

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

080412

一筆畫、分組——一點都不少

學校名稱：桃園縣大園鄉竹圍國民小學

作者： 小五 彭敏昀 小五 呂采蓉 小五 陳筱雯	指導老師： 林徹輝 陳惠玲
---	-----------------------------

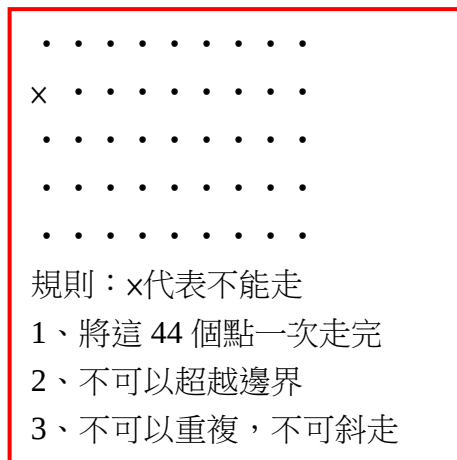
關鍵詞：點的一筆畫、完全圖、時鐘分組法

摘要

因為千元大鈔的誘惑以及班上象棋比賽的關係，我們開始研究點和點之間的關係，並把研究結果應用在日常生活之中。我們發現了將點一筆畫走完的方法，也知道了如何分組才能每個人都互相比賽到，而且這兩者之間有緊密的關係。最後，我們試著找出跳棋比賽的分組賽程，利用點一筆畫的發現，我們找到了比較有效率的辦法。

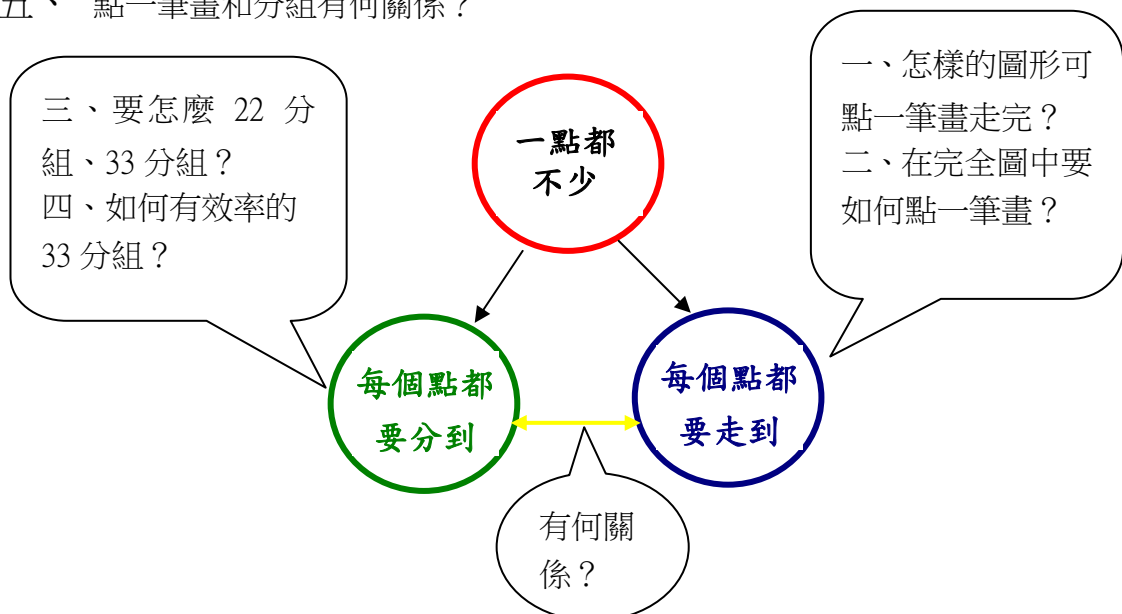
壹、研究動機

有人出了一道數學題目(如下圖)，並言明只要能夠按照規則一次走完即贈送一千元。與此同時班上舉辦了象棋比賽，導師要我們自己排賽程，唯一的條件是每個同學都要比到。為了得到千元大鈔並完成導師交代的任務，我們開始了這次的研究，並發現這兩者都和點的一筆畫有關，所以我們對點的一筆畫有更深入探討。



貳、研究目的

- 一、 怎樣的圖形可以點一筆畫走完？
- 二、 在完全圖中要如何點一筆畫？
- 三、 要怎麼 22 分組、33 分組？
- 四、 如何有效率的 33 分組？
- 五、 點一筆畫和分組有何關係？



參、研究設備及器材：紙、筆、地圖 肆、研究過程或方法

一、名詞解釋：

- (一) 點一筆畫：和尤粒路徑不同，我們討論的點一筆畫不用將路徑走完，但每個點都要走道，而且每個點都只能走一次。點一筆畫又分兩種，一種是可以點一筆畫但無法形成一個圈，另一種則可以形成一個圈。
- (二) 棋盤點：像棋盤一樣規則分不的點，只能上下左右，不能走斜的。
- (三) 完全圖：在平面空間中有 n 個點，每個點都跟另外 $(n-1)$ 個點相通，且任兩點之間只有一條路徑。
- (四) 22 分組(象棋分組)：2 個人一組的分組，每個人都要有與其他人同組的機會，而且任 2 人不會重複分在同一組內。
- (五) 33 分組(跳棋分組)：3 個人一組的分組，每個人都要有與其他人的機會同組，而且任 2 人不會重複分在同一組內。

二、怎樣的圖形可以「點」一筆畫走完：

- (一)我們在許多圖形同一個位置放上「x」，並分別紀錄下哪些可以找出點一筆畫路徑，那些不可以找出點一筆畫路徑。

.
 x

上圖是 $8 \times 4 = 32$ 的點
我們把其中一個點x掉，但
發現可以有一筆畫路徑

.
 x

上圖是 $7 \times 5 = 35$ 的點
我們把其中一個點x掉，無
法發現一筆畫的路徑。

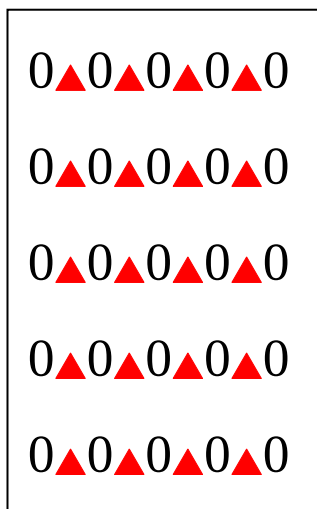
從下面的統計表
我們發現點數是
「**偶數**」時，在
該位置x一個
點，我們仍然可
以發現一筆畫路
徑，而點數是
「**奇數**」時則
否。

「0」代表可以找到一筆畫的路徑，「▲」代表不可以找到一筆畫的路徑

直橫	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	▲	0	▲	0	▲	0	▲
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	▲	0	▲	0	▲	0	▲
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	▲	0	▲	0	▲	0	▲
8	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	▲	0	▲	0	▲	0	▲

推測：偶數和奇數可能是在此條件下能不能點一筆畫的關鍵。

(二) 接下來我們在原本題目上(9x5)改變「x」的位置，並把可以找到點一筆畫路徑的位置打「0」，不能找到一筆畫路徑的位置打「▲」



從左圖我們發現：

- 1、0 和 ▲ 相交換，沒有連續的 0 和 ▲
- 2、0 有 23 個，▲ 有 22 個
- 3、如果我們要一筆畫走完整個圖形，我們必須要 0▲0▲0▲交換走。

(三) 我們的發現：

發現一：在棋盤點的格式時

- (1)因為必須要 0▲0▲0▲交換走，所以當我們去掉一個「▲」時，「▲」就剩下 21 個，「0」有 23 個，「0」最後會多一個，無法一筆畫走完。
- (2)「0」和「▲」的數目相差大於等於 2 時，就無法一筆畫走完。
- (3)偶數點數的圖形「0」和「▲」的數目相等，只去掉一個「▲」並不會造成「0」和「▲」的數目相差大於等於 2。

三、 在完全圖中有幾種「點」一筆畫走完的方法：在研究了棋盤點的一筆畫規則之後，我們想更進一步知道，關於「點」的一筆畫規則。剛剛好學校數學社團有提到完全圖，我們就從完全圖開始研究。

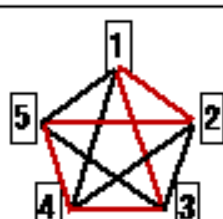
(一)4 個點的完全圖：4 個點我們給它編號之後

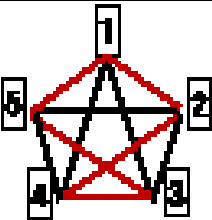
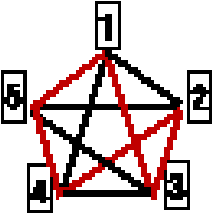
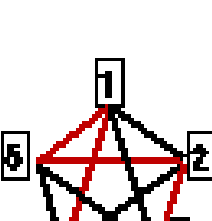
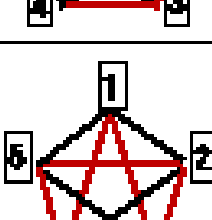
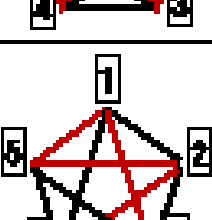
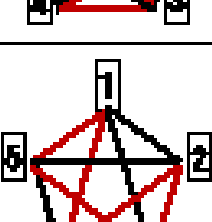
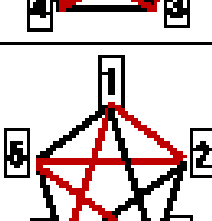
圖形	路徑	路徑
	12341	14321
	12431	13421
	13241	14231

