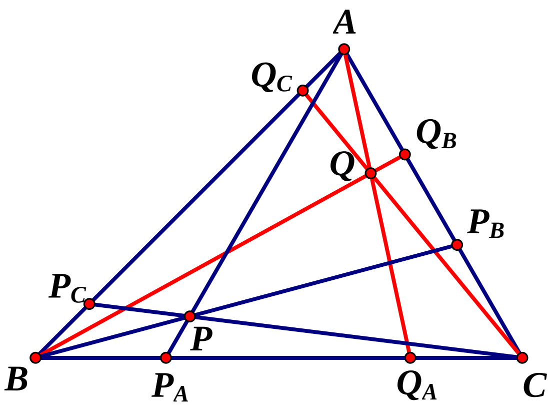
5.角比例表現點：在ΔABC平面上，點 P、Q 為$\overline{BC}$邊上或其延長線上的兩點，若有向比值$\frac{\sin\angle BAQ}{\sin\angle QAC} = \frac{\overline{PC}}{\overline{BP}}$，若且唯若有向比值$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle PAC} = \frac{\overline{QC}}{\overline{BQ}}$。P 點稱為 Q 直線$\overleftrightarrow{BC}$上的角比例表現點且 Q 也是 P 在直線$\overleftrightarrow{BC}$上的角比例表現點。

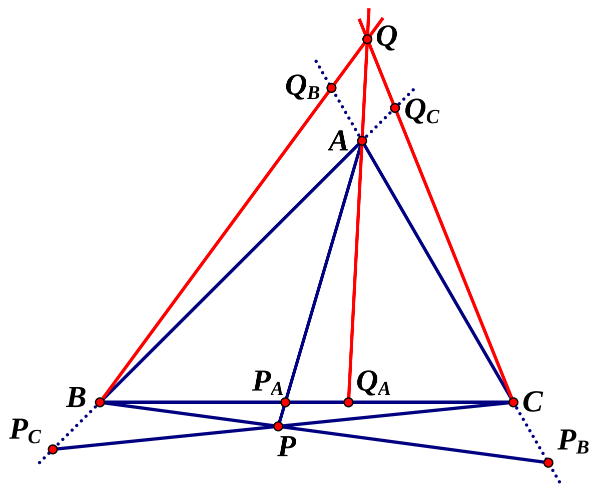




6.角比例共軛點：在ΔABC所在平面上取一點 P，將$\overline{AP}$、$\overline{BP}$、$\overline{CP}$分別延長至$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$或其延長線上，其交點分別為點P_A、P_B、P_C。在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$或其延長線上作點Q_A、Q_B、Q_C，使得有向比值$\frac{\sin\angle P_AAC}{\sin\angle BAP_A}=\frac{\overline{BQ_A}}{\overline{Q_AC}}$、有向比值$\frac{\sin\angle P_BBA}{\sin\angle CBP_B}=\frac{\overline{CQ_B}}{\overline{Q_BA}}$、有向比值$\frac{\sin\angle P_CCB}{\sin\angle ACP_C}=\frac{\overline{AQ_C}}{\overline{Q_CB}}$。若直線$\overleftrightarrow{AQ_A}$、$\overleftrightarrow{BQ_B}$、$\overleftrightarrow{CQ_C}$三線共點於 Q，則定義點 Q 為點 P 對ΔABC的「**角比例共軛點**」，反之亦然。

7.角比例自共軛點：若點 P 的角比例共軛點 Q 點與其重合，則定義其為角比例自共軛點。





8. Q_n共軛點：在ΔABC所在平面上任取一點 P 之重心坐標為$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，則平面上存在一點Q_n之重心坐標為$\left(\frac{a^n}{\mu_1}:\frac{b^n}{\mu_2}:\frac{c^n}{\mu_3}\right)$，定義點$Q_n$為點 P 對ΔABC的「$Q_n$共軛點」，反之亦然。其中本文約定$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=$ b、$\overline{AB}=c$。

參、文獻探討

在三角形共軛點研究中主題，關於「等角共軛點」(Isogonal Conjugates)，前人已有豐碩的研究成果如下（李耀文，2006；Vandeghen, 1965）。

一、等角共軛存在性：

定理 1 在ΔABC所在平面上，點P_A、P_B、P_C分別為直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上的一點，且$\overleftrightarrow{AP_A}$、$\overleftrightarrow{BP_B}$、$\overleftrightarrow{CP_C}$三線共點於 P。若直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上分別有點$Q_A$、$Q_B$、$Q_C$，分別滿足有向角$\angle CAQ_A=\angle P_AAB$、$\angle ABQ_B=\angle P_BBC$、$\angle ACQ_C=\angle P_CCB$，則$\overleftrightarrow{AQ_A}$、$\overleftrightarrow{BQ_B}$、$\overleftrightarrow{CQ_C}$三線共點或平行。

二、等角自共軛點：

定理 2 若點 P 為ΔABC的等角自共軛點，則必為ΔABC之內心或旁心。

三、無窮遠點等角共軛軌跡：

定理 3 若在ΔABC所在平面上，P 點位於ΔABC外接圓上且異於三頂點，Q 點為 P 點關於ΔABC的等角共軛點，若且唯若 Q 點為無窮遠點。

四、頂點或邊上等角共軛性質：

定理 4 點 P 與點 Q 互為ΔABC的等角共軛點，若 P 點為三角形邊或延長線上的一點，若且唯若 Q 點為其對角頂點。

接下來，開始本文的研究工作，以齊次坐標證明等截共軛點、角比例共軛點等相關定理，並且獨創推廣Q_n共軛點，再一般化「無窮遠點」與「直線」的Q_n共軛點軌跡及其判別式。

肆、研究目的

一、P 點位任意三角形平面上，以 P 點重心坐標推導出三線坐標與三極坐標

二、等角共軛性質研究：

2-1 等角共軛點存在性

2-2 P 點與 Q 點互為「等角」共軛點，其重心坐標、三線坐標、三極坐標

2-3 等角自共軛點性質

三、等截共軛性質研究：

3-1 等截共軛點存在性

3-2 P 點與 Q 點互為「等截」共軛點，其重心坐標、三線坐標、三極坐標

3-3 等截自共軛點性質

四、角比例共軛性質研究：

4-1 角比例共軛點存在性

4-2 P 點與 Q 點互為「角比例」共軛點，其重心坐標、三線坐標、三極坐標

4-3 角比例自共軛點性質

五、透過二次變換自創新Q_n共軛點，其重心坐標為$\left(\frac{a^n}{\mu_1}:\frac{b^n}{\mu_2}:\frac{c^n}{\mu_3}\right)$

5-1 以等角、等截、角比例共軛推廣出Q_n共軛

5-2 推廣證明無窮遠點的Q_n共軛點軌跡為二次曲線及其判別式

5-3 推廣證明直線的Q_n共軛點軌跡為二次曲線及其判別式

伍、研究工具

紙筆、電腦、The Geometer's Sketchpad 5.0、GeoGebra 5.0

陸、研究結果

引理 1 在ΔABC中，點P_A、P_B、P_C分別為$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$邊上或延長線上的一點，若$\overleftrightarrow{AP_A}$、$\overleftrightarrow{BP_B}$、$\overleftrightarrow{CP_C}$三線共點或平行，則有向比的乘積$\frac{\overline{AP_C}}{\overline{P_CB}}\times\frac{\overline{BP_A}}{\overline{P_AC}}\times\frac{\overline{CP_B}}{\overline{P_BA}}=1$

引理 2 在ΔABC的三邊$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$或其延長線上各有一點P_A、P_B、P_C，若$\frac{\overline{AP_C}}{\overline{P_CB}}\times\frac{\overline{BP_A}}{\overline{P_AC}}\times\frac{\overline{CP_B}}{\overline{P_BA}}=1$，則$\overleftrightarrow{AP_A}$、$\overleftrightarrow{BP_B}$、$\overleftrightarrow{CP_C}$三線共點或平行

引理 3 在ΔABC中，D 為$\overline{BC}$邊上或延長線上的一點，則$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{c\times\sin\angle BAD}{b\times\sin\angle DAC}$

證明. 引理 1、2、3 的證明如參考資料[5]

引理 4 在ΔABC中，點P_A、P_B、P_C分別為$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$邊上或延長線上的一點，若$\overleftrightarrow{AP_A}$、$\overleftrightarrow{BP_B}$、$\overleftrightarrow{CP_C}$三線共點或平行，若且唯若有向比的乘積$\frac{\sin\angle ACP_C}{\sin\angle P_CCB}\times\frac{\sin\angle BAP_A}{\sin\angle P_AAC}\times\frac{\sin\angle CBP_B}{\sin\angle P_BBA}=1$

證明.

（充分性⇒）

依據引理 1（Ceva 定理）有$\frac{\overline{AP_C}}{\overline{P_CB}}\times\frac{\overline{BP_A}}{\overline{P_AC}}\times\frac{\overline{CP_B}}{\overline{P_BA}}=1$

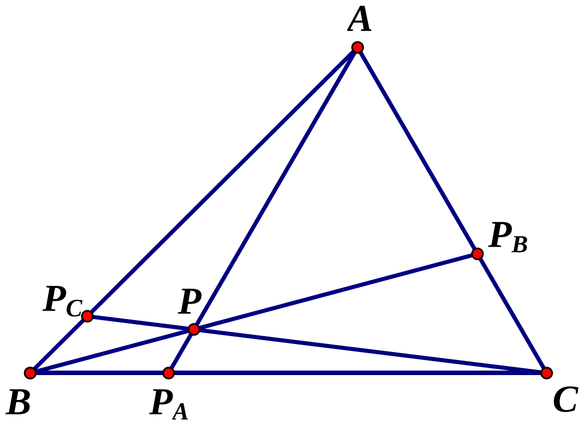
又 依據引理 3，有 $\frac{\overline{AP_C}}{\overline{P_CB}}\times\frac{\overline{BP_A}}{\overline{P_AC}}\times\frac{\overline{CP_B}}{\overline{P_BA}}=\frac{b\times\sin\angle ACP_C}{a\times\sin\angle P_CCB}\times\frac{c\times\sin\angle BAP_A}{b\times\sin\angle P_AAC}\times\frac{a\times\sin\angle CBP_B}{c\times\sin\angle P_BBA}$

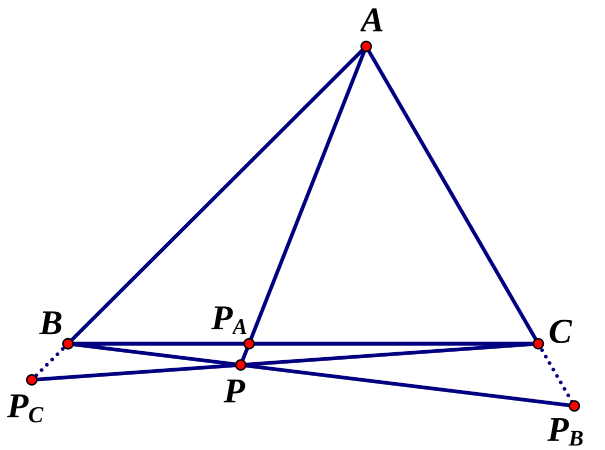
故，從前兩式得 $\frac{\sin\angle ACP_C}{\sin\angle P_CCB}\times\frac{\sin\angle BAP_A}{\sin\angle P_AAC}\times\frac{\sin\angle CBP_B}{\sin\angle P_BBA}=1$

（必要性⇐）

依據引理 3，易得$\frac{\sin\angle ACP_C}{\sin\angle P_CCB}\times\frac{\sin\angle BAP_A}{\sin\angle P_AAC}\times\frac{\sin\angle CBP_B}{\sin\angle P_BBA}=\frac{\overline{AP_C}}{\overline{P_CB}}\times\frac{\overline{BP_A}}{\overline{P_AC}}\times\frac{\overline{CP_B}}{\overline{P_BA}}=1$

又 依據引理 2（Ceva 逆定理），得$\overleftrightarrow{AP_A}$、$\overleftrightarrow{BP_B}$、$\overleftrightarrow{CP_C}$三線共點或平行





■

一、坐標系統研究：重心坐標、三線坐標、三極坐標

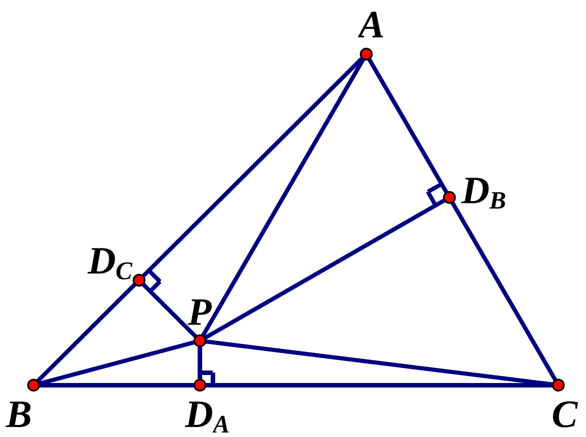
定理 5 若 P 點關於ΔABC的重心坐標為$(\Delta PBC:\Delta PCA:\Delta PAB) = (\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，則 P 點的三線坐標

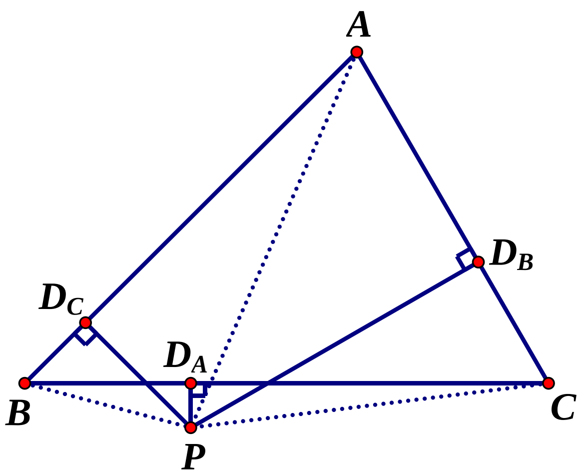
$$(\overrightarrow{PD_A}:\overrightarrow{PD_B}:\overrightarrow{PD_C}) = (\frac{\mu_1}{a}:\frac{\mu_2}{b}:\frac{\mu_3}{c})$$

證明.

