

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

080414

天使與魔鬼

學校名稱：宜蘭縣羅東鎮羅東國民小學

作者：	指導老師：
小六 賴雍聖	許竣凱
小六 林旻賢	游惠君
小六 李 心	
小六 吳亭璇	
小六 游蕙伶	
小六 王淳譽	

關鍵詞：因數、倍數、質數

天使與魔鬼

摘要

我們在亞卓市上找到了一個可以練習因數與倍數的遊戲，叫做「天使與魔鬼」。在研究過程中，我們發現天使要贏得勝利是很簡單的，而且我們找到了一個固定的步驟，仔細的跟著步驟思索，不但輕鬆獲得勝利，天使還可以挑戰得到這個遊戲的最高分。

接著我們不斷的擴展遊戲的數字數量，結果發現天使與魔鬼的分數不但無法逆轉結果，真實得分反而相差越來越多，且天使與魔鬼的得分比例固定維持在約 63%與 37%〈或 62%與 38%〉之間。我們也改造這個遊戲，建立了新的遊戲規則，並做了一個遊戲盤。在這個新的遊戲規則裡，擔任先攻的天使與後攻的魔鬼都有獲勝的機會。無論先攻或後攻，我們提出一套步驟及原則，可以大幅提高獲勝的機率。

壹、研究動機

亞卓市是一個擁有豐富教育資源的網站，老師在亞卓市網站上發現了一個好玩的遊戲，剛好我們也正在學習因數與倍數，可以把這個遊戲當成一個練習的工具。一開始很容易輸給魔鬼，但玩了幾次，贏的機率大大提升；掌握了祕訣後，想輸給魔鬼都是很困難的事呢！但老師卻出了一個艱難的任務給我們，希望我們不但能贏，還要贏得很多、很多，能贏過老師的人還有獎品喔！所謂「重賞之下，必有勇夫」，我們玩到積分 490 分時，得意洋洋的想找老師領獎，沒想到老師說他的分數是 516 分，這可激發了我們的鬥志，努力嘗試多次後，總是達不到老師的分數，所以老師希望我們能好好分析策略，該如何才能贏得最高分呢？

貳、研究目的

- 一、如何找出這個遊戲的天使最高分？
- 二、這個遊戲有好多大的質數被刪除，不列入題庫中，如果我們將這些質數放回題目中，對於天使與魔鬼的比賽結果會有怎樣的影響？
- 三、當題庫的數字慢慢擴增變大，魔鬼和天使的戰局是否會改變？兩者之間的差距會縮近，還是會拉遠？
- 四、相對的，如果題庫的數字慢慢縮小，魔鬼和天使的戰局是否會改變？兩者之間的差距會縮近，還是會拉遠？

參、設備及器材

- 一、電腦及可以上網的設備。
- 二、白紙和筆。
- 三、製作遊戲盤的材料。
 - 〈一〉36 格保麗龍盤。
 - 〈二〉玩具零錢。
 - 〈三〉數字標牌。
 - 〈四〉兩個零錢整理盒。

肆、研究過程

一、遊戲方法簡介

〈一〉數字題庫：

1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、18、20、21、22、24、25、26、27、28、30、32、33、34、35、36、38、39、40、41、42，共 36 個。

〈二〉比賽規則：

- 1.天使先拿走一個數字，魔鬼會拿走該數字的所有剩餘因數。
- 2.如果最後剩餘的數字都沒有因數可使用，則全部收為魔鬼所有。
- 3.天使的數字總和大於魔鬼的數字總和即獲勝，反之為敗。

二、名詞定義

〈一〉被捨棄：不為任何數的因數，獨留最後送給魔鬼。

〈二〉被贈送：因為無法單獨配對，必須與其他因數一起交給魔鬼。

三、研究問題一：如何找出這個遊戲的天使最高分？

〈一〉最高分的理想狀況：天使得到數字題庫中 20 到 42 的所有數字，魔鬼獲得數字題庫中 1 到 18 的所有數字，共配成 18 組。

〈二〉1 為所有數字的因數，所以天使先取出最大質數 41，魔鬼取得數字 1。

〈三〉分析滿足超過 42/2 及 42 以下兩個條件的所有因數，分成三類。〈因為自己本身不是別人的因數，如果不給天使，就勢必屬於魔鬼的〉

剩二個因數：38、34、25

剩三個因數：39、35、33、27、26、22

剩多個因數：42、40、36、32、30、28、24

1.分析二個因數的數字：

因數 數字	2	5	本身
38	2		38
34	2		34
25		5	25

①：代表有唯一可配對因數。

1：代表必須被捨棄因數。

討論：〈1〉34 因僅和 38 共同擁有一個因數，所以一定會被捨棄〈不為任何數的因數〉，最後歸屬於魔鬼。

〈2〉理想的高分狀況已不可能完成 18 個配對，頂多只有 17 個配對。

結果：

天使數字	魔鬼數字	剩餘數字
41	1	3、4、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、
38	2	16、18、20、21、22、24、26、27、28、30、
25	5	32、33、35、36、39、40、42，共 29 個。 被捨棄：34