從上面我們發現：

- 1、從不固定的點出發會有 24 種走法($4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$)
- 2、從固定的點出發會有 6 條($3 \times 2 \times 1 = 6$),但圖形只有 3 種($6 \div 2 = 3$)
- 3、4 個點可以構成 6 條通道($4 \times 3 \div 2 = 6$)
- 4、所以我們預測：5 個點的完全圖時
 - (1) 5 個點可以構成 10 條通道($5 \times 4 \div 2 = 10$)
 - (2) 從不固定的點出發會有 120 種走法($5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$)
 - (3) 從固定的點出發會有 24 條($4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$),但圖形只有 12 種($24 \div 2 = 12$)

(二) 5 個點的完全圖：為了確定我們之前觀察的結果正確，所以我們對 5 個點的完全圖做一筆畫路徑，並觀察規律

圖形	路徑	路徑
	123451	154321
	123541	145321
	124531	135421
	135241	142531
	125431	134521

	124351	153421
	132541	145231
	143251	152341
	132541	145231
	134251	152431
	153241	142351
	143521	125341

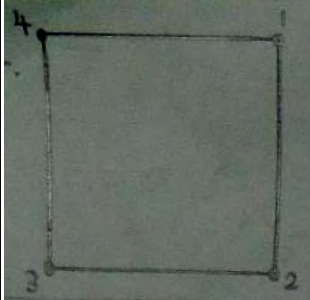
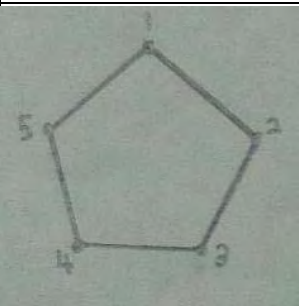
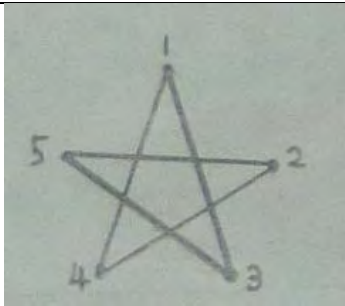
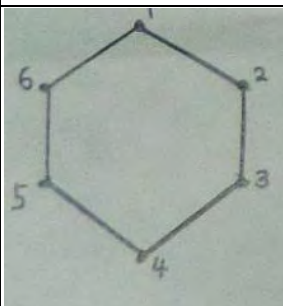
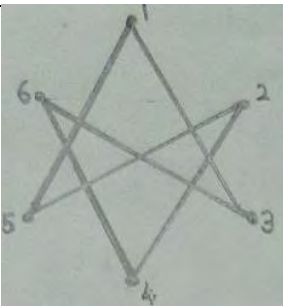
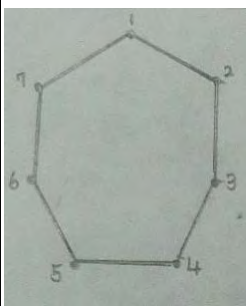
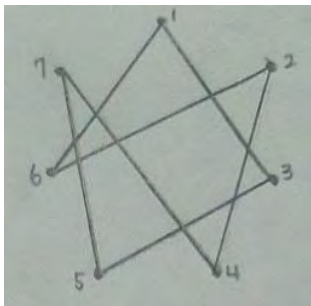
從上面我們發現：

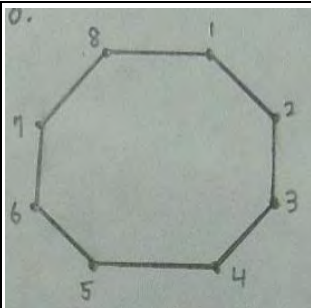
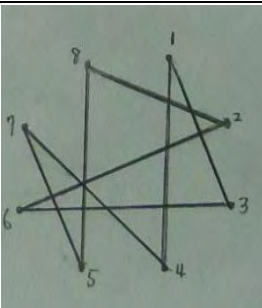
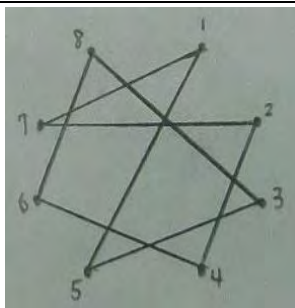
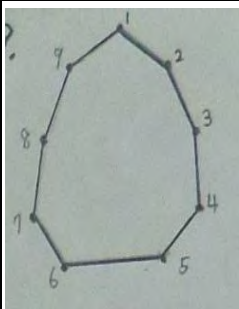
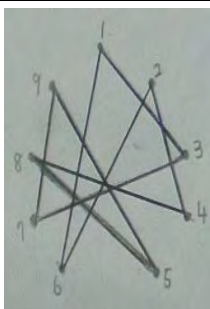
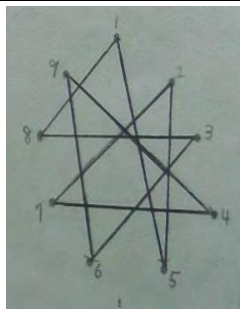
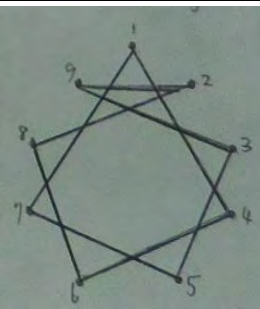
- 1、不固定的點出發會有 120 種走法($5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$)
- 2、固定的點有 24 條路徑($4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$),但圖形只有 12 種($24 \div 2 = 12$)
- 3、5 個點可以構成 10 條通道($5 \times 4 \div 2 = 10$)

發現二：n 個點的完全圖時

- (1)n 個點可以構成 $n \times (n-1) \div 2$ 條通道
- (2)從不固定的點出發會有 $n!$ 種走法
- (3)固定的點出發會有 $(n-1)!$ 條路徑,但圖形只有 $(n-1)! \div 2$ 種

四、 在完全圖中有幾種完全不同的「點」一筆畫的圈：完全不同的「點」一筆畫的圈的意思是指 n 個點中我們可以找到幾個一筆畫的圈沒有重複的路徑。

4 個點的時候 可以找到1個 圈			
5 個點的時候 可以找到2個 完全不同(沒有重復的邊) 的圈			
6 個點的時候 可以找到2個 完全不同(沒有重復的邊) 的圈			
7 個點的時候 可以找到3個 完全不同(沒有重復的邊) 的圈			

8 個點的時候 可以找到3個 完全不同(沒 有重複的邊) 的圈				
9 個點的時候 可以找到4個 完全不同(沒 有重複的邊) 的圈				

發現三：n 個點的完全圖時

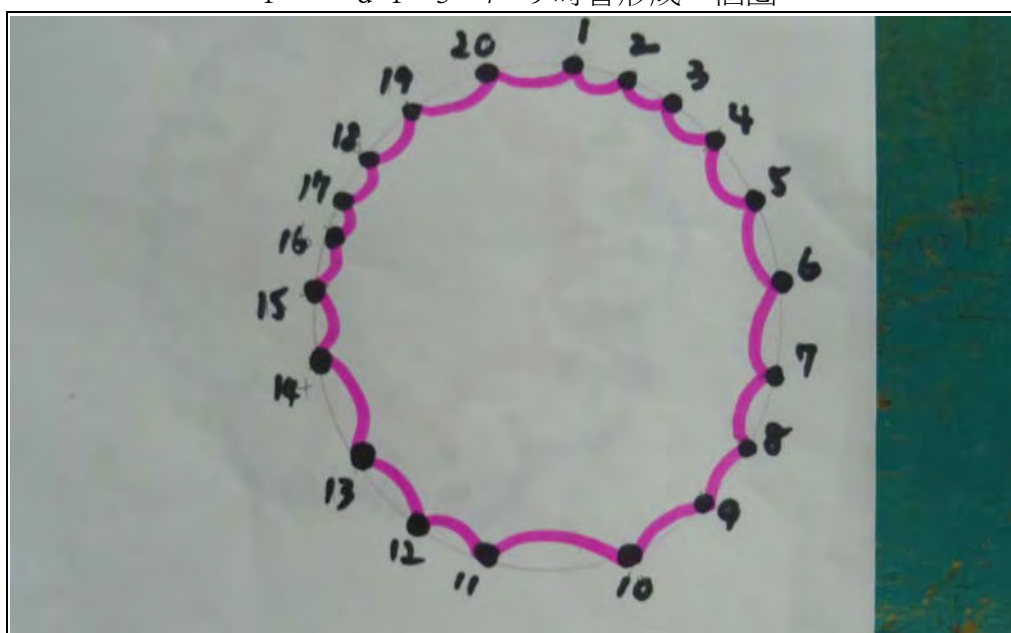
- (1) n 是奇數時，會有 $(n-1) \div 2$ 個完全不同的圈
- (2) n 是偶數時，會有 $(n-2) \div 2$ 個完全不同的圈