如圖，有向面積$\Delta PBC:\Delta PCA:\Delta PAB = \mu_1:\mu_2:\mu_3 = \frac{a\overrightarrow{PD_A}}{2}:\frac{b\overrightarrow{PD_B}}{2}:\frac{c\overrightarrow{PD_C}}{2}$

得 $\overrightarrow{PD_A}:\overrightarrow{PD_B}:\overrightarrow{PD_C} = (\frac{\mu_1}{a}:\frac{\mu_2}{b}:\frac{\mu_3}{c})$





■

定理 6 若 P 點關於ΔABC的重心坐標為$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，則 P 點的三極坐標為$(\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}) =$

$$\left(\begin{array}{c}\sqrt{(b\mu_3)^2+(c\mu_2)^2+(b^2+c^2-a^2)\mu_2\mu_3}:\sqrt{(c\mu_1)^2+(a\mu_3)^2+(c^2+a^2-b^2)\mu_1\mu_3}:\\ \sqrt{(a\mu_2)^2+(b\mu_1)^2+(a^2+b^2-c^2)\mu_1\mu_2}\end{array}\right)$$

證明.

1.如圖，過 P 點分別作$\overleftrightarrow{PD}//\overleftrightarrow{AB}$交$\overleftrightarrow{AC}$於 D、$\overleftrightarrow{PE}//\overleftrightarrow{AC}$交$\overleftrightarrow{AB}$於 E

可得 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{P_CP}}{\overline{P_CC}} = \frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{\mu_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}$

再得 $\overrightarrow{AD} = \frac{\mu_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\times b$，同理$\overrightarrow{AE} = \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\times c$

2.依據餘弦定理有 $cos\angle BAC = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

Case1：P 點在Ⅴ區、Ⅰ區和Ⅱ區時，

$$cos\angle ADP = -cos\angle BAC = -\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Case2：P 點在Ⅲ區和Ⅳ區）時，

$$cos\angle ADP = cos\angle BAC = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

考慮 P 點在不同位置的一般化

(1) P 點在Ⅰ區、Ⅱ區、Ⅴ區時，μ_2, μ_3為同號數

(2) P 點在Ⅲ區和Ⅳ區時，μ_2, μ_3為異號數

故可得

$$cos\angle ADP = \frac{-\mu_2\mu_3}{|\mu_2\mu_3|} \times cos\angle BAC = \frac{-\mu_2\mu_3}{|\mu_2\mu_3|} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

再依據餘弦定理有

$$\overline{AP} = \sqrt{\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{DP}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{AD}\right| \times \left|\overrightarrow{DP}\right| cos\angle ADP} =$$

$$\sqrt{\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AE}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{AD}\right| \times \left|\overrightarrow{AE}\right| cos\angle ADP}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} \times b\right)^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} \times c\right)^2 - 2bc\left|\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}\right| \times \left|\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}\right| \times \frac{-\mu_2\mu_3}{|\mu_2\mu_3|} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

$$= \left|\frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}\right| \sqrt{(b\mu_3)^2 + (c\mu_2)^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\mu_2\mu_3}$$

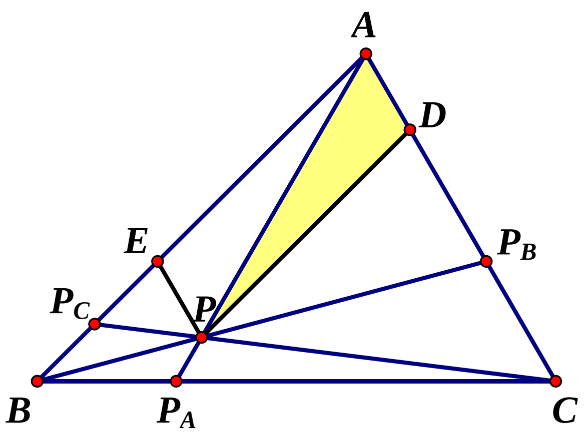
同理

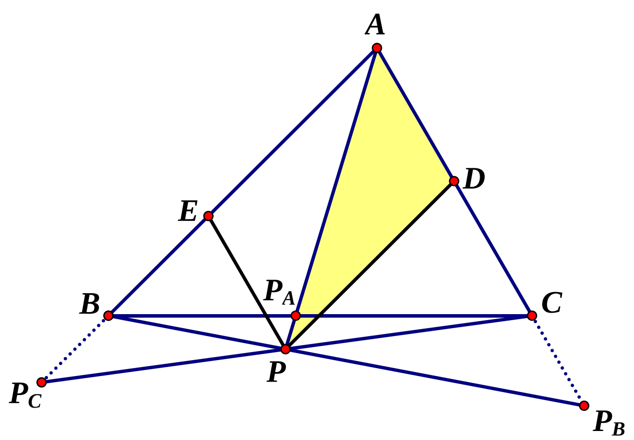
$$\overline{BP} = \left|\frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}\right| \sqrt{(c\mu_1)^2 + (a\mu_3)^2 + (c^2 + a^2 - b^2)\mu_1\mu_3}$$

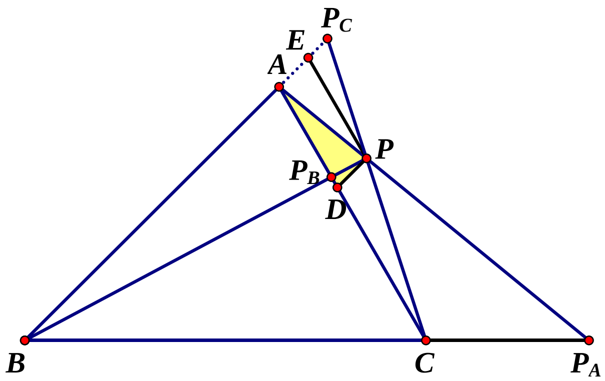
$$\overline{CP} = \left|\frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}\right| \sqrt{(a\mu_2)^2 + (b\mu_1)^2 + (a^2 + b^2 - c^2)\mu_1\mu_2}$$

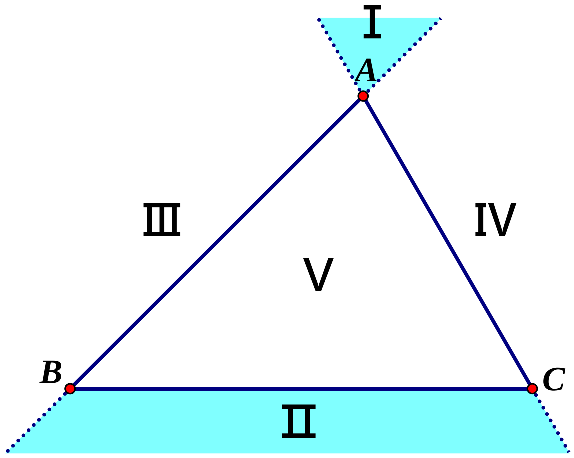
故，P 點的三極坐標為

$$\left(\begin{array}{c}\sqrt{(b\mu_3)^2 + (c\mu_2)^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\mu_2\mu_3} : \sqrt{(c\mu_1)^2 + (a\mu_3)^2 + (c^2 + a^2 - b^2)\mu_1\mu_3} : \\ \sqrt{(a\mu_2)^2 + (b\mu_1)^2 + (a^2 + b^2 - c^2)\mu_1\mu_2}\end{array}\right)$$









■

二、等角共軛與自共軛性質研究

等角共軛點存在性

如文獻探討之定理 1，依據引理 4 即可證明。

■

等角共軛點的重心坐標、三線坐標、三極坐標

定理 7 若 P 點關於ΔABC的重心坐標為$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，且 Q 點為 P 點的等角共軛點，則

(1)Q 點的重心坐標為$\left(\frac{a^2}{\mu_1}:\frac{b^2}{\mu_2}:\frac{c^2}{\mu_3}\right)$

(2)Q 點的三線坐標為$\left(\frac{a}{\mu_1}:\frac{b}{\mu_2}:\frac{c}{\mu_3}\right)$

(3)Q 點的三極坐標為

$$\left(\frac{bc}{|\mu_2\mu_3|}\sqrt{(b\mu_3)^2+(c\mu_2)^2+(b^2+c^2-a^2)\mu_2\mu_3}:\frac{ac}{|\mu_1\mu_3|}\sqrt{(c\mu_1)^2+(a\mu_3)^2+(c^2+a^2-b^2)\mu_1\mu_3}:\frac{ab}{|\mu_1\mu_2|}\sqrt{(a\mu_2)^2+(b\mu_1)^2+(a^2+b^2-c^2)\mu_1\mu_2}\right)$$

證明.

1.重心坐標證明

令 Q 點對ΔABC的重心坐標為$(\Delta QBC:\Delta QCA:\Delta QAB)=(\delta_1:\delta_2:\delta_3)$

根據引理 3，有

$$\delta_1:\delta_2=\overrightarrow{BQ_C}:\overrightarrow{Q_CA}=(a\times\sin\angle BCQ_C):(b\times\sin\angle Q_CCA)=(a\times\sin\angle P_CCA):(b\times\sin\angle BCP_C)$$

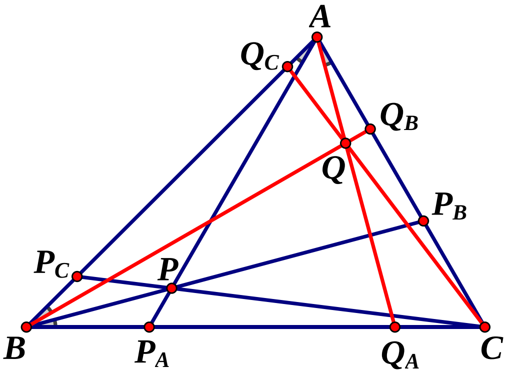
同乘 $\frac{ab}{2}\overline{PC}$ 得

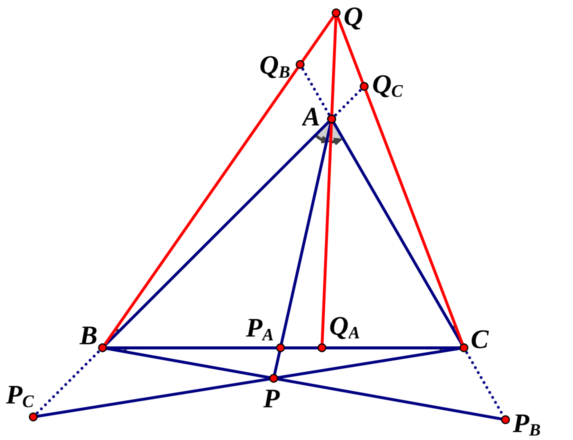
$$\delta_1:\delta_2=(a\times\sin\angle P_CCA):(b\times\sin\angle BCP_C)=\frac{a^2(b\overline{PC}\sin\angle P_CCA)}{2}:\frac{b^2(a\overline{PC}\sin\angle BCP_C)}{2}$$

$$=a^2\Delta PCA:b^2\Delta PBC=a^2\mu_2:b^2\mu_1=\frac{a^2}{\mu_1}:\frac{b^2}{\mu_2}$$

