中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

佳作

080413

大方塊中的小方塊

學校名稱：臺北市私立復興實驗高級中學

作者：	指導老師：
小六 邱彤安	張　慎
小六 李依軒	陳俊佑
小六 翁彤葳	
小六 劉黎君	

關鍵詞：重疊二倍法、簡單二倍法、四角切割法

作品名稱：大方塊中的小方塊

摘要

我們研究的是一個有段歷史的題目：「柏金斯太太的被單」。其定義為：

如何將邊長為正整數的正方形切割成「最少個數」（最小階）的小正方形；而且這些小正方形的邊長也是正整數，相同邊長的小正方形可以重複，但小正方形的邊長的最大公因數需為 1。我們歸納出，重複利用「簡單二倍法」及「重疊二倍法」，可以每次加兩階或是加三階的方式增加，反覆構作可以切割邊長 120 以內的正方形，都不超過 19 階。

壹、 研究動機與背景

我們在學校的數學專題欣賞的課程中，老師介紹了「完美正方形」的發展過程與故事，並且告訴我們邊長為 112 的正方形構作出最小的階數為 21。這引發了我們一個想法：如果不限制小正方形皆需不同邊長；那麼邊長為 112 的正方形最少可以切割為幾個正方形呢？所以經由老師指導，我們上網查詢相關資料，發現關於「完美正方形」尚有一個未完全解出的原始命題：「柏金斯太太的被單」正是符合我們想問的問題。

雖然老師也告訴我們，美國學者 Ed Pegg Jr.與 Lance Gay, Erich Friedman, Richard Guy, Bouwkamp, Duijvestijn and Antony Boucher 已經有許多的研究成果，但我們只看到切割完的結果，並沒有提到是如何找到這些切割法。老師說也許是電腦算的也說不定，因此我們很想知道是否有人可以構造出來的方法，加上這個問題也跟我們五、六年級所學的公因數、公倍數，比與比值、放大縮小，對稱圖形等都有關，因此我們在老師的指導下研究這個問題。

貳、 研究目的

我們主要是重做「柏金斯太太的被單」的問題，也就是如何將邊長為正整數 m 的正方形切割成「最少個數」的正方形，而且這些小正方形的邊長也是正整數，相同邊長的小正方形可重複，但小正方形的邊長的最大公因數必需為 1。小正方形的個數稱為原大正方形的階數。

我們希望能用小學生能完成的方法，完整做出邊長 120 以內，切割成不超過 19 個小正方形。並且歸納出一種較有系統的方法，可以說明如何完成這些這方形的切割。

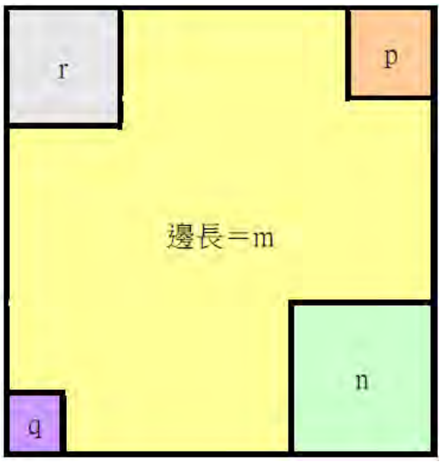
參、 文獻探討

我們先查國內的部份，並未搜尋到任何相關資料，只好搜尋外國的資料，就看到這個問題的歷史及一些結果。

1907 年美國學者 Gardner 首次發表：「給一個面積為 169 的正方形被單，如果能切割成小正方形；問最少能切割成幾個小正方形？」這個解答由 Sam Loyd 給出了唯一解；它可以切割成 11 個邊長分別是 1，1，2，2，2，3，3，4，6，6，7 的小正方形。接著在 1917 年由美國學者 Henry Dudeney 把這個問題蒐錄進由他出版的數學遊戲一書中的第 173 題；並且將此問題命名為柏金斯太太的被單。後來這個問題被推廣為：「給任意整數邊長的正方形，問其能切割成最少個數整數邊長的小正方形是多少個？」到了 1964 年英國劍橋學者 Conway 給出了這個問題許多結果與猜測。到現在，仍有許多人寫了不同的程式，經由電腦跑出各種不一樣的切割方法，但沒有看到人分析切割方法。

肆、 研究過程與結果

我們先利用窮舉法做出邊長 13 以內(後來又補做到邊長 23 以內)所有可能的切割方式，再歸納看是不是有關聯的地方。這些邊長的階數我們整理如表一。在這過程中，我們有了兩個重要的發現。介紹這兩個發現之前，我們先對一些常用的符號做一些約定：假設某一個邊長為 m 的正方形可以被切割成 k 個小正方形，我們將其稱為 *k* 階正方形。並假設其四個角落分別為邊長正整數 n、p、q、r 的小正方形如(圖)4- 1-1 所示。



(圖) 4-1-1

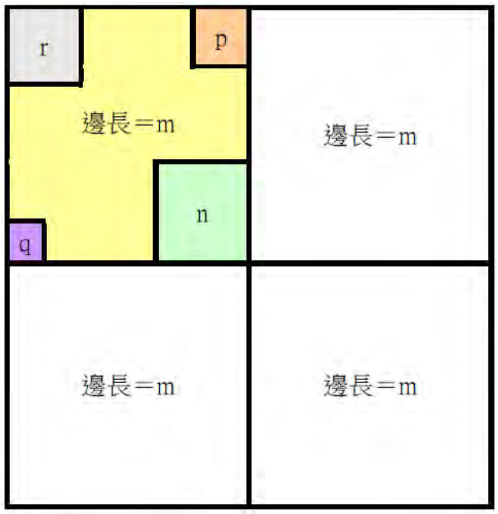
【表一】

邊長	1	2	3	4	5	6，7	8，9	10~13	14~17	18~23
階數	1	4	6	7	8	9	10	11	12	13

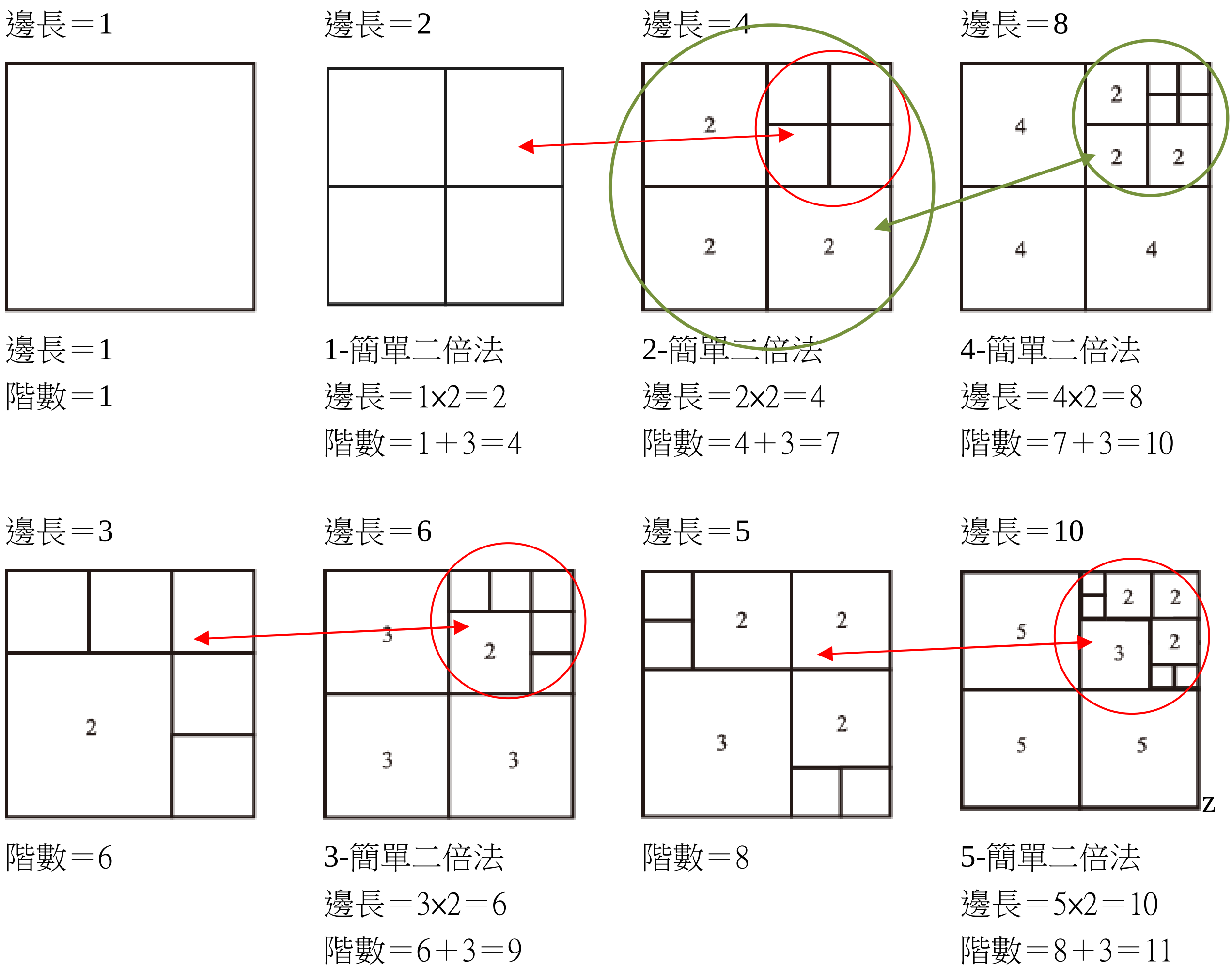
一、 切割方法的發現

(一) 簡單二倍法

從邊長 1、邊長 2、邊長 4 到邊長 8 的正方形的切割，或是比較邊長 3 與邊長 6 的正方形的切割，以及邊長 5 與邊長 10 正方形的切割，都很容易發現，當邊長是偶數 $2m$ 時，如果先做一個十字切割，切出四個邊長為 m 的正方形，再將切其中一個邊長為 m 的正方形做切割。反過來說，如果邊長為 m 的正方形的的階數是 k，在旁邊補上三個邊長 m 的正方形，就知道邊長 $2m$ 的正方形階數不超過 $k+3$。這個方法我們稱為 $m-$簡單二倍法，或簡稱簡單二倍法。如(圖)4-1-2 所示。



