中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

佳作

080415

接二連三－拼剪「海倫三角形」

學校名稱：彰化縣員林鎮員林國民小學

作者：	指導老師：
小六 賴昱維	王文君 張晉豪

關鍵詞：畢氏三元數、畢氏三角形、海倫三角形

作品名稱：接二連三—拼剪「海倫三角形」

摘要

面積是正整數的整數邊三角形就是海倫三角形；整數邊的直角三角形就是畢氏三角形。本研究先透過圓點方陣得到兩組基本的畢氏三角形的邊長生成公式，並且證明這兩組基本的畢氏三角形都是海倫三角形；接著，取其中一組基本的畢氏三角形加以複製，成為有一條公共邊的兩個相同畢氏三角形，接著拼接成四組三角形，並且證明這四組三角形都是海倫三角形；更進一步，把這兩組基本的畢氏三角形各放大到適當的倍數後，成為有一條公共邊的兩個不同的畢氏三角形，接著拼接成六組不同的三角形和剪接成六組不同的三角形，並且證明這十二組三角形都是海倫三角形。因此，本研究總共得到十八組海倫三角形的邊長生成公式。

壹、 研究動機

在四下資優班數學課中老師介紹了畢氏三元數，我開始研究它並推廣到畢氏N元數的關係式，因而有幸參加了上次全國科展比賽。比賽結束後，我接觸了蔡聰明教授的書—「數學拾貝」，這本書最吸引我的內容是在第十二章「整數邊的三角形」中所提到的三點：

一、畢氏三元數等於畢氏三角形的三邊長

二、畢氏三元數的生成公式就是畢氏三角形的邊長生成公式

三、畢氏三角形和海倫三角形都是整數邊三角形。

蔡教授在書中第一百九十九頁更提出了一個問題:「海倫三角形的三個邊是否可用一般公式表達出來？」我反覆想了又想這個問題，在眼前浮現兩點疑問：

一、畢氏三角形和海倫三角形到底有什麼關係呢？

二、畢氏三角形和海倫三角形的邊長生成公式又有什麼關係呢？

因此，我向老師提出「從畢氏三角形的邊長生成公式找到海倫三角形的邊長生成公式」的「動腦玩數學」計畫，希望能解決這兩點疑問。老師鼓勵我可以多尋找文獻資料，也可以運用五年數學課本中的「整數的簡化計算」和「怎樣列式」單元方法，以及六年數學課本中的 「等量公理」單元方法，展開「海倫三角形」的探索之旅。

貳、 研究目的

一、探討畢氏三角形和海倫三角形的關係。

二、探討海倫三角形的邊長生成公式。

參、 研究設備及器材

筆、紙、電腦、microsoft office word 2007。

肆、 名詞定義

一、畢氏定理：$a^2+b^2=c^2$，a,b,c 皆大於0。

二、畢氏三元數：符合畢氏定理（$a^2+b^2=c^2$）的正整數解（a,b,c）。

三、整數邊三角形：三邊長皆為正整數的三角形。

四、畢氏三角形（Pythagorean triangles）：整數邊的直角三角形。

五、海倫三角形（Heronian triangles）：面積是正整數的整數邊三角形。

伍、 研究過程或方法

一、 理論探討

（一） 既有的畢氏三角形邊長（畢氏三元數）的生成公式

➢ 參考蔡聰明教授編著的「數學拾貝」第十二章「整數邊的三角形」的內容

畢達哥拉斯、柏拉圖和歐幾里得曾提出畢氏三角形邊長生成公式，畢達哥拉斯和柏拉圖由代數運算產生公式，歐幾里得以幾何觀念獲得公式。說明如下：

◆ 畢達哥拉斯的的生成公式

首先觀察一個恆等式：$(2k-1)+(k-1)^2=k^2$，假設$2k-1$為一個完全平方數，令$2k-1=m^2$，m為奇數，解得：$k=\frac{m^2+1}{2}$，$k-1=\frac{m^2-1}{2}$，

代入恆等氏得到：$m^2+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$

所以，當m為大於1之奇數時，滿足畢氏定理。令$m=2n+1$，n是正整數，得到

畢氏三角形邊長生成公式：$\begin{cases} a=2n+1 \\ b=2n^2+2n \\ c=2n^2+2n+1 \end{cases}$，$n$是正整數。

◆ 柏拉圖的的生成公式

觀察一個恆等式：$4k+(k-1)^2=(k+1)^2$，假設$4k$為一個完全平方數，

令$k=n^2$，代入恆等式得到：$(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2$，

所以，當n為大於1之正整數時，滿足畢氏定理，

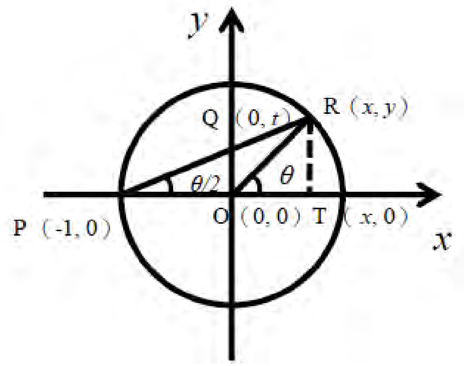
得到畢氏三角形邊長生成公式：$\begin{cases} a=2n \\ b=n^2-1 \\ c=n^2+1 \end{cases}$，$n$為大於 1 之正整數。

◆ 歐幾里得的生成公式

在圖一直角坐標系中，假設有一單位圓$x^2+y^2=1$，O (0，0)是圓心，$P(-1,\ 0)$, $R(x,\ y)$是圓上兩點，$\overline{PR}$與y軸交點為 Q(0 , t)，過 R 點作x軸的垂線得到垂足 T(x,0)，再令∠ROT＝θ，則

$\angle OPR=\frac{\theta}{2}$，$\angle ORP=\frac{\theta}{2}$，

由△OPQ 和△ORT 的邊角關係和倍角公式可以得到：



圖一　圓與三角形

$$\begin{cases} \sin\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases} \xRightarrow{\begin{cases} x=\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1 \\ y=\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \end{cases}} \begin{cases} x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

，再令$z=1$，$t=\frac{v}{u}$，$u>v$，u , v 均是正整數，得到：$\begin{cases} x=\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} \\ y=\frac{2uv}{u^2+v^2} \\ z=1 \end{cases}$

再把x, y, z放大(u^2+v^2)倍後，這樣就得到畢氏三角形的邊長生成公式：

$$\begin{cases} a=x(u^2+v^2)=u^2-v^2 \\ b=y(u^2+v^2)=2uv \\ c=z(u^2+v^2)=u^2+v^2 \end{cases}$$

，$u>v$，u , v 均是正整數。

➢ 歐幾里得的公式竟然涵蓋了畢達哥拉斯和柏拉圖的公式

很幸運的，我發現在這三組公式中，兩兩之間竟然可以轉換，而且歐幾里得的公式竟然涵蓋了畢達哥拉斯和柏拉圖的公式。

◆ 當$u=n+1, v=n$時，歐幾里得的公式被轉換成畢達哥拉斯的公式

$$\begin{cases} a=2uv \\ b=u^2-v^2 \\ c=u^2+v^2 \end{cases} \xRightarrow{\begin{cases} u=n+1 \\ v=n \end{cases}} \begin{cases} a=2n^2+2n \\ b=2n+1 \\ c=2n^2+2n+1 \end{cases}$$