2.分析三個因數的數字：

因數 數字	3	7	9	11	13	本身
39	3				13	39
35		7				35
33	3			11		33
27	3		9			27
26					13	26
22				11		22

①：代表有唯一可配對因數。

①：代表有個因數不與他人共有，但需先把其它因數配對。

1：與他人交叉持有共同因數。

討論：〈1〉9 僅能是 27 的因數，但需等 3 被與人配對後才取出。

〈2〉39、33、26、22 共同擁有 3、11、13 為因數，因此一定會有一個數字被捨棄，爲了達到最高分的要求，選擇捨棄 22 這個數字。

〈3〉理想的高分狀況確定頂多只有 17 個配對，34、22 最後會被捨棄。

結果：

天使數字	魔鬼數字	剩餘數字
41	1	4、6、8、10、12、14、15、16、18、20、21、24、28、30、32、36、40、42，共 18 個。 被捨棄：34、22
38	2	
25	5	
35	7	
26	13	
39	3	
33	11	
27	9	

3.分析多個因數的數字：

因數 數字	4	6	8	10	12	14	15	16	18	20	21	本身
42		6				14					21	42
40	4		8	10						20		40
36	4	6			12				18			36
32	4		8					16				32
30		6		10			15					30
28	4					14						28
24	4	6	8		12							24

討論：〈1〉最高分的理想狀況是能再配成 9 組，因此除了上面數字外，希望能再配對 20、18。

①：代表有個因數不與他人共有，但需先把其它因數配對。

1：與他人交叉持有共同因數。

〈21 已經無可用因數，配給 42 使用最爲有利〉

〈2〉因 20、18 本來爲 40、36 選定要使用的因數，但現在爲達到最高分，希望 20、18 不是他人因數，而能被天使所挑選，因此 20、18、40、36 要一起加入討論，因此 20、18、40、36、28、24 要共同擁有 4、6、8、10、12、14 爲因數。

因數 數字	4	6	8	10	12	14
40	4		8	10		
36	4	6			12	
28	4					14
24	4	6	8		12	
20	4			10		
18		6				

〈3〉根據上面整理發現，18 只擁有 6 這個因數，20、28 擁有兩個因數選擇，所以以這三者先開始配對最為有利，因此以下分三種情形討論：

①假如天使選定 18，魔鬼選定 6，則剩餘數字都有 4 這個因數，代表 4 無法單獨配對，4 一定會被贈送，最後結果會失去 4、40 或 4、24。

天使數字	魔鬼數字	
18	6	
20	4	10
28	14	
36	12	
24	8	
40 會被捨棄		

天使數字	魔鬼數字	
18	6	
28	4	14
20	10	
40	8	
36	12	
24 會被捨棄		

②假如天使選定 20，魔鬼選定 4、10，最後結果會失去 4、6 或 4、36。

天使數字	魔鬼數字	
20	4	10
40	8	
28	14	
24	6	12
36	18	

天使數字	魔鬼數字	
20	4	10
40	8	
28	14	
18	6	
24	12	
36 會被捨棄		

③假如天使選定 28，魔鬼選定 4、14，最後結果會失去 4、6 或 4、36。

天使數字	魔鬼數字	
28	4	14
20	10	
40	8	
24	6	12
36	18	

天使數字	魔鬼數字	
28	4	14
20	10	
40	8	
18	6	
24	12	
36 會被捨棄		

〈4〉最後選擇失去 4、6 對天使最有利，共有兩種分配方法。

〈四〉共有兩種解答，天使最高分為 516 分，魔鬼最低分為 231 分。

天使數字	魔鬼數字	
41	1	
38	2	
25	5	
35	7	
26	13	
39	3	
33	11	
27	9	
20	4	10
40	8	
28	14	
24	6	12
36	18	
42	21	
32	16	
30	15	
被捨棄	22、34	

天使數字	魔鬼數字	
41	1	
38	2	
25	5	
35	7	
26	13	
39	3	
33	11	
27	9	
28	4	14
20	10	
40	8	
24	6	12
36	18	
42	21	
32	16	
30	15	
被捨棄	22、34	