(圖)4-1-2

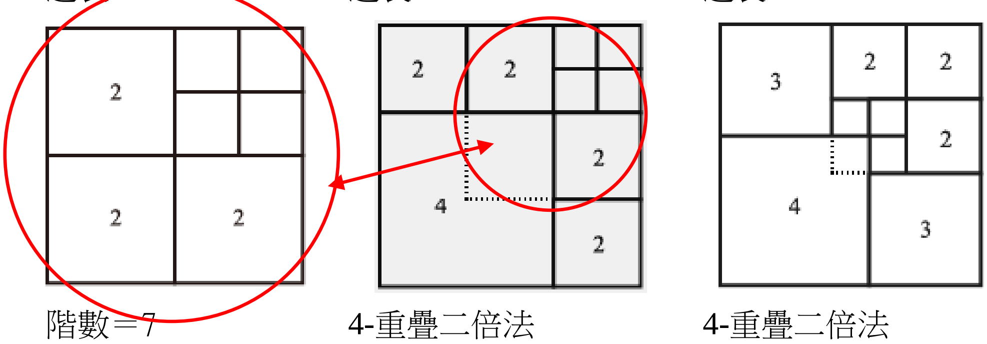


若一直使用這個方法擴張，可以推得：一正方形的邊長$n=2^r\times k$，其中k是正奇數、r是正整數，其最小階數會等於邊長k的正方形的最小階數加$3r$。這個推論在邊長 6 推到邊長 12 時就出現錯誤。因此我們又仔細的看更多例子，也有第二個發現。

(二) 重疊二倍法

我們從邊長 6 與邊長 7 的正方形的 9 階切割中，都發現邊長 4 正方形的 7 階切割的影子；在邊長 8 的正方形的 10 階切割中，也發現發現邊長 5 正方形的 8 階切割的影子。

邊長＝4　邊長＝6　邊長＝7

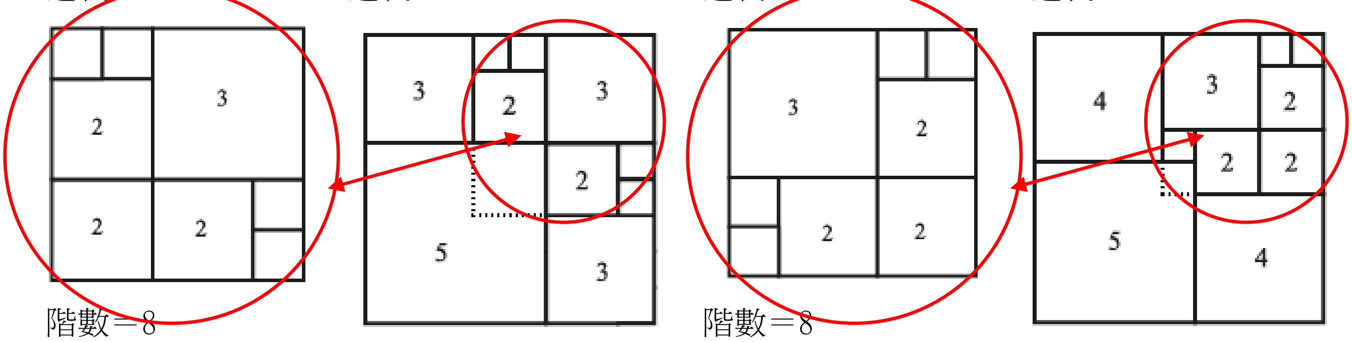


階數＝7

4-重疊二倍法
邊長＝4x2－2＝6
階數＝7＋2＝9

4-重疊二倍法
邊長＝4x2－1＝7
階數＝7＋2＝9

邊長＝5　邊長＝8　邊長＝5　邊長＝9



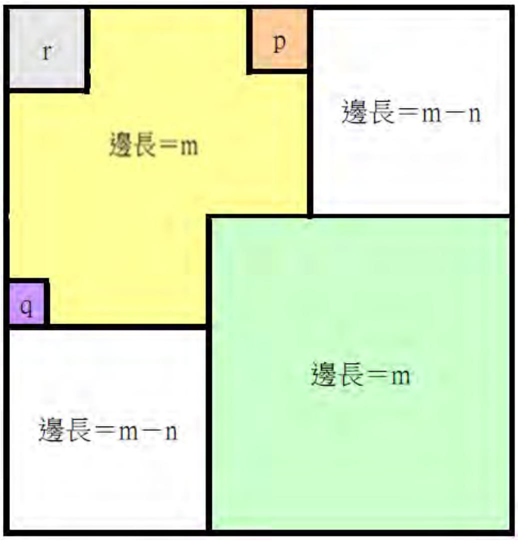
階數＝8

邊長＝5x2－2＝8
階數＝8＋2＝10

階數＝8

5-重疊二倍法
邊長＝5x2－1＝9
階數＝8＋2＝10

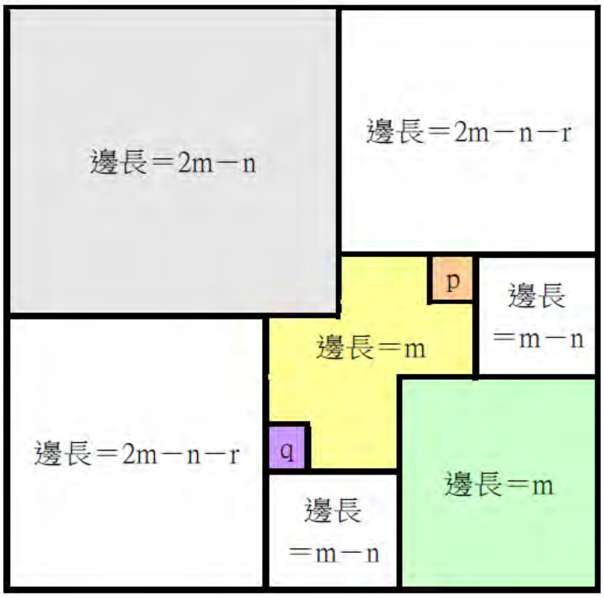
設原邊長m的正方形為k階，將正方形將某一角邊長為n正方形擴大成為邊長為m的正方形，進而把凸出的邊補上兩個邊長為$m-n$的正方形，可以得到邊長$2m-n$的$k+2$階的切割，如(圖)4-1-3所示。我們稱這樣的方法為$m-$重疊二倍法，或簡稱重疊二倍法。當找到這兩個方法之後，不難發現，很多的切割，就是重覆利用這兩種方法而已。介紹如下。



(圖) 4-1-3

兩次「重疊二倍法」

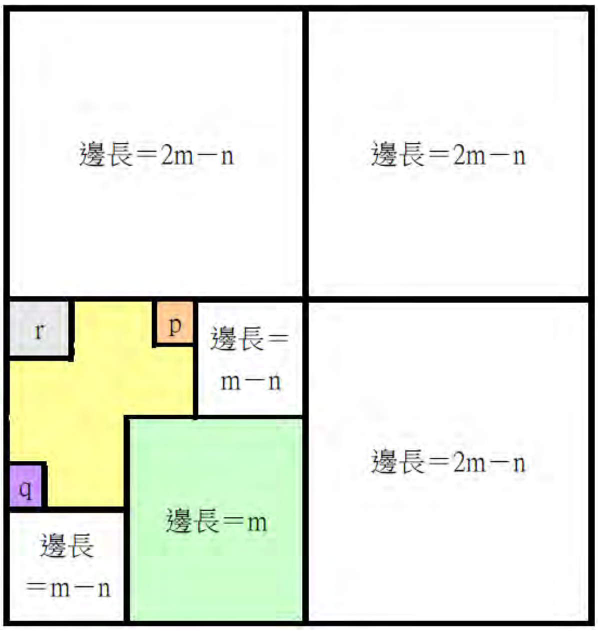
將右下角（或其餘角落皆可）的邊長n的正方形先擴大邊長為m的正方形；得到一個邊長為$2m-n$的正方形，接著再選一角，例如邊長 r 的小正方形擴大成為邊長為$2m-n$的正方形，補齊成後可得一個如(圖) 4-1-4 所示，皆數為$k+4$、邊長為$2\times(2m-n)-4=4m-2n-r$的正方形。



(圖)4-1-4

先「重疊」再「簡單二倍法」

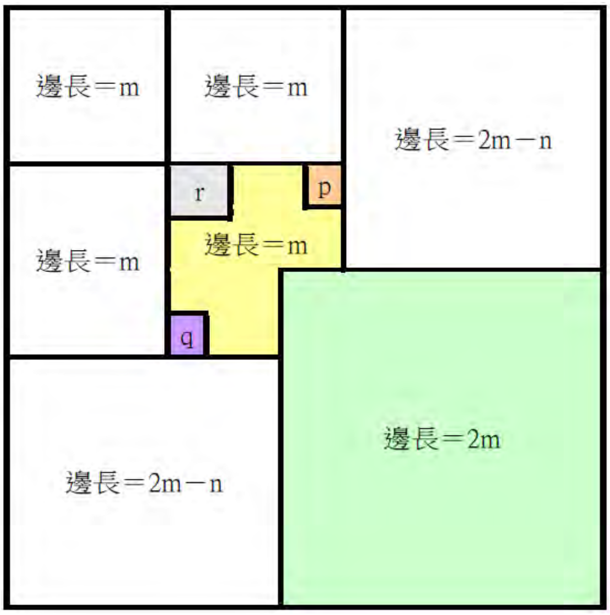
如(圖) 4-1-55，將右下角（或其餘角落皆可）的邊長為n的正方形先擴大邊長為 m 的正方形；擴大成為一個邊長為$2m-n$的正方形，接著補三個邊長為$2m-n$的正方形，就可以得到邊長$2\times(2m-n)=4m-2n$，階數為$k+5$的正方形。



(圖) 4-1-5

(三) 先「簡單」再「重疊二倍法」

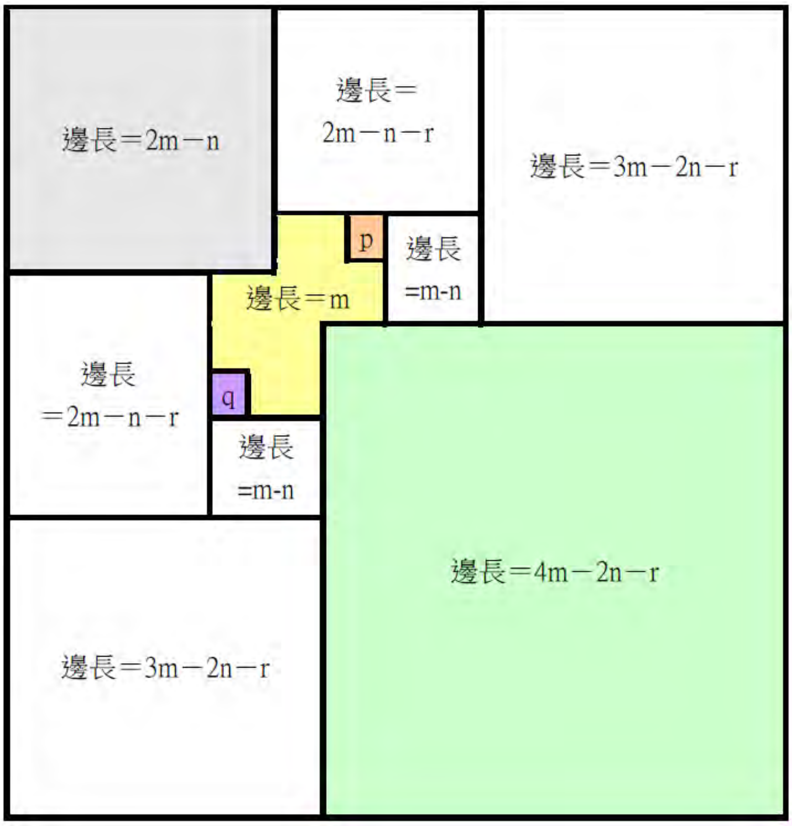
在邊長 m 階數為 k 的正方形邊的左、上、左上補上三個邊長 m 的正方形，擴大成為一個邊長為 2m 的正方形，再將邊長 $2m$ 正方形其右下角邊長 n 正方形先擴大為邊長 $2m$ 的正方形，然後補上兩個邊長 $2m-n$ 的正方形，得到一個邊長為 $4m-n$ ，階數為 $k+5$ 的正方形。如(圖) 4-1-6 所示。