◆ 當$u=n, v=1$，歐幾里得的公式被轉換成柏拉圖的公式

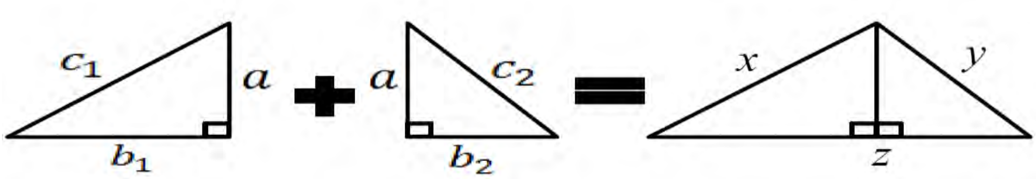
$$\begin{cases} a=2uv \\ b=u^2-v^2 \\ c=u^2+v^2 \end{cases} \xRightarrow{\begin{cases} u=n \\ v=1 \end{cases}} \begin{cases} a=2n \\ b=n^2-1 \\ c=n^2+1 \end{cases}$$

有一句話說：「條條道路通羅馬」，真的很有道理，難怪蔡教授指出畢達哥拉斯和柏拉圖的公式只是部分解答公式，歐幾里得的公式才是完全解答公式。

（二） 既有的海倫三角形邊長的生成公式

從參考文獻得知楊媛甯、卡邁克爾以及歐拉曾提出海倫三角形邊長生成公式，全都是由畢氏三角形的組合得到海倫三角形邊長生成公式。說明如下：

➢ 以兩個不同的畢氏三角形得到海倫三角形邊長的生成公式



圖二 兩個不同的畢氏三角形得到新的三角形

在 2007 年台灣國際科展中，楊媛甯同學拼接兩個不同的畢氏三角形得到新的三角形（圖二）。首先她得到邊長關係式：$\begin{cases} (x,y,z)=(c_1,c_2,b_1+b_2) \\ a^2=c_1^{\ 2}-b_1^{\ 2}=c_2^{\ 2}-b_2^{\ 2} \end{cases}$，

她再假設 $r_1=\frac{a}{b_1+c_1}$，$r_2=\frac{a}{b_2+c_2}$，得到兩個不同的畢氏三角形邊長比：

$$\begin{cases} r_1=\dfrac{a}{b_1+c_1} \\ r_2=\dfrac{a}{b_2+c_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a:b_1:c_1=2r_1:(1-r_1^{\ 2}):(1+r_1^{\ 2}) \\ a:b_2:c_2=2r_2:(1-r_2^{\ 2}):(1+r_2^{\ 2}) \end{cases}$$

再運用連比性質，得到兩個不同的畢氏三角形邊長比：

$$a:b_1:c_1:b_2:c_2=2r_1r_2:r_2(1-r_1^{\ 2}):r_2(1+r_1^{\ 2}):r_1(1-r_2^{\ 2}):r_1(1+r_2^{\ 2})$$

接著得到新的三角形邊長比：

$$x:y:z=c_1:c_2:(b_1+b_2)=r_2(1+r_1^{\ 2}):r_1(1+r_2^{\ 2}):(r_1+r_2)(1-r_1r_2)$$

接著以$r_1=\frac{\beta_1}{\alpha_1}, r_2=\frac{\beta_2}{\alpha_2}$代入上式得到一組新的三角形邊長比：

$x:y:z=\alpha_2\beta_2(\alpha_1^2+\beta_1^2):\alpha_1\beta_1(\alpha_2^2+\beta_2^2):(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)$

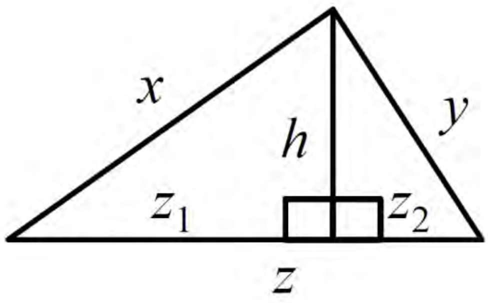
其中$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$為正整數，且$\beta_1<\alpha_1,\beta_2<\alpha_2,(\alpha_1,\beta_1)=1,(\alpha_2,\beta_2)=1$。

最後，她證明新的三角形邊長比即為海倫三角形的「比例通式解」。

➢ 從兩個等高的畢氏三角形得到海倫三角形邊長的生成公式

卡邁克爾（Carmichael，1952）他提出以有理數x,y,z為三邊長的海倫三角形，利用斜邊z上的高h（h為正整數）把三角形分成兩個直角三角形（圖三），其三邊長分別為x,h,z_1和y,h,z_2，z_1,z_2也是有理數，依畢氏定理可以得到：

$$\begin{cases} z=z_1+z_2 \\ h^2=x^2-{z_1}^2=(x+z_1)(x-z_1) \\ h^2=y^2-{z_2}^2=(y+z_2)(y-z_2) \end{cases}，$$



圖三　兩個等高的畢氏三角形

這時候，他令：$\begin{cases} x+z_1=m \\ x-z_1=\frac{h^2}{m} \\ y+z_2=n \\ y-z_2=\frac{h^2}{n} \end{cases}$，

接著可以得到：$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(m+\frac{h^2}{m}\right) \\ y=\frac{1}{2}\left(n+\frac{h^2}{n}\right) \\ z=\frac{1}{2}\left(m+n-\frac{h^2}{m}-\frac{h^2}{n}\right) \end{cases}$，$h,m,n$為正整數，且$h^2<nm$。

再把x,y,z放大$2nm$倍後，可得到海倫三角形的三邊長分別為：

$\begin{cases} a=2nmx=n(m^2+h^2) \\ b=2nmy=m(n^2+h^2) \\ c=2nmz=(m+n)(nm-h^2) \end{cases}$，$h,m,n$為正整數，且$h^2<nm$。

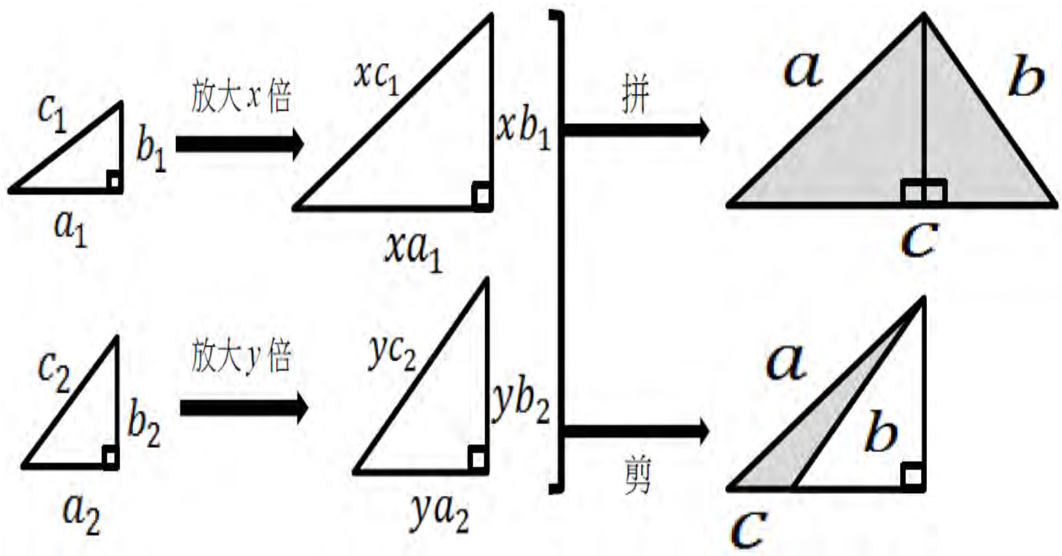
卡邁克爾在書中所探討之海倫三角形，雖然邊長為有理數，面積亦為有理數，但是經過適當倍數放大後，即可得到整數邊之海倫三角形。