同理，$\delta_2 : \delta_3 = \frac{b^2}{\mu_2} : \frac{c^2}{\mu_3}$

故，Q 點重心坐標為$\left(\frac{a^2}{\mu_1} : \frac{b^2}{\mu_2} : \frac{c^2}{\mu_3}\right)$





2.三線坐標證明

依據定理 5，Q 點的三線坐標為$\left(\frac{\frac{a^2}{\mu_1}}{a} : \frac{\frac{b^2}{\mu_2}}{b} : \frac{\frac{c^2}{\mu_3}}{c}\right) = \left(\frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\mu_2} : \frac{c}{\mu_3}\right)$

3.三極坐標證明

依據定理 6，Q 點的三極坐標為

$$\left(\frac{bc}{|\mu_2\mu_3|}\sqrt{(b\mu_3)^2 + (c\mu_2)^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\mu_2\mu_3} : \frac{ac}{|\mu_1\mu_3|}\sqrt{(c\mu_1)^2 + (a\mu_3)^2 + (c^2 + a^2 - b^2)\mu_1\mu_3} : \frac{ab}{|\mu_1\mu_2|}\sqrt{(a\mu_2)^2 + (b\mu_1)^2 + (a^2 + b^2 - c^2)\mu_1\mu_2}\right)$$

■

等角自共軛點存在性

如文獻探討之定理 2，令$(\mu_1 : \mu_2 : \mu_3) = \left(\frac{a^2}{\mu_1} : \frac{b^2}{\mu_2} : \frac{c^2}{\mu_3}\right)$，分組討論即可證明。

■

無窮遠點的等角共軛軌跡

如文獻探討之定理 3，又共軛點必成對相配，僅需證明充分性即可。在ΔABC的外接圓上除頂點外取一點P，依據等角共軛定義、圓周角即可證明等角共軛成像於無窮遠處。

■

等角共軛點 *P* 點落在三角形邊或其延長線上

如文獻探討之定理 4，依據依據等角共軛定義即可證明。

■

(1)三角形的外接圓上除三個頂點外，其餘點關於三角形的等角共軛皆為無窮遠點。
(2)三角形每個頂點可有無限多個等角共軛點，即其對邊所在直線上的所有點。
(3)三角形每邊或其延長線上的所有點，皆以對角頂點為它們的等角共軛點。
(4)除了以上提及的點外，平面上每一點都有唯一的等角共軛點與其對偶相配。
(5)等角自共軛點有四個（內心與旁心）。

三、等截共軛與自共軛性質研究

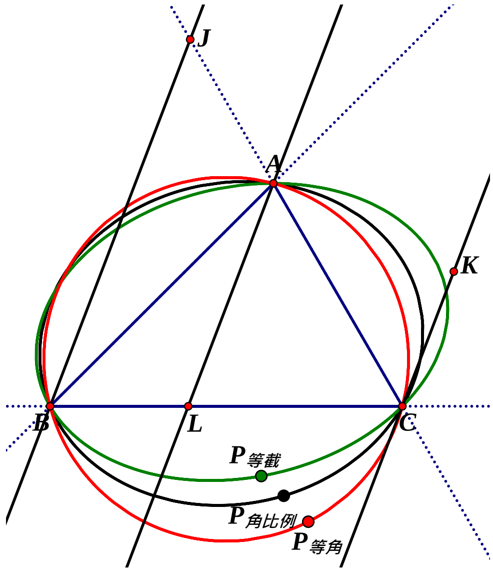
電腦模擬無窮遠點的共軛軌跡

相較等角、等截共軛點，文獻上沒有關於無窮遠點的「角比例共軛點」研究。所以我們好奇依據定義對 P 點作共軛，何時會造成三條共軛線平行？由於共軛點必成對相配。不失一般性，如圖我們先給定三條平行線（$\overleftrightarrow{CK}//\overleftrightarrow{AL}//\overleftrightarrow{BJ}$），再以共軛定義求出另外三條共軛線之交點 P，並以 GSP 進行模擬 P 點軌跡。結果發現等截共軛與角比例共軛的該軌跡為橢圓（後續將證明）。

(1)等角共軛點軌跡為「圓」(紅)

(2)等截共軛點軌跡為「橢圓」(綠)

(3)角比例共軛點軌跡為「橢圓」(黑)



我們好奇（1）軌跡是否為橢圓？（2）若為橢圓，其與和ΔABC的關係為何？如何找出橢圓的中心？（3）等角、等截、角比例三者關係為何？

等截共軛點存在性

定理 8 在ΔABC所在平面上，點P_A、P_B、P_C分別為直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上的一點，且$\overleftrightarrow{AP_A}$、$\overleftrightarrow{BP_B}$、$\overleftrightarrow{CP_C}$三線共點於 P。若直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上分別有點$Q_A$、$Q_B$、$Q_C$，分別滿足向量$\overrightarrow{BP_A}=\overrightarrow{Q_AC}$、$\overrightarrow{BP_C}=\overrightarrow{Q_CA}$、$\overrightarrow{CP_B}=\overrightarrow{Q_BA}$，則直線$\overleftrightarrow{AQ_A}$、$\overleftrightarrow{BQ_B}$、$\overleftrightarrow{CQ_C}$三線共點或平行

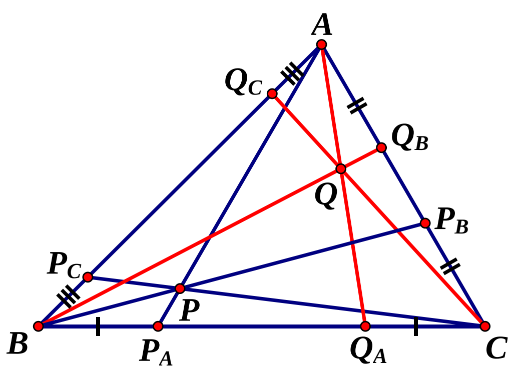
證明.

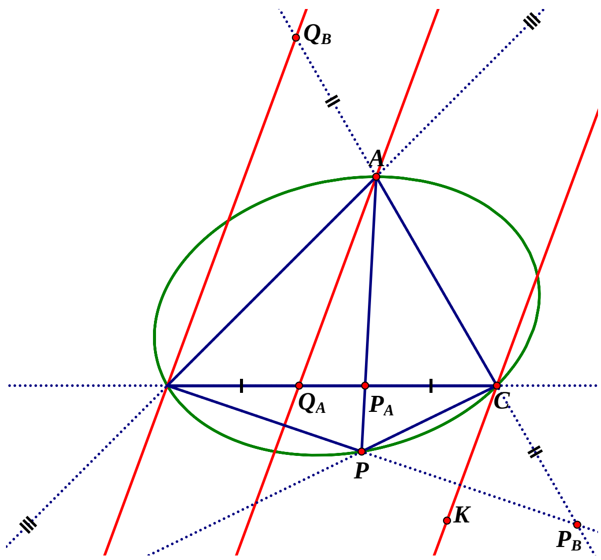
根據引理 1（Ceva 定理）且向量$\overrightarrow{BP_A}=\overrightarrow{Q_AC}$、$\overrightarrow{BP_C}=\overrightarrow{Q_CA}$、$\overrightarrow{CP_B}=\overrightarrow{Q_BA}$

得 $\frac{\overline{BQ_C}}{\overline{Q_CA}}\times\frac{\overline{AQ_B}}{\overline{Q_BC}}\times\frac{\overline{CQ_A}}{\overline{Q_AB}}=\frac{\overline{AP_C}}{\overline{P_CB}}\times\frac{\overline{BP_A}}{\overline{P_AC}}\times\frac{\overline{CP_B}}{\overline{P_BA}}=1$

又根據引理 2（Ceva 逆定理）

故，$\overleftrightarrow{AQ_A}$、$\overleftrightarrow{BQ_B}$、$\overleftrightarrow{CQ_C}$三線共點或平行





■

等截共軛點的重心坐標、三線坐標、三極坐標

定理 9 若 P 點關於ΔABC的重心坐標為$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，且 Q 點為 P 點的等截共軛點，則

(1) Q 點的重心坐標為$\left(\frac{1}{\mu_1}:\frac{1}{\mu_2}:\frac{1}{\mu_3}\right)$

(2) Q 點的三線坐標為$\left(\frac{1}{a\mu_1}:\frac{1}{b\mu_2}:\frac{1}{c\mu_3}\right)$

(3) Q 點的三極坐標為

$$\left(\sqrt{\left(\frac{b}{\mu_3}\right)^2+\left(\frac{c}{\mu_2}\right)^2+\frac{b^2+c^2-a^2}{\mu_2\mu_3}}:\sqrt{\left(\frac{a}{\mu_3}\right)^2+\left(\frac{c}{\mu_1}\right)^2+\frac{c^2+a^2-b^2}{\mu_1\mu_3}}:\sqrt{\left(\frac{a}{\mu_2}\right)^2+\left(\frac{b}{\mu_1}\right)^2+\frac{a^2+b^2-c^2}{\mu_1\mu_2}}\right)$$

證明.

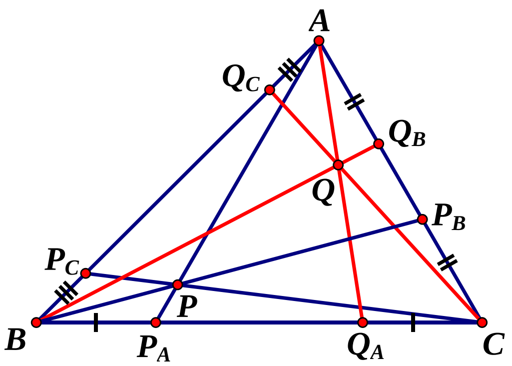
1.重心坐標證明

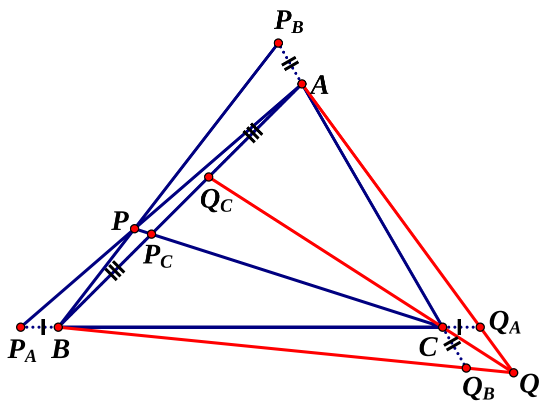
令 Q 點對ΔABC的重心坐標為$(\Delta QBC:\Delta QCA:\Delta QAB)=(\delta_1:\delta_2:\delta_3)$

$$\delta_1:\delta_2=\overrightarrow{BQ_C}:\overrightarrow{Q_CA}=\overrightarrow{AP_C}:\overrightarrow{P_CB}=\mu_2:\mu_1=\frac{1}{\mu_1}:\frac{1}{\mu_2}$$

同理，$\delta_2:\delta_3=\frac{1}{\mu_2}:\frac{1}{\mu_3}$

故，Q 點重心坐標為$\left(\frac{1}{\mu_1}:\frac{1}{\mu_2}:\frac{1}{\mu_3}\right)$





2.三線坐標證明

依據定理 5，Q 點的三線坐標為$\left(\frac{\frac{1}{\mu_1}}{a}:\frac{\frac{1}{\mu_2}}{b}:\frac{\frac{1}{\mu_3}}{c}\right)=\left(\frac{1}{a\mu_1}:\frac{1}{b\mu_2}:\frac{1}{c\mu_3}\right)$

3.三極坐標證明

依據定理 6，Q 點的三極坐標為

$$\left(\sqrt{\left(\frac{b}{\mu_3}\right)^2+\left(\frac{c}{\mu_2}\right)^2+\frac{b^2+c^2-a^2}{\mu_2\mu_3}}:\sqrt{\left(\frac{a}{\mu_3}\right)^2+\left(\frac{c}{\mu_1}\right)^2+\frac{c^2+a^2-b^2}{\mu_1\mu_3}}:\sqrt{\left(\frac{a}{\mu_2}\right)^2+\left(\frac{b}{\mu_1}\right)^2+\frac{a^2+b^2-c^2}{\mu_1\mu_2}}\right)$$

■

等截自共軛點存在性

定理 10 若點 P 為ΔABC的等截自共軛點，則必為ΔABC之重心或 Exmedian 點，其中點 P 的重心坐標分別為$(1:1:1)$、$(-1:1:1)$、$(1:-1:1)$、$(1:1:-1)$，其三線坐標分別為$\left(\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}\right)$、$\left(\frac{-1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}\right)$、$\left(\frac{1}{a}:\frac{-1}{b}:\frac{1}{c}\right)$、$\left(\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{-1}{c}\right)$，其三極坐標分別 $\left(\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}:\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}:\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\right)$、$\left(\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}:b:c\right)$、$\left(a:\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}:\mathrm{c}\right)$、$\left(a:b:\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\right)$。

證明.