五、 在完全圖中要如何規律的找到一筆畫的圈：

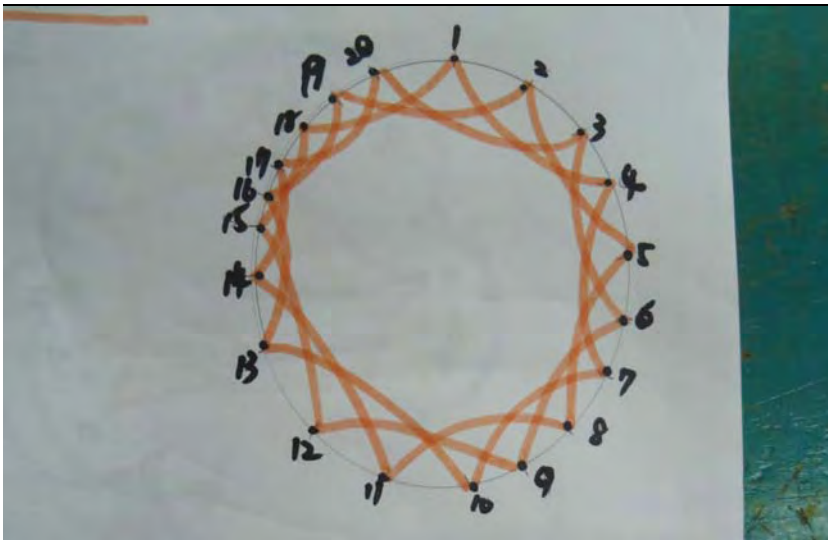
(一) 完全圖的距離：假設在完全圖中有 n 個點，我們定義點 a 和點 b 之間的距離是 a-b，且從圖形上可以看出最大的距離是 $n \div 2$

(二) 在何種距離下可以形成一筆畫的圈：以 20 個點的完全圖為例，我們觀察從點 1 出發每次加上 **固定距離** d(d=1~10) 會形成什麼情況

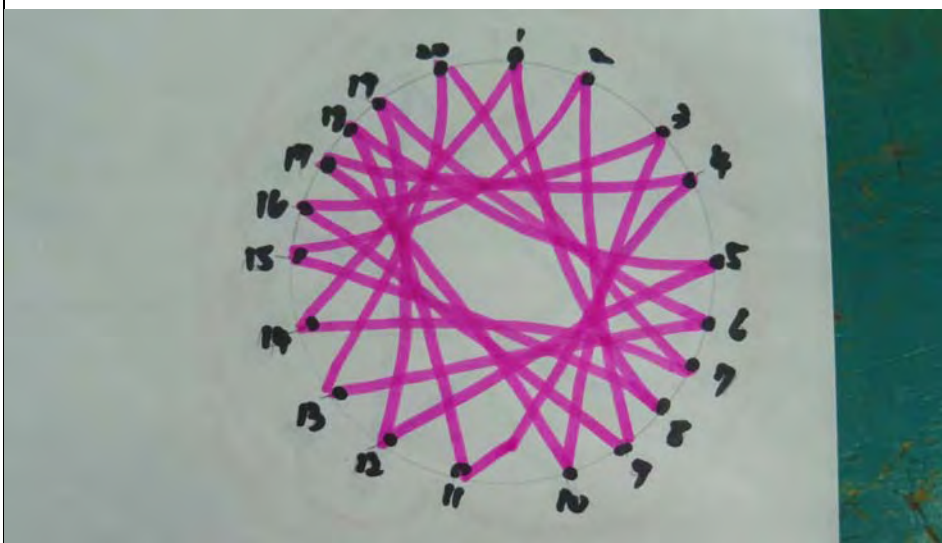
1、 d=1、3、7、9 時會形成一個圈：



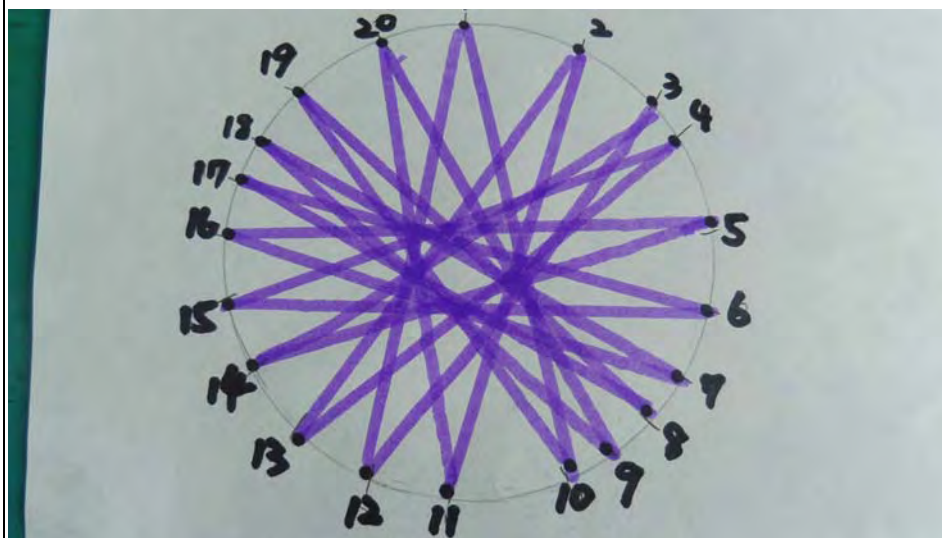
d=1 時，形成一筆畫的圈路徑為
 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 15 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow 18 \rightarrow 19 \rightarrow 20 \rightarrow 1$



d=3 時，形成
一筆畫的圈路
徑為
 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 10$
 $\rightarrow 13 \rightarrow 16 \rightarrow 19$
 $\rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow$
 $11 \rightarrow 14 \rightarrow 17 \rightarrow$
 $20 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 9$
 $\rightarrow 12 \rightarrow 15 \rightarrow 18$
 $\rightarrow 1$

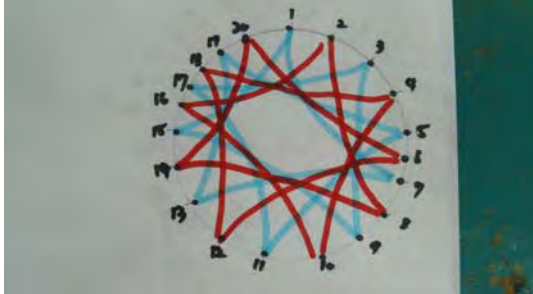
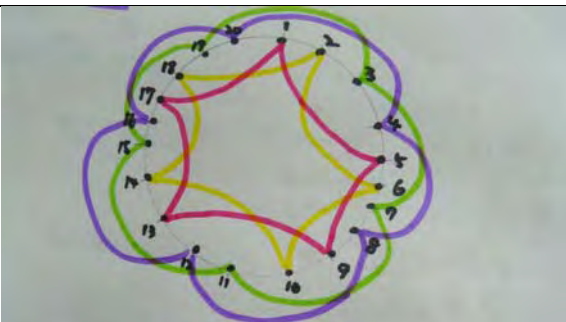
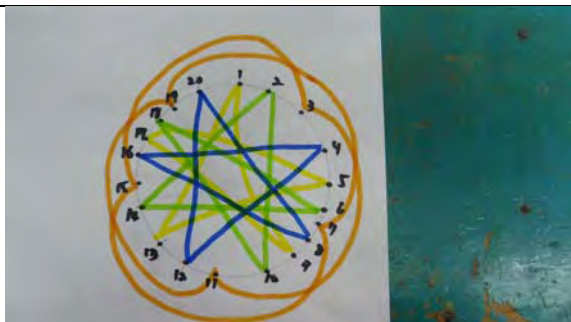
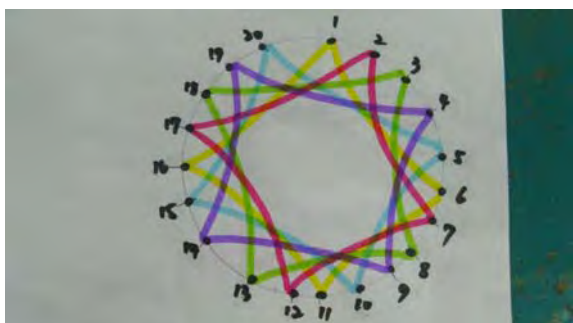
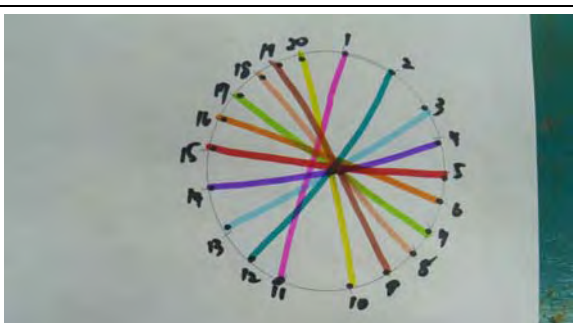