➢ 透過兩個畢氏三角形的拼和剪得到海倫三角形的邊長生成公式

歐拉（盛立人、嚴鎮軍，2001）假設有兩個不同的畢氏三角形，三邊長分別為(a_1,b_1,c_1)和(a_2,b_2,c_2)，他任意選取兩組互質正奇數$u_{\mathrm{i}},v_{\mathrm{i}}$，$u_{\mathrm{i}}>v_{\mathrm{i}},\mathrm{i}=1,2$，

再令：$\begin{cases}(a_1,b_1,c_1)=(2u_1v_1,{u_1}^2-{v_1}^2,{u_1}^2+{v_1}^2)\\(a_2,b_2,c_2)=(2u_2v_2,{u_2}^2-{v_2}^2,{u_2}^2+{v_2}^2)\end{cases}$

再將它們各放大x與y倍後得到兩個新的畢氏三角形，這時候的三邊長分別為(xa_1,xb_1,xc_1)和(ya_2,yb_2,yc_2)，使得兩個新的畢氏三角形各有一股邊等長，再以此一股邊作為公共邊，如圖四透過拼和剪可得到八組不同的海倫三角形。



圖四　透過兩個海倫三角形的拼和剪得到新的海倫三角形

在「從勾股定理談起」書中第五章「海倫三角形」中，盛、嚴兩人只寫出下列拼 1 和拼 2 的公式，我嘗試列出剩下未寫出的六組公式，完成這八組公式。

◆ **當$x=a_2$和$y=a_1$時，以長度為a_1a_2的股邊作為公共邊經拼與剪得到：**

$$\begin{cases}a=c_1a_2\\b=c_2a_1\\c=(a_2b_1+a_1b_2)\end{cases}\xRightarrow{\begin{cases}x=a_2\\y=a_1\end{cases}}\begin{cases}a=2u_2v_2({u_1}^2+{v_1}^2)\\b=2u_1v_1({u_2}^2+{v_2}^2)\\c=2(u_1v_2+u_2v_1)(u_1u_2-v_1v_2)\end{cases}\quad\cdots\text{拼 1}$$

$$\begin{cases}a=c_1a_2\\b=c_2a_1\\c=|a_2b_1-a_1b_2|\end{cases}\xRightarrow{\begin{cases}x=a_2\\y=a_1\end{cases}}\begin{cases}a=2u_2v_2({u_1}^2+{v_1}^2)\\b=2u_1v_1({u_2}^2+{v_2}^2)\\c=2(u_1u_2+v_1v_2)|u_1v_2-u_2v_1|\end{cases}\quad\cdots\text{剪 1}$$

◆ 當$x=b_2$和$y=b_1$時，以長度為b_1b_2的股邊作為公共邊經拼與剪得到：

$$\begin{cases} a=c_1b_2 \\ b=c_2b_1 \\ c=(a_1b_2+a_2b_1) \end{cases} \xrightarrow{\begin{cases} x=b_2 \\ y=b_1 \end{cases}} \begin{cases} a=({u_1}^2+{v_1}^2)({u_2}^2-{v_2}^2) \\ b=({u_2}^2+{v_2}^2)({u_1}^2-{v_1}^2) \\ c=2(u_1v_2+u_2v_1)(u_1u_2-v_1v_2) \end{cases} \quad \cdots \text{拼 } 2$$

$$\begin{cases} a=c_1b_2 \\ b=c_2b_1 \\ c=|a_1b_2-a_2b_1| \end{cases} \xrightarrow{\begin{cases} x=b_2 \\ y=b_1 \end{cases}} \begin{cases} a=({u_1}^2+{v_1}^2)({u_2}^2-{v_2}^2) \\ b=({u_2}^2+{v_2}^2)({u_1}^2-{v_1}^2) \\ c=2(u_1u_2+v_1v_2)|u_2v_1-u_1v_2| \end{cases} \quad \cdots \text{剪 } 2$$

◆ 當$x=b_2$和$y=a_1$時，以長度為a_1b_2的股邊作為公共邊經拼與剪得到：

$$\begin{cases} a=c_1b_2 \\ b=c_2a_1 \\ c=(b_1b_2+a_1a_2) \end{cases} \xrightarrow{\begin{cases} x=b_2 \\ y=a_1 \end{cases}} \begin{cases} a=({u_1}^2+{v_1}^2)({u_2}^2-{v_2}^2) \\ b=2u_1v_1({u_2}^2+{v_2}^2) \\ c=4u_1u_2v_1v_2+({u_1}^2-{v_1}^2)({u_2}^2-{v_2}^2) \end{cases} \quad \cdots \text{拼 } 3$$

$$\begin{cases} a=c_1b_2 \\ b=c_2a_1 \\ c=|b_1b_2-a_1a_2| \end{cases} \xrightarrow{\begin{cases} x=b_2 \\ y=a_1 \end{cases}} \begin{cases} a=({u_1}^2+{v_1}^2)({u_2}^2-{v_2}^2) \\ b=2u_1v_1({u_2}^2+{v_2}^2) \\ c=|({u_1}^2-{v_1}^2)({u_2}^2-{v_2}^2)-4u_1u_2v_1v_2| \end{cases} \quad \cdots \text{剪 } 3$$

◆ 當$x=a_2$和$y=b_1$時，以長度為a_2b_1的股邊作為公共邊經拼與剪得到：

$$\begin{cases} a=c_1a_2 \\ b=c_2b_1 \\ c=(a_1a_2+b_1b_2) \end{cases} \xrightarrow{\begin{cases} x=a_2 \\ y=b_1 \end{cases}} \begin{cases} a=2u_2v_2({u_1}^2+{v_1}^2) \\ b=({u_2}^2+{v_2}^2)({u_1}^2-{v_1}^2) \\ c=4u_1u_2v_1v_2+({u_1}^2-{v_1}^2)({u_2}^2-{v_2}^2) \end{cases} \quad \cdots \text{拼 } 4$$

$$\begin{cases} a=c_1a_2 \\ b=c_2b_1 \\ c=|b_1b_2-a_1a_2| \end{cases} \xrightarrow{\begin{cases} x=a_2 \\ y=b_1 \end{cases}} \begin{cases} a=2u_2v_2({u_1}^2+{v_1}^2) \\ b=({u_2}^2+{v_2}^2)({u_1}^2-{v_1}^2) \\ c=|({u_1}^2-{v_1}^2)({u_2}^2-{v_2}^2)-4u_1u_2v_1v_2| \end{cases} \quad \cdots \text{剪 } 4$$

我觀察這八組公式時，發現當u_1和u_2、v_1和v_2以及 a和b同時交換時，拼 3 和拼 4 公式是相通的，以及剪 3 和剪 4 公式也是相通的。

➢ 歐拉的公式竟然涵蓋了楊媛甯和卡邁克爾的公式

◆ 當$u_1=\alpha_1, u_2=\alpha_2,\ v_1=\beta_1, v_2=\beta_2$時，歐拉拼 1 公式轉換成楊媛甯的公式

$$\begin{cases} a=2u_2v_2({u_1}^2+{v_1}^2) \\ b=2u_1v_1({u_2}^2+{v_2}^2) \\ c=2(u_1v_2+u_2v_1)(u_1u_2-v_1v_2) \end{cases} \xrightarrow{\begin{cases} u_1=\alpha_1 \\ u_2=\alpha_2 \\ v_1=\beta_2 \\ v_2=\beta_1 \end{cases}} \begin{cases} a=2\alpha_2\beta_2(\alpha_1^2+\beta_1^2) \\ b=2\alpha_1\beta_1(\alpha_2^2+\beta_2^2) \\ c=2(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) \end{cases}$$