(圖)4-1-6

(四) 三次「重疊二倍法」

以(圖)4-1-7 為例，將右下角（或其餘角落皆可）的正方形先擴大邊長為 m 的正方形；擴大成為一個邊長為 2m－n 的正方形，接著再將對角邊長為 r 的小正方形擴大成為邊長為 2m－n 的正方形；擴大為邊長為 4m－2n－r 的正方形。最後再將右下角邊長為 m 的正方形擴大為邊長為 $4m-2n-r$ 的正方形，把凸出的邊補齊；進而擴大為一個 $k+6$ 階，邊長為 $7m-4n-2r$ 的新正方形。三次所選的正方形所在的角落可以任意，因此最後大正方形的邊長有很多可能。

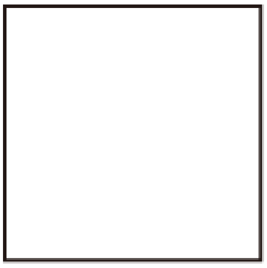


(圖)4-1-7

二、 我們以「重疊二倍法」與「簡單二倍法」為基礎，重新檢視我們之前窮舉得到的結果。

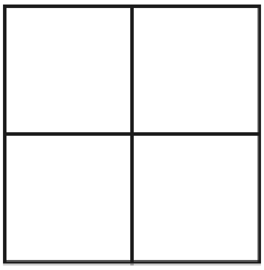
首先檢驗邊長 1~13 的正方形的切割，整理後其作圖如下面所展示。

邊長＝1



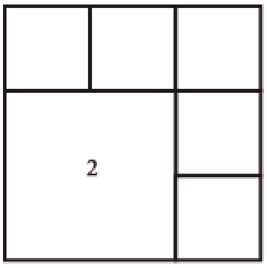
邊長＝1
階數＝1

邊長= 2



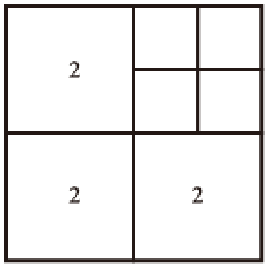
1-簡單二倍法
邊長＝1x2＝2
階數＝1＋3＝4

邊長＝3



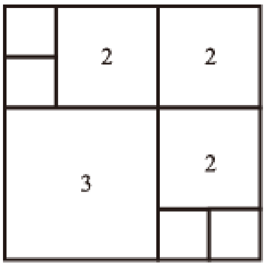
2-重疊二倍法
邊長＝2x2－1＝3
階數＝4＋2＝6

邊長＝4



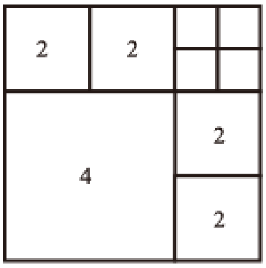
2-簡單二倍法
邊長＝2x2＝4
階數＝4＋3＝7

邊長＝5



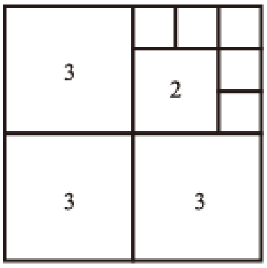
3-重疊二倍法
邊長＝3x2－1＝5
階數＝6＋2＝8

邊長＝6



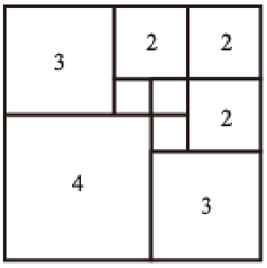
4-重疊二倍法
邊長＝4x2－2＝6
階數＝7＋2＝9

邊長＝6



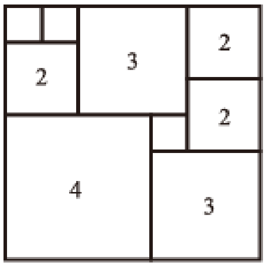
3-簡單二倍法
邊長＝3x2＝6
階數＝6＋3＝9

邊長＝7

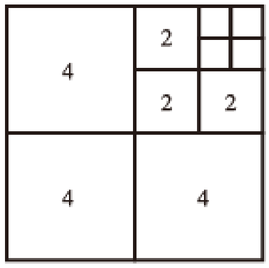


4-重疊二倍法
邊長＝4x2－1＝7
階數＝7＋2＝9

邊長 7

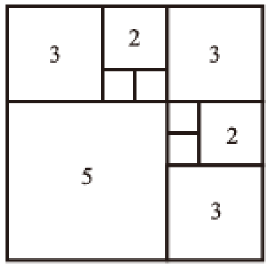


邊長＝8



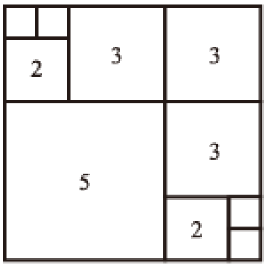
4-簡單二倍法
邊長＝4x2＝8
階數＝7＋3＝10

邊長＝8

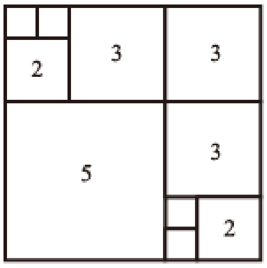


5-重疊二倍法
邊長＝5x2－2＝8
階數＝8＋2＝10

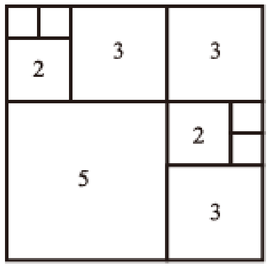
邊長 8



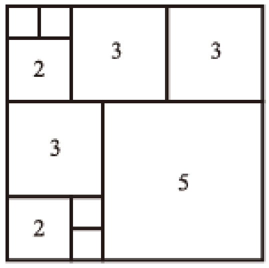
邊長 8



邊長 8

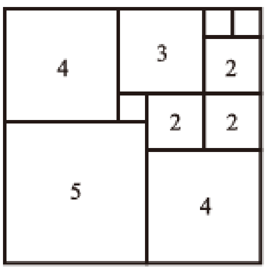


邊長 8

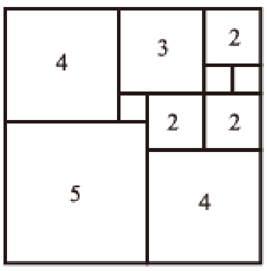


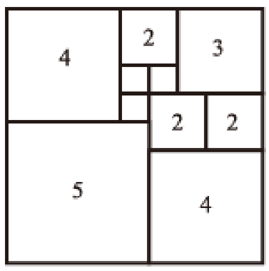
這邊列出邊長 8 的幾種切割，不難看出來，只是局部做旋轉，或對稱。這些很類似又不太相同的圖的確使有用圖的，這樣可以讓不同邊長的正方形落在角落。如下圖，階數 10 邊長 9 的正方形，因為角落的正方形邊長是1～5都出現過，因此利用重疊兩倍法可以擴張得到階數為 12 且邊長為13～17的正方形

邊長＝9



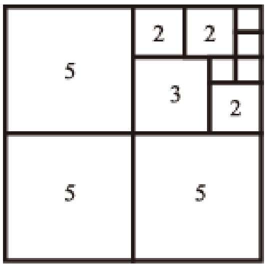
5-重疊二倍法
邊長＝5x2－1＝9
階數＝8＋2＝10





利用 9-重疊兩倍法
邊長＝9x2－1＝17
邊長＝9x2－2＝16
邊長＝9x2－3＝15
邊長＝9x2－4＝14
邊長＝9x2－5＝13
階數＝10＋2＝12