四、研究問題二：這個遊戲有好多大的質數被刪除，不列入題庫中，如果我們將這些質數放回題目中，對於天使與魔鬼的比賽結果會有怎樣的影響？

〈一〉最高分的理想狀況：天使得到數字題庫中 22 到 42 的所有數字，魔鬼獲得數字題庫中 1 到 21 的所有數字，共配成 21 組。

〈二〉1 為所有數字的因數，所以天使先取出最大質數 41，魔鬼取得數字 1、37、31、29、23 因失去唯一因數 1 而被捨棄。

〈三〉分析滿足超過 $42/2$ 及 42 以下兩個條件的所有因數，分成三類。

剩二個因數：25

剩三個因數：39、38、35、34、33、27、26、22

剩多個因數：42、40、36、32、30、28、24

1.分析二個因數的數字：只有 25 有 5 及 25 兩個因數，因此目前結果如下：

天使數字	魔鬼數字	剩餘數字
41	1	2、3、4、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、21、22、24、26、27、28、30、32、33、34、35、36、38、39、40、42，共 34 個。 被捨棄：37、31、29、23
25	5	

2.分析三個因數的數字：

因數 數字	2	3	7	9	11	13	17	19	本身
39		3				13			39
38	2							19	38
35			7						35
34	2						17		34
33		3			11				33
27		3		9					27
26	2					13			26
22	2				11				22

討論：〈1〉19、17、9 僅能是 38、34、27 的因數，但需其他因數被與人配對後才取出。

〈2〉39、33、26、22 共同擁有 2、3、11、13 為因數，但

39、33、26、22 四個數字都是同時擁有兩個因數，無論選擇誰都會失去兩個因數，也因此會有一個數字最後得不到因數，為了達到最高分，選擇捨棄 22。

①：代表有唯一可配對因數。

①：代表有個因數不與他人共有，但需先把其它因數配對。

1：與他人交叉持有共同因數。

結果：

天使數字	魔鬼數字	剩餘數字
41	1	
25	5	
35	7	
39	3	13
33	11	
26	2	
38	19	
34	17	
27	9	

4、6、8、10、12、14、15、16、18、20、21、24、28、30、32、36、40、42，共 18 個。
被捨棄：37、31、29、23、22

3.分析多個因數的數字：

討論：〈1〉由於目前剩餘數字和研究問題一最後剩餘數字一樣，因此我們可以直接將最高分的兩種狀況列於下頁。

天使數字	魔鬼數字	
41	1	
25	5	
35	7	
39	3	13
33	11	
26	2	
38	19	
34	17	
27	9	
20	4	10
40	8	
28	14	
24	6	12
36	18	
42	21	
32	16	
30	15	
被捨棄	37、31、29、23、22	

天使數字	魔鬼數字	
41	1	
25	5	
35	7	
39	3	13
33	11	
26	2	
38	19	
34	17	
27	9	
28	4	14
20	10	
40	8	
24	6	12
36	18	
42	21	
32	16	
30	15	
被捨棄	37、31、29、23、22	

〈四〉在我們檢討答案時，發現魔鬼有個數字 21，大於天使的數字 20，如果可以將 21 納入天使此方，可以提高分數，因此更改答案如下：

天使數字	魔鬼數字	
41	1	
25	5	
35	7	
21	3	
39	13	
33	11	
26	2	
38	19	
34	17	
27	9	
28	4	14
42	6	
20	10	
40	8	
24	12	
36	18	
32	16	
30	15	
被捨棄	37、31、29、23、22	

天使數字	魔鬼數字	
41	1	
25	5	
35	7	
21	3	
39	13	
33	11	
26	2	
38	19	
34	17	
27	9	
20	4	10
40	8	
28	14	
42	6	
24	12	
36	18	
32	16	
30	15	
被捨棄	37、31、29、23、22	

共有兩種解答，天使最高分為 571 分，魔鬼最低分為 332 分。

五、研究問題三：當題庫的數字慢慢擴增變大，魔鬼和天使的戰局是否會改變？兩者之間的差距會縮近，還是會拉遠？

〈一〉題庫數字從 1 到 50，天使的最高分為 793 分，魔鬼的最低分為 482 分。

天使數字	魔鬼數字	
47	1	
49	7	
35	5	
4	2	
26	13	
39	3	
46	23	
38	19	
34	17	
33	11	
27	9	
45	15	
44	22	
28	14	
20	10	
50	25	
40	8	
32	16	
30	6	
42	21	
48	12	24
36	18	
被捨棄	29、31、37、41、43	

〈二〉題庫數字從 1 到 60，天使的最高分為 1136 分，魔鬼的最低分為 694 分。

天使數字	魔鬼數字	
59	1	
49	7	
35	5	
55	11	
33	3	
57	19	
38	2	
58	29	
46	23	
51	17	
39	13	
27	9	
54	6	18
36	12	
52	26	
45	15	
30	10	
60	4	20
40	8	
50	25	
42	14	21
32	16	
48	24	
56	28	
44	22	
被捨棄	31、34、37、41、43、47、53	