◆ 當$u_1=m, u_2=n$，$v_1=h$，$v_2=h$時，歐拉拼 1 公式轉換成卡邁克爾的公式

$$\begin{cases} a=2u_2v_2({u_1}^2+{v_1}^2) \\ b=2u_1v_1({u_2}^2+{v_2}^2) \\ c=2(u_1v_2+u_2v_1)(u_1u_2-v_1v_2) \end{cases} \xRightarrow{\begin{cases} u_1=m \\ u_2=n \\ v_1=h \\ v_2=h \end{cases}} \begin{cases} a=2h〔n(m^2+h^2)〕 \\ b=2h〔m(n^2+h^2)〕 \\ c=2h〔(m+n)(nm-h^2)〕 \end{cases}$$

很神奇的，我發現歐拉的公式竟然涵蓋了楊媛甯和卡邁克爾的公式。

➢ 楊媛甯的公式竟然涵蓋了卡邁克爾的公式

◆ 當$\alpha_1=m, \alpha_2=n$, $\beta_1=h, \beta_2=h$時，楊媛甯的公式轉換成卡邁克爾的公式

$$\begin{cases} a=\alpha_2\beta_2(\alpha_1^2+\beta_1^2) \\ b=\alpha_1\beta_1(\alpha_2^2+\beta_2^2) \\ c=(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) \end{cases} \xRightarrow{\begin{cases} \alpha_1=m \\ \alpha_2=n \\ \beta_2=h \\ \beta_1=h \end{cases}} \begin{cases} a=h〔n(m^2+h^2)〕 \\ b=h〔m(n^2+h^2)〕 \\ c=h〔(m+n)(nm-h^2)〕 \end{cases}$$

很神奇的，我發現了楊媛甯的公式竟然涵蓋了卡邁克爾的公式。

➢ 我試著簡化歐拉的拼 1 到拼 4 公式

◆ 當$u=u_1=u_2$, $v=v_1=v_2$時，可以簡化歐拉拼 1 到拼 4 公式

$$\text{拼 1} \xRightarrow{\begin{cases} u=u_1=u_2 \\ v=v_1=v_2 \end{cases}} \begin{cases} a=2uv(u^2+v^2) \\ b=2uv(u^2+v^2) \\ c=4uv(u^2-v^2) \end{cases} \xRightarrow{\begin{cases} a=2uvx \\ b=2uvy \\ c=2uvz \end{cases}} \begin{cases} x=u^2+v^2 \\ y=u^2+v^2 \\ z=2(u^2-v^2) \end{cases} \cdots \text{簡 1}$$

$$\text{拼 2} \xRightarrow{\begin{cases} u=u_1=u_2 \\ v=v_1=v_2 \end{cases}} \begin{cases} a=u^4-v^4 \\ b=u^4-v^4 \\ c=4uv(u^2-v^2) \end{cases} \xRightarrow{\begin{cases} a=x(u^2-v^2) \\ b=y(u^2-v^2) \\ c=z(u^2-v^2) \end{cases}} \begin{cases} x=u^2+v^2 \\ y=u^2+v^2 \\ z=4uv \end{cases} \cdots \text{簡 2}$$

$$\text{拼 3} \xRightarrow{\begin{cases} u=u_1=u_2 \\ v=v_1=v_2 \end{cases}} \begin{cases} a=u^4-v^4 \\ b=2uv(u^2+v^2) \\ c=(u^2+v^2)^2 \end{cases} \xRightarrow{\begin{cases} a=x(u^2+v^2) \\ b=y(u^2+v^2) \\ c=z(u^2+v^2) \end{cases}} \begin{cases} x=u^2-v^2 \\ y=2uv \\ z=u^2+v^2 \end{cases} \cdots \text{簡 3}$$

$$\text{拼 4} \xRightarrow{\begin{cases} u=u_1=u_2 \\ v=v_1=v_2 \end{cases}} \begin{cases} a=2uv(u^2+v^2) \\ b=u^4-v^4 \\ c=(u^2+v^2)^2 \end{cases} \xRightarrow{\begin{cases} a=x(u^2+v^2) \\ b=y(u^2+v^2) \\ c=z(u^2+v^2) \end{cases}} \begin{cases} x=2uv \\ y=u^2-v^2 \\ z=u^2+v^2 \end{cases} \cdots \text{簡 4}$$

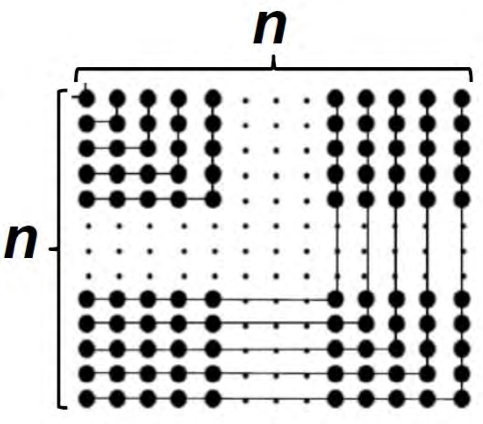
我嘗試簡化歐拉的拼 1 到拼 4 公式得到四組公式：簡1和簡2 公式是等腰海倫三角形邊長生成公式，簡3和簡4公式卻又回到原本的歐幾里得公式。

二、 由圓點方陣探討畢氏三元數的生成公式

➢ 連續奇數和的公式

在利用畢氏定理（$a^2+b^2=c^2$）拼湊畢氏三元數（a,b,c）過程中，我觀察畢氏三元數是平方的形態，聯想到一題國小數學競試題目：$1+3+5+\cdots+(2n-1)=?$

這時候，利用 n 階圓點方陣可得解答：**從 n 階圓點方陣（圖五）的左上角開始，將圓點方陣分成 n 層，各層圓點數目依序分別為：$1,3,5,\cdots,(2n-1)$，因此得到等式：$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$。**



圖五 n 階圓點方陣

➢ 圓點方陣的分割

我將n 階圓點方陣分割成兩部分：

n 階圓點方陣可分成（$n-1$）階圓點方陣和最外一層的圓點：

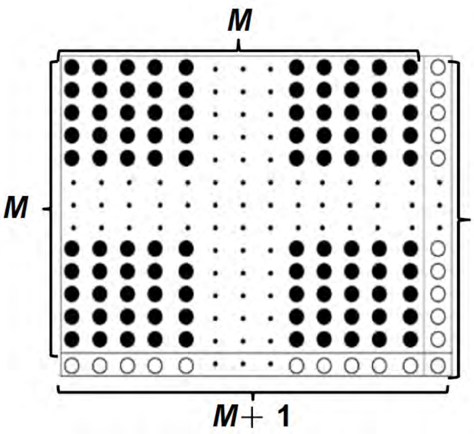
$n^2=(n-1)^2+(2n-1)\cdots(1)$

n 階圓點方陣可分成（$n-2$）階圓點方陣和最外兩層的圓點：

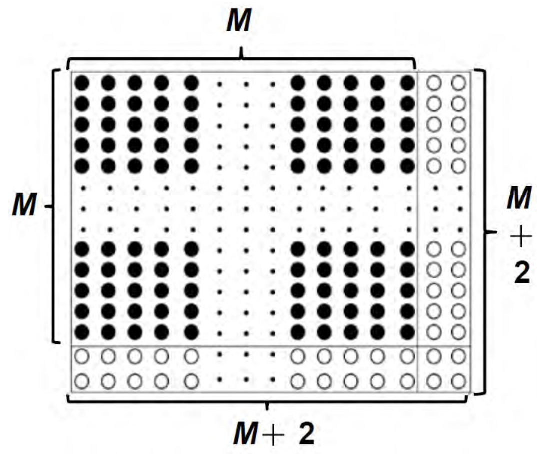
$n^2=(n-2)^2+[(2n-1)+(2n-3)] \Rightarrow n^2=(n-2)^2+(4n-4)\cdots(2)$