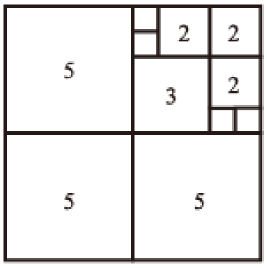
邊長＝10

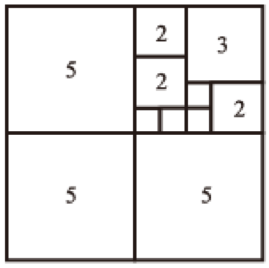


5-簡單二倍法

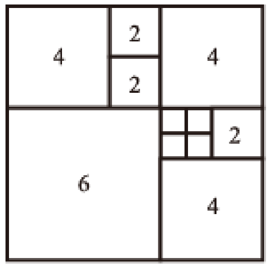
邊長＝5x2＝10

階數＝8＋3＝11





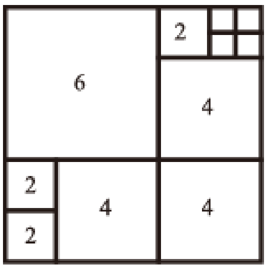
邊長＝10

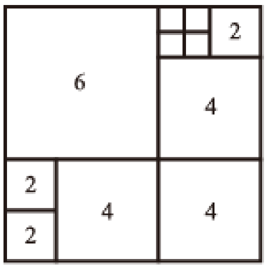


6-重疊二倍法

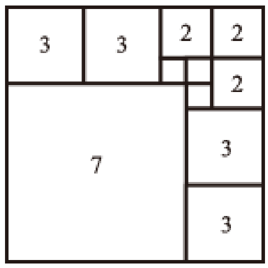
邊長＝6x2－2＝10

階數＝9＋2＝11





邊長＝10

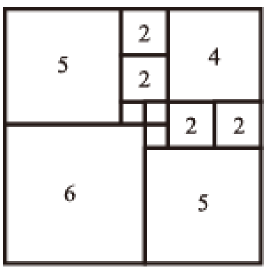


7-二倍重疊法

邊長＝7x2－4＝10

階數＝9＋2＝11

邊長＝11

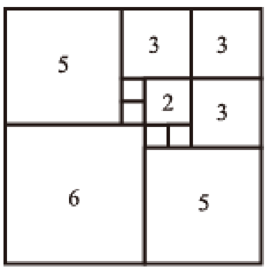


6-重疊二倍法

邊長＝6x2－1＝11

階數＝9＋2＝11

邊長＝11

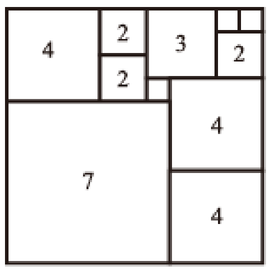


6-重疊二倍法

邊長＝6x2－1＝11

階數＝9＋2＝11

邊長＝11



7-重疊二倍法

邊長＝7x2－3＝11

階數＝9＋2＝11

利用 11-重疊二倍法

邊長＝11x2－1＝21

邊長＝11x2－2＝20

邊長＝11x2－3＝19

邊長＝11x2－4＝18

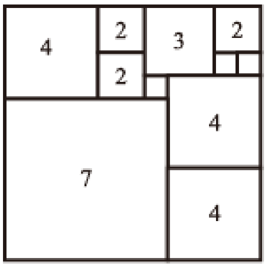
邊長＝11x2－5＝17

邊長＝11x2－6＝16

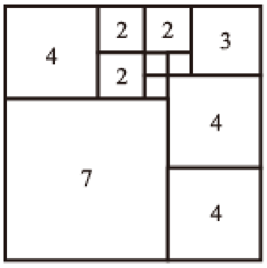
邊長＝11x2－7＝15

階數＝11＋2＝13

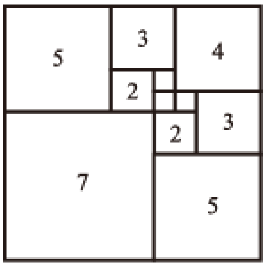
邊長 11



邊長 11

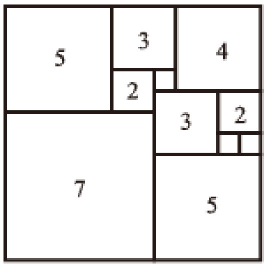


邊長＝12



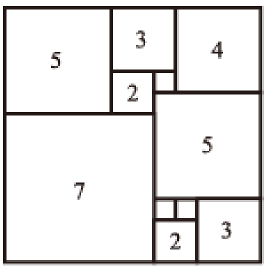
7-重疊二倍法
邊長＝7x2－2＝12
階數＝9＋2＝11

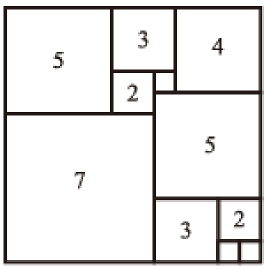
邊長＝12

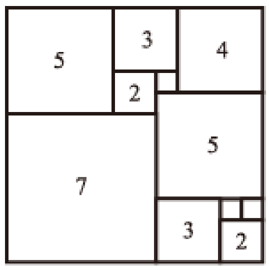


7-重疊二倍法
邊長＝7x2－2＝12
階數＝9＋2＝11

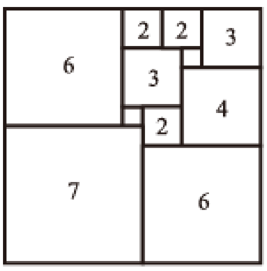
利用 12-重疊二倍法
邊長＝12x2－1＝23
邊長＝12x2－2＝22
邊長＝12x2－3＝21
邊長＝12x2－4＝20
邊長＝12x2－5＝19
邊長＝12x2－7＝15
階數＝11＋2＝13





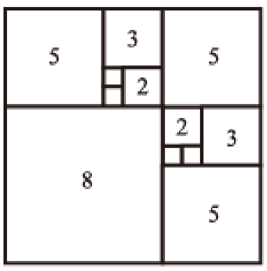


邊長＝13



7-重疊二倍法
邊長＝7x2－1＝13
階數＝9＋2＝11

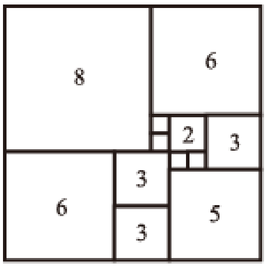
邊長＝13



5-兩次重疊二倍法
邊長＝5x4－2x2－3＝13
階數＝8+4＝12（階數多 1）

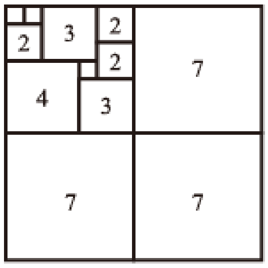
三、 以邊長為 1~13 的「柏金斯太太的被單」為基礎，繼續利用「重疊二倍法」與「簡單二倍法」構作出邊長為 14~23 的「柏金斯太太的被單」的作圖。其構作圖形邊長與階數如下列所示。利用

邊長＝14



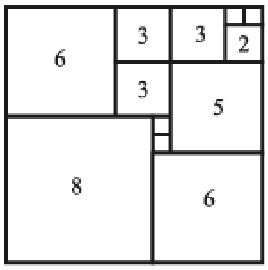
5-四倍重疊法
邊長＝5x4－2x2－2＝14
階數＝8+4＝12

邊長＝14



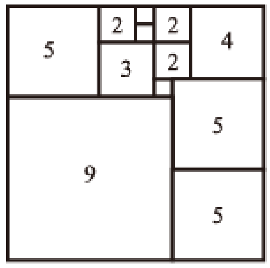
7-簡單二倍法
邊長＝7x2＝14
階數＝9＋3＝12

邊長＝14



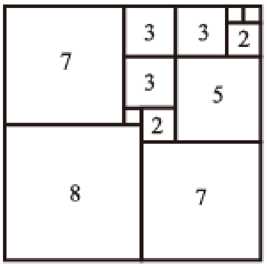
8-重疊二倍法
邊長＝8x2－2＝14
階數＝10＋2＝12

邊長＝14



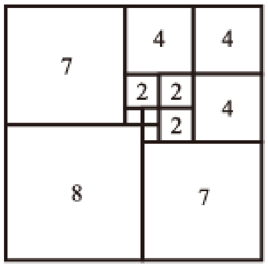
9-重疊二倍法
邊長＝9x2－4＝14
階數＝10＋2＝12

邊長＝15



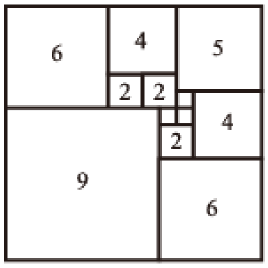
8-重疊二倍法
邊長＝8x2－1＝15
階數＝10＋2＝12

邊長＝15



8-重疊二倍法
邊長＝8x2－1＝15
階數＝10＋2＝12

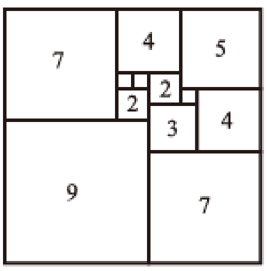
邊長＝15



9-重疊二倍法
邊長＝9x2－3＝15
階數＝10＋2＝12

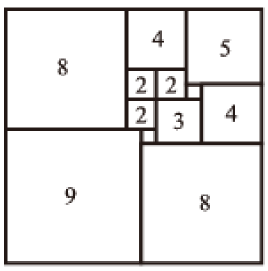
利用 15-重疊二倍法
邊長＝15x2－1＝29
邊長＝15x2－2＝28
邊長＝15x2－3＝27
邊長＝15x2－4＝26
邊長＝15x2－5＝25
邊長＝15x2－6＝24
階數＝12＋2＝14