〈三〉題庫數字從 1 到 70，天使的最高分為 1566 分，魔鬼的最低分為 919 分。

天使數字	魔鬼數字	
67	1	
49	7	
35	5	
65	13	
55	11	
39	3	
69	23	
46	2	
62	31	
58	29	
57	19	
51	17	
68	4	34
52	26	
44	22	
28	14	
56	8	
70	10	
50	25	
40	20	
27	9	
63	21	
45	15	
42	6	
66	33	
54	18	
36	12	
60	30	
64	16	32
48	24	
被捨棄	37、38、41、43、47、53、59、61	

〈四〉題庫數字從 1 到 80，天使的最高分爲 2013 分，魔鬼的最低分爲 1227 分。

天使數字	魔鬼數字	
79	1	
49	7	
77	11	
55	5	
65	13	
33	3	
51	17	
69	23	
46	2	
58	29	
62	31	
74	37	
57	19	
8	4	
76	38	
68	34	
52	26	
44	22	
66	6	
78	39	
27	9	
63	21	
42	14	
45	15	
75	25	
50	10	
70	35	
54	18	
40	20	
80	16	
48	12	24
72	36	
60	30	
56	28	
64	32	
被捨棄	41、43、47、53、59、61、67、71、73	

〈五〉題庫數字從 1 到 90，天使的最高分爲 2550 分，魔鬼的最低分爲 1545 分。

天使數字	魔鬼數字	
89	1	
49	7	
77	11	
55	5	
65	13	
85	17	
51	3	
57	19	
69	23	
87	29	
58	2	
62	31	
74	37	
82	41	
86	43	
76	4	38
68	34	
52	26	
44	22	
88	8	
81	9	27
63	21	
45	15	
75	25	
50	10	
40	20	
80	16	
64	32	
78	6	39
70	14	35
66	33	
56	28	
54	18	
90	30	

天使數字	魔鬼數字	
60	12	
84	42	
72	36	
48	24	
被捨棄	46、47、53、59、61、67、71、73、 79、83	

〈六〉題庫數字從 1 到 100，天使的最高分為 3164 分，魔鬼的最低分為 1886 分。

天使數字	魔鬼數字	
97	1	
49	7	
77	11	
91	13	
65	5	
85	17	
95	19	
57	3	
69	23	
87	29	
93	31	
62	2	
74	37	
82	41	
86	43	
94	47	
98	14	
92	4	46
76	38	
68	34	
52	26	
99	9	33
81	27	
63	21	
45	15	
75	25	
50	10	
100	20	
70	35	
44	22	
88	8	
66	6	
78	39	
56	28	

天使數字	魔鬼數字	
54	18	
90	30	
60	12	
84	42	
72	36	
64	16	32
80	40	
96	24	48
被捨棄	51、53、55、58、59、61、67、 71、73、79、83、89	

六、研究問題四：相對的，如果題庫的數字慢慢縮小，魔鬼和天使的戰局是否會改變？
兩者之間的差距會縮近，還是會拉遠？

〈一〉題庫數字從 1 到 30，天使的最高分為 301 分，魔鬼的最低分為 164 分。

天使數字	魔鬼數字	
29	1	
25	5	
15	3	
27	9	
21	7	
26	13	2
22	11	
18	6	
30	10	
20	4	
28	14	
16	8	
24	12	
被捨棄	17、19、23	

〈二〉題庫數字從 1 到 20，天使的最高分為 124 分，魔鬼的最低分為 86 分。

天使數字	魔鬼數字	
19	1	
15	5	3
10	2	
14	7	
20	4	
12	6	
18	9	
16	8	
被捨棄	11、13、17	

〈三〉題庫數字從 1 到 10，天使的最高分為 40 分，魔鬼的最低分為 15 分。

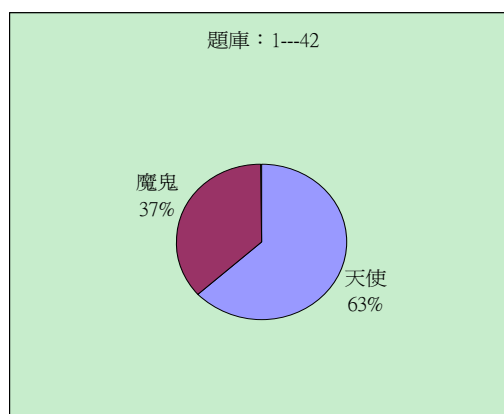
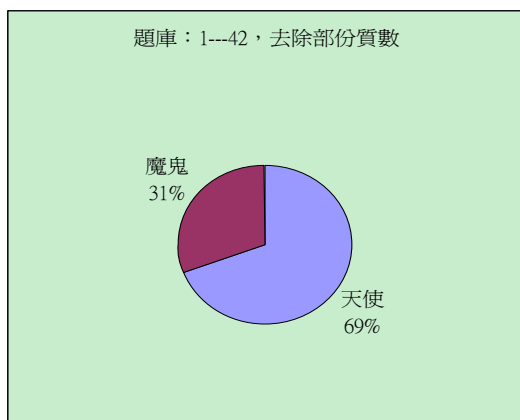
天使數字	魔鬼數字	
7	1	
9	3	
6	2	
10	5	
8	4	

