

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

國小組 數學科

最佳(鄉土)教材獎

080416

「知」乎「摺」也

學校名稱：臺中市私立明道普霖斯頓國民小學

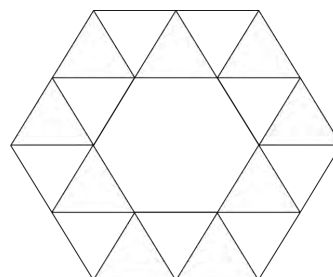
作者：  小五 彭柏棣  小五 賴宇軒  小五 黃奎穎  小四 柳裕恩  小四 林子稜  小四 陳柔伊	指導老師：  陳志平
---	------------------

關鍵詞：連塊、摺紙、三角環形

# 「知」乎「摺」也

## 摘要

本研究在探討由 18 個正三角形所組成的三角環形（如圖一），經摺疊可產生的連塊，針對其中正六邊形連塊進行研究，找出摺疊的規律，並設計益智遊戲。



圖一

## 壹、研究動機

在康軒版四年級上學期數學課本第六單元「三角形」中，我們學到三角形的性質；之前和媽媽去看婦幼用品及玩具展的時候，有個攤位展出組合智慧片，工作人員用 18 個正三角形智慧片所組成的環形，在一分鐘內變換了二十種不同的形體，我看得目瞪口呆，而且他還說可以變化超過一百種的形體，當場我就請媽媽幫我買一盒想自己試試。後來我參加學校的數學動動腦社團的時候，老師在課堂上介紹 792 魔術卡益智遊戲（如圖二），我想到也可以用三角環形來設計魔術卡，「知」乎？「摺」也！要「知」道能成功嗎，只有努力「摺」了。

1	1	3	5
2	2	3	4
3	3	2	2
1	1	4	5

6	7	8	6
6	7	8	6
7	8	5	4
7	8	5	4

1	1
1	1

2	2
2	2

...

圖二：這是 792 魔術卡的正面及反面，粗線的部分表示用剪刀剪開，經過摺疊要完成同一面都是 4 個 1、4 個 2...的正方形。

## 貳、研究目的

- 一、找出三角環形摺疊的規律和特性。
- 二、找出一種形體來設計新的魔術卡。
- 三、探討自製魔術卡的特性並創造出新的魔術卡。

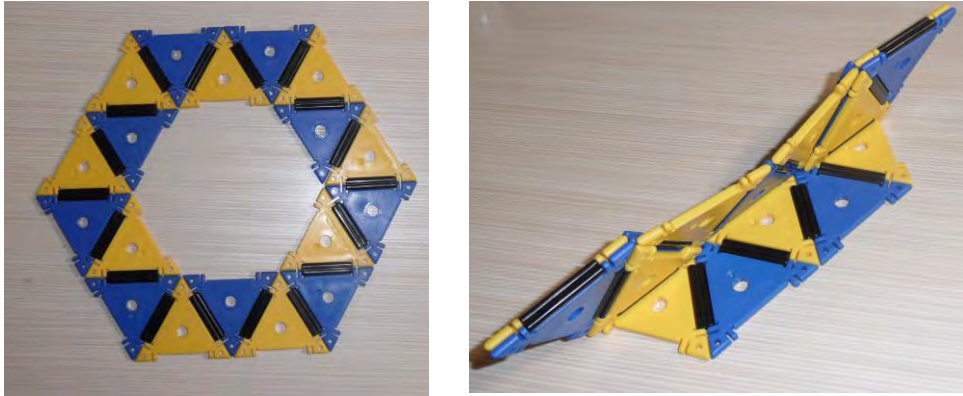
## 參、研究器材與專有名詞

- 一、研究器材：組合智慧片、筆、紙、剪刀、膠帶、用紙做成的三角環形。
- 二、專有名詞：三角環形：由 18 個正三角形所組成的環形如圖一。

#### 肆、研究過程

##### 研究一：設計摺法的命名

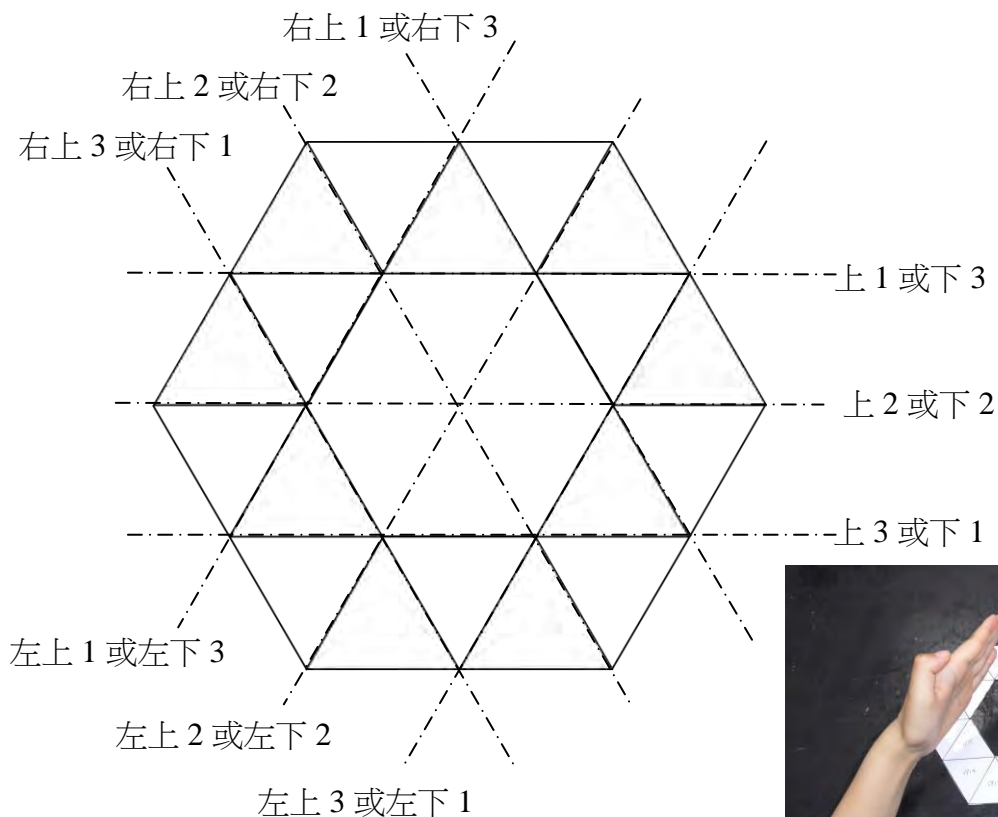
因為組合智慧片有厚度（如圖三），許多形體摺不出來，我們改用紙張來進行研究。



圖三：原本用智慧片組成的三角環形，因為厚度的關係許多形狀都摺不出來。

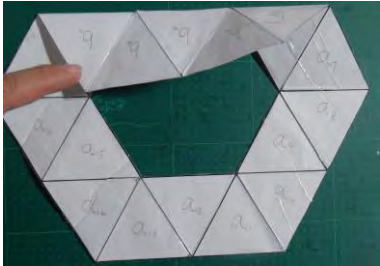
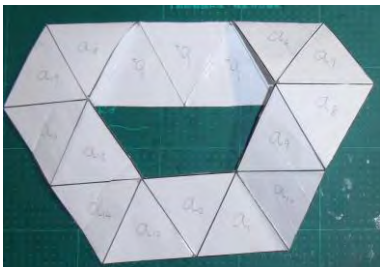
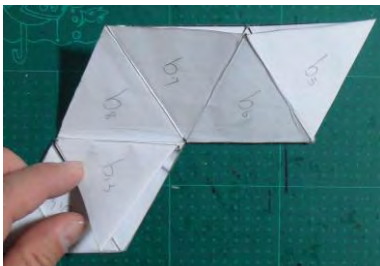
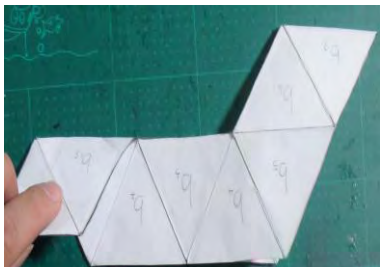
我們在做研究的過程中，常常一個形體摺出來後，下次要再摺同樣的形體往往又忘記怎麼摺，後來我們找到解決的辦法，就是設計摺法的命名方便記錄，依照不同的需要，我們設計了三種命名方法。