邊長＝16



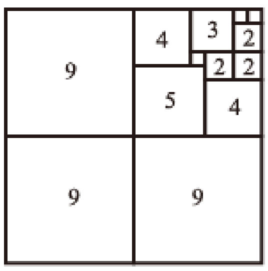
9-重疊二倍法
邊長＝9x2－2＝16
階數＝10＋2＝12

邊長＝17



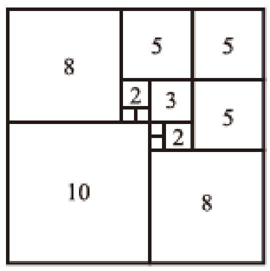
9-重疊二倍法
邊長＝9x2－1＝17
階數＝10＋2＝12

邊長＝18



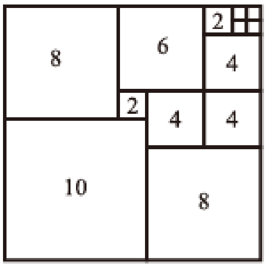
9-簡單二倍法
邊長＝9x2＝18
階數＝10＋3＝13

邊長＝18



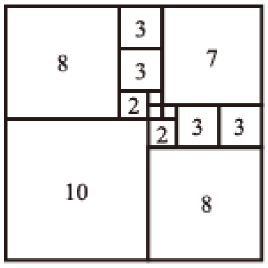
10-重疊二倍法
邊長＝10x2－2＝18
階數＝11＋2＝13

邊長＝18



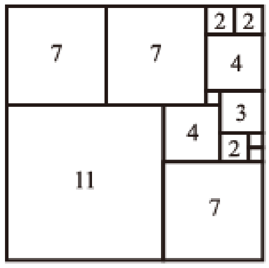
10-重疊二倍法
邊長＝10x2－2＝18
階數＝11＋2＝13

邊長＝18



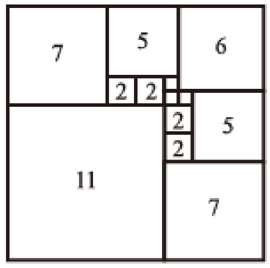
10-重疊二倍法
邊長＝10x2－2＝18
階數＝11＋2＝13

邊長＝18



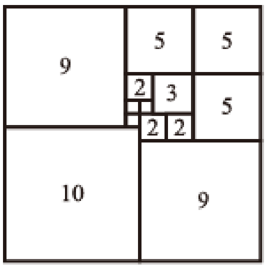
11-重疊二倍法
邊長＝11x2－4＝18
階數＝11＋2＝13

邊長＝18



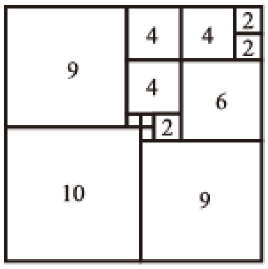
11-重疊二倍法
邊長＝11x2－4＝18
階數＝11＋2＝13

邊長＝19



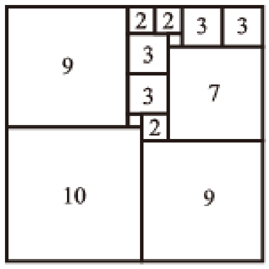
10-重疊二倍法
邊長＝10x2－1＝19
階數＝11＋2＝13

邊長＝19



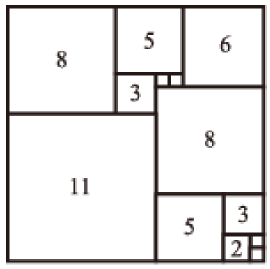
10-重疊二倍法
邊長＝10x2－1＝19
階數＝11＋2＝13

邊長＝19



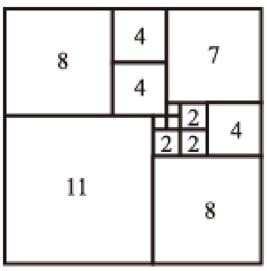
10-重疊二倍法
邊長＝10x2－1＝19
階數＝11＋2＝13

邊長＝19



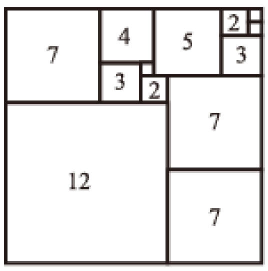
11-重疊二倍法
邊長＝11x2－3＝19
階數＝11＋2＝13

邊長＝19



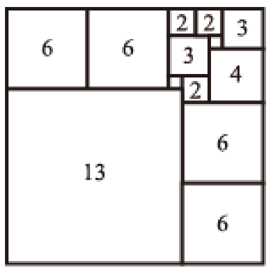
11-重疊二倍法
邊長＝11x2－3＝19
階數＝11＋2＝13

邊長＝19



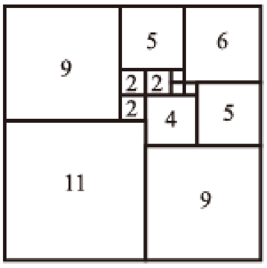
12-重疊二倍法
邊長＝12x2－5＝19
階數＝11＋2＝13

邊長＝19



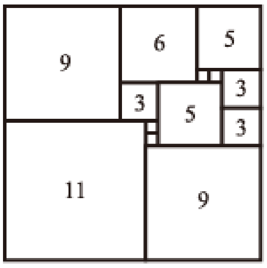
13-重疊二倍法
邊長＝13x2－7＝19
階數＝11＋2＝13

邊長＝20



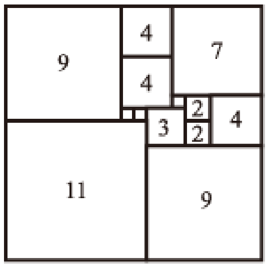
11-重疊二倍法
邊長＝11×2－2＝20
階數＝11＋2＝13

邊長＝20



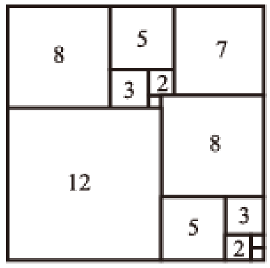
11-重疊二倍法
邊長＝11×2－2＝20
階數＝11＋2＝13

邊長＝20



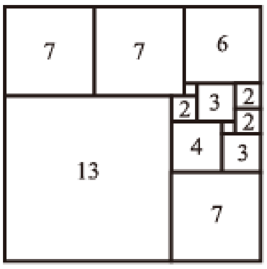
11-重疊二倍法
邊長＝11×2－2＝20
階數＝11＋2＝13

邊長＝20



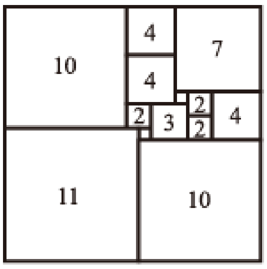
12-重疊二倍法
邊長＝12×2－4＝20
階數＝11＋2＝13

邊長＝20



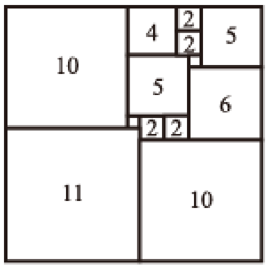
13-重疊二倍法
邊長＝13×2－6＝20
階數＝11＋2＝13

邊長＝21



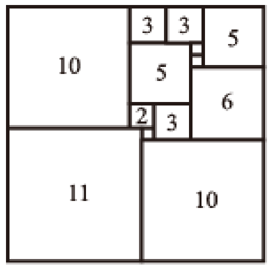
11-重疊二倍法
邊長＝11×2－1＝21
階數＝11＋2＝13

邊長＝21



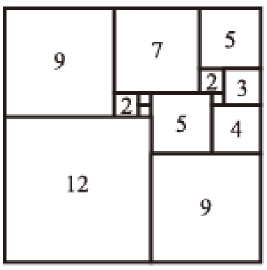
11-重疊二倍法
邊長＝11×2－1＝21
階數＝11＋2＝13

邊長＝21



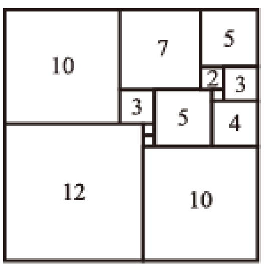
11-重疊二倍法
邊長＝11×2－1＝21
階數＝11＋2＝13

邊長＝21



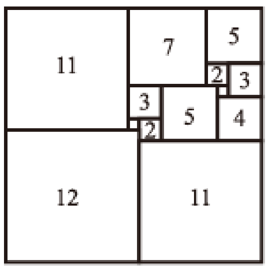
12-重疊二倍法
邊長＝12×2－3＝21
階數＝11＋2＝13

邊長＝22



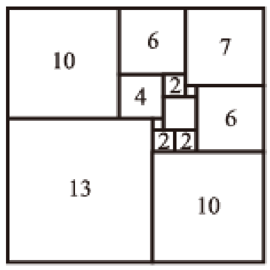
12-重疊二倍法
邊長＝12×2－2＝22
階數＝11＋2＝13

邊長＝23



12-重疊二倍法
邊長＝12×2－1＝23
階數＝11＋2＝13

邊長＝23



13-重疊二倍法
邊長＝13×2－3＝23
階數＝11＋2＝13

四、 繼續以邊長為 14~23 的「柏金斯太太的被單」為基礎，利用兩次「重疊二倍法」與三次重疊法以及先「重疊」再「簡單二倍法」或是先「簡單」再「重疊二倍法」構作出邊長為 24~120 的「柏金斯太太的被單」。其構作圖形邊長與階數如下列所示。

【備註】詳細計算資料見手寫附錄資料。

【表二】

邊長	24~29	30~39，41	40，42~50	51~66，68，70	71~87，89	90~110，112，113，116，117，120
階數	14	15	16	17	18	19

我們把表一與表二的表格統整出 1~19 階的邊長，我們發現大致來說每階的正方形邊長都有連續性。但有少數邊長無法得到！統計表格如下表三：

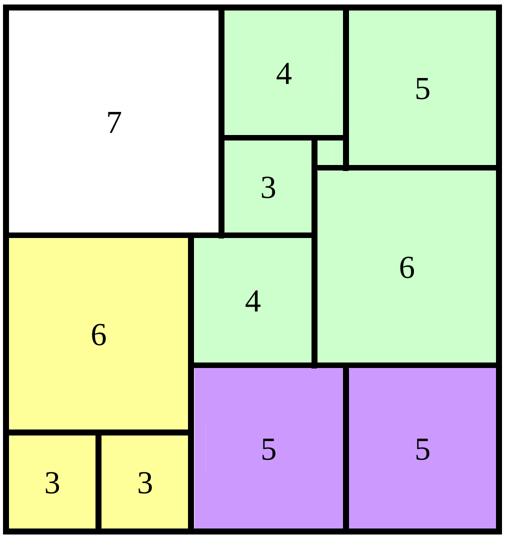
【表三】

階數	邊長	階數	邊長
1	1	**12**	14~17
4	2	**13**	18~23
6	3	**14**	24~29
7	4	**15**	30~39，41
8	5	**16**	40，42~50
9	6，7	**17**	51~66，68，70
10	8，9	**18**	71~87，89
11	10~13	**19**	90~110，112，113，116，117，120