因為圓點方陣的點數和畢氏三元數之關係都是平方的形態，所以我利用圓點方陣的降階來探討畢氏三元數的生成公式。由圖六和七的圓點方陣可知全部圓點的數目等於實心圓點（•）的數目加上空心圓點（◦）的數目。因為，從上列的關係式(1)得到：$n^2=(2n-1)+(n-1)^2$，（$2n-1$）代表奇數，再從關係式(2)得到：

$n^2 = (4n-4) + (n-2)^2$，$(4n-4)$代表偶數，接下來，我分別以$(M+1)$階、和$(M+2)$階圓點方陣探討畢氏三元數。



圖六　$(M+1)$階圓點方陣



圖七　$(M+2)$階圓點方陣

➢　圓點方陣的降階

◆　由$(\boldsymbol{M+1})$階圓點方陣透過一次降一階的方式

由圖六的圓點方陣可得到：$\begin{cases} 全部圓點數為(M+1)^2 \\ 實心圓點數為\ M^2 \\ 空心圓點數為(2M+1) \end{cases}$，

因此：$(2M+1)+M^2=(M+1)^2$，再假設$a^2=2M+1$，得到：

$$\begin{cases} (2M+1)+M^2=(M+1)^2 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases} \xRightarrow{a^2=2M+1} \begin{cases} b^2=M^2 \\ c^2=(M+1)^2 \end{cases} \xRightarrow{M=\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}} \begin{cases} b=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{2} & —① \\ c=b+1 & —② \end{cases}$$

由於$a^2=2M+1>1$，因此$a>1$。$2M+1$是奇數，又因為奇數的平方數還是奇數，所以設定k是正整數。以$a=2k+1$代入①和② 得到：

$$\begin{cases} b=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{2} \\ c=b+1 \end{cases} \xRightarrow{a=2k+1} \begin{cases} b=2k^2+2k \\ c=2k^2+2k+1 \end{cases}$$

由$(M+1)$階圓點方陣得到畢氏三元數生成公式：$\begin{cases} a=2k+1 \\ b=2k^2+2k \\ c=2k^2+2k+1 \end{cases}$，$k$是正整數。

◆ 由$(M+2)$階圓點方陣透過一次降二階的方式

由圖七的圓點方陣可得到：$\begin{cases} \text{全部圓點數為}(M+2)^2 \\ \text{實心圓點數為 } M^2 \\ \text{空心圓點數為}(4M+4) \end{cases}$，

因此：$(4M+4)+M^2=(M+2)^2$，再假設$a^2=4M+4$，得到：

$$\begin{cases} (4M+4)+M^2=(M+2)^2 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases} \xRightarrow{a^2=4M+4} \begin{cases} b^2=M^2 \\ c^2=(M+2)^2 \end{cases} \xRightarrow{M=\frac{a^2}{4}-1} \begin{cases} b=\dfrac{a^2}{4}-1 & —③ \\ c=b+2 & —④ \end{cases}$$

由於$a^2=4M+4>4$，因此$a>2$。$4M+4$是偶數，又因為偶數的平方數還是偶數，所以設定k是正整數。以$a=2k+2$代入③和④得到：

$$\begin{cases} b=\frac{a^2}{4}-1 \\ c=b+2 \end{cases} \xRightarrow{a=2k+2} \begin{cases} b=k^2+2k \\ c=k^2+2k+2 \end{cases},$$

由$(M+2)$階圓點方陣得到畢氏三元數生成公式：$\begin{cases} a=2k+2 \\ b=k^2+2k \\ c=k^2+2k+2 \end{cases}$，$k$是正整數。

三、 海倫三角形邊長生成公式的產生

➢ 基本的海倫三角形邊長生成公式

因為畢氏三元數和畢氏三角形三邊長都是符合畢氏定理（$a^2+b^2=c^2$）的正整數解（a,b,c），所以由$(M+1)$階和$(M+2)$階圓點方陣得到的兩組畢氏三元數生成公式，也是兩組畢氏三角形的邊長生成公式。接著，我按照直角三角形的面積公式，得到這兩組畢氏三角形的面積，計算結果如下：

◆ 由$(M+1)$階圓點方陣得到海倫三角形邊長生成公式

① $\begin{cases} a=2k+1 \\ b=2k^2+2k \\ c=2k^2+2k+1 \end{cases}$ …公式(1)，三角形的面積$=\dfrac{a\times b}{2}=2k^3+3k^2+k$

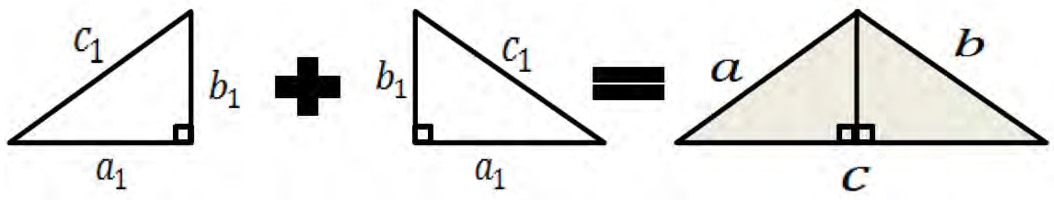
◆ 由$(M+2)$階圓點方陣得到海倫三角形邊長生成公式

$$②\begin{cases} a=2k+2 \\ b=k^2+2k \\ c=k^2+2k+2 \end{cases}$$ …公式(2)，三角形的面積$=\dfrac{a\times b}{2}=k^3+3k^2+2k$

結果　這兩組畢氏三角形邊長與面積皆為正整數。

結論　**所以這兩組畢氏三角形是有一個角為直角的海倫三角形，這兩組公式是基本的海倫三角形的邊長生成公式。**

➢ 等腰海倫三角形邊長的生成公式



圖八　由兩個相同的畢氏三角形拼成一個等腰海倫三角形

假設由公式(1)或(2)產生兩個三邊長都是a_1,b_1,c_1的相同海倫三角形（圖八），透過拼可得到新的三角形，可產生四種三角形邊長關係式：$(a,b,c)=(c_1,c_1,2a_1)$。計算和驗算如下：

$$①\begin{cases}(a_1,b_1,c_1)=(2k+1,2k^2+2k,2k^2+2k+1)\\(a_1,b_1,c_1)=(2k+1,2k^2+2k,2k^2+2k+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2k^2+2k+1\\b=2k^2+2k+1\\c=4k+2\end{cases}$$ …公式(3)