伍、研究結果

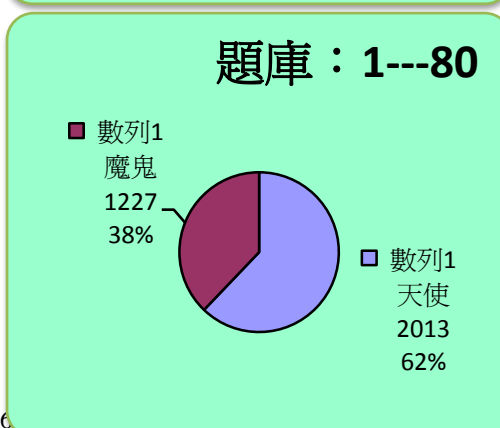
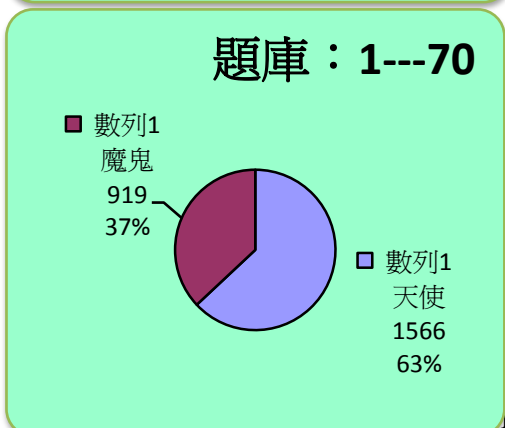
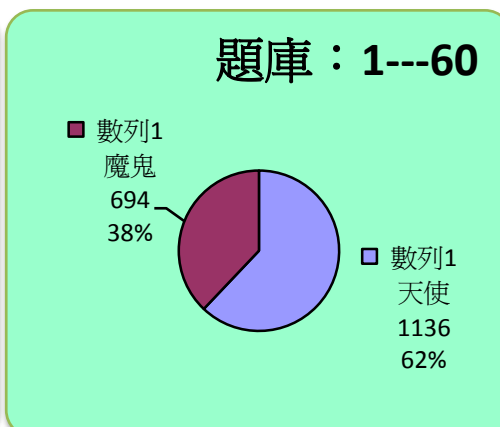
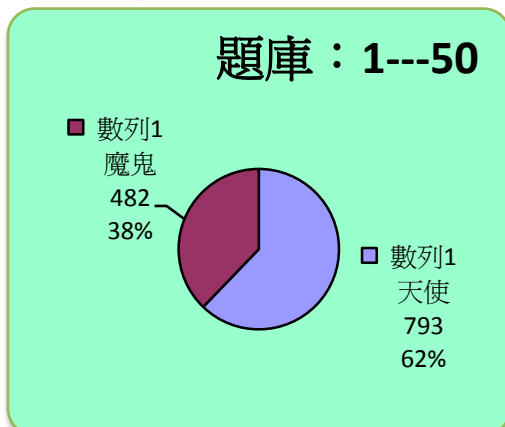
一、在解決問題一、問題二的過程中，我們發現了一個找出最高分的循序漸進步驟：

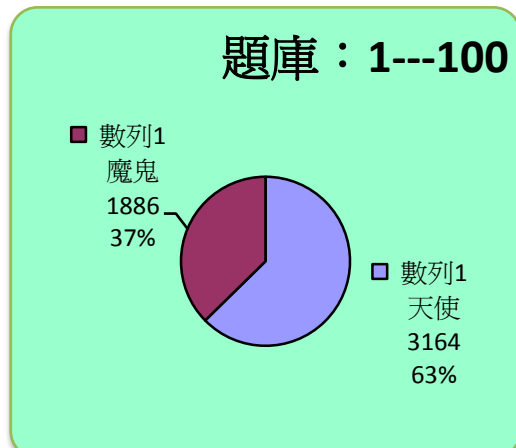
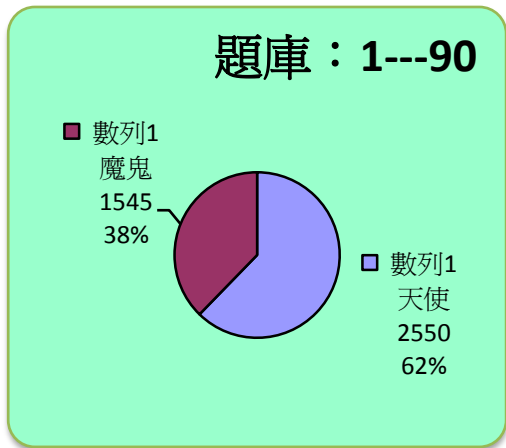
- 〈一〉先取最大質數，其餘質數若不能為其他數的因數，就只能被捨棄。
- 〈二〉再取某些質數的平方數，例如：25、49...
- 〈三〉從因數少的數字分析起，盡量把所有大數都納入天使這邊。
- 〈四〉最後完成後還需要一再檢視，確定魔鬼此方的最大數都比天使的任何一數還小〈被捨棄的數不算〉，且被贈送的數都沒有再搭配一組的可能性。