一、過程摺法：將摺疊的動作以文字敘述做成記錄，我們將摺的方向和位置做了定義，（如圖四），用這樣的定義就能順利記錄，方便能再次順利的摺出來。



圖四：為了方便記憶，我們用雙手比成一個尖塔狀（如右圖），右手的方向為右上或右下、左手的方向為左上或左下。

過程摺法說明如下：

摺法名稱	說明	圖示	其他類似摺法
上1前摺	將上方第一橫列往上的方向摺。		上2前摺、上3前摺、下1前摺、 下2前摺、下3前摺、右上1前摺、 右上2前摺、右上3前摺、 右下1前摺、右下2前摺、 右下3前摺、左上1前摺、 左上2前摺、左上3前摺、 左下1前摺，左下2前摺、 左下3前摺
上1後摺	將上方第一橫列往下的方向摺。		上2後摺、上3後摺、下1後摺、 下2後摺、下3後摺、右上1後摺、 右上2後摺、右上3後摺、 右下1後摺、右下2後摺、 右下3後摺、左上1後摺、 左上2後摺、左上3後摺、 左下1後摺，左下2後摺、 左下3後摺
單層上1前摺	有重疊2層或2層以上時，將上方第一橫列的第一層往上的方向摺。		同上，前面再加單層2字。
左側上1前摺	做上1前摺的動作，但只摺左側，右邊不摺		同上，前面再加上側、下側、左側、右側等字。

用途：透過簡單的位置、方向及摺的方式的定義，就可以記錄大部分摺的動作，記錄方便，對於操作者而言，看著記錄要做出相同形體也很容易理解及操作。

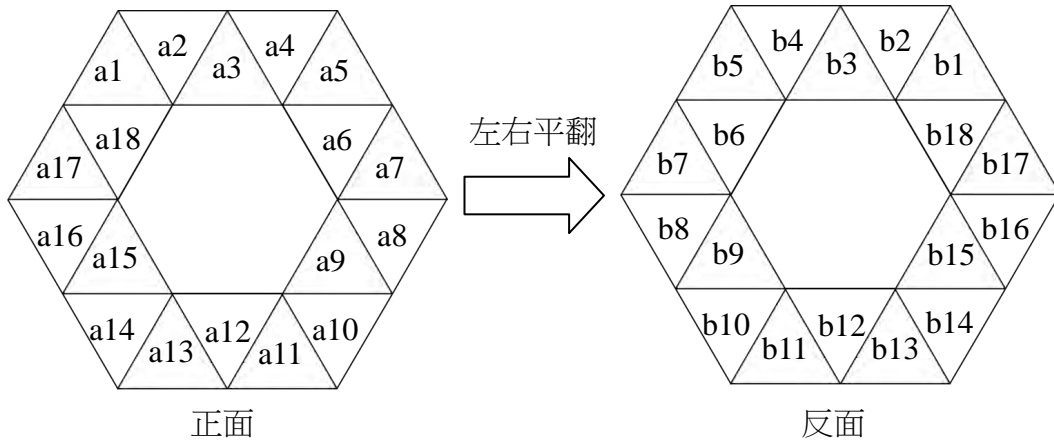
二、面數摺法：將三角環形完全攤開時朝上共有 18 面，記錄摺疊後朝上面數的變化，方便知道摺疊後朝上的面數是幾面，如： $\div 2$ ：表示對摺，面數只剩原來的一半， $-1$ ：摺疊後有 2 面重疊，面數減 1， $-2$ ：摺疊後有 4 面重疊，面數減 2， $-3$ ：摺疊後有 6 面重疊，面數減 3...等。

用途：可以記錄朝上的三角形有幾個，在摺疊完成後用於檢驗面數是否正確，但若單單使用這種記錄方式，操作者無法依照記錄正確做出原來的形體。

三、結果摺法：我們在正反面每個三角形上進行編碼，以代號記錄哪些三角形面對面疊在一起。

我們將三角環形左上角的三角形訂為 a1 以順時針方向逐次填上 a2~a18，左右方向平翻到背面，右上角為 b1，以逆時針方向逐次填上 b2~b18，這樣 a1 的背面為 b1，a2 的背面為 b2，以此類推（如圖五）。

我們以「：」表示經摺疊後重疊在一起的三角形，例如記錄為 (a1 : a2) 表示經摺疊後，a1 和 a2 兩個三角形面對面重疊在一起；(a1~a7, a17, a18 : a14~a8, a16, a15) 表示經摺疊後，a1~a7, a17, a18 分別和 a14~a8, a16, a15 重疊在一起。



圖五

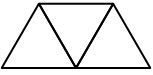
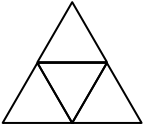
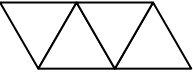
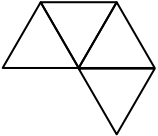
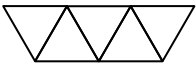
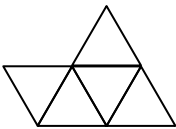
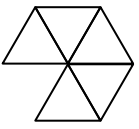
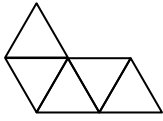
用途：這種記錄方式，可以正確的記錄摺完之後哪些三角形疊在一起，所有的情形都能記錄下來，但是無法讓操作者知道是如何摺的，要操作者自己嘗試。

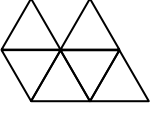
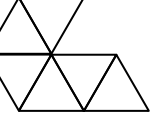
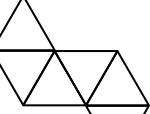
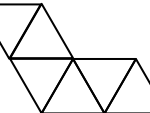
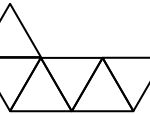
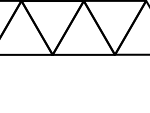
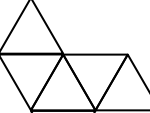
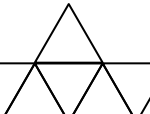
以上三種記錄方式各有作用及特性，我們以這三種記錄方式搭配使用，也可以互相檢驗有無摺錯或記錄錯誤。

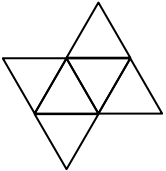
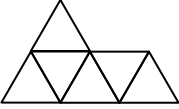
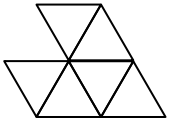
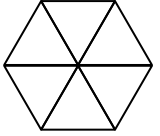
### 研究二：三角形連塊的摺疊

為了了解三角環形摺疊的性質並找出一種來做魔術卡，我們以三角形連塊為目標，來進行摺疊研究。我們經過一番的努力，我們順利摺疊出一~六連塊。記錄如下：

圖形	過程摺法	面數摺法	結果摺法
一連塊：1 個 	上 2 前摺、 右下 2 前摺、 上 2 前摺、 下 1 後摺、 右上 1 前摺	$\div 2, -3, \div 2,$ $-1, -1$	(a1~a7, a17, a18 : a14~a8, a16, a15) (b2~b4 : b7~b5) (b11~b13 : b16~b14) (b9 : b10) (b1 : b18)
二連塊：1 個 	右上 2 前摺、 左上 2 前摺、 右上 2 前摺、 左下 1 前摺	$\div 2, -3, \div 2,$ $-1$	(a1, a11~a18 : a2, a10~a3) (b5~b7 : b10~b8) (b1, b17, b18 : b14, b16, b15) (b3 : b4)

三連塊：1 個 	上 2 前摺、 右上 2 前摺、 左上 2 後摺	$\div 2, -3, \div 2$	$(a_1 \sim a_7, a_{17}, a_{18} : a_{14} \sim a_8, a_{16}, a_{15})$ $(b_2 \sim b_4 : b_7 \sim b_5)$ $(b_{11} \sim b_{13} : b_{16} \sim b_{14})$
四連塊：3 個 	上 2 前摺、 左下 1 前摺、 右下 1 後摺、 下 2 前摺	$\div 2, -1, -2,$ $-2$	$(a_1 \sim a_7, a_{17}, a_{18} : a_{14} \sim a_8, a_{16}, a_{15})$ $(b_3 : b_4)$ $(b_5, b_{12} : b_{14}, b_{13})$ $(b_8, b_{16} : b_9, b_{15})$
	上 2 前摺、 右上 2 前摺、 上 1 前摺、 右下 1 前摺	$\div 2, -3, -1,$ $-1$	$(a_1 \sim a_7, a_{17}, a_{18} : a_{14} \sim a_8, a_{16}, a_{15})$ $(b_2 \sim b_4 : b_7 \sim b_5)$ $(b_1 : b_{18})$ $(b_{15} : b_{16})$
	右下 2 前摺、 下 2 前摺、 左下 1 後摺、 左上 1 前摺	$\div 2, -3, -1,$ $-1$	$(a_1, a_{11} \sim a_{18} : a_2, a_{10} \sim a_3)$ $(b_{11} \sim b_{13} : b_{16} \sim b_{14})$ $(b_6 : b_7)$ $(b_1 : b_{18})$
五連塊：4 個 	下 2 前摺、 左下 2 前摺、 下 1 前摺	$\div 2, -3, -1$	$(a_1 \sim a_7, a_{17}, a_{18} : a_{14} \sim a_8, a_{16}, a_{15})$ $(b_8 \sim b_{10} : b_{13} \sim b_{11})$ $(b_{14} : b_{15})$
	下 2 前摺、 左上 2 前摺、 單層左下 1 前摺、 下 1 前摺	$\div 2, -3, 0,$ $-1$	$(a_1 \sim a_7, a_{17}, a_{18} : a_{14} \sim a_8, a_{16}, a_{15})$ $(b_8 \sim b_{10} : b_{13} \sim b_{11})$ $(b_2 : b_3)$ $(b_{14} : b_{15})$
	上 1 前摺、 右下 2 前摺、 上 1 前摺、 左上 1 前摺、 下 1 前摺	$-2, -6, -3,$ $-1, -1$	$(a_1, a_5 : a_{18}, a_6)$ $(a_7 \sim a_{10}, b_3, b_5 : a_{14} \sim a_{11}, b_2, a_{15})$ $(a_2, b_4, b_{15} : b_{18}, b_{17}, b_{16})$ $(b_1 : a_{17})$ $(b_{11} : b_{12})$
	上 2 前摺、 右上 2 前摺、 左上 1 前摺	$\div 2, -3, -1$	$(a_1 \sim a_7, a_{17}, a_{18} : a_{14} \sim a_8, a_{16}, a_{15})$ $(b_2 \sim b_4 : b_7 \sim b_5)$ $(b_{17} : b_{18})$