d=7 時，形成
一筆畫的圈路
徑為
 $1 \rightarrow 8 \rightarrow 15 \rightarrow 2$
 $\rightarrow 9 \rightarrow 16 \rightarrow 3 \rightarrow$
 $10 \rightarrow 17 \rightarrow 4 \rightarrow$
 $11 \rightarrow 18 \rightarrow 5 \rightarrow$
 $12 \rightarrow 19 \rightarrow 6 \rightarrow$
 $13 \rightarrow 20 \rightarrow 7 \rightarrow$
 $14 \rightarrow 1$



d=9 時，形成
一筆畫的圈路
徑為
 $1 \rightarrow 10 \rightarrow 19 \rightarrow 8$
 $\rightarrow 17 \rightarrow 6 \rightarrow 15$
 $\rightarrow 4 \rightarrow 13 \rightarrow 2 \rightarrow$
 $11 \rightarrow 20 \rightarrow 9 \rightarrow$
 $18 \rightarrow 7 \rightarrow 16 \rightarrow 5$
 $\rightarrow 14 \rightarrow 3 \rightarrow 12$
 $\rightarrow 1$

2、 $d=2、4、6、8$ 時不會形成一個圈：

		$d=2、6$ 時形成 2 個 圈，每 個圈有 10 個 點
		$d=4、8$ 時形成 4 個 圈，每 個圈有 15 個 點
		$d=5$ 時 形成 5 個圈， 每個圈 有 4 個 點
		$d=10$ 時形成 10 條 線，每 條線有 2 個點

發現四：n 個點的完全圖時，在固定距離 d 之下

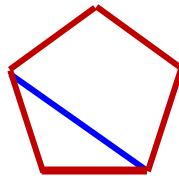
(2) 當 n 和 d 互質時，會形成一個一筆畫的圈

(3) 當 n 和 d 的最大公因素是 g 時，會形成 g 個圈，每個圈會有 $n \div g$ 個點

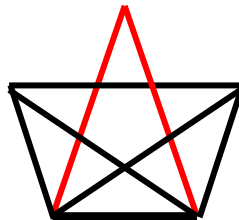
六、 在不完全圖中將「點」一筆畫走完的規則：雖然我們已經知道完全圖中點和點之間的規律，不完全圖的情況卻還不清楚。所以我們先試著將完全圖的幾條路徑拿掉，觀察其點一筆畫的規律，然後試著觀察立體空間中物體點的一筆畫規律。

(一) n 個點最少需要 n 條線段才能連成點一筆畫的圈，如果有 $n(n-1)-n+2$ 條線段則一定能連成連成點一筆畫的圈。

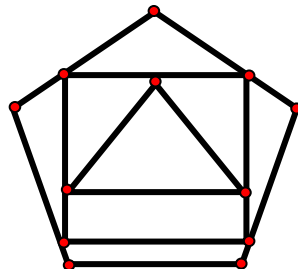
(二) 沒用的路徑：在點一筆畫的圈裡面一個點只需要 2 條路徑，所以剩下的就是沒用的路徑。



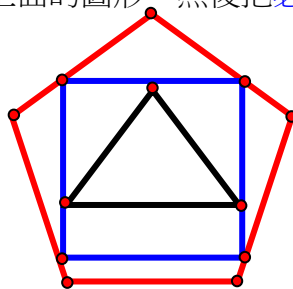
(三) 必要路徑：因為要將點一筆畫走完，所以如果有一個點只有 2 條路徑連接到，那這 2 條路徑就是一定會走到的必要路徑。



(四) 我們隨便畫了一個圖，試著利用上面的發現判斷這個圖是否可以完成點的一筆畫。



我們利用上課學到的幾何圖形拼出上面的圖形，然後把必要路徑標出，沒用的路徑也標出。

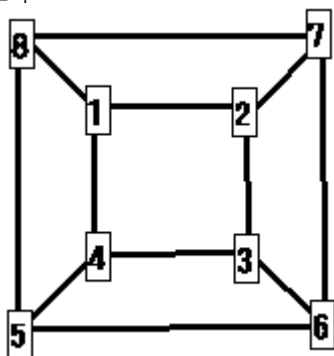


必要的路徑是紅色的，沒用的路徑是藍色的，因為中間的 3 個點被沒用的路徑包圍，所以永遠走不到，因此這個圖形沒有辦法形成點一筆畫的圈，但有點一筆畫的路徑。

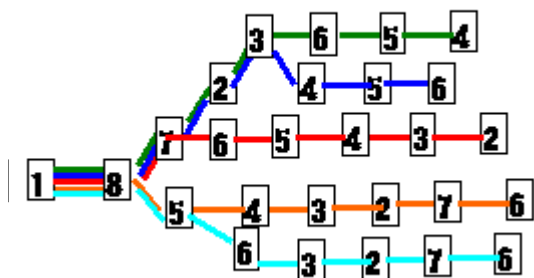
發現五：可以利用必要的路徑和沒用的路徑判斷圖形是否可以形成點一筆畫的圈

七、 立體空間中的點一筆畫：我們將數學課常提到的正方體頂點拿來進行點一筆畫，發現和平面空間中相差很多，除了每個點都一樣之外，還要考慮到翻轉的問題。

(一) 正方形頂點平面空間圖：為了將問題簡單化，所以我們將立體圖形變成平面圖形，如下：



(二) 捷運路線法：從點 1 出發有幾種方法可以一筆畫呢？因為圖形和完全圖差別很大，所以我們發明了一種方法，能夠將路徑很清楚的紀錄下來，又能完整的推算出總共有幾種方法。因為紀錄的圖形很像捷運的路線圖，所以我們稱為捷運路線法。



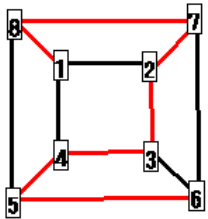
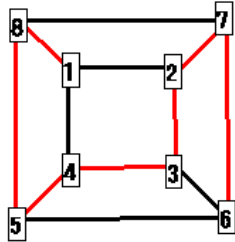
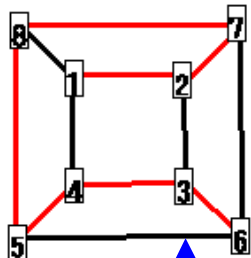
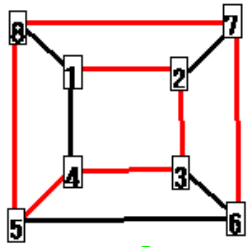
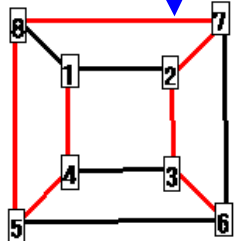
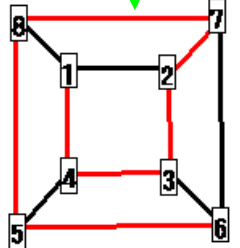
有 3 條路徑通向點 1，我們將這 3 條路徑分開討論。之後根據每個點可以通向的路徑一一討論。這樣就確定不會有路徑遺漏。

我們整理了一下所發現的路徑

1~8	1~2	1~4
187236541	127856341	145876321
18723456	12785436	14587236
187654321	127634581	145632781
18543276	12345876	143658721
185672341	123456781	14327856
185436721	123678541	143276581

我們把圖形和路線配合有以下發現：

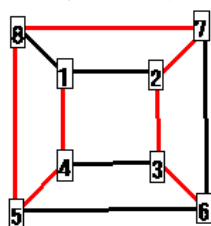
1、沒有形成圈的一筆畫：我們發現路徑看起來有 6 種，但放在平面圖形上來看就只有 3 種，因為要轉向。