1.若 P 點與其等截共軛 Q 點重合時，依據定理 9 可得

$$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)=\left(\frac{1}{\mu_1}:\frac{1}{\mu_2}:\frac{1}{\mu_3}\right)\Rightarrow {\mu_1}^2:{\mu_2}^2:{\mu_3}^2\Rightarrow |\mu_1|=|\mu_2|=|\mu_3|$$

不失一般性，令$\mu_1+\mu_2+\mu_3=k\Delta\mathrm{ABC}>0$，且

(1) $\mu_1=\mu_2=\mu_3>0$；(2) $\mu_1>0,\ \mu_2=\mu_3<0$；(3) $\mu_1<0,\ \mu_2=\mu_3>0$

前述三種狀況，皆有$\mu_2=\mu_3$，得$\overleftrightarrow{AP}$通過$\overline{BC}$之中點

(1)Case1：$\mu_1=\mu_2=\mu_3>0$

考慮 P 點在ΔABC內部，易知 P 點為ΔABC之重心（左圖）

(2)Case2：$\mu_1>0,\ \mu_2=\mu_3<0$

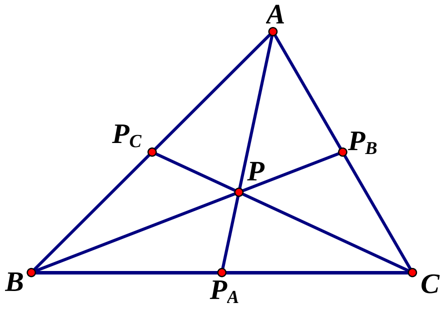
考慮 P 點在ΔABC外部且位於$\overleftrightarrow{BA}$與$\overleftrightarrow{CA}$所夾平面，則$|\mu_1|>|\mu_2|=|\mu_3|$，與等截自共軛定義不合（中圖）

(3)Case3：$\mu_1<0,\ \mu_2=\mu_3>0$

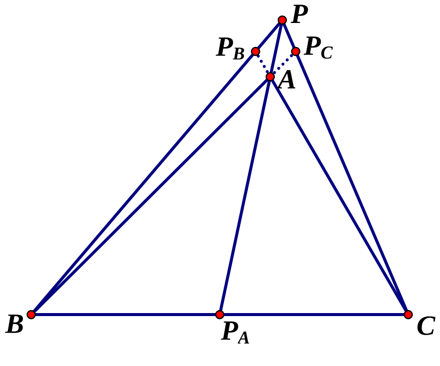
考慮 P 點在ΔABC外部且$\overleftrightarrow{BC}$下方，若$|\mu_1|=|\mu_2|=|\mu_3|$時，不難得$\overrightarrow{AP_A}=\overrightarrow{P_AP}$，$P$點稱為 Exmedian 點，其重心坐標為$(-1:1:1)$（右圖）

由 case1、case2、case3 得

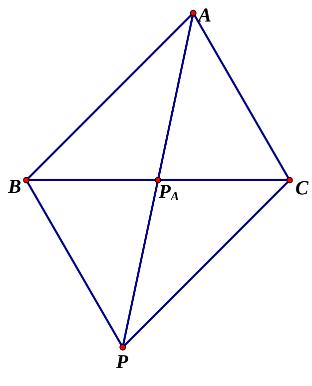
若 P 點為ΔABC的等截自共軛點（P 點與其等截共軛 Q 點重合時），則必為ΔABC之重心或 Exmedian 點，其中 P 點的重心坐標為$(1:1:1)$或$(-1:1:1)$，同理$(1:-1:1)$或$(1:1:-1)$亦符合所求。



左圖



中圖



右圖

2.故 P 點為ΔABC的等截自共軛點時，其重心坐標為$(1:1:1)$、$(-1:1:1)$、$(1:-1:1)$、$(1:1:-1)$

依據定理 6，P 點的三線坐標分別為$\left(\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}\right)$、$\left(\frac{-1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}\right)$、$\left(\frac{1}{a}:\frac{-1}{b}:\frac{1}{c}\right)$、$\left(\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{-1}{c}\right)$

依據定理 3，P 點的三極坐標分別為$\left(\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}:\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}:\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\right)$、$\left(\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}:b:c\right)$、$\left(a:\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}:\mathrm{c}\right)$、$\left(a:b:\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\right)$

■

我們先利用 GSP 軟體畫出無窮遠點的等角、等截、角比例等共軛軌跡後，分別過ΔABC三頂點做軌跡曲線的切線，下文提出獨創的定理 11（定理 20 已證明Q_n共軛點存在性）。

引理 5 若S為無窮遠點 P 關於ΔABC的Q_n共軛點軌跡，則S為過三頂點的二次曲線

證明.

令無窮遠點 P 的重心坐標$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，其中$\mu_1+\mu_2+\mu_3=0$

依據Q_n共軛定義，Q_n的重心坐標$\left(\frac{a^n}{\mu_1}:\frac{b^n}{\mu_2}:\frac{c^n}{\mu_3}\right)$、三線坐標為$\left(\frac{a^{n-1}}{\mu_1}:\frac{b^{n-1}}{\mu_2}:\frac{c^{n-1}}{\mu_3}\right)$

考慮

$$a^{n-1}\times\left(\frac{b^{n-1}}{\mu_2}\times\frac{c^{n-1}}{\mu_3}\right)+b^{n-1}\times\left(\frac{c^{n-1}}{\mu_3}\times\frac{a^{n-1}}{\mu_1}\right)+c^{n-1}\times\left(\frac{a^{n-1}}{\mu_1}\times\frac{b^{n-1}}{\mu_2}\right)$$
$$=a^{n-1}b^{n-1}c^{n-1}\times\frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{\mu_1\mu_2\mu_3}=0$$

又因三線坐標為齊次坐標，故上述方程為過三頂點的二次曲線。

■

定理 11 二次曲線S為無窮遠點 P 關於ΔABC的Q_n次共軛軌跡，若過A、B、C點作二次曲線S的切線$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{DE}$，兩兩相交於三點，若且唯若它們關於ΔABC的重心坐標分別為$D(-a^n:b^n:c^n)$、$E(a^n:-b^n:c^n)$、$F(a^n,b^n,-c^n)$

證明.

1.不失一般性，設無窮遠點 P 的重心坐標$(1:-t:(t-1))$

依據Q_n共軛定義，曲線S上任意點的重心坐標可表示為函數

$$f(\mathrm{t})=\left(\frac{a^n}{1}:\frac{b^n}{-t}:\frac{c^n}{t-1}\right)=((-t^2+t)a^n:(t-1)b^n:-tc^n)\text{，其中}f(0)\text{為}B\text{點}$$

2.考慮平面上D、F點的重心坐標分別為$(-a^n:b^n:c^n)$、$(a^n:b^n:-c^n)$

易知$\overleftrightarrow{DF}$上的點（不含E點）的重心坐標可以表示為兩者的線性組合

$$g(k)=(-a^n:b^n:c^n)+k(a^n:b^n:-c^n)\text{，其中}g(1)\text{為}B\text{點（}\overleftrightarrow{DE}\text{過}B\text{點）}$$

3. $f'(t)=\left((-2t+1)a^n:b^n:-c^n\right)$

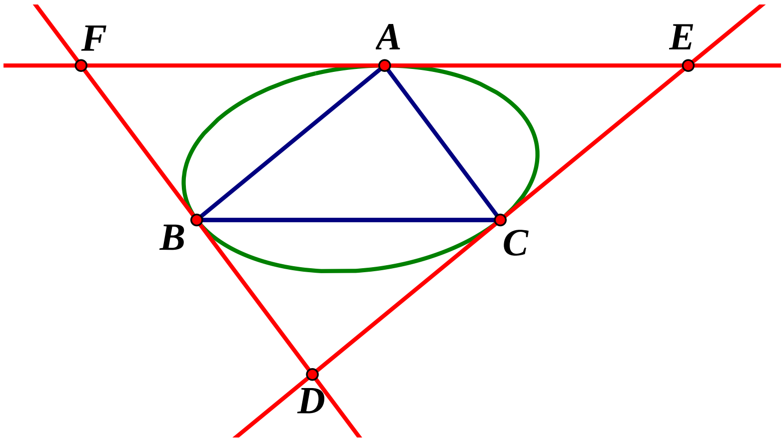
當$t=0$時，得$f(t)$在B點的變化率為$(a^n,b^n,-c^n)$

又$\mathrm{g}'(k)=(a^n,b^n,-c^n)$

當$k=1$時，得$g(k)$在B點的變化率為$(a^n,b^n,-c^n)$

因此可得 $\overleftrightarrow{DF}$切曲線S於B點

同理，$\overleftrightarrow{DE}$切曲線S於C點、$\overleftrightarrow{EF}$切曲線S於A點



■

無窮遠點的等截共軛軌跡

定理 12 若在ΔABC所在平面上，P 點為無窮遠點，Q 點為 P 點關於ΔABC的等截共軛點，若且唯若 Q 點所成集合為ΔABC外接 Steiner 橢圓。

證明.

由於共軛點必成對相配，僅需證明充分性即可

如圖，$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{DE}$為二次曲線的切線

依據定理 9 與定理 11 可得D、E、F三點重心坐標$D(-a^0:b^0:c^0)$、$E(a^0:-b^0:c^0)$、$F(a^0,b^0,-c^0)$

再依據定理 10，D、E、F為ΔABC的 Exmedian 點

所以ΔABC為ΔDEF的中心三角形

故，Q 點所成集合為ΔABC外接 Steiner 橢圓

■

等截共軛點 ***P*** 點落在三角形邊或其延長線上

定理 13 若 P 點與 Q 點互為ΔABC的等截共軛點，若 P 點為三角形邊或延長線上的一點，若且唯若 Q 點為其對角頂點

證明.

以等截共軛點定義即可得證。

■

(1)以三角形重心為中心的外接橢圓上除三個頂點外，其餘點關於三角形的等截共軛皆為無窮遠點。

(2)三角形每個頂點可有無限多個等截共軛點，即其對邊所在直線上的所有點。

(3)三角形每邊或其延長線上的所有點，皆以對角頂點為它們的等截共軛點。

(4)除了以上提及的點外，平面上每一點都有唯一的等截共軛點與其對偶相配。

(5)等截自共軛點有四個（重心及 Exmedian 點）。

四、角比例共軛與自共軛性質研究

定理 14 在ΔABC所在平面上，P 點、Q 點為$\overleftrightarrow{BC}$的點，若有向比值$\frac{\sin\angle BAQ}{\sin\angle QAC}=\frac{\overline{PC}}{\overline{BP}}$，若且唯若有向比值$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle PAC}=\frac{\overline{QC}}{\overline{BQ}}$（P、Q 互為$\overleftrightarrow{BC}$上的角比例表現點）

證明.

（充分性⇒）

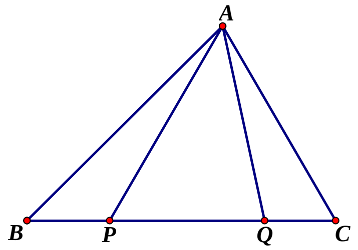
1.依據引理 3，有$\frac{\sin\angle BAQ}{\sin\angle QAC}=\frac{b\overline{BQ}}{c\overline{QC}}$、$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle PAC}=\frac{b\overline{BP}}{c\overline{PC}}$

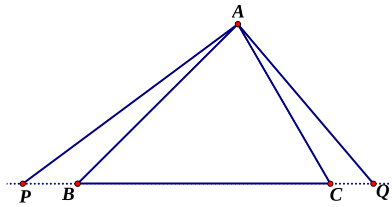
2.依據假設有$\frac{\sin\angle BAQ}{\sin\angle QAC}=\frac{\overline{PC}}{\overline{BP}}\Rightarrow\frac{b\overline{BQ}}{c\overline{QC}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{BP}}\Rightarrow\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}}=\frac{c\overline{PC}}{b\overline{BP}}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle BAP}$

得 $\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle PAC}=\frac{\overline{QC}}{\overline{BQ}}$

（必要性⇐）

同理，若$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle PAC}=\frac{\overline{QC}}{\overline{BQ}}$，則有$\frac{\sin\angle BAQ}{\sin\angle QAC}=\frac{\overline{PC}}{\overline{BP}}$





■

角比例共軛點存在性

定理 15 在ΔABC所在平面上，點P_A、P_B、P_C分別為直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上的一點，且$\overleftrightarrow{AP_A}$、$\overleftrightarrow{BP_B}$、$\overleftrightarrow{CP_C}$三線共點於 P。若點$Q_A$、$Q_B$、$Q_C$分別為點$P_A$、$P_B$、$P_C$在直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上的角比例表現點，則$\overleftrightarrow{AQ_A}$、$\overleftrightarrow{BQ_B}$、$\overleftrightarrow{CQ_C}$三線共點或平行

證明.