三角形的面積$=4k^3+6k^2+2k$

$$②\begin{cases}(a_1,b_1,c_1)=(2k^2+2k,2k+1,2k^2+2k+1)\\(a_1,b_1,c_1)=(2k^2+2k,2k+1,2k^2+2k+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2k^2+2k+1\\b=2k^2+2k+1\\c=4k^2+4k\end{cases}$$ …公式(4)

三角形的面積$=4k^3+6k^2+2k$

$$③\begin{cases}(a_1,b_1,c_1)=\left(2k+2,k^2+2k\,,k^2+2k+2\right)\\(a_1,b_1,c_1)=\left(2k+2,k^2+2k\,,k^2+2k+2\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=k^2+2k+2\\b=k^2+2k+2\\c=4k+4\end{cases}\quad\cdots\text{公式(5)}$$

三角形的面積＝ $2k^3+6k^2+4k$

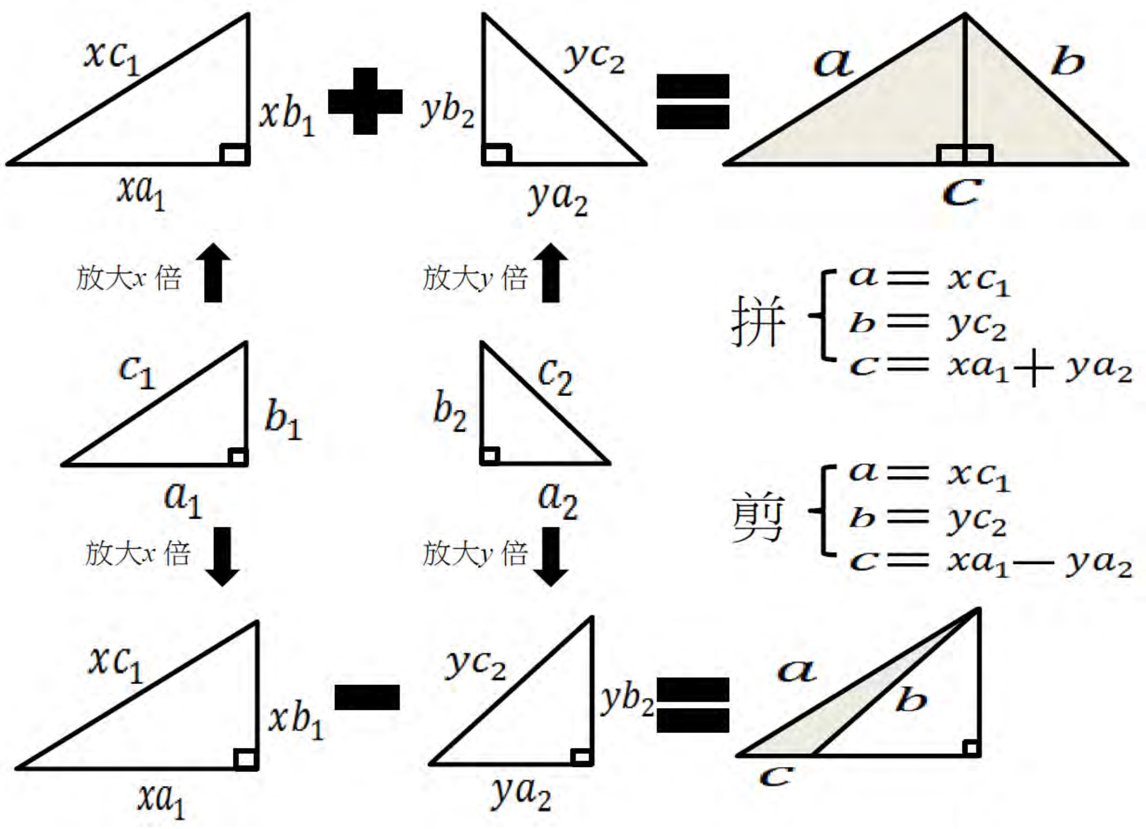
$$④\begin{cases}(a_1,b_1,c_1)=\left(k^2+2k,2k+2\,,k^2+2k+2\right)\\(a_1,b_1,c_1)=\left(k^2+2k,2k+2\,,k^2+2k+2\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=k^2+2k+2\\b=k^2+2k+2\\c=2k^2+4k\end{cases}\quad\cdots\text{公式(6)}$$

三角形的面積＝ $2k^3+6k^2+4k$

結果 **這四組三角形的邊長是正整數，面積也是正整數，而且有兩邊等長。**

結論 **所以這四組三角形是等腰的海倫三角形，這四組公式是等腰海倫三角形的邊長生成公式。**

➢ 由拼和剪得到十二組的海倫三角形邊長生成公式



圖九　由兩個放大的畢氏三角形拼或剪成一個海倫三角形

假設三邊長分別是a_1,b_1,c_1和a_2,b_2,c_2的兩個海倫三角形（圖九），這些三邊長由公式⑴和⑵產生以下①到⑥的六種情況。再將它們各放大x與y倍後得到兩個新的海倫三角形，這時候的三邊長分別為(xa_1,xb_1,xc_1)和(ya_2,yb_2,yc_2)。在$x=b_2,y=b_1$時，使得兩個新的海倫三角形各有一股邊等長$\left(xb_1=yb_2\right)$，再以此一股邊作為公共邊，接著透過拼得到六種三角形的邊長關係式：$(a,b,c)=(b_2c_1,b_1c_2,b_2a_1+b_1a_2)$，接著透過剪得到六種三角形的的邊長關係式：

$(a,b,c)=(b_2c_1,b_1c_2,b_2a_1-b_1a_2)$，並加以計算和驗算如下：

情況① $\begin{cases}(a_1,b_1,c_1)=\left(2k^2+2k,2k+1,2k^2+2k+1\right)\\(a_2,b_2,c_2)=\left(k^2+2k,2k+2,k^2+2k+2\right)\end{cases}$

$\boxed{拼}$ $\Rightarrow\begin{cases}a=4k^3+8k^2+6k+2\\b=2k^3+5k^2+6k+2\\c=6k^3+13k^2+6k\end{cases}$ ... 公式⑺

三角形的面積$=12k^5+44k^4+57k^3+31k^2+6k$

結果　邊長與面積皆為正整數。

$\boxed{剪}$ $\Rightarrow\begin{cases}a=4k^3+8k^2+6k+2\\b=2k^3+5k^2+6k+2\\c=2k^3+3k^2+2k\end{cases}$ ... 公式⑻

三角形的面積$=4k^5+12k^4+15k^3+9k^2+2k$

結果　邊長與面積皆為正整數。

情況② $\begin{cases}(a_1,b_1,c_1)=\left(2k^2+2k,2k+1,2k^2+2k+1\right)\\(a_2,b_2,c_2)=\left(2k+2,k^2+2k,k^2+2k+2\right)\end{cases}$

$\boxed{拼}$ $\Rightarrow\begin{cases}a=2k^4+6k^3+5k^2+2k\\b=2k^3+5k^2+6k+2\\c=2k^4+6k^3+8k^2+6k+2\end{cases}$ ... 公式⑼

三角形的面積$=2k^7+11k^6+25k^5+32k^4+25k^3+11k^2+2k$

結果　邊長與面積皆為正整數。

$\boxed{剪} \Rightarrow \begin{cases} a = 2k^4 + 6k^3 + 5k^2 + 2k \\ b = 2k^3 + 5k^2 + 6k + 2 \\ c = 2k^4 + 6k^3 - 6k - 2 \end{cases}$ ...公式⑽