路徑：18723456	路徑：18543276
	
路徑：12785436	路徑：12345876
	
路徑：14587236	路徑：14327856
	

2、形成圈的一筆畫：因為是形成一個圈所以之前找到的數目還要除以 2，表列如下：

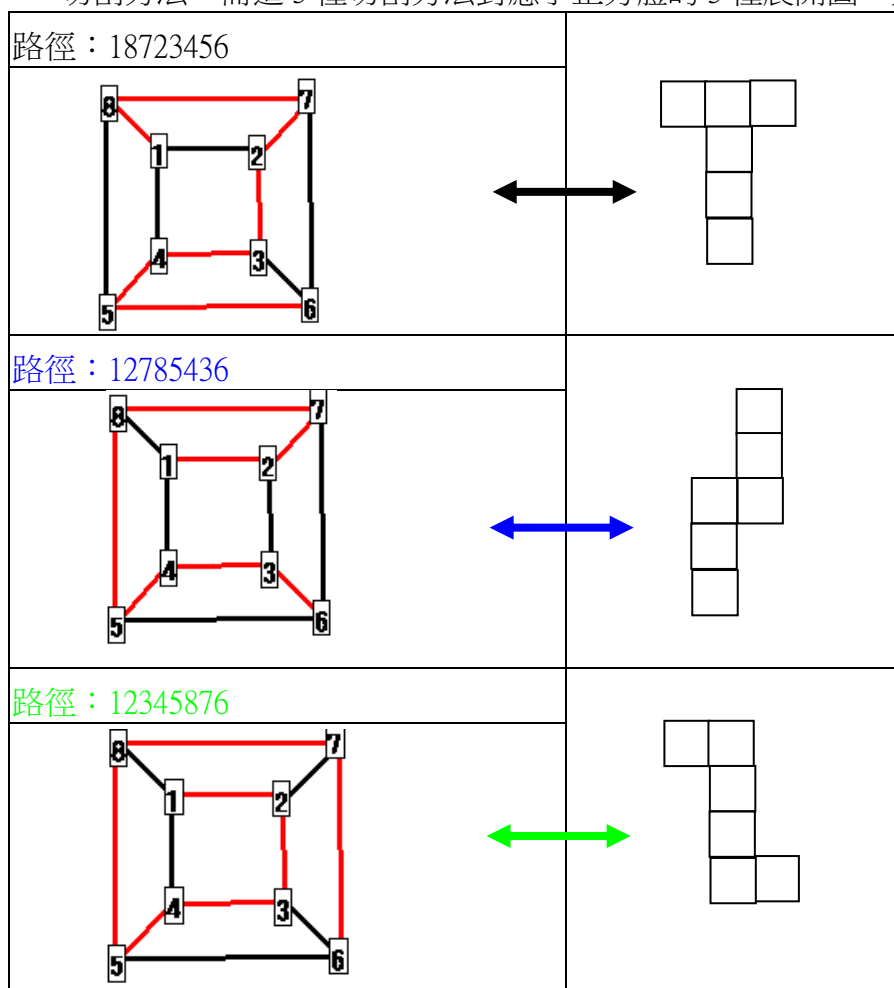
187236541	145632781	原本找到 12 條路徑，但因為順、逆時鐘方向一樣，所以實際上有 6 條
187654321	123456781	
185672341	143276581	
127856341	143658721	
127634581	185436721	
145876321	123678541	

經過轉向之後，我們發現這 6 個圈實際上是同 1 種圖形



根據 1、2 的研究，我們發現正方體頂點的一筆畫路徑共有 5 種方法，其中 3 種不能形成圈，有 2 種可以形成圈。

3、一筆畫和展開圖的關係：我們發現不能形成圈的 3 種一筆畫路徑，竟然就是正方體的 3 種切割方法，而這 3 種切割方法對應了正方體的 3 種展開圖，如下圖。



- 發現六：
- (1)利用捷運路線法可以找出點一筆畫的路徑與圈。
 - (2)正方體的頂點與邊可以形成 3 種點一筆畫路徑與一個點一筆畫的圈。
 - (3)沿著正方體的 3 種點一筆畫路徑去切割，可形成 3 種正方體展開圖。

八、 22 分組(象棋分組)---每個點都要分到

為了完成象棋比賽分組的賽程表，所以我們做了以下的整理：

(一) 規則：

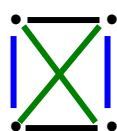
- 1、 班上有 26 位同學，每位同學都要和其他所有同學比到。
- 2、 每場比賽 26 位同學都要比，所以我們需要 13 副象棋。

3、因為要和自己之外的其餘所有同學比到，所以共要比 25 場。

(二) 根據上面的規則，我們要排 25 場比賽，而在這 25 場比賽裡面，沒有同學會重複和另一位同學互相比賽。所以我們先將問題簡化：

1、分組時，如遇到奇數，則加 1 位同學。

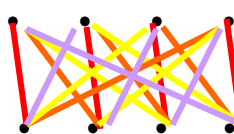
2、4 位同學時：就像下圖一樣，用畫圖就分好組



同種顏色是同場比賽，所以我們可以得到

1v2,3v4 1v3,2v4 1v4,2v3

3、8 位同學時：



我們利用圖形分組，先將 8 位同學分 AB 組。

A 組同學不動，B 組每次移動一格，4 次可輪

完。之後 A、B 組各自按照 4 位同學分組時的賽程。所

以我們可以得到 $4+3=7$ 場比賽。表列如下

場次	比賽組別	
第一場	1v5, 2v6, 3v7, 4v8	前四場比賽 1、2、3、4 號同學不動，5、6、7、8 號同學每次退一位
第二場	1v6, 2v7, 3v8, 4v5	
第三場	1v7, 2v8, 3v5, 4v6	
第四場	1v8, 2v5, 3v6, 4v7	
第五場	1v2, 3v4, 5v6, 7v8	接下來 AB 組同學各自按照 4 人的分組法比賽
第六場	1v3, 2v4, 5v7, 6v8	
第七場	1v4, 2v3, 5v8, 6v7	

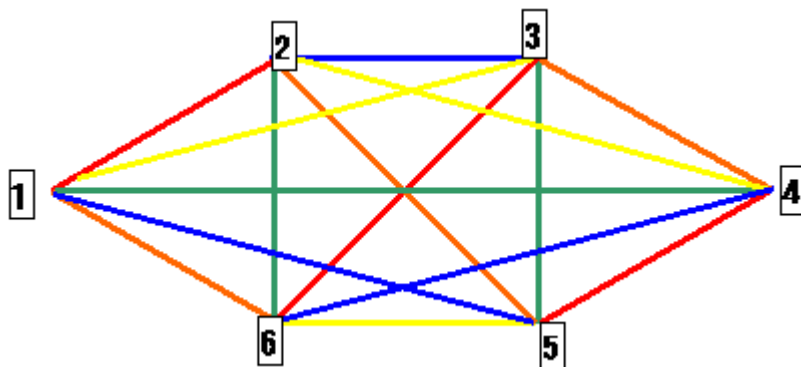
因此只要數字是 2 的 n 次方，我們都可以按照這種方法分組

(三) 時鐘分組法：雖然已經會 2 的 n 次方的分組，但我們希望能找出一種方法，能將全部的偶數都輕鬆分組，所以又對 6 人分組做了以下的研究。

1、先拼湊出一種分法：先想辦法表列出一種分法，並觀察其規律

場次	比賽組別
第一場	1v2, 3v6, 4v5
第二場	3v4, 2v5, 1v6
第三場	5v6, 2v4, 1v3
第四場	3v5, 2v6, 1v4
第五場	1v5, 2v3, 4v6

- 2、 用六邊形觀察：我們試著用圖形觀察規律，同一場比賽用同一種顏色



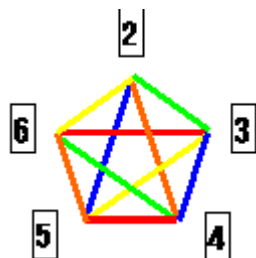
我們發現 (1)6 個點共 15 條路徑，每條路徑代表 1 次比賽，同種顏色是同場比賽，所以共要比 $15 \div 3 = 5$ 場比賽

(2)同種顏色的線段大部分沒有交點，有交點的線段一定跟點 1 有關。

(3)所以我們想，可以試著把點 1 拿掉，並觀察規律。

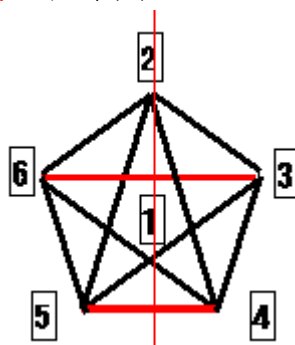
- 3、 固定住 1，用五邊形觀察：我們把賽程整理過後，並且把點 1 拿掉，如下圖。

場次	比賽組別
第一場	1v2, 3v6, 4v5
第二場	1v3, 2v4, 5v6
第三場	1v4, 2v6, 3v5
第四場	1v5, 2v3, 4v6
第五場	1v6, 2v5, 3v4

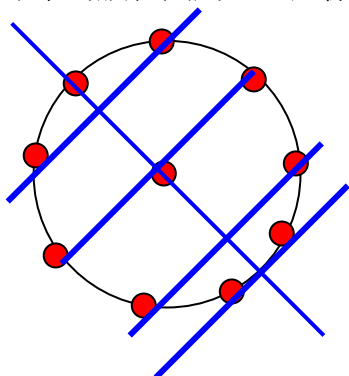


我們發現：同場比賽的線段在正五邊形中互相平行。

- 4、 對應點就是比賽的對象：出現規律之後，我們把拿掉的 1 又放回去觀察，發現出現 1 的那次比賽為對應軸，那互為對應點的 2 點就是那次比賽的對象，如下圖。