1.因$\overleftrightarrow{AP_A}$、$\overleftrightarrow{BP_B}$、$\overleftrightarrow{CP_C}$線共點，根據引理 4 有

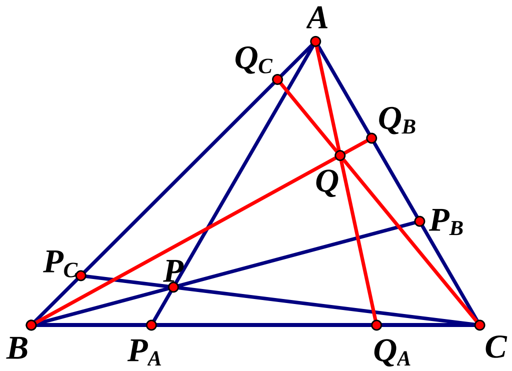
$$\frac{\sin\angle BAP_A}{\sin\angle P_AAC}\times\frac{\sin\angle CBP_B}{\sin\angle P_BBA}\times\frac{\sin\angle ACP_C}{\sin\angle P_CCB}=1$$

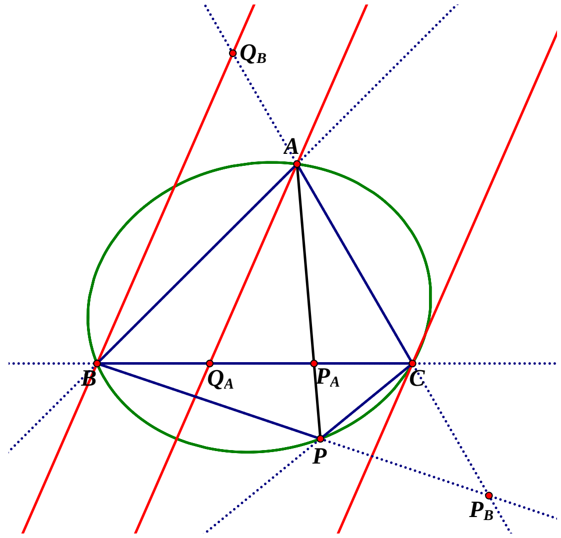
2.又Q_A、Q_B、Q_C分別為P_A、P_B、P_C在直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上的角比例表現點，依據定理 14 有

$$\frac{\sin\angle BAP_A}{\sin\angle P_AAC}\times\frac{\sin\angle CBP_B}{\sin\angle P_BBA}\times\frac{\sin\angle ACP_C}{\sin\angle P_CCB}=\frac{\overline{Q_AC}}{\overline{BQ_A}}\times\frac{\overline{Q_BA}}{\overline{CQ_B}}\times\frac{\overline{Q_CB}}{\overline{AQ_C}}$$

綜合前兩式可得 $\frac{\overline{Q_AC}}{\overline{BQ_A}}\times\frac{\overline{Q_BA}}{\overline{CQ_B}}\times\frac{\overline{Q_CB}}{\overline{AQ_C}}=1$

依據引理 2（Ceva 逆定理），得$\overleftrightarrow{AQ_A}$、$\overleftrightarrow{BQ_B}$、$\overleftrightarrow{CQ_C}$三線共點或平行





■

角比例共軛點的重心坐標、三線坐標、三極坐標

定理 16 若 P 點關於ΔABC的重心坐標為$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，且 Q 點為 P 點的角比例共軛點，則

(1) Q 點的重心坐標為$\left(\frac{a}{\mu_1}:\frac{b}{\mu_2}:\frac{c}{\mu_3}\right)$

(2) Q 點的三線坐標為$\left(\frac{1}{\mu_1}:\frac{1}{\mu_2}:\frac{1}{\mu_3}\right)$

(3) Q 點的三極坐標為

$$\left(\sqrt{\left(\frac{bc}{\mu_3}\right)^2+\left(\frac{bc}{\mu_2}\right)^2+\frac{(b^2+c^2-a^2)bc}{\mu_2\mu_3}}:\sqrt{\left(\frac{ac}{\mu_3}\right)^2+\left(\frac{ac}{\mu_1}\right)^2+\frac{(c^2+a^2-b^2)ac}{\mu_1\mu_3}}:\sqrt{\left(\frac{ab}{\mu_2}\right)^2+\left(\frac{ab}{\mu_1}\right)^2+\frac{(a^2+b^2-c^2)ab}{\mu_1\mu_2}}\right)$$

證明.

1.重心坐標證明

令 Q 點對ΔABC的重心坐標為$(\Delta QBC:\Delta QCA:\Delta QAB)=(\delta_1:\delta_2:\delta_3)$

依據定理 14 有

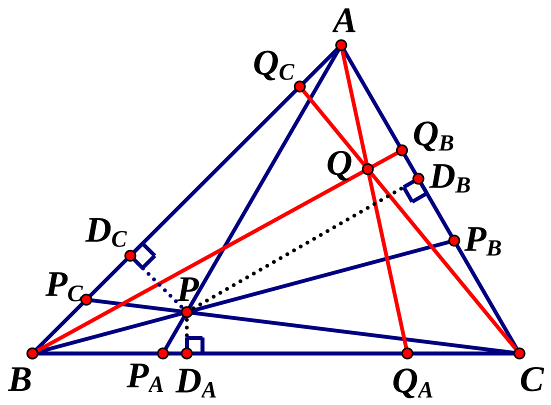
$\delta_1:\delta_2=\overrightarrow{BQ_C}:\overrightarrow{Q_CA}=\sin\angle ACP_C:\sin\angle P_CCB$

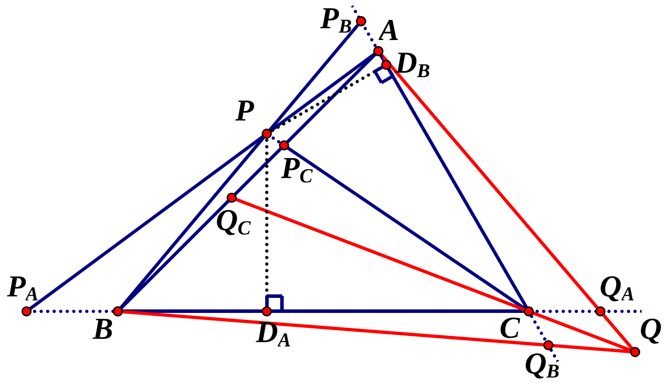
又因 $\overrightarrow{PD_B}:\overrightarrow{PD_A}=\overline{PC}\times\sin\angle ACP_C:\overline{PC}\times\sin\angle P_CCB$

得 $\delta_1:\delta_2=\overrightarrow{PD_B}:\overrightarrow{PD_A}=\frac{\mu_2}{b}:\frac{\mu_1}{a}=\frac{a}{\mu_1}:\frac{b}{\mu_2}$

同理，可得$\delta_2:\delta_3=\frac{b}{\mu_2}:\frac{c}{\mu_3}$

故，Q點的重心坐標$\left(\frac{a}{\mu_1}:\frac{b}{\mu_2}:\frac{c}{\mu_3}\right)$





2.三線坐標證明

依據定理 5，Q 點的三線坐標為$\left(\frac{\frac{a}{\mu_1}}{a}:\frac{\frac{b}{\mu_2}}{b}:\frac{\frac{c}{\mu_3}}{c}\right)=\left(\frac{1}{\mu_1}:\frac{1}{\mu_2}:\frac{1}{\mu_3}\right)$

3.三極坐標證明

依據定理 6，Q 點的三極坐標為

$$\left(\sqrt{\left(\frac{bc}{\mu_3}\right)^2+\left(\frac{bc}{\mu_2}\right)^2+\frac{(b^2+c^2-a^2)bc}{\mu_2\mu_3}}:\sqrt{\left(\frac{ac}{\mu_3}\right)^2+\left(\frac{ac}{\mu_1}\right)^2+\frac{(c^2+a^2-b^2)ac}{\mu_1\mu_3}}:\sqrt{\left(\frac{ab}{\mu_2}\right)^2+\left(\frac{ab}{\mu_1}\right)^2+\frac{(a^2+b^2-c^2)ab}{\mu_1\mu_2}}\right)$$

■

角比例自共軛點存在性

定理 17 若 P 點關於ΔABC的角比例自共軛點，則 P 點的重心坐標分別為$(\sqrt{a}:\sqrt{b}:\sqrt{c})$、$(-\sqrt{a}:\sqrt{b}:\sqrt{c})$、$(\sqrt{a}:-\sqrt{b}:\sqrt{c})$、$(\sqrt{a}:\sqrt{b}:-\sqrt{c})$，其三線坐標分別為$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}:\frac{1}{\sqrt{b}}:\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$、$\left(\frac{-1}{\sqrt{a}}:\frac{1}{\sqrt{b}}:\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$、$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}:\frac{-1}{\sqrt{b}}:\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$、$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}:\frac{1}{\sqrt{b}}:\frac{-1}{\sqrt{c}}\right)$，其三極坐標分別為

$$\left(\sqrt{bc(b+c)+\sqrt{bc}(b^2+c^2-a^2)}:\sqrt{ac(a+c)+\sqrt{ac}(a^2+c^2-b^2)}:\sqrt{ab(a+b)+\sqrt{ab}(a^2+b^2-c^2)}\right)、$$

$$\left(\sqrt{bc(b+c)+\sqrt{bc}(b^2+c^2-a^2)}:\sqrt{ac(a+c)-\sqrt{ac}(a^2+c^2-b^2)}:\sqrt{ab(a+b)-\sqrt{ab}(a^2+b^2-c^2)}\right)、$$

$$\left(\sqrt{bc(b+c)-\sqrt{bc}(b^2+c^2-a^2)}:\sqrt{ac(a+c)+\sqrt{ac}(a^2+c^2-b^2)}:\sqrt{ab(a+b)-\sqrt{ab}(a^2+b^2-c^2)}\right)、$$

$$\left(\sqrt{bc(b+c)-\sqrt{bc}(b^2+c^2-a^2)}:\sqrt{ac(a+c)-\sqrt{ac}(a^2+c^2-b^2)}:\sqrt{ab(a+b)+\sqrt{ab}(a^2+b^2-c^2)}\right)。$$

證明.

1.若 P 點與其角比例共軛點 Q 重合時，依據定理 16 可得

$$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)=\left(\frac{a}{\mu_1}:\frac{b}{\mu_2}:\frac{c}{\mu_3}\right)\Rightarrow {\mu_1}^2:{\mu_2}^2:{\mu_3}^2=a:b:c=|\mu_1|:|\mu_2|:|\mu_3|=\sqrt{a}:\sqrt{b}:\sqrt{c}$$

不失一般性，令$\mu_1+\mu_2+\mu_3=k\Delta\text{ABC}>0$，且

(1) $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3>0$；(2) $\mu_1>0,\ \ \mu_2,\mu_3<0$；(3)$\mu_1<0,\ \ \mu_2,\mu_3>$ s

前述三種狀況，皆有$\mu_2 : \mu_3 = \sqrt{b} : \sqrt{c}$

(1)case1：$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3 > 0$（如左圖，P 點在$\Delta$ABC內部）

則易知點 P 之重心坐標為$(\sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{c})$

(2)case2：$\mu_1 > 0$and $\mu_2, \mu_3 < 0$（如中圖，P 點在ΔABC外部）

則有$\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} = k\Delta\mathrm{ABC} > 0$

得 $\sqrt{a} > \sqrt{b} + \sqrt{c}$

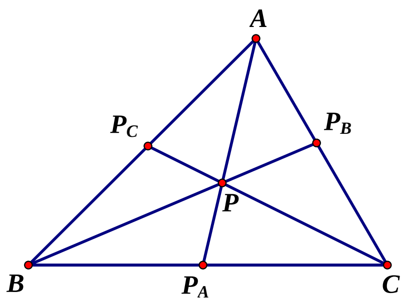
再得 $a > b + c + 2\sqrt{bc}$（與三角不等式矛盾）

(3)case3：$\mu_1 < 0$, and $\mu_2, \mu_3 > 0$（如右圖，P 點在ΔABC外部且$\overleftrightarrow{BC}$下方）