五、 特殊正方形構作

我們除了以上方法做正方形外，另外又找出了幾個特殊的正方形；如下圖所示：

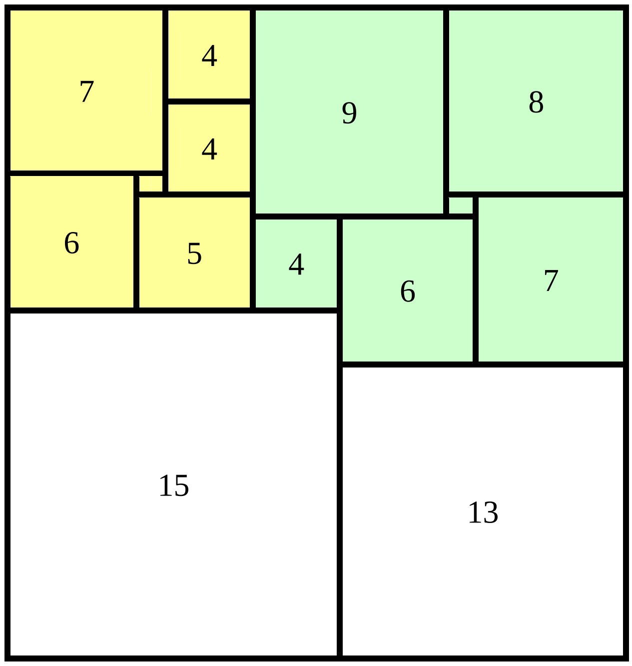
邊長＝16



階數＝12

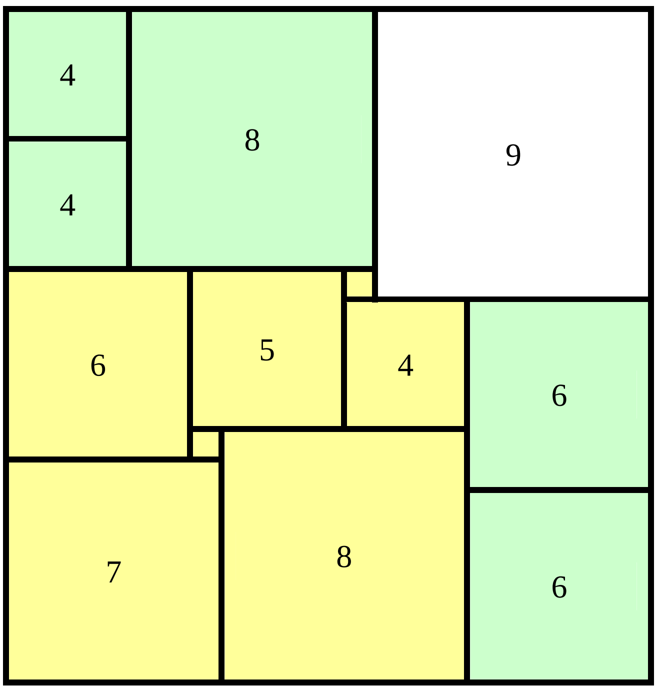
(圖) 4-5-1

邊長＝28。階數＝14



(圖) 4-5-2

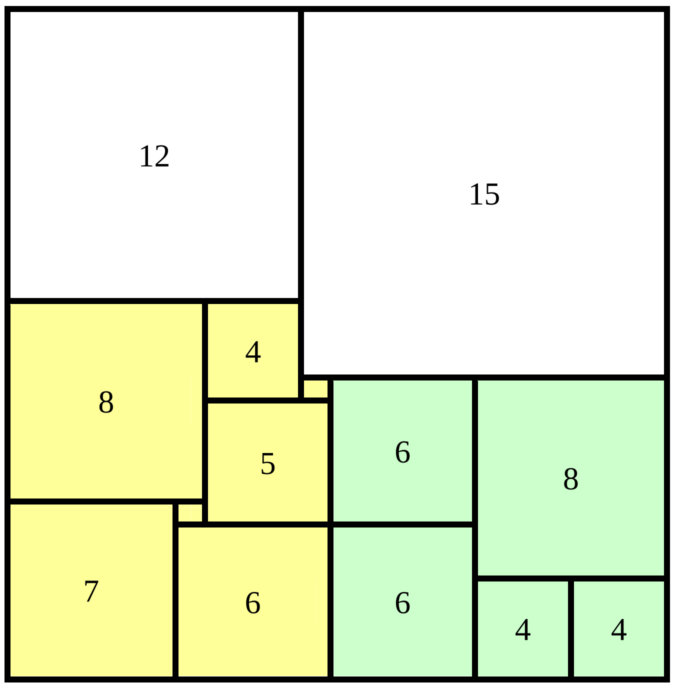
邊長＝21



階數＝13

(圖) 4-5-3

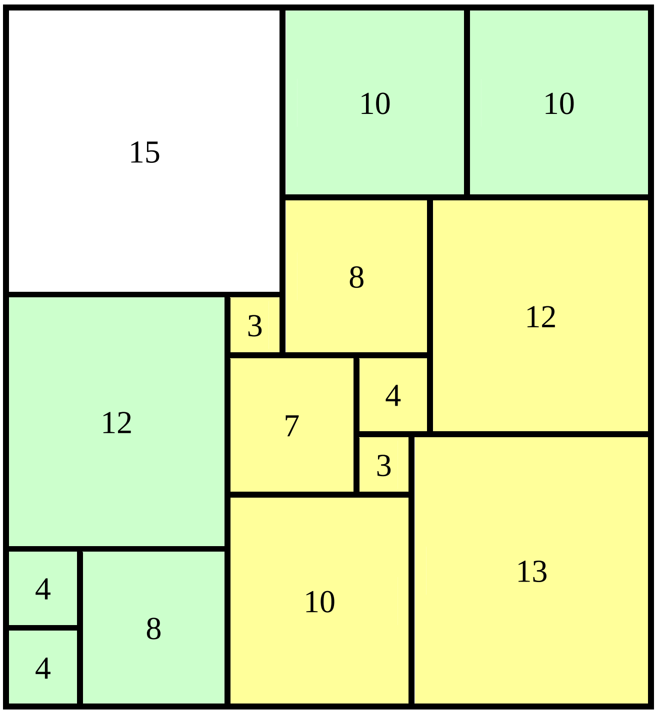
邊長＝27



階數＝14

(圖) 4-5-4

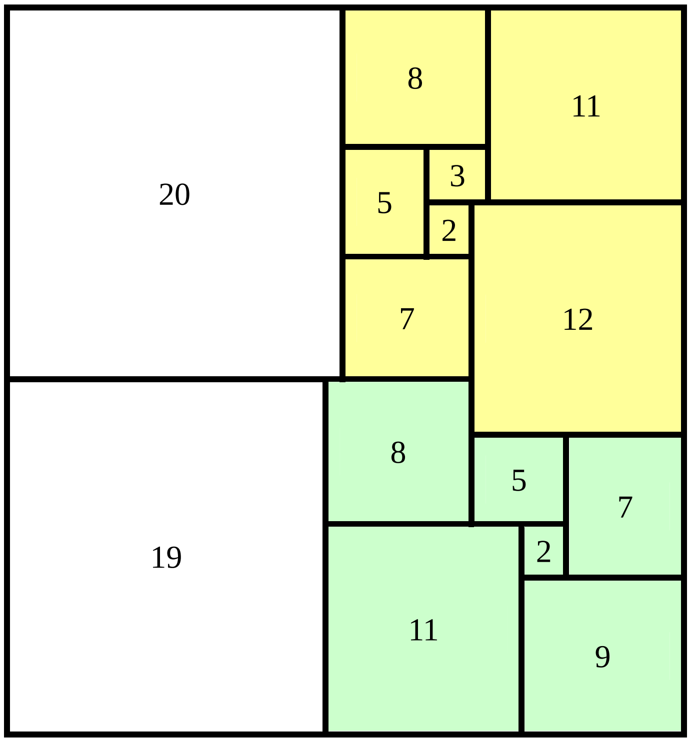
邊長＝35



階數＝15

(圖) 4-5-5

邊長＝39



階數＝15

(圖) 4-5-6

（一）我們用(圖) 4-5-1 邊長為 16 的正方形透過三次「重疊二倍法」可做出邊長為 53 的正方形其階數＝12＋4＝16，和邊長為 90 的正方形且其階數＝15＋4＝19。以下為計算方法：

$(16\times2-3)\times2-5=53$；$[(16\times2-3)\times2-5]\times2-16=90$

（二）我們用(圖) 4-5-2 邊長為 28 的正方形透過兩次「重疊二倍法」可做出邊長為 51，52 和 91 的正方形且其階數＝14＋2＝16 與 14＋4＝18。以下為計算方法：

$28\times2-5=51$；$28\times2-4=52$；$(28\times2-4)\times2-13=91$

（三）我們用(圖) 4-5-3 邊長為 21 的正方形透過三次「重疊二倍法」可做出邊長為 119 的正方形且其階數＝13＋6＝19。以下為計算方法：

$[(21\times2-4)\times2-6]\times2-21=119$

（四）我們用(圖) 4-5-4 邊長為 27 的正方形透過兩次「重疊二倍法」可做出邊長為 88 的正方形且其階數＝14＋4＝18。以下為計算方法：

$(27\times2-4)\times2-12=88$

（五）我們用(圖) 4-5-5 邊長為 35 的正方形透過兩次「重疊二倍法」可做出邊長為 122 的正方形且其階數＝15＋4＝19。以下為計算方法：

（35x2－4）x2－10＝122

（六）我們用(圖) 4-5-6 邊長為 39 的正方形透過「重疊二倍法」可做出邊長為 67 和 69 的正方形且其階數＝15＋2＝17。以下為計算方法：

39x2－11＝67；67x2－19＝115。39x2－9＝69；69x2－20＝118。

（七）統計表格重新修正（紅色字代表新增或是修正），邊長與階數的對應，也與我們查到的資料相同了。

【表四】

階數	邊長	階數	邊長
1	1	12	14~17
4	2	13	18~23
6	3	14	24~29
7	4	15	30~39，41
8	5	16	40，42~50，51，52，53
9	6，7	17	~~51，52，53~~ 54~66，67，68，69，70
10	8，9	18	71~87，88，89，90，91
11	10~13	19	~~90，91~~ 92~110，111，112，113，114，115，116，117，118，119，120，122，126

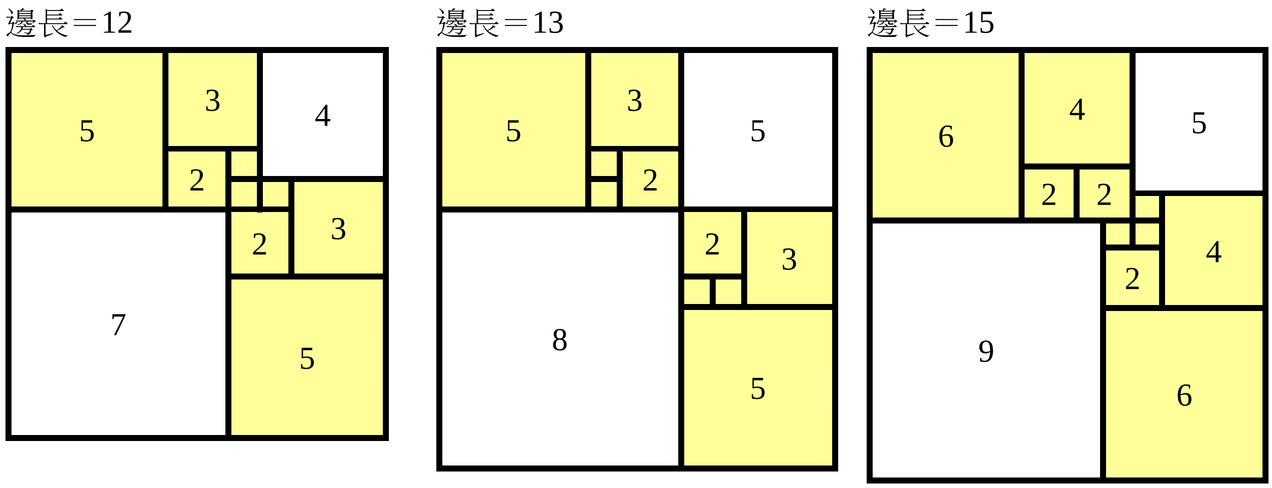
伍、 討論

在上述研究過程中，我們發現有些邊長：(1) 邊長 51，52，53 的正方形；無法以 14 階擴大為 16 階。(2) 邊長 67 與 69 的正方形；無法以 15 階擴大為 17 階。(3) 邊長為 88、90、91 的正方形；無法以 16 階擴大為 18 階。(4) 邊長為 111、114、115、118、119 的正方形；無法以 17 階擴大為 19 階。

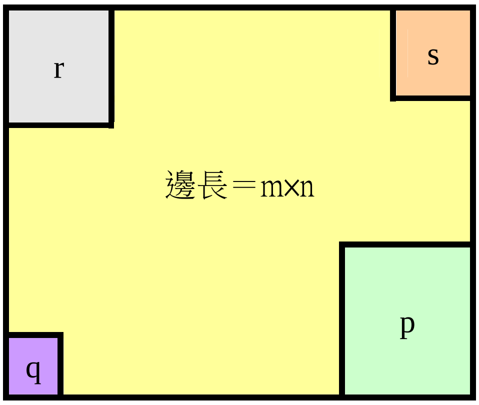
因此我們就回溯至 12~15 階的正方形，以「非二倍擴大法」的方式另行製作，我們嚐試了「四角切割法」製作出一些有用且階數最小的長方形，以垂直相接的「二倍擴大法」製作出邊長為 16、21、27、28、29、33、35、36、39 的特殊正方形由此我們解決了上述的問題；並且意外的發現邊長 122 與 126 亦為 19 階。

一、用長方形構作出正方形

在我們前面所構作的正方形中我們發現，在一個正方形中包含了兩個長方形與三個正方形。如圖所示：



假設某一個邊長為 m×n 的長方形可以被切割成 k 個小正方形，我們將其稱為 k 階長方形。若其四個角落分別為邊長 p、q、r、s 的小正方形如(圖) 5-1-1 所示：