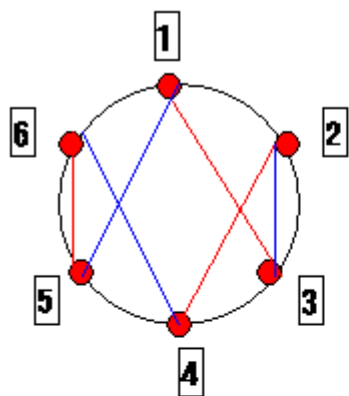


5、時鐘分組法：上面方法的缺點就是必須畫出正多邊形，我們班上有 26 人，那就要畫正 25 邊形，實在太難畫了。所以我們改良圖形：將點 1 放在圓心，其他點平均放在圓周上，這樣就可以很清楚看到了。

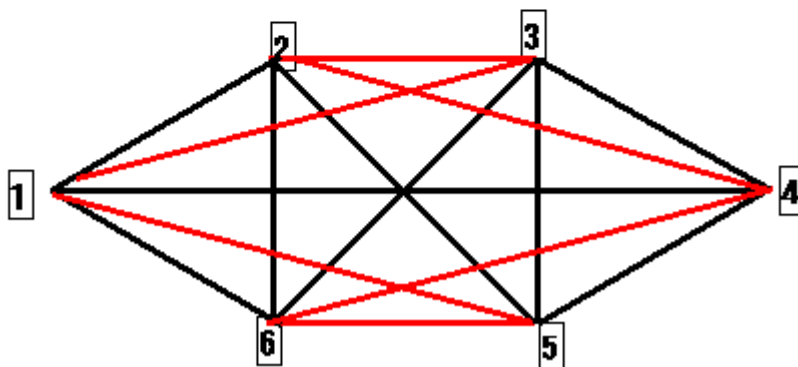


(四) **重大發現**：我們發現任 2 場比賽可以形成一條點一筆畫的路徑，舉例來說：

場次	比賽組別
第一場	1v2, 3v6, 4v5
第二場	1v3, 2v4, 5v6
第三場	1v4, 2v6, 3v5
第四場	1v5, 2v3, 4v6
第五場	1v6, 2v5, 3v4



第二場：1v3, 2v4, 5v6 第四場：1v5, 2v3, 4v6
合併過程：將第二場同組的塗上紅色線，第四場同組的塗上藍色線。(如左圖)則可以得到點一筆畫的圈的路徑：1→3→2→4→6→5→1。在完全圖上畫出路線圖則是像下圖一般。



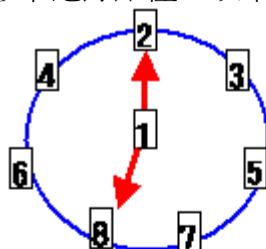
(五) 有了上面的發現，我們可以做到：

- 1、 利用分組找到點的一筆畫路徑：因為在完全圖中， n 個點兩兩一組，分完組之後任 2 組可以形成一筆畫路徑，以 10 個點的分組舉例來說：

	組別
第一次分組	1v2, 3v10, 4v9, 5v8, 6v7
第二次分組	1v3, 2v4, 5v10, 6v9, 7v8
第三次分組	1v4, 3v5, 2v6, 7v10, 8v9
第四次分組	1v5, 4v6, 3v7, 2v8, 9v10
第五次分組	1v6, 5v7, 4v8, 3v9, 2v10
第六次分組	1v7, 6v8, 5v9, 4v10, 2v3
第七次分組	1v8, 7v9, 6v10, 2v5, 3v4
第八次分組	1v9, 8v10, 2v7, 3v6, 4v5
第九次分組	1v10, 2v9, 3v8, 4v7, 5v6

有 9 次分組，任 2 次分組可以找到一條點一筆畫的路徑，所以可以得到 $9 \times 8 \div 2 = 36$ 條路徑。例如第三次分組和第八次分組結合，可以得到路徑：1→4→5→3→6→2→7→10→8→9→1

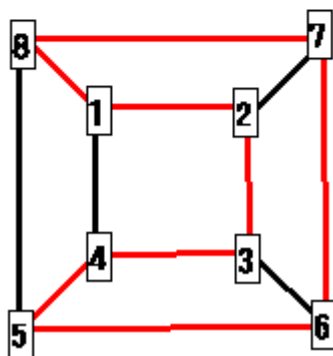
- 2、 利用圖形來紀錄路徑：以下面的圖形為例，



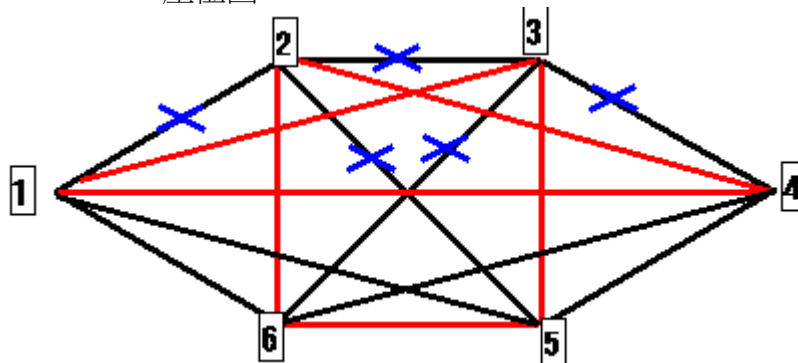
從圖形我們可以看出，分的組別是這 2 組

第一組	1v2, 3v4, 5v6, 7v8
第二組	2v3, 4v5, 6v7, 1v8

將這 2 組結合成路徑投射到下面的圖形上可以得到一筆畫路徑如下：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1



- 3、找到一筆畫路徑可分組：如果在 6 人座位分組時，基於某種原因，2 號不和 1、3、5 號同坐，3 號不與 4、6 號同坐。我們可以先畫出 6 點完全圖，並把不同坐的路徑×掉，再找出一筆畫路徑，就可以得到下面的座位圖。



所以一筆畫路徑為：1→3→5→6→2→4→1

1 和 3 同坐
5 和 6 同坐
2 和 4 同坐

3 和 5 同坐
2 和 5 同坐
1 和 4 同坐

發現七：在 22 分組(象棋分組)中

- (1) 只要數字是 2 的 n 次方，都很好分。
- (2) 時鐘分組法：1 為圓心，數字 2~ n 平均分布在圓周上，當 1 和數字 a 同組時，以直線 1, a 為對稱軸，其他任 2 個對應點分在同組。共分 $(n-1)/2$ 場，每場有 $n/2$ 組
- (3) 時鐘分組法分出的任 2 組可形成一個一筆畫的圈。
- (4) 我們可以利用時鐘分組法來分座位。
- (5) 發現三(1) n 是奇數時，會有 $(n-1)/2$ 個完全不同的圈→可用時鐘分組法來解釋。

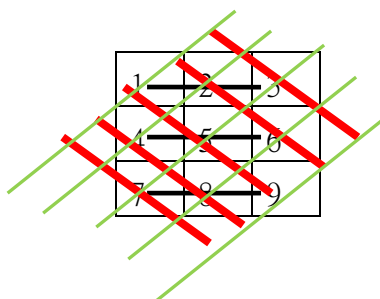
九、 33 分組(跳棋分組)：我們解決了象棋比賽的 22 分組問題之後，又針對跳棋比賽的 33 分組問題做了研究，過程如下

- (一) 偶數不能分組：因為每個人不能遇到重複的對手，所以每次遇到的 2 個對手都不同。因此分組總人數應可以看成自己+2 的倍數 $(1+2n)$ ，所以可以分組的數目一定是奇數。
- (二) $5, 11, 17, 5+6n$ 也不能分組：因為 $(5-1)/2=2$ (每個人要比的場數) $2 \times 5 \div 3 = 3.333...$ 不是整數，所以 5 不能分組，另外 $5+6n$ 同樣不能分組
- (三) $7, 13, 19, (7+6n)$ 的分法：我們發現這類型的數字可以慢慢的一組一組找出來，表列如下：