六連塊：12 個 	上 2 前摺、 單層左下 1 前摺、 右上 1 後摺、 左上 1 前摺	$\div 2, +1, -3,$ $-1$	(a1~a7, a17, a18 : a14~a8, a16, a15) (a6, a9, b3 : a7, a8, b4) (a4, a5, a11 : b8, b7, a10) (b17 : b18)
	右上 2 前摺、 左上 1 前摺、 上 1 前摺、 上側左下 2 前摺	$\div 2, -1, -1,$ $-1$	(a1, a11~a18 : a2, a10~a3) (b5 : b6) (b17 : b18) (b2 : b3)
	上 2 前摺、 右上 2 前摺、 單層左上 3 前摺、 左上 1 前摺	$\div 2, -3, +1,$ $-1$	(a1~a7, a17, a18 : a14~a8, a16, a15) (b2~b4 : b7~b5) (b9 : b10) (b17 : b18)
	上 2 前摺、 右上 2 前摺	$\div 2, -3$	(a1~a7, a17, a18 : a14~a8, a16, a15) (b2~b4 : b7~b5)
	上 2 前摺、 右側上 1 前摺、 左下 1 前摺、 左上 1 前摺	$\div 2, -1, -1,$ $-1$	(a1~a7, a17, a18 : a14~a8, a16, a15) (b5 : b6) (b8 : b9) (b17 : b18)
	下 2 前摺、 上 1 前摺、 右下 1 後摺	$\div 2, -2, -1$	(a1~a7, a17, a18 : a14~a8, a16, a15) (b9, b15 : b10, b14) (b17 : b18) (b17 : b18)
	右上 1 後摺、 右下 1 前摺、 左上 1 前摺、 下 1 前摺、 單層上 2 前摺	$-2, -2, -3,$ $-3, -2$	(b3, b9 : b4, b8) (a12, a18 : a13, a17) (a1, a2, b17 : b5, a3, b16) (a9, b7, b14 : a10, a11, b13) (b1, b6, b18 : b12, b11, b15)
	上 1 前摺、 左下 1 前摺、 右下 1 前摺、 下 2 前摺	$-2, -3, -4,$ $-3$	(a1, a5 : a18, a6) (a7, a8, a11 : b5, b4, a12) (a13, a14, a16, a17 : b11, b10, b2, b1) (b3, b8, b16 : b14, b9, b15)

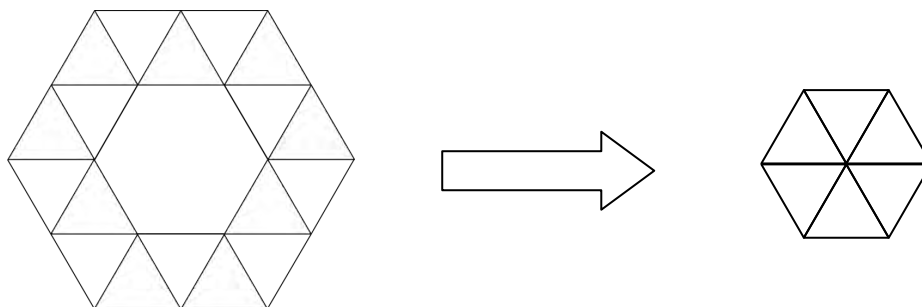
	上1前摺、 上1後摺、 右下2前摺、 單層右上1前摺、 單層上1前摺	-2, -4, -4, -2, 0	(a1, a5 : a18, a6) (b6, b7, b17, b18 : b9, b8, b16, b15) (a3, a11~a13 : a4, a10~a8) (b1, b13, b14 : b2, b12, b3) (a14 : a15)
	左下2前摺、 上1前摺、 下2後摺	÷2, -1, -2	(a1~a4, a14~a18 : a8~a5, a13~a9) (b8 : b9) (b15, b16 : b18, b17)
	左上2前摺、 右上1前摺、 下1後摺	÷2, -1, -2	(a1~a4, a14~a18 : a8~a5, a13~a9) (b1 : b18) (b2, b9 : b11, b10)
	右上2前摺、 左上1前摺、 上1前摺、 左下1前摺	÷2, -1, -1, -1	(a1, a11~a18 : a2, a10~a3) (b5 : b6) (b17 : b18) (b9 : b10)

研究發現：摺完這些連塊，我們發現若同為正面的三角形相連在一起，則必定為奇數和偶數相連（如 a1、a4），若正反面的三角形相連在一起，則一定是奇數和奇數相連（如 a3、b5）或偶數和偶數相連（如 a4、b8），這個發現可以幫助我們刪掉很多不可能組合在一起的三角形。

三角環形一個面雖然有 18 個三角形，但以相對位置而言只有 2 種（a1 和 a3），這個發現也可以讓我們更有效率的進行研究。

### 研究三：摺疊成正六邊形的研究

我們觀察 792 魔術卡，它由 16 個正方形組成，必須用規定的數字摺疊成 4 個正方形，而我們的三角環形是一個空心的正六邊形，以上我們摺疊的三角形連塊中，摺成正六邊形的六連塊最符合我們所需要的，我們決定以摺成正六邊形來設計出新的魔術卡(如圖六)。



圖六 我們把三角環形摺疊成正六邊形來當魔術卡



研究發現：在摺疊成正六邊形的過程中，我們發現幾個性質：

- 一、三角環形內的三角形以相對位置而言，可以分為  $a_1$  和  $a_3$  兩種（以背面則分為  $b_1$  和  $b_3$ ），以下我們解說時皆以  $a_1$  和  $a_3$  代替所有的三角形，把代號除以 3，餘數為 1 或 2 則和  $a_1$  相同，餘數為 0 則和  $a_3$  相同（ $a_1$  和  $a_2$  為互相對稱的位置，所以我們把  $a_1$ 、 $a_2$  視為同一種）。
- 二、因為  $a_2$  的背面是  $b_2$ ，背面的左右兩側是  $b_1$  和  $b_3$  所以  $a_2$  無法與  $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$  相鄰。
- 三、三角環形正反兩面，每面各 18 個正三角形，兩個面共有 36 個三角形，可組成 6 組不同的正六邊形，每組有 6 個三角形。

研究四：正反面組成與奇偶性

三角環形正反兩面的 36 個三角形中有 18 個在正面（即  $a_1 \sim a_{18}$ ），18 個在反面（即  $b_1 \sim b_{18}$ ），而正面奇數和偶數各 9 個，背面的奇偶數也各 9 個，我們整理出組成正六邊形的正反面情形共有 7 種，它們和奇偶性的關係如下：

六正：3 奇 3 偶。

說明：因為全部都是正面，而且同一面相鄰，一定是奇偶相接，所以為 3 奇 3 偶。

五正一反：4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶。

說明：若為六正則為 3 奇 3 偶，其中一個改為反面，則這一個必為奇偶相反，所以只可能為 4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶。

四正二反：依正反面的相對位置有所不同，正正正正反反：3 奇 3 偶；正正正反正反：5 奇 1 偶或 1 奇 5 偶；正正反反正反：3 奇 3 偶。

說明：依照同面則為奇偶相連，不同面則為奇奇相連或偶偶相連的規則，正正正正反反的奇偶性為奇偶奇偶偶奇或偶奇偶奇奇偶，為 3 奇 3 偶；正正正反正反的奇偶性為奇偶奇奇奇奇或偶奇偶偶偶偶，為 5 奇 1 偶或 1 奇 5 偶；正正反反正反的奇偶性為奇偶偶偶奇奇或偶奇奇奇偶偶，為 3 奇 3 偶。