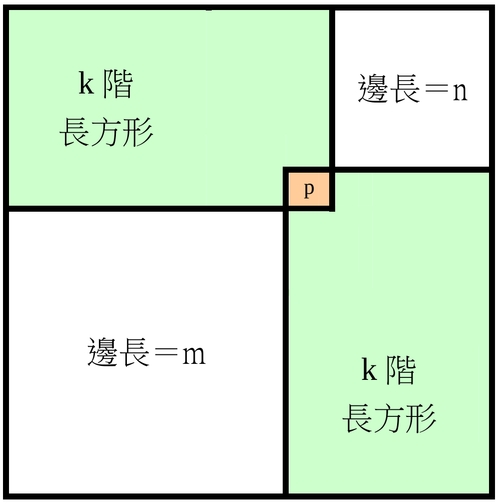
(圖) 5-1-1

（1） 邊長＝m×n

（2） 階數＝k 階（由 k 個小正方形組成）

（3） 四個角落分別為邊長 p、q、r、s 的小正方形所組成

（一）**長方形「重疊二倍法」**

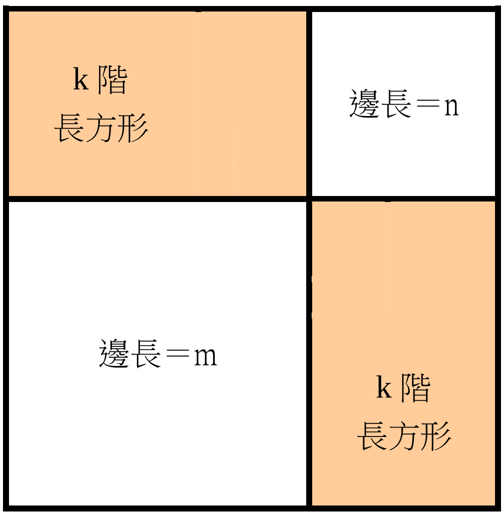


(圖) 5-1-2

（1） 邊長＝m＋n－p

（2） 階數＝2k＋1 階

（二）**長方形「簡單二倍法」**



(圖) 5-1-3

（1） 邊長＝m＋n

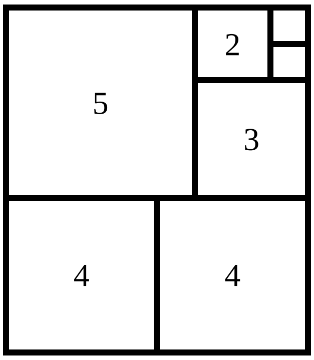
（2） 階數＝2k＋2 階

【附註】因為本篇報告僅只要構作出階數 19 以內的正方形，由以上階數到 2k＋2，因此我們只需要構作階數在 8 以內的長方形。

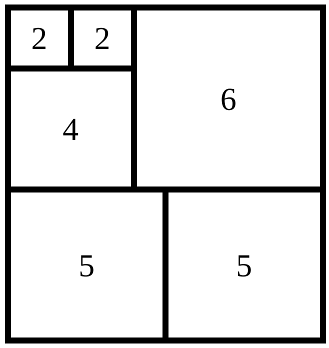
二、以費波納西數列方式構作長方形

費波納西數列為 1，1，2，3，5，8，13，21，………，我們可以構作階數在 8 以內的長方形，我們可以放大其倍數（將數列乘 1~4 倍）。作圖如下所示：

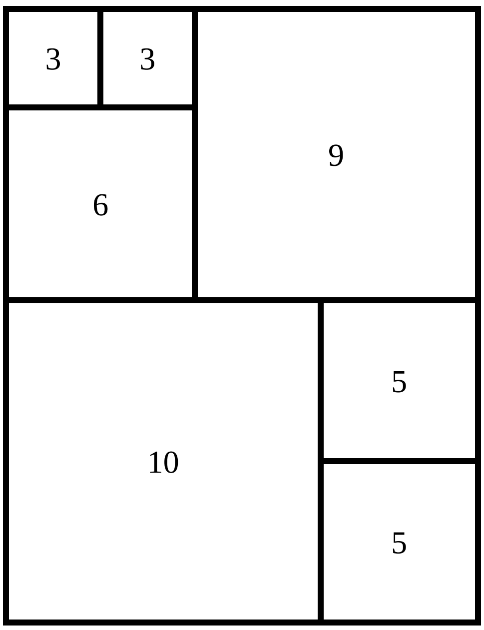
邊長＝8×9。階數＝7



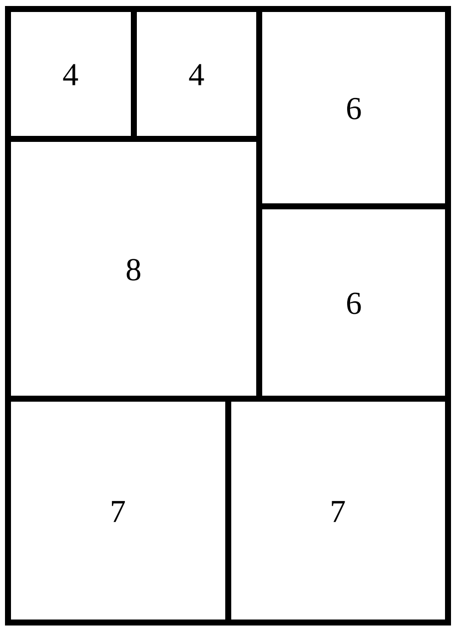
邊長＝10×11。階數＝6



邊長＝15×19。階數＝7



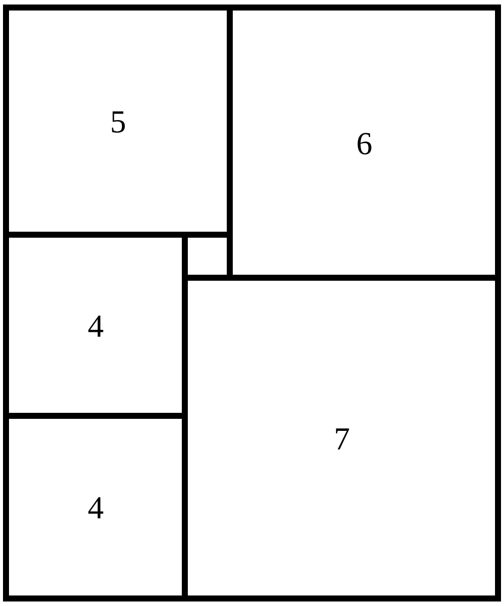
邊長＝14×19。階數＝7



三、以「四角切割法」構作長方形與 L 形

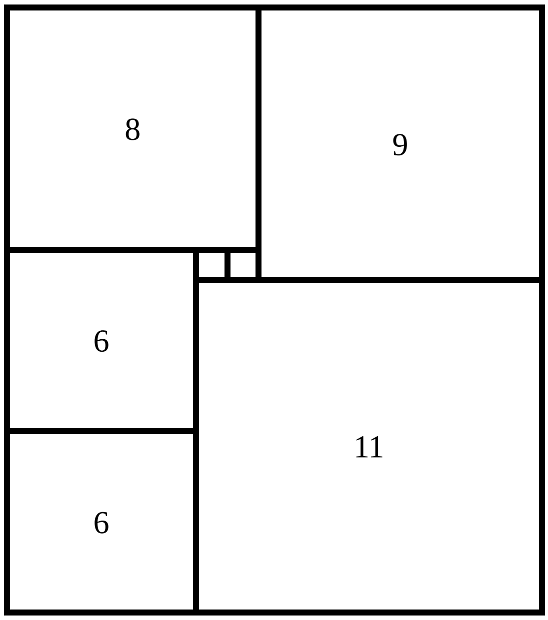
（一）對於兩邊較為接近的長方形來說，如果我們能夠在長方形的四個角落切割出四個邊長適當的正方形，就有可能降低這個長方形的階數。其中這四個角落的正方形邊長應該相當接近，我們把這種方法稱之為「四角切割法」（參考第 46 屆全國中小學科展作品高中組－長方體中切割正方體之研究）我們做出了幾個有用的長方形，如下圖所示：

邊長＝11×13



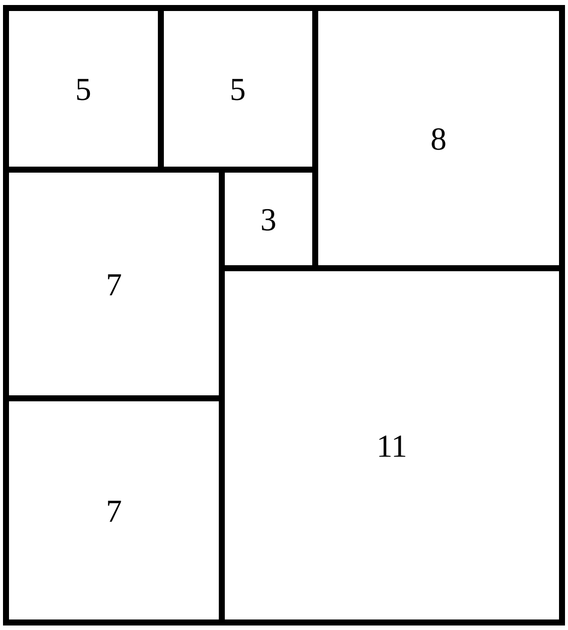
階數＝6

邊長＝17×20



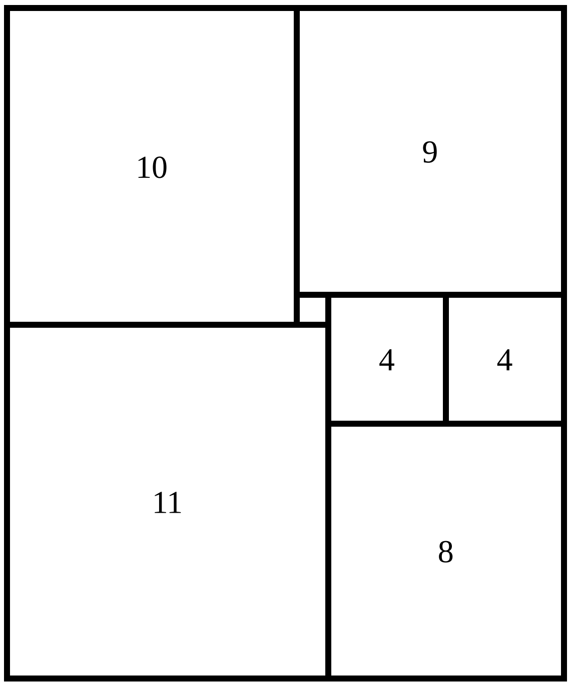
階數＝7

邊長＝18×19



階數＝7

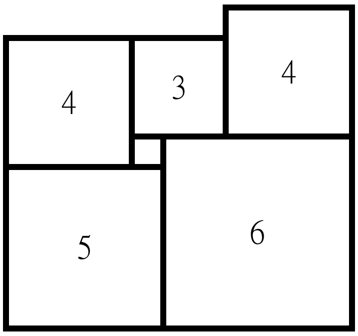
邊長＝19×21



階數＝7

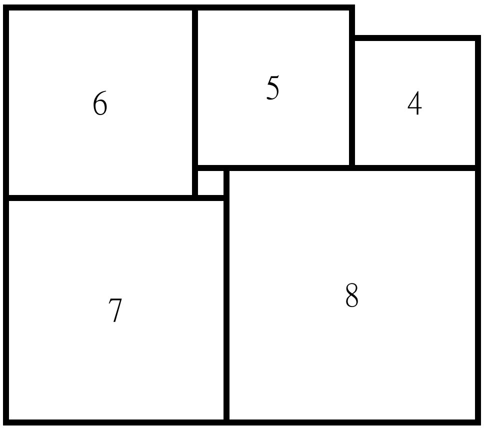
（二）有時我們利用「四角切割法」切割正方形因為階數的限制，會導致一角凹陷，而形成 L 形，這在前面的圖形中可以看到許多這樣的型態。我們做出了幾個有用的 L 形，如下：