二、在問題一的數字題庫解題完後〈數字 1---42，去除部份質數〉，我們找到天使最高分為 516 分，魔鬼最低分為 231 分；在問題二的數字題庫解題完後〈數字 1---42〉，我們找到天使最高分為 571 分，魔鬼最低分為 332 分。

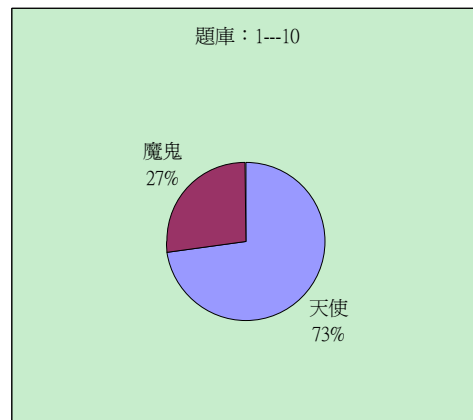
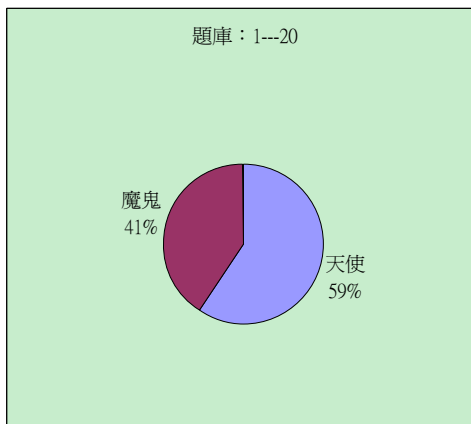
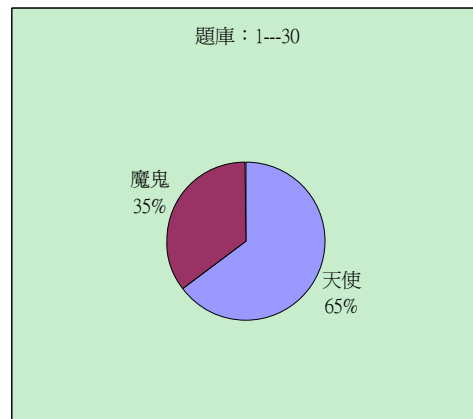
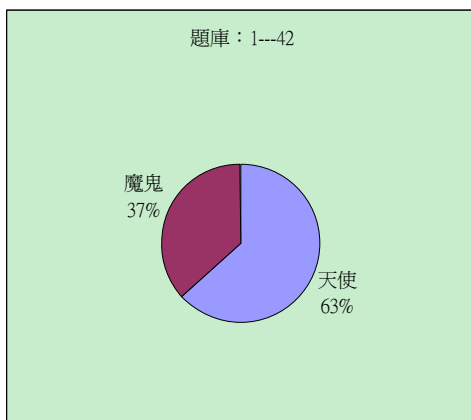


三、在解決問題三的過程中，我們發現當題庫的數字越大時，天使和魔鬼的得分比例並無改變，但一直維持在約 63%與 37%〈或 62%與 38%〉之間；真實分數不但沒有縮近，反而有越拉越遠的趨勢。





四、在解決問題四的過程中，我們發現當題庫的數字越小時，魔鬼仍然贏不了天使，兩者間的分數差並無呈現比例的遞減。



陸、討論

經過之前的研究，我們發現了一項結果，這個遊戲的設計對天使是有利的，因此無論題庫裡的數字如何增加或減少，如何精心挑選題庫裡的數字，天使還是可以輕鬆獲得勝利，因此，我們決定要改變這樣的遊戲方式，讓魔鬼也有獲勝的機會。

一、以下是我們設計的遊戲方法：

- 〈一〉天使選一數字，其數字的因數全歸屬於魔鬼。
- 〈二〉魔鬼選一數字，其數字的因數全歸屬於天使。
- 〈三〉仍由天使開始，但為求公平起見，最後由魔鬼挑選數字結束。〈先下手的人仍是佔有先天獲勝優勢〉