三角形的面積＝$2k^7 + 11k^6 + 17k^5 - 17k^3 - 11k^2 - 2k$

$\boxed{結果}$ 當是k等於 1 時，邊長c與面積皆為 0；當是k大於 1 的正整數時，邊長面積皆為正整數。

$\boxed{修正}$ 當k等大於 1 的正整數時，邊長與面積皆為正整數。

情況③$\begin{cases} (a_1, b_1, c_1) = \left(2k^2 + 2k, 2k + 1, 2k^2 + 2k + 1\right) \\ (a_2, b_2, c_2) = \left(2k + 1, 2k^2 + 2k\,, 2k^2 + 2k + 1\right) \end{cases}$

$\boxed{拼} \Rightarrow \begin{cases} a = 4k^4 + 8k^3 + 6k^2 + 2k \\ b = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \\ c = 4k^4 + 8k^3 + 8k^2 + 4k + 1 \end{cases}$ ...公式⑾

三角形的面積＝$8k^7 + 28k^6 + 44k^5 + 40k^4 + 22k^3 + 7k^2 + k$

$\boxed{結果}$ 邊長與面積皆為正整數。

$\boxed{剪} \Rightarrow \begin{cases} a = 4k^4 + 8k^3 + 6k^2 + 2k \\ b = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \\ c = 4k^4 + 8k^3 - 4k - 1 \end{cases}$ ...公式⑿

三角形的面積＝$8k^7 + 28k^6 + 28k^5 - 14k^3 - 7k^2 - k$

$\boxed{結果}$ 邊長與面積皆為正整數。

情況④$\begin{cases} (a_1, b_1, c_1) = \left(k^2 + 2k, 2k + 2\,, k^2 + 2k + 2\right) \\ (a_2, b_2, c_2) = \left(2k + 2, k^2 + 2k\,, k^2 + 2k + 2\right) \end{cases}$

$\boxed{拼} \Rightarrow \begin{cases} a = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k \\ b = 2k^3 + 6k^2 + 8k + 4 \\ c = k^4 + 4k^3 + 8k^2 + 8k + 4 \end{cases}$ ...公式⒀

三角形的面積＝$k^7+7k^6+22k^5+40k^4+44k^3+28k^2+8k$

結果　邊長與面積皆為正整數。

剪$\Rightarrow\begin{cases}a=k^4+4k^3+6k^2+4k\\ b=2k^3+6k^2+8k+4\\ c=k^4+4k^3-8k-4\end{cases}$ ... 公式⒁

三角形的面積＝$k^7+7k^6+14k^5-28k^3-28k^2-8k$

結果　當是k等於 1 時，邊長$c=-7$與面積＝-42；當是k大於 1 的正整數時，邊長面積皆為正整數。

修正　當k等大於 1 的正整數時，邊長與面積皆為正整數。

情況⑤$\begin{cases}(a_1,b_1,c_1)=\left(k^2+2k,2k+2\,,k^2+2k+2\right)\\ (a_2,b_2,c_2)=\left(2k+1,2k^2+2k\,,2k^2+2k+1\right)\end{cases}$

拼$\Rightarrow\begin{cases}a=2k^4+6k^3+8k^2+4k\\ b=4k^3+8k^2+6k+2\\ c=2k^4+6k^3+8k^2+6k+2\end{cases}$ ... 公式⒂

三角形的面積＝$4k^7+20k^6+44k^5+56k^4+44k^3+20k^2+4k$

結果　邊長與面積皆為正整數。

剪$\Rightarrow\begin{cases}a=2k^4+6k^3+8k^2+4k\\ b=4k^3+8k^2+6k+2\\ c=2k^4+6k^3-6k-2\end{cases}$ ... 公式⒃

三角形的面積＝$4k^7+20k^6+28k^5-28k^3-20k^2-4k$

結果　當是k等於 1 時，邊長c與面積皆為 0；當是k大於 1 的正整數時，邊長面積皆為正整數。

修正　當k等大於 1 的正整數時，邊長與面積皆為正整數。

情況⑥ $\begin{cases}(a_1,b_1,c_1)=\left(2k+2,k^2+2k\ ,k^2+2k+2\right)\\(a_2,b_2,c_2)=\left(2k+1,2k^2+2k,2k^2+2k+1\right)\end{cases}$

$\boxed{拼}\Rightarrow\begin{cases}a=2k^4+6k^3+8k^2+4k\\b=2k^4+6k^3+5k^2+2k\\c=6k^3+13k^2+6k\end{cases}$ ... 公式(17)

三角形的面積$=6k^7+31k^6+57k^5+44k^4+12k^3$

結果 邊長與面積皆為正整數。

$\boxed{剪}\Rightarrow\begin{cases}a=2k^4+6k^3+8k^2+4k\\b=2k^4+6k^3+5k^2+2k\\c=2k^3+3k^2+2k\end{cases}$ ... 公式(18)

三角形的面積$=2k^7+9k^6+15k^5+12k^4+4k^3$

結果 邊長與面積皆為正整數

結論 **所以可得十二組的海倫三角形和十二組海倫三角形的邊長生成公式。**

陸、 研究結果

一、經由$(M+1)$和$(M+2)$階圓點方陣的降階得到以下的兩組畢氏三元數生成公式，也就是兩組基本的畢氏三角形的邊長生成公式（k是正整數）：

$\begin{cases}a=2k+1\\b=2k^2+2k\\c=2k^2+2k+1\end{cases}$ …公式(1) ，以及 $\begin{cases}a=2k+2\\b=k^2+2k\\c=k^2+2k+2\end{cases}$ …公式(2)，