三正三反：依正反面的相對位置有所不同，正正正反反反：4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶；正正反反正反：4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶；正正反反正反：4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶；正反反正正反：6 奇或 6 偶。

說明：依照同面則為奇偶相連，不同面則為奇奇相連或偶偶相連的規則，正正正反反反的奇偶性為奇偶奇奇偶奇或偶奇偶偶奇偶，為 4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶；正正反反正反的奇偶性為奇偶偶偶偶奇或偶奇奇奇奇偶，為 4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶；正正反反正反的奇偶性為奇偶偶奇奇奇或偶奇奇偶偶偶，為 4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶；正反反正正反的奇偶性為奇奇奇奇奇奇或偶偶偶偶偶偶，為 6 奇或 6 偶。

二正四反：依正反面的相對位置有所不同，正正反反反反：3 奇 3 偶；正反反正反反：5 奇 1 偶或 1 奇 5 偶；正反反反正反：3 奇 3 偶。

說明：同四正二反。

一正五反：4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶。

說明：同五正一反

六反：3 奇 3 偶。

說明：同六正。

研究發現：因為三角環形的正反面數量及奇偶數量都是固定的，所以我們可以利用這些特性，來選取合適的三角形組成這六個正六邊形，這六個正六邊形必須包含正反兩面全部 36 個正三角形，所以總共有 18 個正面，18 個反面，18 個奇數，18 個偶數，正反面的組合有上述的六正、五正一反、四正二反、三正三反、二正四反、一正五反、六反等七種情形，而且它們各自能產生的奇偶性也是固定的，如此我們就能知道哪些組合可能有合適的正六邊形魔術卡組合。

我們可以利用正反面及奇偶性試著找出合適的解。

例如我們用以下幾種來組成六個正六邊形，六正：3 奇 3 偶、四正二反：3 奇 3 偶、四正二反：3 奇 3 偶、六反：3 奇 3 偶、六反：3 奇 3 偶、四正二反：3 奇 3 偶，這樣組成的六個正六邊形共有 18 個正面，18 個反面，18 個奇數，18 個偶數，如此才有可能組成。

我們找出來的解答是

六正：3 奇 3 偶：(a1, a2, a3, a6, a11, a18)

四正二反：3 奇 3 偶 (a4, a5, a9, a10, b7, b14)

四正二反：3 奇 3 偶 (a12, a13, a14, a15, b8, b17)

六反：3 奇 3 偶 (b3, b4, b5, b6, b13, b18)

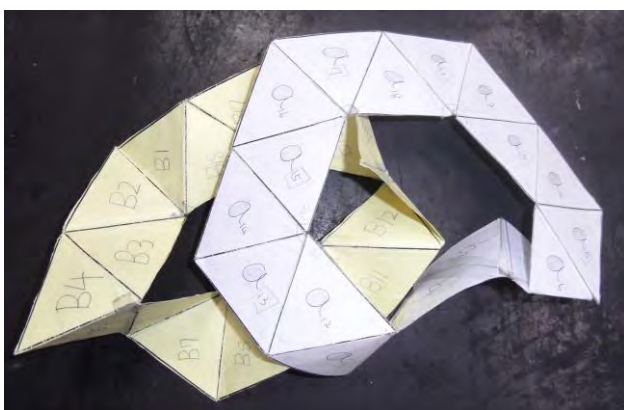
六反：3 奇 3 偶 (b9, b10, b11, b12, b15, b16)

四正二反：3 奇 3 偶 (a7, a8, a16, a17, b1, b2)

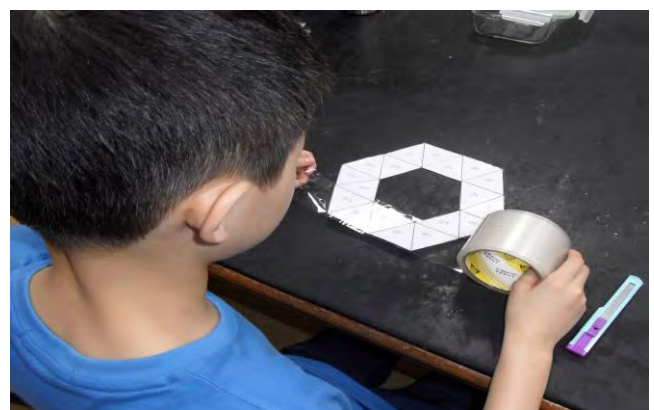
組成三角形	正反面個數	奇偶性	過程摺法	面數摺法	結果摺法
(a1, a2, a3, a6, a11, a18)	六正	3 奇 3 偶	右上 1 後摺、 右下 1 後摺、 左下 2 前摺、 單層左上 1 前摺、 下 1 前摺、 單層左上 1 前摺	-2, -2, -3, -3, -2, 0	(b3, b9 : b4, b8) (b12, b18 : b13, b17) (b5, b15, b16 : b6, b14, b7) (a7, a13, a14 : a8, b11, b10) (a9, a18 : a10, a11) (a12 : a15)
(a4, a5, a9, a10, b7, b14)	四正二反	3 奇 3 偶	左下 1 前摺、 下 2 前摺、 左上 1 前摺、 單層下 2 前摺、 左上 1 後摺	-2, -6, -2, 0, -2	(a6, a12 : a7, a11) (a1~a3, a17, a18, b8 : a14, a13, b11, a16, a15, b9), (a10, b12 : b14, b13) (b1 : b2)(b3 : b18)
(a12, a13, a14, a15, b8, b17)	四正二反	3 奇 3 偶	左下 1 後摺、 左上 1 後摺、 右上 1 後摺、 上 2 後摺、 右上 1 前摺	-2, -2, -3, -4, -1	(b6, b12 : b7, b11) (b2, b16 : b3, b15) (a1, a2, a8 : b5, b4, a7) (a4~a6, a18 : a11~a9, a17)(b9 : b10)

(b3, b4, b5, b6, b13, b18)	六反	3 奇 3 偶	左下 1 前摺、 左下 2 前摺、 下 2 前摺、 單層上 1 前摺、 右下 1 前摺、 單層上 1 前摺	-2, -2, -4, -2, -2, 0	(a6, a12 : a7, a11) (a2, a16 : a3, a15) (a1, a8, a9, b6 : a18, a17, a10, b15) (a13, a14, b16 : b11, b10, b17) (b6, b15 : b13, b14)(b9 : b12)
(b9, b10, b11, b12, b15, b16)	六反	3 奇 3 偶	右上 1 前摺、 右上 2 前摺、 上 1 前摺、 上 1 前摺、 左上 1 後摺	-2, -2, -3, -3, -2	(a3, a9 : a4, a8) (a12, a18 : a13, a17) (a5, a16, b3 : b1, b18, b2) (a1, a15, b17 : a6, a14, a7) (a2, b6 : b8, b7)
(a7, a8, a16, a17, b1, b2)	四正二反	3 奇 3 偶	上 1 前摺、 右上 2 後摺、 下 1 前摺、 左下 1 後摺	-2, -6, -2, -2	(a1, a5 : a18, a6) (a2, b11~b15 : a3, b10~b7, b6) (a4, a15 : a13, a14) (a11, a12 : b3, b4)

由研究四我們可以得知哪些正反面的組合有可能做出魔術卡，但是卻沒有辦法得知如何做出正確的魔術卡組合，為了做出合適的解答，我們必須不斷的嘗試，為此我們摺壞了不少魔術卡（如圖七），後來我們也加上膠帶，降低魔術卡的損壞率（如圖八），為了更有效率找出合適的解答，我們必須再找出新的方法。



圖七：為了找出合適的解答，我們摺壞了好幾個魔術卡。



圖八：為了降低魔術卡的損壞率，我們用膠帶把整個魔術卡包起來。

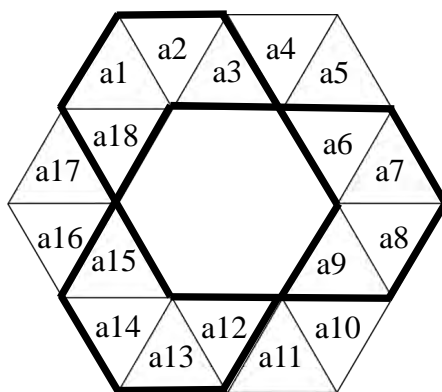
研究四的結果也讓我們有新的收穫，六個正六邊形的正反面及奇偶性的組合如果都很類似，這個魔術卡的摺法可能就都很類似，那麼將大大的降低這個魔術卡的挑戰性，所以我們也可以用正反面及奇偶性來判斷我們做出來的魔術卡是否具挑戰性。