〈四〉如果剩下數字都已無可用因數，則比賽結束；但如此時天使比魔鬼多玩一次，則魔鬼可再多挑選一次數字。

〈五〉最後累加總數多的人可以獲得勝利。

二、我們將這個遊戲設計成遊戲盤的方式，方便重複遊玩及快速計算結果。

〈一〉遊戲題庫：挑選 1—36 的數字當題庫，理由是希望題庫裡的最大質數〈31〉與最大數〈36〉相差盡量大一些，讓天使不要贏得太輕鬆。

〈二〉準備一個 36 格的保麗龍遊戲盤，並標註每一格的數字。

〈三〉在每一格數字盤裡置放相對應多的玩具零錢。

〈四〉天使和魔鬼各準備一個零錢整理盒，方便快速計算。

〈五〉每抽選一個數字，就將格子裡的玩具零錢置放在己方的零錢整理盒裡，可以幫助快速計算總和。

三、我們想找出提高這個創新遊戲獲勝機會的步驟，分析如下：

〈一〉分析數字與其因數總和如下表：

數字	因 數								目前因數總和	數字—因數總和
36	1	2	3	4	6	9	12	18	55	-19
35	1	5	7						13	+22
34	1	2	17						20	+14
33	1	3	11						15	+18
32	1	2	4	8	16				31	+1
31	1								1	+30
30	1	2	3	5	6	10	15		42	-12
29	1								1	+28
28	1	2	4	7	14				28	0
27	1	3	9						13	+14
26	1	2	13						16	+10
25	1	5							6	+19
24	1	2	3	4	6	8	12		36	-12
23	1								1	+22
22	1	2	11						14	+8
21	1	3	7						11	+10
20	1	2	4	5	10				22	-2
19	1								1	+18
18	1	2	3	6	9				21	-3
17	1								1	+16
16	1	2	4	8					15	+1
15	1	3	5						9	+6
14	1	2	7						10	+4
13	1								1	+12
12	1	2	3	4	6				16	-4

- 1.根據上表分析，不論先攻或後攻，第一輪最佳挑選數字應為 31 及 35。
- 2.會一併被捨棄的數字有 19、23、25、29，其他質數雖已無因數，但可被其他數字使用，尚不能刪除。
- 3.剩餘數字題庫有：

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
註：紅色表示已經不能被使用。								

〈二〉分析剩餘數字與其因數總和如下表：

數字	因 數							目前因數總和	數字—因數總和
	2	3	4	6	9	12	18		
36	2	3	4	6	9	12	18	54	-18
34	2	17						19	+15
33	3	11						14	+19
32	2	4	8	16				30	+2
30	2	3	6	10	15			36	-6
28	2	4	14					20	+8
27	3	9						12	+15
26	2	13						15	+11
24	2	3	4	6	8	12		35	-11
22	2	11						13	+9
21	3							3	+18
20	2	4	10					16	+4
18	2	3	6	9				20	-2
16	2	4	8					14	+2
15	3							3	+12
14	2							2	+12
12	2	3	4	6				15	-3

- 1.根據上表分析，選取 33 可與對手拉開差距，而且當 33 被選取後，22 的因數只剩 2，可以領先對手 20 分，因此不論先攻或後攻，第二輪建議挑選數字為 33 及 22。
- 2.會一併被捨棄的數字有 21。
- 3.剩餘數字題庫有：

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
註：紅色表示已經不能被使用。								

〈三〉分析剩餘數字與其因數總和如下表：

數字	因 數					目前因數總和	數字—因數總和
36	4	6	9	12	18	49	-13
34	17					17	+17
32	4	8	16			28	+4
30	6	10	15			31	-1
28	4	14				18	+10
27	9					9	+18
26	13					13	+13
24	4	6	8	12		30	-6
20	4	10				14	+6
18	6	9				15	+3
16	4	8				12	+4
12	4	6				10	+2

1. 根據上表分析，不論先攻或後攻，第三輪建議挑選數字 27、34、26。
2. 剩餘數字題庫有：

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
註：紅色表示已經不能被使用。								

〈四〉分析剩餘數字與其因數總和如下表：

數字	因 數					目前因數總和	數字—因數總和
36	4	6	12	18		40	-4
32	4	8	16			28	+4
30	6	10	15			31	-1
28	4	14				18	+10
24	4	6	8	12		30	-6
20	4	10				14	+6
18	6					6	+12
16	4	8				12	+4
12	4	6				10	+2

1. 根據上表，原本應挑選 18 為最有利，但考量到一旦 18 被取走，對手可能會立刻選取 36，因此我們放棄選取 18。
2. 下一步驟，我們建議挑選 28 為最有利。
3. 剩餘數字題庫有：