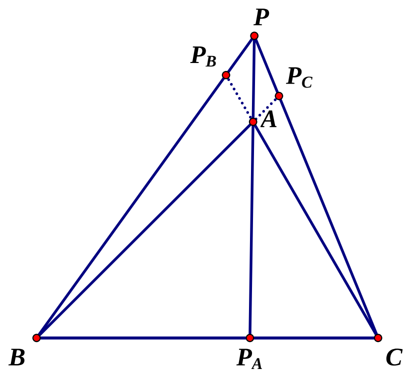
則易知 P 點之重心坐標為$(-\sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{c})$

由 case1、case2、case3 得

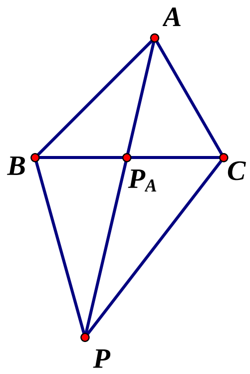
若 P 點為ΔABC的角比例自共軛點（P 點與其角比例共軛點 Q 重合時），則 P 點的重心坐標為$(\sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{c})$或$(-\sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{c})$，同理$(\sqrt{a} : -\sqrt{b} : \sqrt{c})$或$(\sqrt{a} : \sqrt{b} : -\sqrt{c})$亦符合所求。



左圖



中圖



右圖

2.由前知 P 點為ΔABC的角比例自共軛點時，P 點的重心坐標分別為$(\sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{c})$、$(-\sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{c})$、$(\sqrt{a} : -\sqrt{b} : \sqrt{c})$、$(\sqrt{a} : \sqrt{b} : -\sqrt{c})$

依據定理 5，點 P 的三線坐標分別為$\left(\frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{b}} : \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$、$\left(\frac{-1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{b}} : \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$、$\left(\frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{-1}{\sqrt{b}} : \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$、$\left(\frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{b}} : \frac{-1}{\sqrt{c}}\right)$

依據定理 6，點 P 的三極坐標分別為

$$\left(\sqrt{bc(b+c)+\sqrt{bc}(b^2+c^2-a^2)} : \sqrt{ac(a+c)+\sqrt{ac}(a^2+c^2-b^2)} : \sqrt{ab(a+b)+\sqrt{ab}(a^2+b^2-c^2)}\right)、$$

$$\left(\sqrt{bc(b+c)+\sqrt{bc}(b^2+c^2-a^2)} : \sqrt{ac(a+c)-\sqrt{ac}(a^2+c^2-b^2)} : \sqrt{ab(a+b)-\sqrt{ab}(a^2+b^2-c^2)}\right)、$$

$$\left(\sqrt{bc(b+c)-\sqrt{bc}(b^2+c^2-a^2)} : \sqrt{ac(a+c)+\sqrt{ac}(a^2+c^2-b^2)} : \sqrt{ab(a+b)-\sqrt{ab}(a^2+b^2-c^2)}\right)、$$

$$\left(\sqrt{bc(b+c)-\sqrt{bc}(b^2+c^2-a^2)} : \sqrt{ac(a+c)-\sqrt{ac}(a^2+c^2-b^2)} : \sqrt{ab(a+b)+\sqrt{ab}(a^2+b^2-c^2)}\right)、$$

■

無窮遠點的角比例共軛軌跡

定理 18 若在ΔABC所在平面上，P 點為無窮遠點，Q 點為 P 點關於ΔABC的角比例共軛點，若且唯若 Q 點所成集合為ΔABC外接橢圓，其中該橢圓切ΔABC的旁心三角形ΔDEF於A、B、C

證明.

由於共軛點必成對相配，僅需證明充分性即可

如圖，$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{DE}$為二次曲線的切線

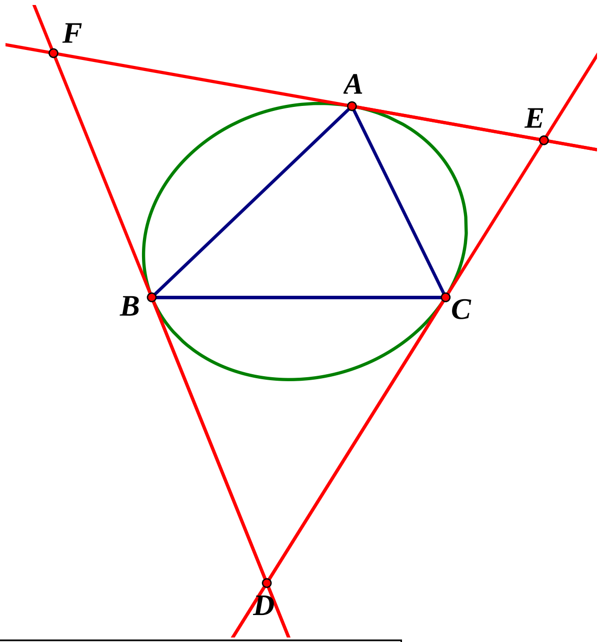
依據定理 11 與定理 16 可得D、E、F三點重心坐標$D(-a:b:c)$、$E(a:-b:c)$、$F(a:b:-c)$

再依據定理 5，D、E、F為ΔABC的旁心

所以ΔDEF為ΔABC的旁心三角形（ΔABC為ΔDEF的垂足三角形）

橢圓切ΔABC的旁心三角形ΔDEF於A、B、C

■



角比例共軛點 ***P*** 點落在三角形邊或其延長線上之性質

定理 19 若 P 點與 Q 點互為ΔABC的角比例共軛點，若 P 點為三角形邊或延長線上的一點，若且唯若 Q 點為其對角頂點

證明.

以角比例共軛點定義即可得證。

■

(1)ΔABC為ΔDEF之垂足三角形，有一內切橢圓切於點A, B, C，該橢圓上除三個頂點外，其餘所有點關於ΔABC的角比例共軛皆為無窮遠點。

(2)三角形每個頂點可有無限多個等角比例共軛點，即其對邊所在直線上的所有點。

(3)三角形每邊或其延長線上的所有點，皆以對角頂點為它們的角比例共軛點。

(4)除了以上提及的點外，平面上每一點都有唯一的等角比例共軛點與其對偶相配。

(5)角比例自共軛點有四個。

五、推廣Q_n共軛點，其重心坐標$\left(\frac{a^n}{\mu_1}:\frac{b^n}{\mu_2}:\frac{c^n}{\mu_3}\right)$

（一）Q_n共軛點存在性

定理 7、定理 9、定理 16 可知「若 P 點的重心坐標為$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，則等截共軛點之重心坐標為$\left(\frac{1}{\mu_1}:\frac{1}{\mu_2}:\frac{1}{\mu_3}\right)$；角比例共軛點之重心坐標為$\left(\frac{a}{\mu_1}:\frac{b}{\mu_2}:\frac{c}{\mu_3}\right)$；等角共軛點之重心坐標為$\left(\frac{a^2}{\mu_1}:\frac{b^2}{\mu_2}:\frac{c^2}{\mu_3}\right)$」，三者的分子具有等比關係，**所以我們好奇是否存在 Q 點，其重心坐標為$\left(\frac{a^n}{\mu_1}:\frac{b^n}{\mu_2}:\frac{c^n}{\mu_3}\right)$？若 Q 點存在，其與 P 點的幾何關係為何？**

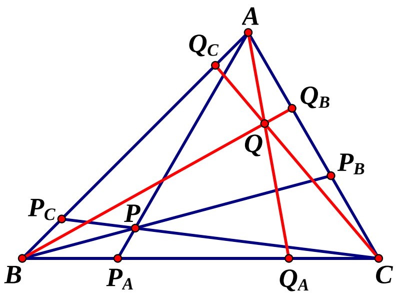
定理 20 若 P 點為ΔABC的所在平面任一點，其重心坐標為$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，則存在一點 Q，其重心坐標為$\left(\frac{a^n}{\mu_1}:\frac{b^n}{\mu_2}:\frac{c^n}{\mu_3}\right)$，其中$n\in\mathbb{Z}$

證明.

1.考慮在$\overleftrightarrow{BC}$上取一點Q_A，使得有向比$\overline{BQ_A}:\overline{Q_AC}=\frac{c^n}{\mu_3}:\frac{b^n}{\mu_2}$，在$\overleftrightarrow{CA}$上取一點$Q_B$，使得有向比$\overline{CQ_B}:\overline{Q_BA}=\frac{a^n}{\mu_1}:\frac{c^n}{\mu_3}$，在$\overleftrightarrow{AB}$上取一點$Q_C$，使得有向比$\overline{AQ_C}:\overline{Q_CB}=\frac{b^n}{\mu_2}:\frac{a^n}{\mu_1}$

2. $\frac{\overline{BQ_A}}{\overline{Q_AC}}\times\frac{\overline{CQ_B}}{\overline{Q_BA}}\times\frac{\overline{AQ_C}}{\overline{Q_CB}}=\frac{\frac{c^n}{\mu_3}}{\frac{b^n}{\mu_2}}\times\frac{\frac{a^n}{\mu_1}}{\frac{c^n}{\mu_3}}\times\frac{\frac{b^n}{\mu_2}}{\frac{a^n}{\mu_1}}=1$

依據引理 2，$\overleftrightarrow{AQ_A}$、$\overleftrightarrow{BQ_B}$、$\overleftrightarrow{CQ_C}$三線共點或平行



■

（二）Q_n共軛點的作圖（合成函數）

在定理 20 中，我們證明重心坐標為$\left(\frac{a^n}{\mu_1}:\frac{b^n}{\mu_2}:\frac{c^n}{\mu_3}\right)$之$Q_n$共軛點的存在性，**$Q_n$的幾何意義為何？我們將等角、等截、角比例共軛變換（transform）統整，透過合成函數創造出Q_n點**。

定理 21

$$\begin{cases} T_{\text{等截}}:(\mu_1:\mu_2:\mu_3)\mapsto\left(\frac{1}{\mu_1}:\frac{1}{\mu_2}:\frac{1}{\mu_3}\right) \\ T_{\text{角比例}}:(\mu_1:\mu_2:\mu_3)\mapsto\left(\frac{a}{\mu_1}:\frac{b}{\mu_2}:\frac{c}{\mu_3}\right) \\ T_{\text{等角}}:(\mu_1:\mu_2:\mu_3)\mapsto\left(\frac{a^2}{\mu_1}:\frac{b^2}{\mu_2}:\frac{c^2}{\mu_3}\right) \\ Q_0\left(\frac{a^0}{\mu_1}:\frac{b^0}{\mu_2}:\frac{c^0}{\mu_3}\right),\ Q_1\left(\frac{a^1}{\mu_1}:\frac{b^1}{\mu_2}:\frac{c^1}{\mu_3}\right) \\ Q_n\left(\frac{a^n}{\mu_1}:\frac{b^n}{\mu_2}:\frac{c^n}{\mu_3}\right)=T_{\text{角比例}}\left(T_{\text{等截}}(Q_{n-1})\right)\text{或}T_{\text{等角}}\left(T_{\text{等截}}(Q_{n-2})\right)\text{，其中}n\ge 2 \\ Q_n\left(\frac{a^n}{\mu_1}:\frac{b^n}{\mu_2}:\frac{c^n}{\mu_3}\right)=T_{\text{等截}}\left(T_{\text{角比例}}(Q_{n+1})\right)\text{或}T_{\text{等截}}\left(T_{\text{等角}}(Q_{n+2})\right)\text{，其中}n\le -1 \end{cases}$$

證明.