### 研究五：組成正六邊形的連塊研究

我們發現由三角環形摺疊後組成的正六邊形，依原本相鄰的三角形數量來畫分，可以分為四連塊、三連塊、二連塊、單塊共 4 種，是否連續可以從編號中看出來，同一面的連續整數即為連塊，其中 a18 和 a1 為連塊，b18 和 b1 亦為連塊，我們想利用連塊來找出組成正六邊形的規則，方便我們能找出合適的三角形來組成正六邊形。

一、各個連塊的分類，我們以順時針方向的第一塊來區分同一連塊的種類（以下以正面進行說明，反面則改為逆時針方向）。

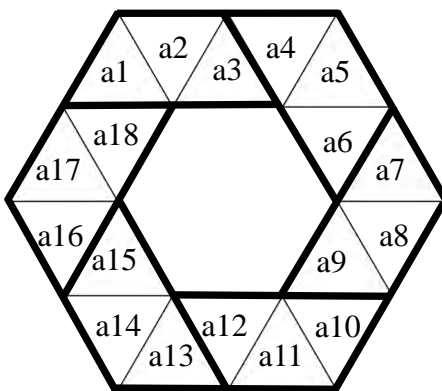
(一)四連塊：只有一型，為 a18 型，第一個三角形編號可被 3 整除的四個連塊為此型，其他編號不可能為四連塊，一面有 6 個四連塊，但使用的塊數會有重複的情形，故一面最多只能產生 3 個四連塊（如圖九）。



圖九：粗線圍起來的為其中三個四連塊

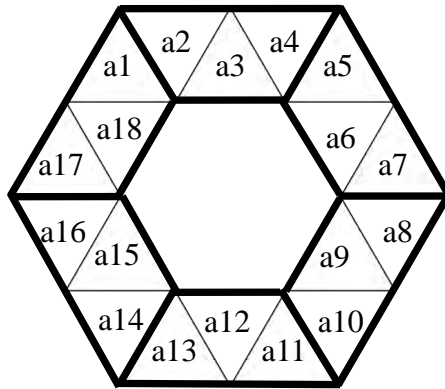
(二)三連塊：

a1 型，第一個三角形編號被 3 除餘 1 的三個連塊為此型，一面可以組成 6 個此型的三連塊（如圖十）。



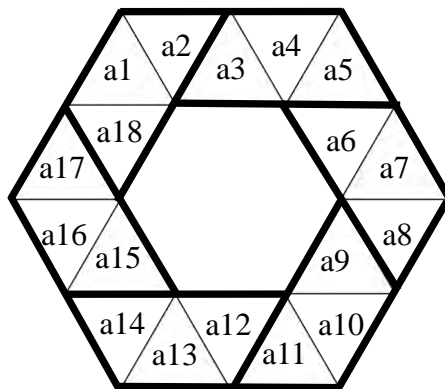
圖十：粗線圍起來的為 a1 型的三連塊

a2 型，第一個三角形編號被 3 除餘 2 的三個連塊為此型，一面可以組成 6 個此型的三連塊（如圖十一）。



圖十一：粗線圍起來的為 a2 型的三連塊

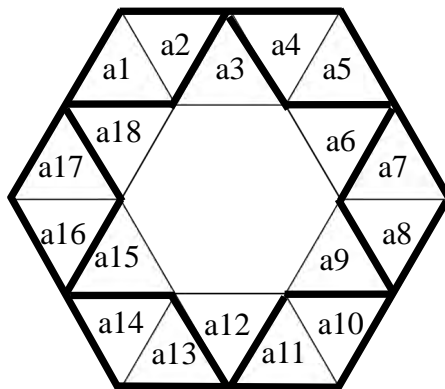
a3 型，第一個三角形編號可被 3 整除的三個連塊為此型，一面可以組成 6 個此型的三連塊（如圖十二）。



圖十二：粗線圍起來的為 a3 型的三連塊

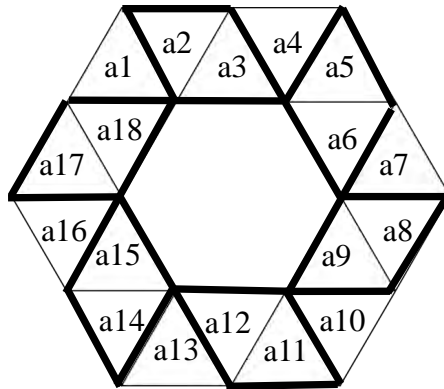
(三)二連塊：

a1 型，第一個三角形編號被 3 除餘 1 的二個連塊為此型，一面可以組成 6 個此型的二連塊（如圖十三）。



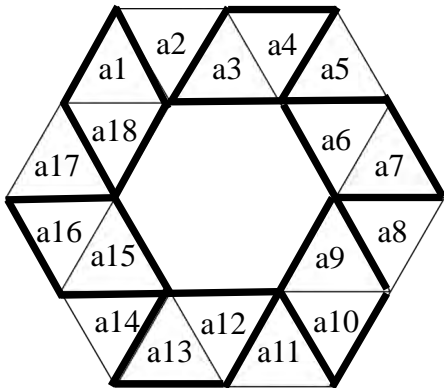
圖十三：粗線圍起來的為 a1 型的二連塊

a2 型，第一個三角形編號被 3 除餘 2 的二個連塊為此型，一面可以組成 6 個此型的二連塊（如圖十四）。



圖十四：粗線圍起來的為 a2 型的二連塊

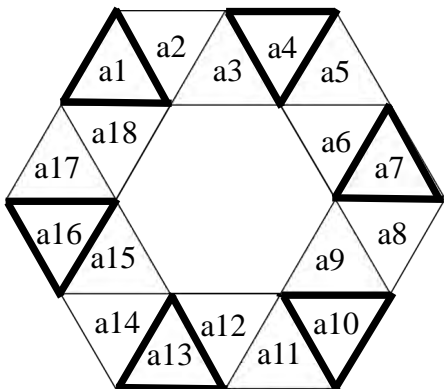
a3 型，第一個三角形編號可被 3 整除的二個連塊為此型，一面可以組成 6 個此型的二連塊（如圖十五）。



圖十五：粗線圍起來的為 a3 型的二連塊

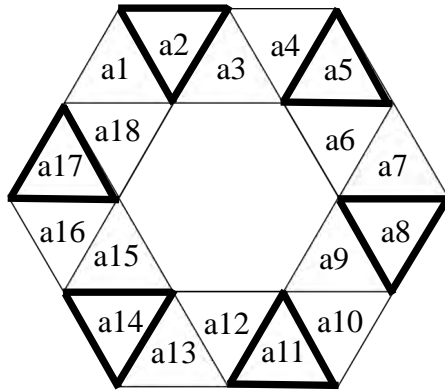
(四)單塊：

a1 型，三角形編號被 3 除餘 1 的單塊為此型，一面有 6 個此型的單塊（如圖十六）。



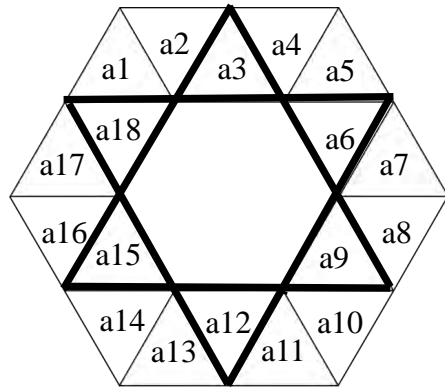
圖十六：粗線圍起來的為 a1 型的單塊

a2 型，三角形編號被 3 除餘 2 的單塊為此型，一面有 6 個此型的單塊(如圖十七)。



圖十七：粗線圍起來的為 a2 型的單塊

a3 型，三角形編號可被 3 整除的單塊為此型，一面有 6 個此型的單塊(如圖十八)。



圖十八：粗線圍起來的為 a3 型的單塊

## 二、組成正六邊形連塊的特性

各種連塊因為它的組成及相對位置不同，它可以連接的三角形也不同，我們試著找出各種連塊能連接的三角形(如圖十九)，我們整理各種連塊可連接的三角形以及轉換成基本型後，其餘三角形的相對應位置(如附件一)，這樣我們就可以快速的檢驗是否能組成魔術卡。



圖十九 我們在計算紙上記錄出各種連塊可以連接的三角形

### 三、組成正六邊形連塊的種類

要組成正六邊形的連塊種類必為以下 9 種中的其中一種（位置對調視為同一種，例如三連塊、二連塊、單塊與三連塊、單塊、二連塊視為同一種）：

- (一)四連塊、二連塊
- (二)四連塊、單塊、單塊
- (三)三連塊、三連塊
- (四)三連塊、二連塊、單塊
- (五)三連塊、單塊、單塊、單塊
- (六)二連塊、二連塊、二連塊
- (七)二連塊、二連塊、單塊、單塊
- (八)二連塊、單塊、單塊、單塊、單塊
- (九)單塊、單塊、單塊、單塊、單塊、單塊