6	8	10	12	15	16	18	20	24
30	32	36						

〈五〉分析剩餘數字與其因數總和如下表：

數字	因 數			目前因數總和	數字—因數總和
36	6	12	18	36	0
32	8	16		24	+8
30	6	10	15	31	-1
24	6	8	12	26	-2
20	10			10	+10
18	6			6	+12
16	8			8	+8
12	6			6	+6

1. 遊戲進行至此，會因對手挑選數字不同，剩餘數字也會不同，因此我們只能列出到目前為止的最佳挑選數字順序如下：31、35、33、22、27、34、26、28。
2. 不論此時輪到先攻者或後攻者，且不管剩餘數字為何，接下來挑選數字的順序，我們提出一些必須掌握的大原則如下：
 - 〈1〉 盡量挑選數字大，但其因數不與其他剩餘數字共有的數。
 - 〈2〉 想辦法讓對手挑選完數字後，剩餘數字不能再被挑選，而遊戲結束。
 〈擔任先攻者是要避免後攻者多最後一次機會可挑選任一數字；相對的，擔任後攻者是期待可以任挑一數字做為結束。〉

四、我們拿著自製的遊戲盤去找同學及老師們挑戰，由我們擔任較為不利的魔鬼，以下是各場挑戰的結果：

參賽者	作者一	作者二	作者三	作者四	作者五
勝利	同學：7人 成人：1人	同學：7人 成人：2人	同學：7人 成人：2人	同學：6人 成人：2人	同學：6人 成人：1人
敗戰	同學：0人 成人：0人	同學：0人 成人：0人	同學：0人 成人：0人	同學：0人 成人：0人	同學：0人 成人：0人

柒、結論

在開始玩這個遊戲時，我們偶爾還會輸給魔鬼，後來，玩出心得了，每玩必贏！而且慢慢發覺挑選數字的步驟重複性很高、順序也很一致，所以我們討論出一個固定的步驟，仔細的跟著步驟思索，不但輕鬆獲得勝利，還可以挑戰得到這個遊戲的最高分。

接著我們不斷的擴展遊戲的數字數量，期望能得到不一樣的戰局，結果發現天使與魔鬼的分數不但無法逆轉結果，反而相差越來越多，是因為這個遊戲的條件本來就是有利於天使，天使可以拿走大半的大數，而魔鬼都只能選小數。因此，我們思索著改造這個遊戲，讓天使與魔鬼的差距可以接近。

我們討論出新的遊戲規則，並做了一個遊戲盤，可以不需要使用電腦，就可以玩這個因數與倍數的遊戲。在這個新的遊戲規則裡，天使和魔鬼改成輪流挑選數字，因此魔鬼不再是被動的、一面挨打的狀況；在新的遊戲規則裡，天使需要好好的思考，才能贏得勝利；魔鬼如能沉著應對，也有不小的獲勝機會。我們也對自創的遊戲規則，找出一套步驟及原則，可

以大幅提高獲勝的機率。我們自創的遊戲，就像是一種新的動腦遊戲，對戰雙方都得絞盡腦汁，提高不少遊戲趣味，並且，紮紮實實的在遊戲中練習了因數、倍數關係，這是此趟科展研究最大的獲益！

在未來，我們可以繼續探討的問題是：為何數字題庫的數字每增加 10 個，天使的最高分與魔鬼的最低分比例都是 63%與 37%〈或 62%與 38%〉？當數字題庫再被大量增加時，是否依舊維持這樣的比例？

捌、參考資料

●亞卓市遊戲學堂 <http://corp.educities.edu.tw/uc520/game/3ml10004/default.htm>

玖、成果照片



大家一起討論打敗惡魔、得到高分的秘訣！



討論完畢，各自努力寫出自己的步驟，看看誰能得到最高分！



這是準備好的遊戲盤及使用到的工具！



將代幣放好位置，就可以開始找人挑戰囉！



先由我們自己對戰，看看惡魔是否能勝得過天使！



選走的號碼牌必須抽走，並且得到相對應的代幣，方便最後數總分！



不管我們擔任天使或是魔鬼，照樣輕鬆擊敗各班的好手喔！



多找一些朋友一起挑戰遊戲，遊戲盤只有一個，其他人也可以使用紙張代替紀錄喔！



六年級老師對因數與倍數課程很熟悉，所以請老師和我們對戰，看看鹿死誰手！



雖然老師很熟悉因數與倍數，但是我們在經驗豐富情況下，還是可以擊敗擔任天使角色的老師！

【評語】 080414

本研究針對「天使與魔鬼」的遊戲，探討如何獲取勝利。依據「剩兩個因素」、「剩三個因素」以及「剩多個因素」等三類，逐步進行分析，並善用推理來回推敲尋求致勝策略。整體而言，探討過程尚稱完善。但基於相較之下，還需繼續加油！