又因為這兩組三角形的面積是正整數，因此，這兩組公式也同時是基本的海倫三角形的邊長生成公式。

二、從這兩組基本的畢氏三角形的不同組合方式，我得到了十六組海倫三角形的邊長生成公式，加上這兩組基本的生成公式，總共有十八組公式。整理如表一。

表一　十八組海倫三角形的邊長公式（a, b, c）

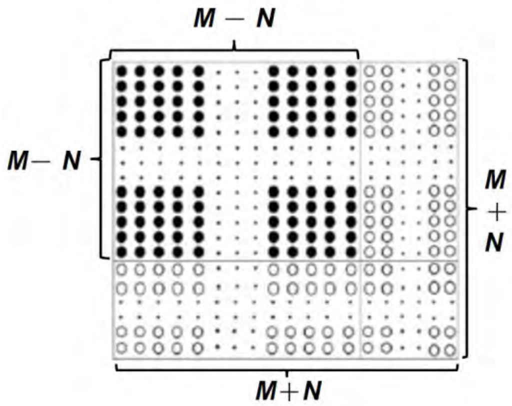
	從圓點方陣得到基本的海倫三角形邊長生成公式
公式(1)	$(2k+1, 2k^2+2k, 2k^2+2k+1)$
公式(2)	$(2k+2, k^2+2k, k^2+2k+2)$
	從兩個相同的畢氏三角形拼接的等腰海倫三角形邊長生成公式
公式(3)	$(2k^2+2k+1, 2k^2+2k+1, 4k+2)$
公式(4)	$(2k^2+2k+1, 2k^2+2k+1, 4k^2+4k)$
公式(5)	$(k^2+2k+2, k^2+2k+2, 4k+4)$
公式(6)	$(k^2+2k+2, k^2+2k+2, 2k^2+4k)$
	從兩個不同的畢氏三角形拼或剪的海倫三角形邊長生成公式
公式(7)	$(4k^3+8k^2+6k+2, 2k^3+5k^2+6k+2, 6k^3+13k^2+6k)$
公式(8)	$(4k^3+8k^2+6k+2, 2k^3+5k^2+6k+2, 2k^3+3k^2+2k)$
公式(9)	$(2k^4+6k^3+5k^2+2k, 2k^3+5k^2+6k+2, 2k^4+6k^3+8k^2+6k+2)$
公式(10)	$(2k^4+6k^3+5k^2+2k, 2k^3+5k^2+6k+2, 2k^4+6k^3-6k-2)$
公式(11)	$(4k^4+8k^3+6k^2+2k, 4k^3+6k^2+4k+1, 4k^4+8k^3+8k^2+4k+1)$
公式(12)	$(4k^4+8k^3+6k^2+2k, 4k^3+6k^2+4k+1, 4k^4+8k^3-4k-1)$
公式(13)	$(k^4+4k^3+6k^2+4k, 2k^3+6k^2+8k+4, k^4+4k^3+8k^2+8k+4)$
公式(14)	$(k^4+4k^3+6k^2+4k, 2k^3+6k^2+8k+4, k^4+4k^3-8k-4)$
公式(15)	$(2k^4+6k^3+8k^2+4k, 4k^3+8k^2+6k+2, 2k^4+6k^3+8k^2+6k+2)$
公式(16)	$(2k^4+6k^3+8k^2+4k, 4k^3+8k^2+6k+2, 2k^4+6k^3-6k-2)$
公式(17)	$(2k^4+6k^3+8k^2+4k, 2k^4+6k^3+5k^2+2k, 6k^3+13k^2+6k)$
公式(18)	$(2k^4+6k^3+8k^2+4k, 2k^4+6k^3+5k^2+2k, 2k^3+3k^2+2k)$

備註：k是正整數，但公式(10)、(14)及(16)的k大於 1

柒、 討論

一、雖然當k是一個正整數（公式⑽、⒁及⒃的k需要大於 1），都可以運用這十八組公式產生海倫三角形的三邊長，但是我卻有另一個想法：當k是一個正整數，只要運用公式⑴和⑵，再由產生公式的方法，就可得到其他的海倫三角形的三邊長。這樣子，根本不需要去背誦或查詢這十八組公式，也可以達成任務。

二、由圖十可得：$\begin{cases}\text{全部圓點數為}(M+N)^2\\ \text{實心圓點數為}(M-N)^2\\ \text{空心圓點數為 }4MN\end{cases}$，



圖十 $(M+N)$階圓點方陣

因此： $4MN+(M-N)^2=(M+N)^2$，

假設$a^2=4MN$，得到：

$$\begin{cases}4MN+(M-N)^2=(M+N)^2\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$$

$$\xRightarrow{a^2=4MN}\begin{cases}b^2=(M-N)^2\text{—⑤}\\ c^2=(M+N)^2\text{—⑥}\end{cases},$$

由於$a^2=4MN$， $4MN$是平方數，所以設定$M=u^2, N=v^2$ （u,v是正整數，$u>v$），

再以$a=2uv$代入⑤和⑥得到： $\begin{cases}b^2=(M-N)^2\\ c^2=(M+N)^2\end{cases}\xRightarrow{a=2uv}\begin{cases}b=u^2-v^2\\ c=u^2+v^2\end{cases}$，

由$(M+N)$階圓點方陣得到歐幾里得的畢氏三元數生成公式：$\begin{cases}a=2uv\\ b=u^2-v^2\\ c=u^2+v^2\end{cases}$，

在上次全國科展中，我只利用$(M+1)$和$(M+2)$階圓點方陣討論畢氏三元數，希望將$(M+3)$階、$(M+4)$階、⋯、甚至於 $(M+N)$階圓點方陣當作討論畢氏三元數的路徑，如今我利用$(M+N)$階圓點方陣當作討論畢氏三元數的路徑，太棒了！另外一點值得高興的是：因為歐拉的公式是由歐幾里得的公式得到，所以當M和N是適合的整數時，再由歐拉產生公式的方法，不需要去背誦公式，也可以得到海倫三角形的三邊長。

三、在已知的畢氏三角形的邊長生成公式中，畢達哥拉斯、柏拉圖和本研究的公式都是部分解和使用了 1 個代數，只有歐幾里得的公式是一般解和使用 2 個代數（表二）。

表二　畢氏三角形的生成公式比較表

比較	畢達哥拉斯	柏拉圖	歐幾里得	本研究
一般解	不是	不是	是	不是
組數	1	1	1	2
代數	1	1	2	1
年代	西元前 580-500	西元前 427-347	西元前 323-283	西元 2013
國家	古希臘	古希臘	古希臘	中華民國

四、在已知海倫三角形的邊長生成公式中，不管是歐拉、卡邁克爾，楊媛甯以及本研究，全部都不是一般解。從表三中知道本研究得到最多組數的公式，只使用了一個代數k。

表三　海倫三角形的生成公式比較表

比較	歐拉	卡邁克爾	楊媛甯	本研究
一般解	不是	不是	不是	不是
組數	8	1	1	18
代數	4	3	4	1
年代	1707-1783	1952	2007	2013
國家	瑞士	美國	中華民國	中華民國

捌、 結論

本研究為了探究蔡聰明教授的問題：「海倫三角形的三個邊是否可用一般公式表達出來？」得到以下的結論：

一、在既有的畢氏三角形邊長的生成公式中，歐幾里得涵蓋了畢達哥拉斯和柏拉圖；在既有的海倫三角形邊長的生成公式中，歐拉涵蓋了楊媛甯，楊媛甯涵蓋了卡邁克爾。

二、經由連續奇數和的公式和圓點方陣的降階，我得到兩組畢氏三元數生成公式，也就是兩組畢氏三角形邊長的生成公式。又因為這兩組三角形的面積是正整數，因此，這兩組公式也同時是海倫三角形邊長的生成公式。接著從兩組海倫三角形的組合得到了十六組海倫三角形邊長公式。因此，本研究總共得到十八組海倫三角形的邊長生成公式，整個探索的過程呈現出數學中最美妙的規律性，欣喜之餘，期待將來有機會能對海倫三角形作進一步的研究，以發現更多美妙的數學規律性。

玖、 參考資料

一、國民小學數學課本第九冊。南一書局。

二、國民小學數學課本第十冊。南一書局。

三、國民小學數學課本第十一冊。南一書局。

四、盛立人.嚴鎮軍（2001）。從勾股定理談起。台北市：九章。

五、楊媛甯（2007a）。直角三角形生成關係的研究與發展。臺灣二ＯＯ七年國際科學展覽會數學科。

六、楊媛甯（2007b）。海倫家族三代同堂大蒐秘。中華民國第四十七屆中小學科學展覽會國中組數學科。

七、蔡聰明（2010）。數學拾貝。台北市：三民。

八、Carmichael, R. D. （1952）.The Theory of Numbers and Diophantine Analysis. New York: Dover.

【評語】080415

本研究從另類的角度，透過圓點方陣的降階，得出兩組畢氏三角形邊長的生成公式也同時是海倫三角形邊長的生成公式。在此基礎下，將三角形複製、放大、 拼接和剪接共得出 18 組海倫三角形的邊長生成公式。雖然生成過程不乏前人影子，但以國小生而言，已屬不錯，值得鼓勵。站在巨人的肩膀上，期待未來能有更進一步的研究。