### 四、利用連塊的特性找出合適的六組正六邊形

連塊的組合共有上述 9 種，我們依照連塊可連接的下一個三角形各找出一個六組合適的六邊形。

連塊數	六組六邊形	正反面個數	奇偶性
四連塊、二連塊	無合適六邊形		
四連塊、單塊、單塊	(a1~a3, a18, b5, b16)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a6~a9, b4, b11)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a12~a15, b10, b17)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a5, a16, b1~b3, b18)	二正四反	3 奇 3 偶
	(a10, a17, b12~b15)	二正四反	3 奇 3 偶
	(a4, a11, b6~b9)	二正四反	3 奇 3 偶
三連塊、三連塊	(a1, a17, a18, a8~a10)	六正	3 奇 3 偶
	(a2~a4, a11~a13)	六正	3 奇 3 偶
	(a5~a7, a14~a16)	六正	3 奇 3 偶
	(b1, b17, b18, b8~b10)	六反	3 奇 3 偶
	(b2~b4, b11~b13)	六反	3 奇 3 偶
	(b5~b7, b14~b16)	六反	3 奇 3 偶
三連塊、二連塊、單塊	(a1~a3, a6, b16, b17)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a7~a9, a12, b4, b5)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a13~a15, a18, b10, b11)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a16, a17, b1~b3, b6)	二正四反	3 奇 3 偶
	(a4, a5, b7~b9, b12)	二正四反	3 奇 3 偶
	(a10, a11, b13~b15, b18)	二正四反	3 奇 3 偶
三連塊、單塊、單塊、單塊	(a1, a2, a15, a18, b4, b11)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a3, a6~a8, b10, b17)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a9, a12~a14, b5, b16)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a4, a11, b1, b2, b15, b18)	二正四反	3 奇 3 偶



	(a10, a17, b3, b6~b8)	二正四反	3 奇 3 偶
	(a5, a16, b9, b12~b14)	二正四反	3 奇 3 偶
二連塊、二連塊、二連塊	(a1, a2, a7, a8, a13, a14)	六正	3 奇 3 偶
	(a3, a4, a9, a10, a15, a16)	六正	3 奇 3 偶
	(a5, a6, a11, a12, a17, a18)	六正	3 奇 3 偶
	(b1, b2, b7, b8, b13, b14)	六反	3 奇 3 偶
	(b3, b4, b9, b10, b15, b16)	六反	3 奇 3 偶
	(b5, b6, b11, b12, b17, b18)	六反	3 奇 3 偶
二連塊、二連塊、單塊、單塊	(a1, a2, b4, b5, b12, b15)	二正四反	3 奇 3 偶
	(a7, a8, b3, b10, b11, b18)	二正四反	3 奇 3 偶
	(a13, a14, b6, b9, b16, b17)	二正四反	3 奇 3 偶
	(a4, a5, a12, a15, b1, b2)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a3, a10, a11, a18, b7, b8)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a6, a9, a16, a17, b13, b14)	四正二反	3 奇 3 偶
二連塊、單塊、單塊、單塊、單塊	(a1, a2, a6, a15, b4, b17)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a3, a7, a8, a12, b5, b10)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a9, a13, a14, a18, b11, b16)	四正二反	3 奇 3 偶
	(a4, a17, b1, b2, b6, b15)	二正四反	3 奇 3 偶
	(a5, a10, b3, b7, b8, b12)	二正四反	3 奇 3 偶
	(a11, a16, b9, b13, b14, b18)	二正四反	3 奇 3 偶
單塊、單塊、單塊、單塊、單塊、單塊	(a1, a4, a7, a10, a13, a16)	六正	3 奇 3 偶
	(a2, a5, a8, a11, a14, a17)	六正	3 奇 3 偶
	(a3, a6, a9, a12, a15, a18)	六正	3 奇 3 偶
	(b1, b4, b7, b10, b13, b16)	六反	3 奇 3 偶
	(b2, b5, b8, b11, b14, b17)	六反	3 奇 3 偶
	(b3, b6, b9, b12, b15, b18)	六反	3 奇 3 偶

研究發現：經由連塊的種類和各種連塊可以連接的下一個三角形的整理，我們已經能順利的找出許多魔術卡的組合，但是這些魔術卡很明顯的是依照固定的規律把所有的三角形平均分配到六個正六邊形中，雖然我們可以找出很多種的魔術卡，但是同一個魔術卡中的六個正六邊形摺法是相同的，我們雖然成功找出魔術卡，但覺得還是不夠完美。

##### 五、找出具挑戰性的六組正六邊形

雖然我們順利找到各種連塊六組合適的正六邊形，但由正反面個數及奇偶性可以看出這些組合摺疊方式很單純，挑戰性不高，每一種連塊的六組正六邊形事實上摺法都相同，只要摺出一個，其他只要照著摺也都摺得出來，我們將不同的連塊混合在一起，終於找出六種摺法都不同的正六邊形。

六組正六邊形的性質：

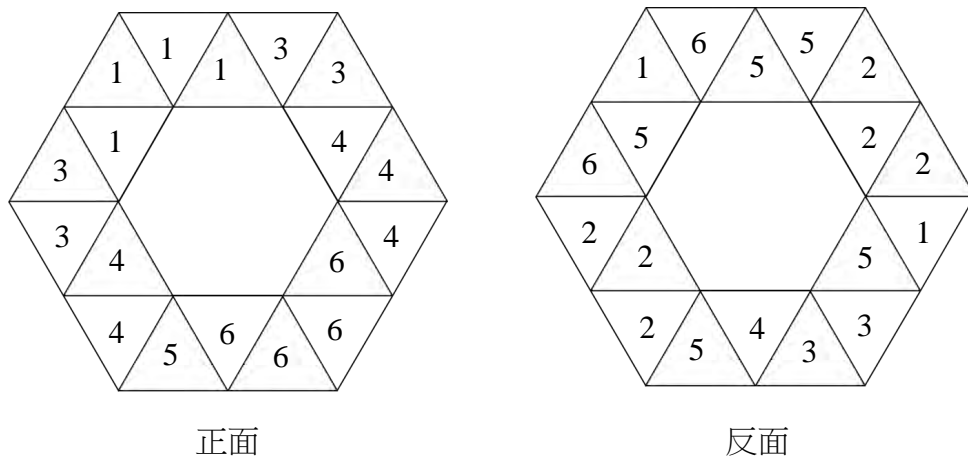
填入數字	六組正六邊形	連塊數	正反面個數	奇偶性
1	(a1~a3, a18, b5, b16)	四連塊、單塊、單塊	四正二反	3 奇 3 偶
2	(b1, b8, b9, b10, b17, b18)	三連塊、三連塊	六反	3 奇 3 偶
3	(a4, a5, a16, a17, b13, b14)	二連塊、二連塊、二連塊	四正二反	3 奇 3 偶
4	(a6~a8, a14, a15, b12)	三連塊、二連塊、單塊	五正一反	2 奇 4 偶
5	(a13, b2, b3, b6, b11, b15)	二連塊、單塊、單塊、單塊、單塊	一正五反	4 奇 2 偶
6	(a9~a12, b4, b7)	四連塊、單塊、單塊	四正二反	3 奇 3 偶
說明		使用五種不同的連塊	共 18 正 18 反	共 18 奇 18 偶

六組正六邊形的摺法：

填入數字	六組正六邊形	難易度	過程摺法	面數摺法	結果摺法
1	(a1~a3, a18, b5, b16)	易	右上 1 後摺、 右下 1 後摺、 左下 2 後摺、 右下 1 後摺、 下 1 後摺	-2, -2, -4, -3, -1	(b3, b9 : b4, b8) (b12, b18 : b13, b17) (a5, a15~a17 : a6, a14, a7, a8) (a9, b7, b14 : a10~a12) (a13 : b11)
2	(b1, b8, b9, b10, b17, b18)	中易	左上 1 前摺、 左下 1 前摺、 右上 1 後摺、 上 1 後摺、 下 1 後摺、 右下 1 後摺	-2, -2, -3, -1, -3, -1	(a2, a16 : a3, a15) (a6, a12 : a7, a11) (a1, a8, b3 : b5, b6, b4) (a4 : a5) (a10, a17, b15 : b12~b14) (a13 : a14)
3	(a4, a5, a16, a17, b13, b14)	中	右下 2 前摺、 單層右上 1 前摺、 下 2 前摺、	÷2, +3, -4, +1, -2, -1	(a1, a11~a18 : a2, a10~a3) (b12, b18 : b13, b17) (a5~a7, a15 : b11, a13,