數字()的分組	表現方式	分為哪幾組？
7	$1+t, 2+t, 4+t$	(1,2,4) (2,3,5) (3,4,6) (4,5,7) (5,6,1) (6,7,2) (7,1,3)
13	$1+t, 2+t, 5+t$ $1+t, 3+t, 8+t$	(1,2,5) (2,3,6) (3,4,7) (4,5,8) (5,6,9) (6,7,10) (7,8,11) (8,9,12) (9,10,13) (10,11,1) (11,12,2) (12,13,3) (13,1,4) (1,3,8) (2,4,9) (3,5,10) (4,6,11) (5,7,12) (6,8,13) (7,9,1) (8,10,2) (9,11,3) (10,12,4) (11,13,5) (12,1,6) (7,9,1)
19	$1+t, 2+t, 6+t$ $1+t, 3+t, 9+t$ $1+t, 4+t, 11+t$	(1,2,6) (2,3,7) (3,4,8) (4,5,9) (5,6,10) (6,7,11) (7,8,12) (8,9,13) (9,10,14) (10,11,15) (11,12,16) (12,13,17) (13,14,18) (14,15,19) (15,16,1) (16,17,2) (17,18,3) (18,19,4) (19,1,5) (1,3,9) (2,4,10) (3,5,11) (4,6,12) (5,7,13) (6,8,14) (7,9,15) (8,10,16) (9,11,17) (10,12,18) (11,13,19) (12,14,1) (13,15,2) (14,16,3) (15,17,4) (16,18,5) (17,19,6) (18,1,7) (19,2,8) (1,4,11)(2,5,12) (3,6,13) (4,7,14) (5,8,15) (6,9,16) (7,10,17) (8,11,18)(9,12,19)(10,13,1)(11,14,2)(12,15,3)(13,16,4)(14,17,5) (15,18,6) (16,19,7) (17,1,8)(18,2,9) (19,3,10)

(四) 9、15、21、 $(9+6n)$ 的分法：

1、 9 的分組



按照上面的圖形我們可以分成 4 場比賽每場比賽每人都會參加，共 12 組

第一場	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9
第二場	1, 4, 7	2, 5, 8	3, 6, 9
第三場	1, 5, 9	2, 6, 7	3, 4, 8
第四場	1, 6, 8	2, 4, 9	3, 5, 7

2、 15 人的分組：

15 個人的分組難度高很多，為了能夠快速的分組，我們參考了 9 人的分組，並訂了以下的策略：

1、數字小的往前排，數字大的向後排

2、數字 1 先固定

3、一場比賽，一場比賽的尋找，解決一場再一場。

4、先找出所有的組別再找場次

5、如果遇到無法解決的場次，往前尋找是否有可以替換的數字

經過了許多天的討論與尋找我們終於找到了 15 人的分組

第一場	1, 2, 3	4, 8, 12	5, 10, 15	6, 11, 13	7, 9, 14
第二場	1, 4, 5	2, 8, 10	3, 13, 14	6, 9, 15	7, 11, 12
第三場	1, 6, 7	2, 9, 11	3, 12, 15	4, 10, 14	5, 8, 13
第四場	1, 8, 9	2, 12, 14	3, 5, 6	4, 11, 15	7, 10, 13
第五場	1, 10, 11	2, 13, 15	3, 4, 7	5, 9, 12	6, 8, 14
第六場	1, 12, 13	2, 4, 6	3, 9, 10	5, 11, 14	7, 8, 15
第七場	1, 14, 15	2, 5, 7	3, 8, 11	4, 9, 13	6, 10, 12

發現八：在 33 分組(跳棋分組)中

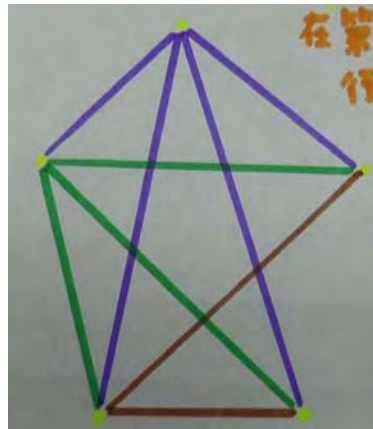
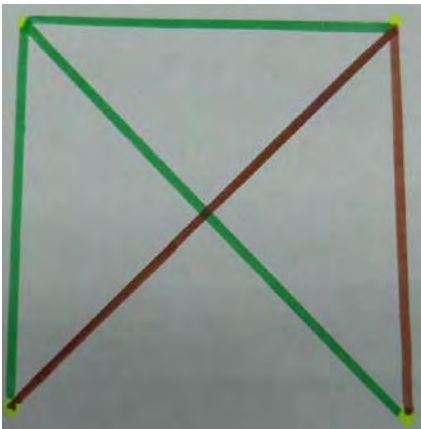
(1) 偶數和 $5+6n$ 的數字皆不能 33 分組。

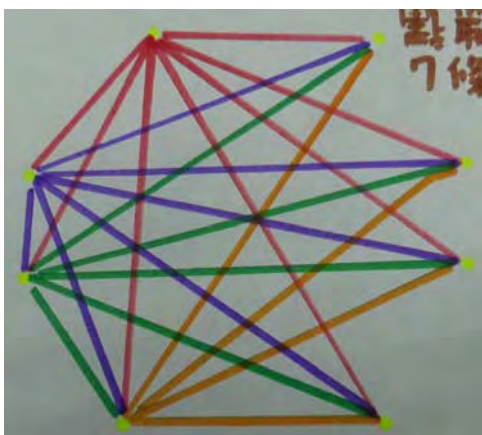
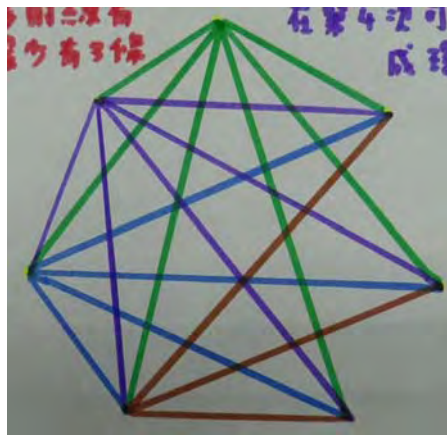
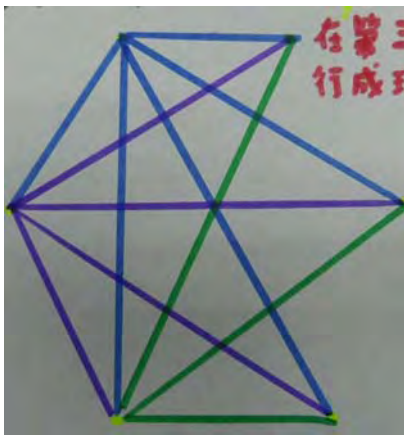
(2) $7+6n$ 和 $3+6n$ 可以用慢慢找出的方式 33 分組

伍、討論

一、關於一筆畫的討論：

(一) 我們想知道如果按照順序一條路徑，一條路徑的增加，在什麼樣的情況下開始會出現一筆畫，所以做了以下的實驗，並發現了規律。





我們發現：

4 個點的時候，頂點最少的路徑數是 2 條， $2+2=4$

5 個點的時候，頂點最少的路徑數是 3 條， $3+3>5$

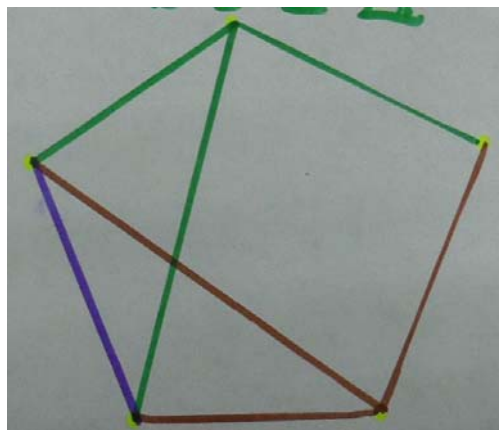
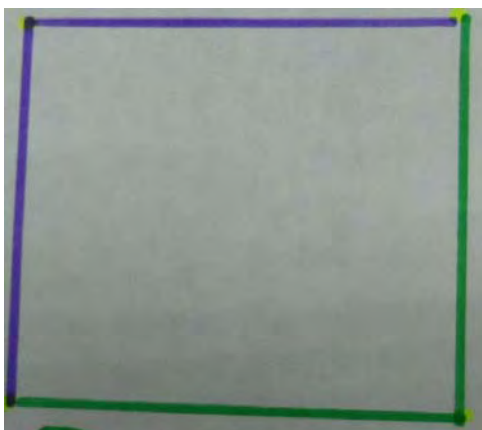
6 個點的時候，頂點最少的路徑數是 3 條， $3+3=6$