<u>以數學歸納法先證明$n \geq 2$</u>

(1) $n = 2$時，顯然$Q_2\left(\frac{a^2}{\mu_1}:\frac{b^2}{\mu_2}:\frac{c^2}{\mu_3}\right) = T_{角比例}\left(T_{等截}(Q_1)\right)$ 或 $T_{等角}\left(T_{等截}(Q_0)\right)$，原式成立。

(2) $n = k-1$與$n = k$時，原式成立，即

$$Q_{k-1}\left(\frac{a^{k-1}}{\mu_1}:\frac{b^{k-1}}{\mu_2}:\frac{c^{k-1}}{\mu_3}\right) = T_{角比例}\left(T_{等截}(Q_{k-2})\right)或T_{等角}\left(T_{等截}(Q_{k-3})\right)$$

$$Q_k\left(\frac{a^k}{\mu_1}:\frac{b^k}{\mu_2}:\frac{c^k}{\mu_3}\right) = T_{角比例}\left(T_{等截}(Q_{k-1})\right)或T_{等角}\left(T_{等截}(Q_{k-2})\right)$$

(3) n=k+1 時

$$T_{角比例}\left(T_{等截}(Q_k)\right) = T_{角比例}\left(T_{等截}\left(\frac{a^k}{\mu_1}:\frac{b^k}{\mu_2}:\frac{c^k}{\mu_3}\right)\right) = T_{角比例}\left(\frac{\mu_1}{a^k}:\frac{\mu_2}{b^k}:\frac{\mu_3}{c^k}\right) = \left(\frac{a}{\frac{\mu_1}{a^k}}:\frac{b}{\frac{\mu_2}{b^k}}:\frac{c}{\frac{\mu_3}{c^k}}\right) = \left(\frac{a^{k+1}}{\mu_1}:\frac{b^{k+1}}{\mu_2}:\frac{c^{k+1}}{\mu_3}\right)$$

$$T_{等角}\left(T_{等截}(Q_{k-1})\right) = T_{等角}\left(T_{等截}\left(\frac{a^{k-1}}{\mu_1}:\frac{b^{k-1}}{\mu_2}:\frac{c^{k-1}}{\mu_3}\right)\right) = T_{等角}\left(\frac{\mu_1}{a^{k-1}}:\frac{\mu_2}{b^{k-1}}:\frac{\mu_3}{c^{k-1}}\right) = \left(\frac{a^2}{\frac{\mu_1}{a^{k-1}}}:\frac{b^2}{\frac{\mu_2}{b^{k-1}}}:\frac{c^2}{\frac{\mu_3}{c^{k-1}}}\right) =$$

$\left(\frac{a^{k+1}}{\mu_1}:\frac{b^{k+1}}{\mu_2}:\frac{c^{k+1}}{\mu_3}\right)$，原式成立。

<u>以數學歸納法再證明$n \leq -1$</u>

同上方法，即可證明

■

（三）等截共軛與角比例共軛橢圓的傳統尺規作圖 v.s. $\boldsymbol{Q_n}$共軛點合成函數作圖

引理 6 自橢圓外一點作兩切線與橢圓中心所成之兩三角形面積相等

證明. 略，見參考資料[1]

引理 7 自橢圓 O 外一點 S 作兩切線，交橢圓於 A、B，M 為$\overline{AB}$中點，則 S、M、O 三點共線

證明. 依據引理 6 可推得

定理 12 與定理 18，證明無窮遠點關於ΔABC的等截共軛、角比例共軛點軌跡與其三角形的關係。然而，該如何進行橢圓尺規作圖呢？

（1）**等截共軛橢圓**：先作ΔABC之重心作為橢圓中心，ΔABC三個頂點 A, B, C 分別對重心作點對稱變換得到點 A', B', C'，依據仿射變換單比不變量性質，點 A', B', C'也在橢圓上，則可做出所求橢圓。

（2）**角比例共軛橢圓**：先作ΔABC之旁心三角形ΔDEF，D 點關於ΔABC的對邊為$\overline{BC}$、F 點關於ΔABC的對邊為$\overline{AB}$，再取邊$\overline{AB}$中點 M、取邊$\overline{BC}$中點 N，設$\overleftrightarrow{DN}$與$\overleftrightarrow{FM}$交於 O 點，O 點即為所求橢圓之中心（依據引理 7）。同理，將ΔABC三個頂點 A, B, C 分別對點 O 作點對稱變換得到三點，則可做出所求橢圓。

然而，我們利用定理 20 的「$\left(\frac{a^n}{\mu_1}:\frac{b^n}{\mu_2}:\frac{c^n}{\mu_3}\right)$之共軛$Q_n$點轉換」及「等角共軛點定理」，**提出關於等截與角比例共軛之橢圓的新作圖方法，並且推廣到無窮遠點的$\boldsymbol{Q_n}$共軛**。

作圖思路：

1、依據定理 6，已知當 P 點重心坐標為$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$位於ΔABC外接圓上（異於三頂點）時，其等角共軛點(無窮遠點)之重心坐標為$\left(\frac{a^2}{\mu_1}:\frac{b^2}{\mu_2}:\frac{c^2}{\mu_3}\right)$。

2、考慮ΔABC外接圓上的 P 點，將 P 點進行共軛轉換得到 W 點，若 W 點再進行$T_{角比例}$轉換而得其重心坐標為$\left(\frac{a^2}{\mu_1}:\frac{b^2}{\mu_2}:\frac{c^2}{\mu_3}\right)$，$T_{角比例}(\mathrm{W})$為無窮遠點，此時 W 所成集合為「角比例共軛橢圓」；同理可得「等截共軛橢圓」。

定理 22 若 P 點位於ΔABC外接圓上且異於三頂點、非邊上的點，P 點重心坐標為$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，則$T_{角比例}\left(T_{等截}\left(T_{角比例}(\mathrm{P})\right)\right)$之像在無窮遠處，其中$T_{等截}\left(T_{角比例}(\mathrm{P})\right)$之集合為角比例共軛橢圓

證明.

依據定理 21，顯然$T_{角比例}\left(T_{等截}\left(T_{角比例}(\mathrm{P})\right)\right)=\left(\frac{a^2}{\mu_1}:\frac{b^2}{\mu_2}:\frac{c^2}{\mu_3}\right)$，又已知$\left(\frac{a^2}{\mu_1}:\frac{b^2}{\mu_2}:\frac{c^2}{\mu_3}\right)$成像於無窮遠處

故 $T_{等截}\left(T_{角比例}(\mathrm{P})\right)$之集合為所求角比例共軛圖形（下圖$P_2$集合黑色）

■

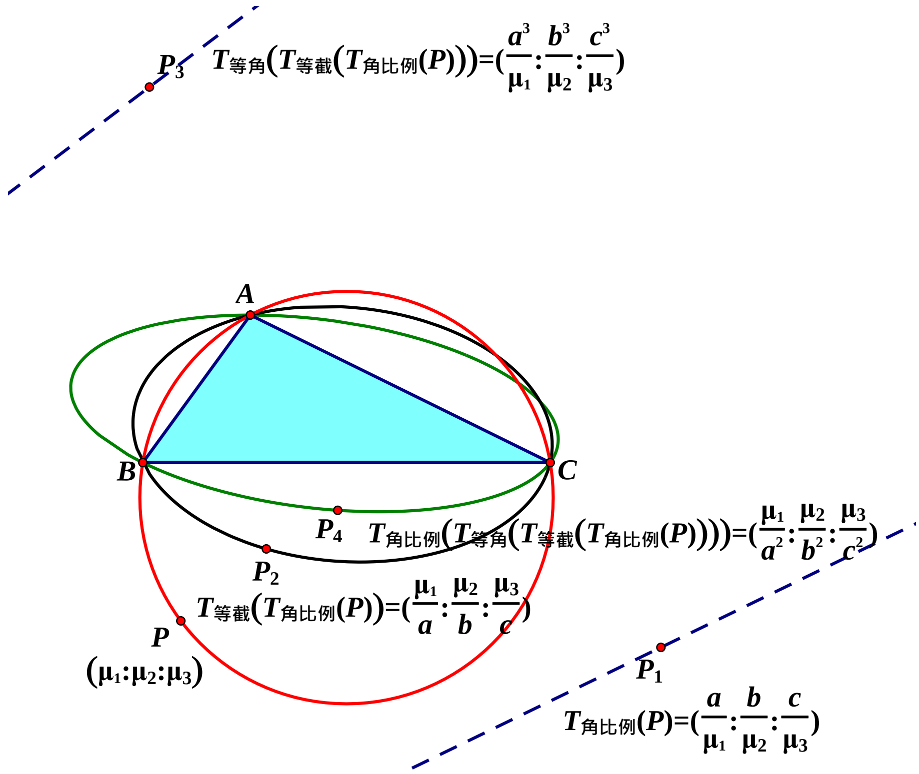
定理 23 若 P 點位於ΔABC外接圓上且異於三頂點、非邊上的點，P 點重心坐標為$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，則$T_{等截}\left(T_{角比例}\left(T_{等角}\left(T_{等截}\left(T_{角比例}(\mathrm{P})\right)\right)\right)\right)$之像在無窮遠處，其中$T_{角比例}\left(T_{等角}\left(T_{等截}\left(T_{角比例}(\mathrm{P})\right)\right)\right)$之集合為等截共軛橢圓

證明.

依據定理 21，顯然$T_{等截}\left(T_{角比例}\left(T_{等角}\left(T_{等截}\left(T_{角比例}(\mathrm{P})\right)\right)\right)\right)=\left(\frac{a^2}{\mu_1}:\frac{b^2}{\mu_2}:\frac{c^2}{\mu_3}\right)$

又已知$\left(\frac{a^2}{\mu_1}:\frac{b^2}{\mu_2}:\frac{c^2}{\mu_3}\right)$成像於無窮遠處

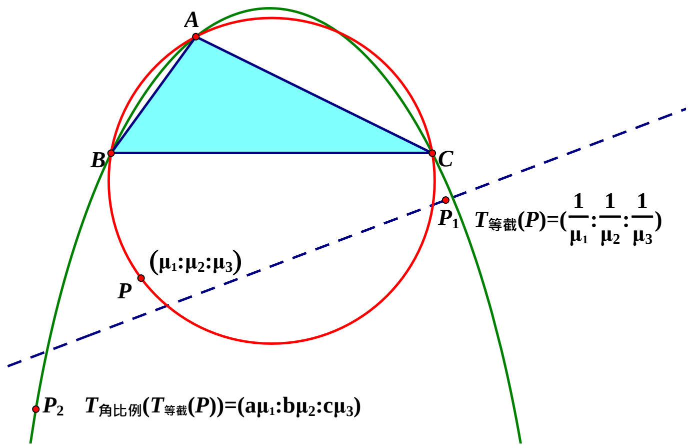
故 $T_{角比例}\left(T_{等角}\left(T_{等截}\left(T_{角比例}(\mathrm{P})\right)\right)\right)$之集合為所求等截共軛圖形（下圖$P_4$點綠色集合）



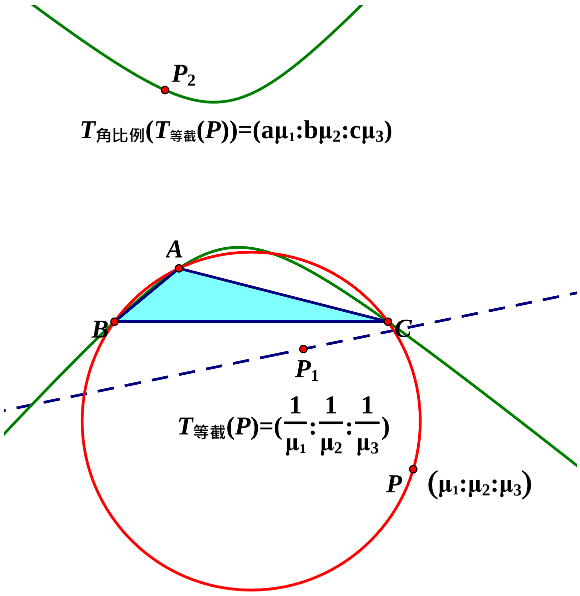
■

（四）無窮遠點的Q_n共軛點軌跡

有趣的是，使用重心坐標合成函數方式，可求得無窮遠點的Q_n共軛軌跡，依據引理 5 可得其為二次曲線。若以幾何軟體 GSP 進行模擬，則可發現無窮遠點的Q_3共軛點軌跡可為一過ΔABC頂點的拋物線，當調整ΔABC 的邊長， Q_3共軛點軌跡則變成雙曲線。於是，下文開始進入二次曲線的判別式討論及證明。



無窮遠點的Q_3共軛像(拋物線)



無窮遠點的Q_3共軛像(雙曲線)

以下證明無窮遠點的Q_n共軛點軌跡為二次曲線－橢圓、拋物線、雙曲線的判別式。

定理 24 無窮遠點的Q_n共軛點軌跡S（二次曲線）判別式

證明.

1.不失一般性，令無窮遠點的重心坐標為$(1:-t:(t-1))$

則其Q_n共軛點的重心坐標為

$$\left(\frac{a^n}{1}:\frac{b^n}{-t}:\frac{c^n}{t-1}\right)=(-t(t-1)a^n:(t-1)b^n:-tc^n)$$

2.令$\varepsilon=-t(t-1)a^n+(t-1)b^n+-tc^n$

考慮$\varepsilon=0$時，t的解（表示二次曲線上的某點為無窮遠點）

$$-t(t-1)a^n+(t-1)b^n+-tc^n=0$$

$$-a_nt^2+(a^n+b^n-c_n)t-b_n=0$$

(1)當重根時，則S必通過一個無窮遠點

又根據引理 5，S必為二次曲線

所以此時S是拋物線

(2)當無實數解時，S是橢圓或圓

(3)當兩相異實數解時，S是雙曲線

3.討論 $\varepsilon=0$的判別式

$$令\Delta=(a^n+b^n-c^n)^2-4a^nb^n$$

$$=(a^n+b^n-c^n+2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}})(a^n+b^n-c^n-2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}})$$

$$=((a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}})^2-c^n)((a^{\frac{n}{2}}-b^{\frac{n}{2}})^2-c^n)$$

$$=(a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}+c^{\frac{n}{2}})(a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}-c^{\frac{n}{2}})(a^{\frac{n}{2}}-b^{\frac{n}{2}}+c^{\frac{n}{2}})(a^{\frac{n}{2}}-b^{\frac{n}{2}}-c^{\frac{n}{2}})$$

故，當給定n時，S由三角形邊長a,b,c決定。

4.討論$n=0,1,2$時，軌跡型態只有一種

(1)$n=0$（等截共軛）時

$\Delta<0$，所以S是橢圓

(2)$n=1$（角比例共軛）時

由三角不等式可得$\Delta<0$，所以S是橢圓

(3)$n=2$（等角共軛）時

由三角不等式可得$\Delta<0$，所以S是圓

■

（五）直線L的$\boldsymbol{Q_n}$共軛點軌跡

引理 8 P點位於直線L上，若R為P點關於ΔABC的Q_n共軛點軌跡，則R為過三頂點二次曲線。

證明.