			單層左上 3 前摺、 左下 1 後摺、 左上 1 後摺		a8 , a14) (b8 : b9) (b5 , b6 : b10 , b7) (b2 : b3)
4	(a6~a8 , a14 , a15 , b12)	中難	右下 1 前摺、 右下 1 前摺、 上 1 後摺、 左上 1 後摺、 下 1 後摺	-2 , -4 , -3 , -2 , -1	(a12 , a18 : a13 , a17) (a1 , a11 , b13 , b17 : a2 , a10 , a9 , a3) (b3~b5 : b16 , b15 , b6) (a4 , b14 : b18 , b1) (b9 : b10)
5	(a13 , b2 , b3 , b6 , b11 , b15)	難	右下 1 後摺、 上 1 前摺、 右上 1 前摺、 下 1 前摺、 左下 1 後摺、 左上 1 後摺	-2 , -3 , -2 , -3 , -1 , -1	(b12 , b18 : b13 , b17) (a1 , a2 , a5 : a18 , b16 , a6) (a8 , b5 : a9 , b4) (a10~a12 : b8 , b7 , b14) (a7 : b9)(a16 : a17)
6	(a9~a12 , b4 , b7)	超難	上 1 後摺、 右上 1 後摺、 左上 2 後摺、 右下 1 後摺、 單層左上 1 前摺、 上 1 後摺	-2 , -2 , -7 , -1 , +1 , -1	(b1 , b5 : b18 , b6) (a4 , b9 : a5 , b8) (a1~a3 , b14~b17 : a8~a6 , b13~b10) (a14 : a15) (b2 : b3)
說明		難度 由易至 難	每個六邊形摺法皆不相同		

經過一連串的研究及修正，我們終於找出合適的正六邊形魔術卡（如圖二十），這個魔術卡的六個面剛好可以依難度分為六個等級，而且每一個面的摺法都不同，玩起來相當有趣，我們忍不住要大聲的說我們成功了！



圖二十

## 伍、研究結果

一、我們順利整理出三角環形摺疊的規律和特性。

(一) 一個三角形無法與它的背面及與背面相鄰的三角形摺疊在一起。

(二) 同一面的三角形相鄰一定是奇數和偶數相連，不同面的三角形一定是奇數和奇數相連或偶數和偶數相連。

(三) 組成三角環形的正反 2 面 36 個三角形，以相對位置而言可分為 2 種類型。

二、我們決定用正六邊形來設計新的魔術卡。

(一) 我們觀察 792 魔術卡，它由 16 個正方形組成，必須用規定的數字摺疊成 4 個正方形，而我們的三角環形是一個空心的正六邊形。

(二) 我們摺疊的三角形連塊中，摺成正六邊形的六連塊最符合我們所需要的，我們決定以摺成正六邊形來設計出新的魔術卡。

三、探討自製魔術卡的特性並創造出新的魔術卡。

(一) 我們要用正六邊形來設計魔術卡，我們發現摺疊成正六邊形有幾個特性：

1. 我們整理出摺疊成正六邊形上面的代號奇偶數的個數與正反面的關係

六正：3 奇 3 偶

五正一反：4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶

四正二反：依正反面的相對位置有所不同，正正正正反反：3 奇 3 偶，正正反正反反：5 奇 1 偶或 1 奇 5 偶，正正反正正反：3 奇 3 偶。

三正三反：依正反面的相對位置有所不同，正正正反反反：4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶，正正反正反反：4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶，正正反反正反：4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶，正反正反正反：6 奇或 6 偶。

二正四反：依正反面的相對位置有所不同，正正反反反反：3 奇 3 偶，正反反反反反：5 奇 1 偶或 1 奇 5 偶，正反反反正反：3 奇 3 偶。

一正五反：4 奇 2 偶或 2 奇 4 偶

六反：3 奇 3 偶

2. 組成正六邊形原本相鄰的三角形數可分為四連塊、三連塊、二連塊及單塊，這些連塊的組合有以下 9 種，要組成正六邊形必是這 9 種的其中之一。

(1) 四連塊、二連塊

(2) 四連塊、單塊、單塊

(3) 三連塊、三連塊

(4) 三連塊、二連塊、單塊

(5) 三連塊、單塊、單塊、單塊

(6) 二連塊、二連塊、二連塊

(7) 二連塊、二連塊、單塊、單塊

(8) 二連塊、單塊、單塊、單塊、單塊

(9) 單塊、單塊、單塊、單塊、單塊、單塊

3. 我們整理出各種連塊可以連接的下一個三角形以及轉換成基本型後，其餘三角形的相對應位置，方便我們找出摺疊出正六邊形的組合，來設計出合適的魔術卡。

#### 四、792 魔術卡與我們自創正六邊形魔術卡的差異性：

##### (一) 組成圖形的數字量不同：

792 魔術卡：使用的數字為 1~8，組成正方形須包含 4 個相同的數字，共有 32 個數字。

自創魔術卡：使用數字為 1~6，組成正六邊形須包含 6 個相同的數字，共有 36 個數字。

##### (二) 圖形摺疊的變化程度不同：

792 魔術卡：為 16 個正方形中間切開三條直線，摺疊變化較少。

自創魔術卡：原有 24 個三角形組成的大型正六邊形，將中間的 6 個三角形割除，形成一個空心的正六邊形，摺疊的變化相當多。

##### (三) 魔術卡的挑戰性不同：

792 魔術卡：除了數字 2 外，其餘難度都不高；數字 7 和數字 8 摺法類似；數字 1 和數字 6 摺法類似

自創魔術卡：依數字 1~6 將難度分為六個等級，而且每個數字的摺法都不相同，具挑戰性。

#### 陸、討論

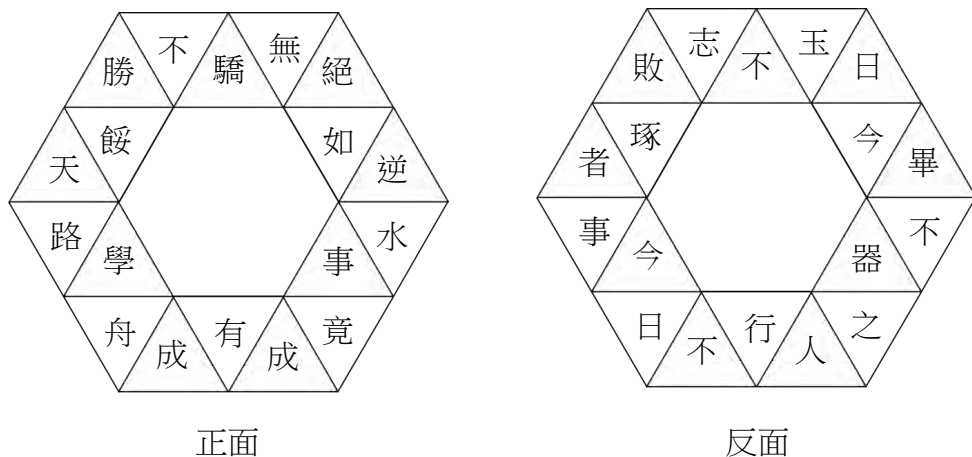
##### 一、延伸設計

除了用 1~6 的數字填入三角形，我們也想到加入其他的東西，讓這個魔術卡更加有趣和有意義。

##### (一) 勵志成語：(如圖二十一)

- 1、勝不驕敗不餒
- 2、今日事今日畢
- 3、天無絕人之路
- 4、學如逆水行舟
- 5、玉不琢不成器
- 6、有志者事竟成

特性：內容具有鼓勵性質，也鼓勵玩者在玩的過程不要輕言放棄，這些成語中有些字是重複的，摺疊的時候不確定要用哪一個三角形，另外之前用數字沒有順序的問題，使用文字則需考慮順序是否正確，可以增加遊戲的挑戰性。

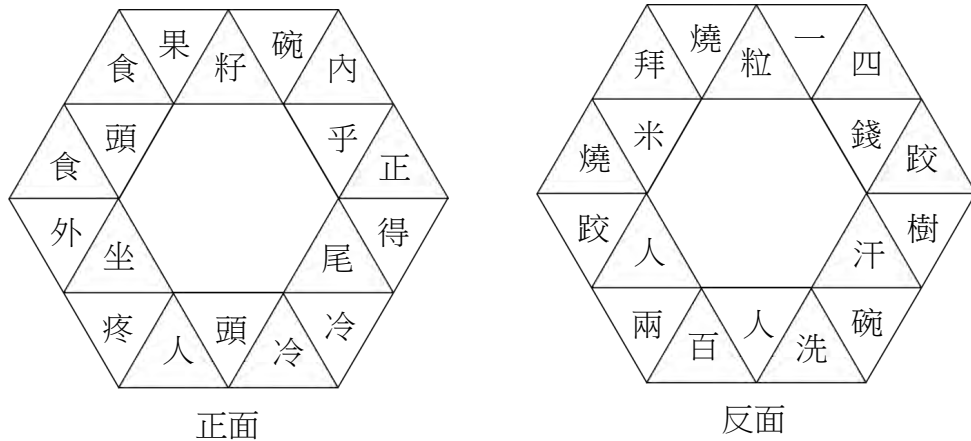


圖二十一

(二) 台語俗諺 (如圖二十二)