邊長＝10x11



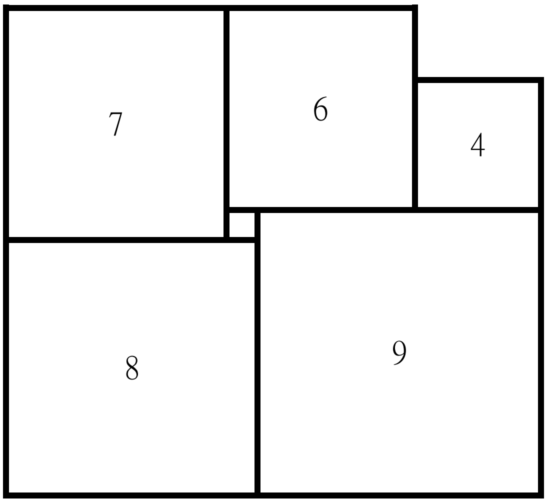
階數＝6

邊長＝13x15



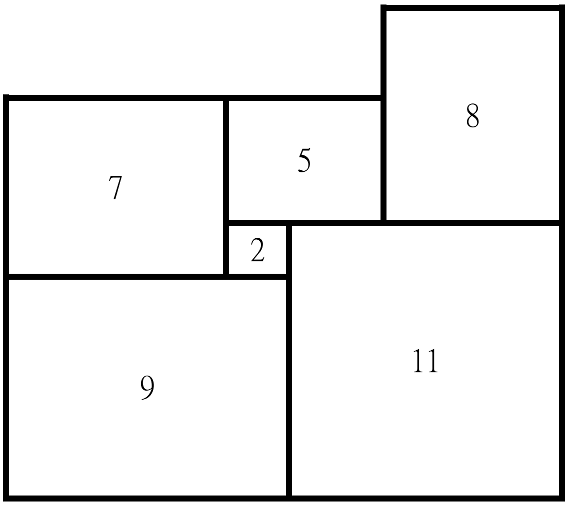
階數＝6

邊長＝15x17



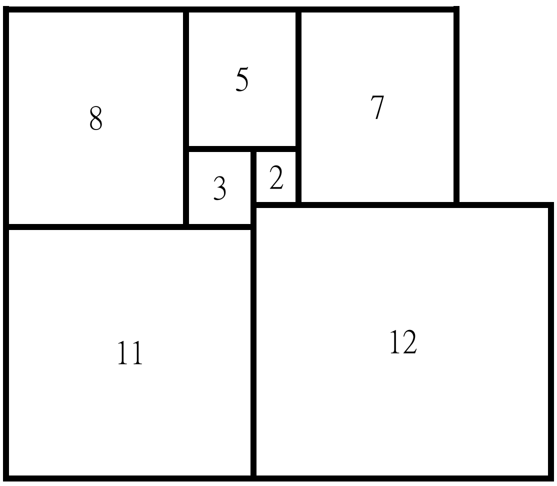
階數＝6

邊長＝19x20



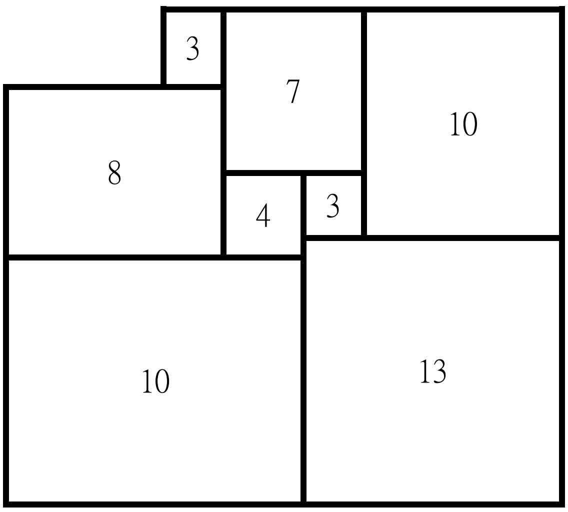
階數＝6

邊長＝19x23



階數＝7

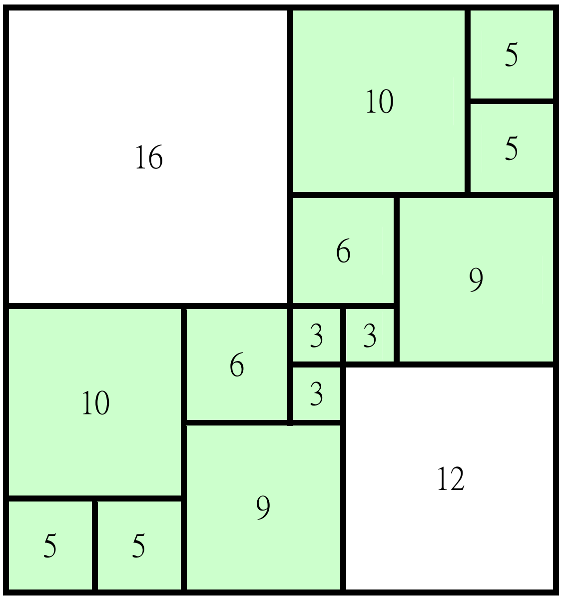
邊長＝23x25



階數＝8

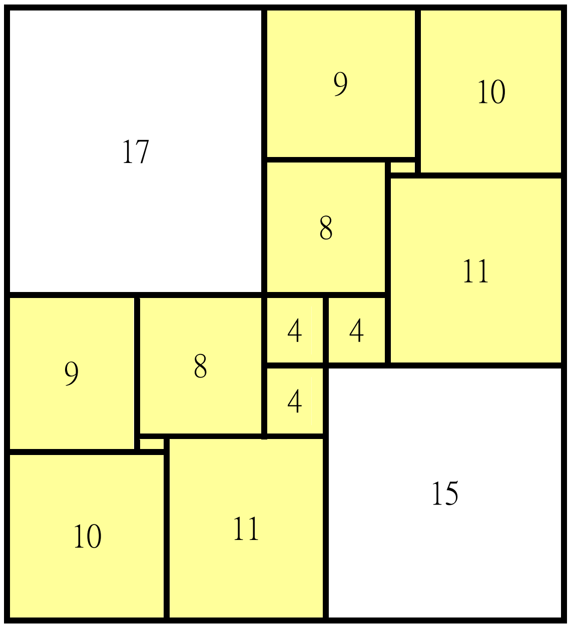
（三）以長方形「重疊二倍法」構作正方形

我們可以依此方法構作出邊長為 18，19，20，24，30，31，32，36 的正方形，但因篇幅有限，我們僅列出邊長為 31 與 36 的正方形。



邊長＝31
階數＝15

(圖) 5-3-1



邊長＝36
階數＝15

(圖) 5-3-2

1. 我們用(圖) 5-3-1 邊長為 31 的正方形透過兩次「重疊二倍法」可做出邊長為 111 的正方形且其階數＝15＋4＝19。以下為計算方法：

   （31x2－5）x2－3＝111

2. 我們用(圖) 5-3-2 邊長為 36 的正方形透過兩次「重疊二倍法」可做出邊長為 114 和 126 的正方形且其階數＝15＋4＝19。以下為計算方法：

   （36x2－10）x2－10＝114

   （36x2－4）x2－10＝126

陸、 結論與展望

一、我們利用窮舉的方法，完成邊長 23 以內最小階數的切割。邊長不超過 23 的正方形，階數也不超過 13 階。並且發現了「簡單二倍法」與「重疊二倍法」兩種擴張的方法。

二、以邊長為 1~13 的柏金斯太太的被單為基礎，繼續以以「重疊二倍法」與「簡單二倍法」每次增加二階或三階的方法，整理邊長 23 的正方形的切割。

三、繼續以邊長為 14~23 的「柏金斯太太的被單」為基礎，利用兩次「重疊二倍法」與三次重疊法以及先「重疊」再「簡單二倍法」或是先「簡單」再「重疊二倍法」構作出邊長為 24~120 的「柏金斯太太的被單」。我們發現有些邊長：(1) 邊長 51，52，53 的正方形；無法以 14 階擴大為 16 階。(2) 邊長 67 與 69 的正方形；無法以 15 階擴大為 17 階。(3) 邊長為 88、90、91 的正方形；無法以 16 階擴大為 19 階。(4) 邊長為 111、114、115、118、119 的正方形；無法以 17 階擴大為 18 階。

四、 我們回溯至 12~15 階的正方形，以「非二倍擴大法」的方式另行製作，我們嚐試了用「長方形構作正方形」並且以「四角切割法」製作出一些有用且階數在 8 以下的長方形與 L 形，製作出邊長為 16、21、27、28、29、33、35、36、39 的特殊正方形由此我們解決了上述的問題；並且意外的發現邊長 122 與 126 亦為 19 階。我們列出表五是我們的結果。

【表五】

階數	邊長	個數	階數	邊長	個數
1	1	1	**12**	14~17	4
4	2	1	**13**	18~23	6
6	3	1	**14**	24~29	6
7	4	1	**15**	30~39，41	11
8	5	1	**16**	40，42~53	13
9	6，7	2	**17**	54~70	17
10	8，9	2	**18**	71~91	21
11	10~13	4	**19**	92~120，122，126	31

五、我們發現的「簡單二倍法」與「重疊二倍法」兩種方法可以用來建構邊長 120 以內，大部份正方形的切割並找到最小階數，這一個成果實在令人興奮。但有些邊長，像 51、52、53 等，16 階的切割，無法從 12 階擴成 14 階的正方形再擴張得到，需要另外找到特殊切割的 14 階正方形，是美中不足的地方。若一個邊長 m 的正方形的階數為 k，則邊長 $m'=2m$ 的正方形的階數不超過 $k+3$ 是確定的，邊長 $m'<2m-1$ 的階數，我們相信應該不超過 $k+2$。 這個猜想，我們也會繼續努力看能不能加以證明。

柒、 參考資料

一、中華民國第 45 屆中小學科展國中組第一名：「完美正方形」.

二、中華民國第 46 屆中小學科展作品高中組－長方體中切割正方體之研究

三、http://mathworld.wolfram.com/MrsPerkinssQuilt.html

四、http://www.mathpuzzle.com/perkinsbestquilts.txt

五、http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_12_01_03.html

六、Ed Pegg Jr, "Mathematical Games: Square Packings," Dec. 1, 2003

【評語】080413

1. 本研究針對「柏金斯太太的被單」之推廣問題進行探討，發現了「簡單二倍法」與「重疊二倍法」兩種擴張的切割方法，提出重複利用「簡單二倍法」、「重疊二倍法」或兩者的混搭是可以切割出邊長 120 以內的正方形，且都不超過 19 階。解決問題的方法，相當不錯。

2. 解說過程清楚，並輔以多種正方形大小積木展示切割結果，演出精彩。