平面上有一點 P $(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，則通過P點的直線滿足

$$\xi_1\mu_1+\xi_2\mu_2+\xi_3\mu_3=0$$

$$\Rightarrow\frac{\xi_1}{\mu_2\mu_3}+\frac{\xi_2}{\mu_1\mu_3}+\frac{\xi_3}{\mu_1\mu_2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_1}{b^n c^n} \times (\frac{b^n}{\mu_2} \times \frac{c^n}{\mu_3}) + \frac{\xi_2}{a^n c^n} \times (\frac{a^n}{\mu_1} \times \frac{c^n}{\mu_3}) + \frac{\xi_3}{a^n b^n} \times (\frac{a^n}{\mu_1} \times \frac{b^n}{\mu_2}) = 0$$

又 P 點的Q_n共軛點$\left(\frac{a^n}{\mu_1}:\frac{b^n}{\mu_2}:\frac{c^n}{\mu_3}\right)$

前式為二次曲線的齊次坐標形式，故R為過三頂點的二次曲線

■

定理 25 一直線L的Q_n共軛點軌跡（二次曲線）判別式

證明.

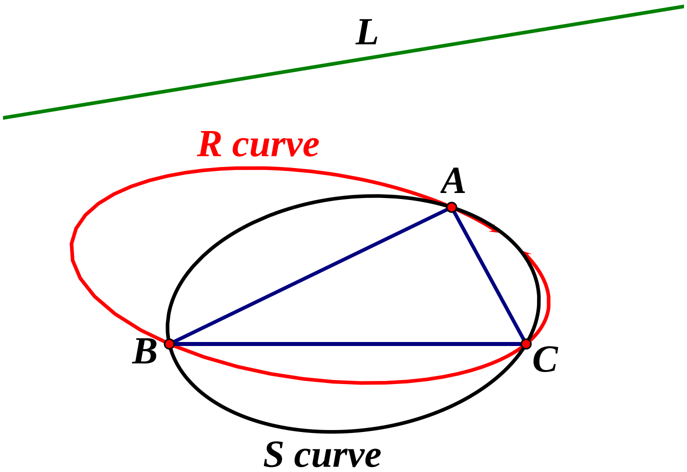
令直線L的Q_n共軛點軌跡為R、無窮遠點的Q_n共軛點軌跡為S

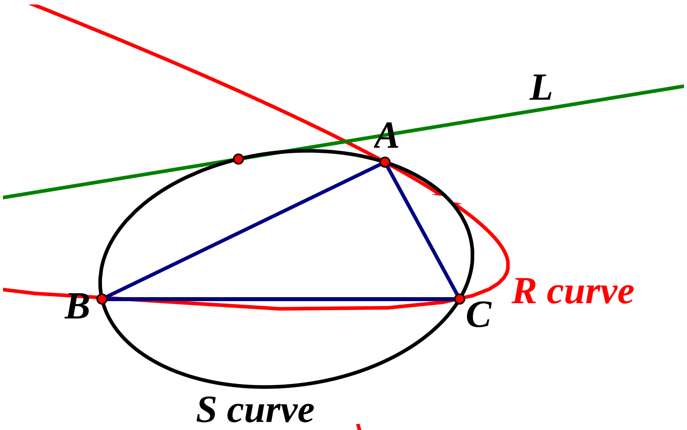
依據引理 8 以及定理 24 可得

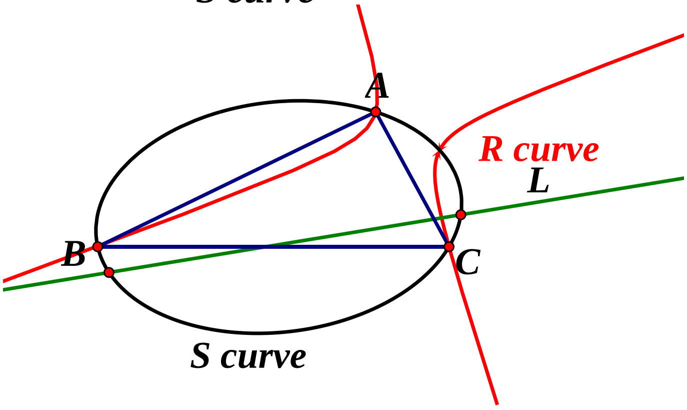
1.當直線L與S相離（不相交），R為橢圓

2.當直線L與S相切（交於一點），R為拋物線

3.當直線L與S相割（交於兩點），R為雙曲線







■

柒、討論與結論

一、等角、等截、角比例共軛點的三線坐標

定理 7、9、16，分別求出 P 點對ΔABC的等角共軛點、等截共軛點、角比例共軛點（以及其自共軛）的重心坐標、三線坐標、三極坐標。從三線坐標來說，Vandeghen (1965)提出的結論本文也可得到證實：若P點的三線坐標為$(\alpha:\beta:\gamma)$，其等角共軛點的三線坐標為$(\alpha_2:\beta_2:\gamma_2)$，其等截共軛點的三線坐標為$(\alpha_0:\beta_0:\gamma_0)$，則有

$$\alpha\alpha_2=\beta\beta_2=\gamma\gamma_2 \text{ 與 } a^2\alpha\alpha_0=b^2\beta\beta_0=c^2\gamma\gamma_0$$

我們更發現，若P點的角比例共軛點的三線坐標為$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$，則有

$$a\alpha\alpha_1=b\beta\beta_1=c\gamma\gamma_1$$

定理 2、10、17 證明，等角自共軛點有 4 個、等截自共軛點有 4 個。我們也證明，角比例自共軛點有 4 個，這是目前文獻上沒有的結論。

二、無窮遠點的等角、等截、角比例共軛點軌跡方程

本文提出定理 11，以無窮遠點的重心坐標推導出其共軛曲線之重心坐標，且導出曲線的切線交點坐標，應用此定理可得下述結論，其中角比例共軛是獨創發現。

定理 12，無窮遠點關於ΔABC的Q_0共軛（等截共軛）點集合，為「Steiner 橢圓」（或ΔDEF的中心三角形ΔABC之外接橢圓）。

定理 18，無窮遠點關於ΔABC的Q_1共軛（角比例共軛）點集合，為ΔABC的旁心三角形ΔDEF的內切橢圓（切於點 A, B, C）（或ΔDEF的垂足三角形ΔABC之外接橢圓）。

定理 3，無窮遠點關於ΔABC的Q_2共軛（等角共軛）軌跡為ΔABC的外接圓。

無窮遠點的三線坐標$(\alpha:\beta:\gamma)$，滿足$a\alpha+b\beta+c\gamma=0$（可視作無窮遠點的重心坐標相加為 0），則

其等角共軛軌跡的三線坐標$(\alpha_2:\beta_2:\gamma_2)$滿足

$$a\beta_2\gamma_2+b\gamma_2\alpha_2+c\alpha_2\beta_2=0$$

其等截共軛軌跡的三線坐標$(\alpha_0:\beta_0:\gamma_0)$滿足

$$\frac{\beta_0\gamma_0}{a}+\frac{\gamma_0\alpha_0}{b}+\frac{\alpha_0\beta_0}{c}=0$$

其角比例共軛軌跡的三線坐標$(\alpha_1:\beta_1:\gamma_1)$滿足

$$\beta_1\gamma_1+\gamma_1\alpha_1+\alpha_1\beta_1=0$$

三、一般化：無窮遠點的Q_n共軛點軌跡方程及判別式

定理 20，證明P點的$Q_n\left(\frac{a^n}{\mu_1}:\frac{b^n}{\mu_2}:\frac{c^n}{\mu_3}\right)$共軛點存在性。本文再提出以等角、等截、角比例共軛推廣Q_n共軛點的作法。依據定理 5 及定理 20，若P點的三線坐標為$(\alpha:\beta:\gamma)$且Q_n共軛點的三線坐標為$(\alpha_n:\beta_n:\gamma_n)$滿足

$$a^{2-\mathrm{n}}\alpha\alpha_n=b^{2-n}\beta\beta_n=c^{2-n}\gamma\gamma_n$$

另可推廣，若無窮遠點的三線坐標$(\alpha:\beta:\gamma)$，滿足$a\alpha+b\beta+c\gamma=0$，則其Q_n共軛點的三線坐標$(\alpha_n:\beta_n:\gamma_n)$滿足

$$a^{n-1}\beta_n\gamma_n+b^{n-1}\gamma_n\alpha_n+c^{n-1}\alpha_n\beta_n=0$$

值得一提的是，本文提出以「等角共軛點及Q_n共軛點函數」進行「無窮遠點的等截共軛橢圓」及「無窮遠點的角比例共軛橢圓」新的作圖法。

定理 24，證明$\mathrm{Q_n}$共軛點軌跡S二次曲線之判別式（下式），由n與邊長a,b,c決定。

$$\Delta=(a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}+c^{\frac{n}{2}})(a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}-c^{\frac{n}{2}})(a^{\frac{n}{2}}-b^{\frac{n}{2}}+c^{\frac{n}{2}})(a^{\frac{n}{2}}-b^{\frac{n}{2}}-c^{\frac{n}{2}})$$

值得一提，若$n=4$且$\Delta\mathrm{ABC}$為直角三角形，則$\Delta=0$。此時，曲線S必為拋物線。

四、一般化：直線的Q_n共軛點軌跡及判別式

引理 8 證明直線L的Q_n共軛點軌跡必為二次曲線R，再透過定理 24 與 25，即可得二次曲線R的判別情形。具體來說，直線L與無窮遠點的Q_n共軛點軌跡S的相交情形決定了R的型態。

五、更一般化：Cremona 變換

Cremona 變換中的二次變換（雙有理變換）（參考資料[4]，p.325），滿足

$$P(\mu_1:\mu_2:\mu_3)|\!\to Q\left(\frac{n_1}{\mu_1}:\frac{n_2}{\mu_2}:\frac{n_2}{\mu_3}\right)=(n_1\mu_2\mu_3:n_2\mu_1\mu_3:n_3\mu_1\mu_2)$$

顯然，我們用相同方式可證明無窮遠點、一直線的 Cremona 二次變換分別為二次曲線S與R。同理，可求得其判別式：

無窮遠點的 Cremona 變換之S曲線判別式為

$$\Delta=(n_1+n_2-n_3)^2-4n_1n_2$$

直線L的 Cremona 變換之R曲線判別條件，為直線L與曲線S的相交情形。

Q_n共軛可視為 Cremona 變換的特殊情況，但本文所提出的Q_n共軛變換具有特定幾何意義（有向線段、有向角）及具有合成函數關係。

捌、參考資料

1.何聖宗、賴堯暉（1994）。三角形的內切橢圓。**數學傳播季刊**，**18**(3)，1-12。

2.李耀文（2006）。三角形等角共軛點的性質探究。**中學教研（數學）**，**2006**(11)，41-44。

3.陳建燁（2011）。角比例共軛點。**數學傳播季刊**，**35**(1)，29-35。

4.單墫（譯）（2012）。**近代的三角形幾何學**（原作者：W. Gallatly）。哈爾濱：哈爾濱工業大學出版社。

5.黃家禮（2000）。**幾何明珠**。臺北：九章出版。

6.Vandeghen, A. (1965). Some Remarks on the Isogonal and Cevian Transforms. Alignments of Remarkable Points of a Triangle. *Amer. Math. Monthly*, *72*, 1091-1094.

【評語】030401

作者利用三線性座標與面積座標等研究等角、等截、等比例共軛點，並由此提出推廣，及考慮無窮遠點上，在此類共軛之下的軌跡，為二次曲線。建議與網頁上 kimbeling 的已知結果作區隔，凸顯本作品的新結果，並可考慮定性的(二次曲線的)性質，可使作品更加完整。