- 1、食果籽拜樹頭：人要懂得飲水思源。
- 2、錢四跤人兩跤：形容賺錢不容易。
- 3、食碗內洗碗外：接受人家的恩惠，卻替別人做事情。
- 4、坐乎正得人疼：行為端正的人會得到別人的喜愛。
- 5、一粒米百人汗：勸人不要浪費米飯，因為那是許多人辛苦流汗換來的。
- 6、頭燒燒尾冷冷：剛開始衝勁十足，但維持不了多久，即虎頭蛇尾。

特性：部分句子內的字有重複的字，增加挑戰性，在玩遊戲的過程也可以學習台灣俗諺。

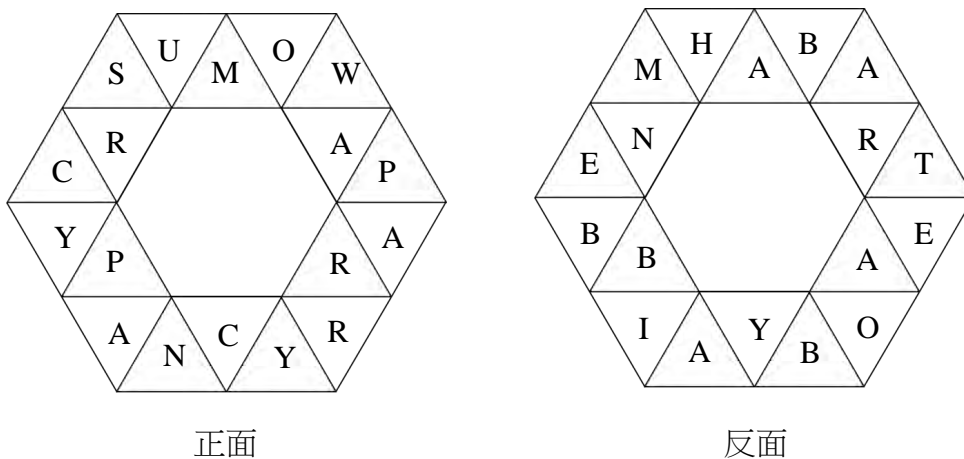


圖二十二

(三) 英文單字 (如圖二十三)

- 1、SUMMER：夏天
- 2、RABBIT：兔子
- 3、COWBOY：牛仔
- 4、PAPAYA：木瓜
- 5、BANANA：香蕉
- 6、CHERRY：櫻桃

特性：每個單字的字母至少有 2 個以上重複，可增加遊戲的挑戰性，因為英文字母只有 26 個，所以每個單字間的字母也會重複，也讓遊戲更複雜，在玩遊戲的過程也可以學習英文單字。

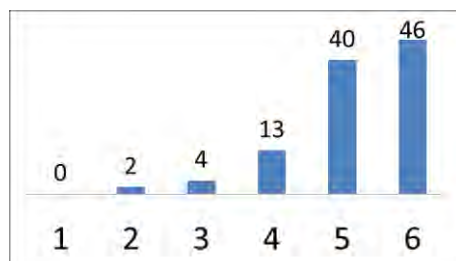


圖二十三

## 二、實際操作統計分析

我們拿我們自創的正六邊形魔術卡給同學或長輩玩，記錄他們完成各個數字的時間，並且詢問他們覺得這個遊戲的好玩程度及挑戰性，我們分析如下：

(一)共有 77 人參與我們的研究，其中 26 人數字 1~6 全部摺出來；數字 1 摺不出來的有 0 人，數字 2 摺不出來的有 2 人，數字 3 摺不出來的有 4 人，數字 4 摺不出來的有 13 人，數字 5 摺不出來的有 40 人，數字 6 摺不出來的有 46 人，如圖二十四。



圖二十四 各個數字摺不出來人數長條圖

(二)我們將每個數字都有摺出來的 26 組資料進行統計分析：

數字 1 摺出來的平均時間為 31 秒

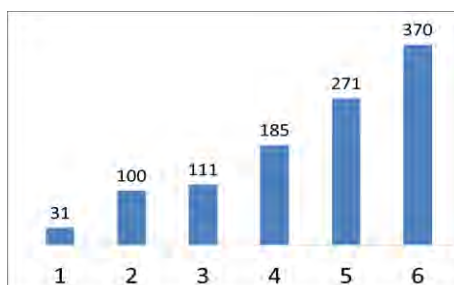
數字 2 摺出來的平均時間為 100 秒

數字 3 摺出來的平均時間為 111 秒

數字 4 摺出來的平均時間為 185 秒

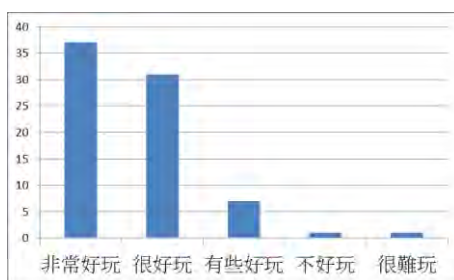
數字 5 摺出來的平均時間為 271 秒

數字 6 摺出來的平均時間為 370 秒，如圖二十五。



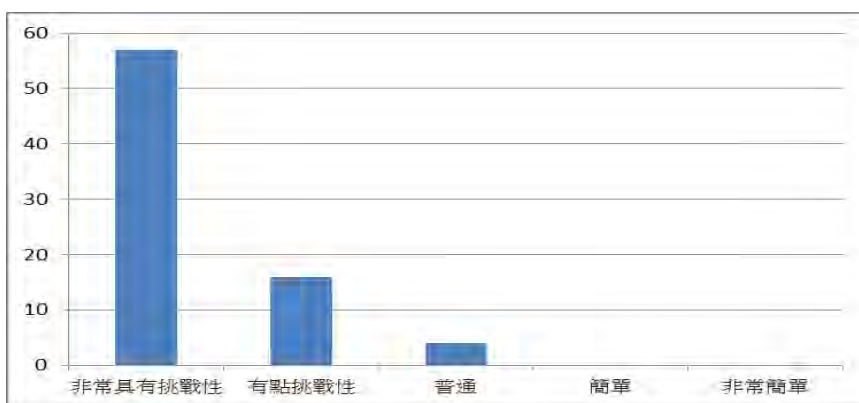
圖二十五 各個數字摺出來的秒數長條圖

(三)參加我們研究的 77 人中，覺得這個遊戲非常好玩的有 37 人，很好玩的有 31 人，有些好玩的有 7 人，不好玩的有 1 人，很難玩的有 1 人，如圖二十六。



圖二十六 覺得好玩程度人數長條圖

(四) 參加我們研究的 77 人中，覺得這個遊戲非常具有挑戰性的有 57 人，有點挑戰性的有 16 人，普通的有 4 人，簡單的 0 人，非常簡單的 0 人，如圖二十七。



圖二十七 覺得具挑戰性程度人數長條圖

(五) 由以上的統計資料我們得知數字 1~6 依照我們的規畫數字愈大難度愈高，操作者要完成的時間愈久。而大部分的人覺得這是一個非常好玩而且非常具挑戰性的遊戲。

## 柒、結論

一、「知」乎？「摺」也！經過努力的「摺」，我們「知」道我們成功了，我們終於自創出正六邊形的魔術卡，而且它的六個面的摺法都不一樣，相當有趣及具挑戰性。



雖然研究的過程很辛苦，但是我們也玩得很開心，總算摺出一個有趣的遊戲。

二、我們更加改良原有的設計，加入了勵志成語、台灣俗諺以及英文單字，讓魔術卡更具挑戰性和意義。

三、我們將自創的魔術卡拿給班上的同學或其他大人玩，他們覺得魔術卡相當有趣，也可以增加大家的空間觀念，我們覺得這是一個非常適合推廣的遊戲。

## 捌、參考資料

一、第四十一屆國小組數學科展 張雅晴、李仁豪、戴馥安、黃立偉 「792 魔術卡」。

二、第五十一屆國小組數學科展 賴彥豪、李玟叡、葉亮辰、林彥好 「滾動棋積-三角正多面體與滾積木遊戲」。



## 【評語】 080416

由智慧片組成的環形能變裝成多種形體與792魔術卡益智遊戲  
兩者的啟發，本研究嘗試以18個正三角形所組成的環形為出發點，  
探討如何利用連塊以摺出合適的正六邊，進而設計出具挑戰性的魔  
術卡，值得稱許。