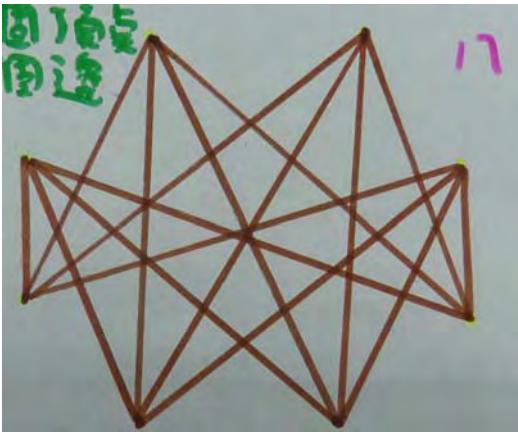
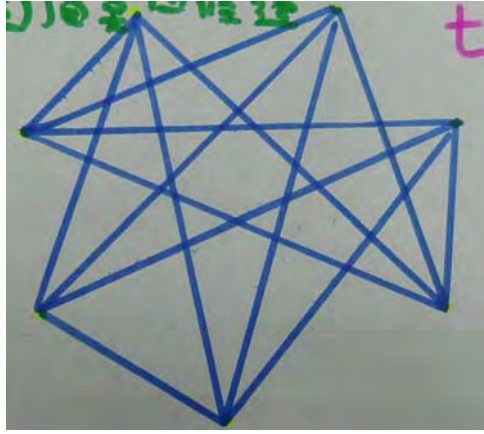
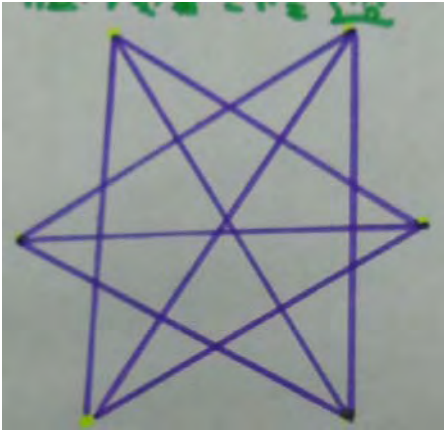
7 個點的時候，頂點最少的路徑數是 4 條， $4+4>7$

8 個點的時候，頂點最少的路徑數是 4 條， $4+4=8$

所以我們知道在 n 個點的時候，最少路徑數的 2 個頂點的路徑數相加如果大於或等於 n 時可以有一筆畫的圈。

(三)有了上面的發現，我們又思考：如果從最多路徑數的頂點開始拿掉路徑，那到底什麼時候會是可以一筆畫的界線呢？所以我們做了下面的實驗，並發現了規律。





我們發現：

4 個點的時候，頂點路徑數都是 2 條的時候一定可以一筆畫， $(2=4\div2)$

5 個點的時候，頂點路徑數都是 3 條的時候一定可以一筆畫， $(3>5\div2)$

6 個點的時候，頂點路徑數都是 3 條的時候一定可以一筆畫， $(3=6\div2)$

7 個點的時候，頂點路徑數都是 4 條的時候一定可以一筆畫， $(4>7\div2)$

8 個點的時候，頂點路徑數都是 4 條的時候一定可以一筆畫， $(4=8\div2)$

所以我們知道在 n 個點的時候，頂點路徑數都比 $n\div2$ 還多的時候一定可以一筆畫的圈。

頂點路徑數比 $n\div2$ 還少的时候不一定可以一筆畫的圈。

發現九：在平面中有 n 個點， $n\geq 3$ 時

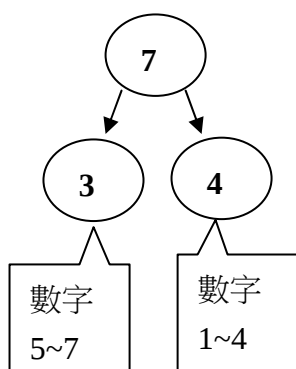
(1) 最少路徑數的 2 個頂點的路徑數相加如果大於或等於 n 時可以有一筆畫的圈。

(2) 每個頂點的路徑數都比 $n\div2$ 還多的時候一定可以有一筆畫的圈。

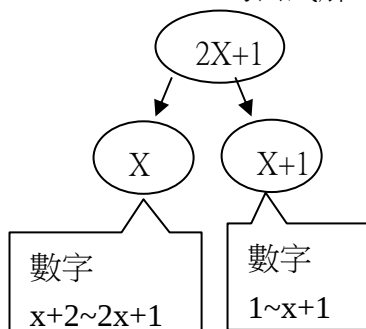
二、33 分組問題：雖然我們找到了 33 分組的方法和策略，但我們希望可以找出更快更有效率的方法，所以我們試著從數字小的分組去找到數字大的分組

(一) 方法一：利用發現七--(1)與時鐘分組法

1、以 7 為例：分 2 組數字



2、 $2X+1$ 的公式解



步驟一、3 個數字分組(5~7)

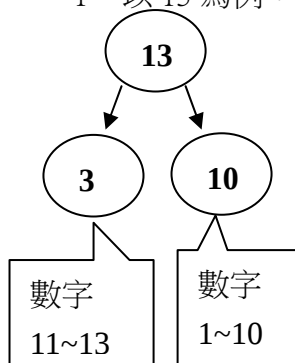
步驟二、4 個數字 22 分組(時鐘分組法)，共有 3 欄，將數字 5~7 插入→利用發現七-(1)

步驟一、 x 個數字 33 分組($x+2\sim 2x+1$)

步驟二、 $x+1$ 個數字 22 分組(時鐘分組法)，共有 x 欄，將數字 $x+2\sim 2x+1$ 插入→利用發現七-(1)

(二) 方法二：利用發現八與發現四

1、以 13 為例：分 2 組數字

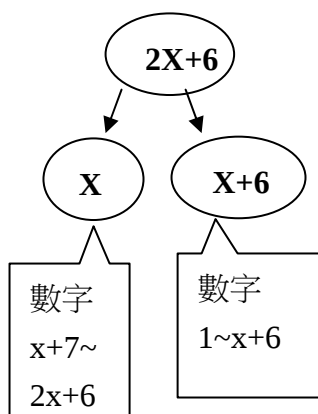


步驟一、3 個數字分組(11~13)

步驟二、10 個數字分組(只有距離 1, 2, 3)→利用發現八

步驟三、10 個數字 22 分組(距離 4, 5)，共有 3 欄，將數字 11~13 插入→利用發現四

2、 $2X+6$ 的公式解： $2X+6$ 個數字中，數字 a 與數字 b 的距離為 $a-b(a>b)$ ，最遠的距離為 $X+3$



步驟一、 X 個數字($x+7\sim 2x+6$)33 分組→如尚未分組則需要往前找

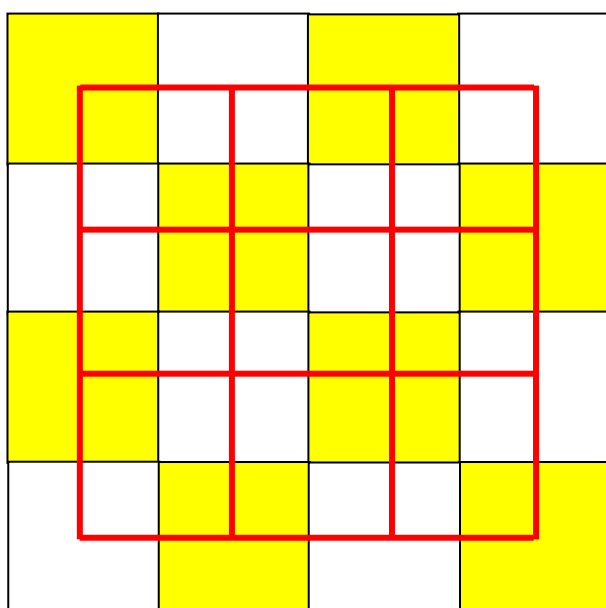
步驟二、 $X+6$ 個數字分組(只有距離 1, 2, 3)→利用發現八，如(1,2,4) (2,3,5) $(1+t, 2+t, 4+t) \dots$ 等

步驟三、 X 個數字 22 分組(1,2,3 以外的距離)，共有 X 欄，將數字 $x+7\sim 2x+6$ 插入→利用發現四

(1)方法一：利用發現七--(1)與時鐘分組法。數字 $Z=3+12t$ 或 $7+12t$ 時可以使用

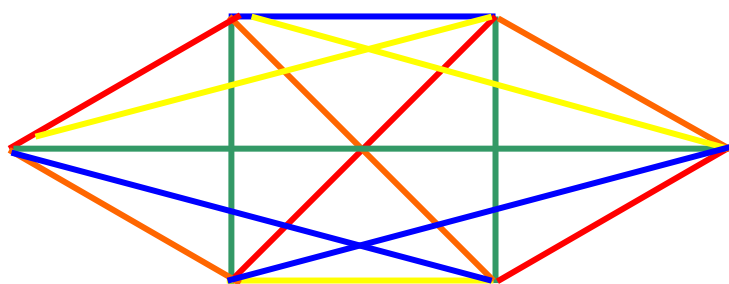
(2)方法二：利用發現八與發現四。數字 $Z=9+12t$ 或 $1+12t$ 時可以使用

我們看了一個電視節目，上面提到有許多小狗需要大量的運動，可是因為主人沒有時間帶他們出去運動，造成小狗的不健康。所以我們就利用棋盤點的規律創造出一套溜狗的方式：



因為我們知道棋盤點的規律是 0 和 x 交互進行，所以小狗跑的規律一定是黃白黃白…
這樣我們就可以控制住終點和時間
只要事先知道規律，那就可以用電腦控制柵欄的開關，因此可以在我們可以掌控的
範圍內讓小狗跑到終點。

三、新玩具的玩法與規則：我們利用了六個點的完全圖和時鐘分組製作了新的動腦玩具，如下圖：



規則：

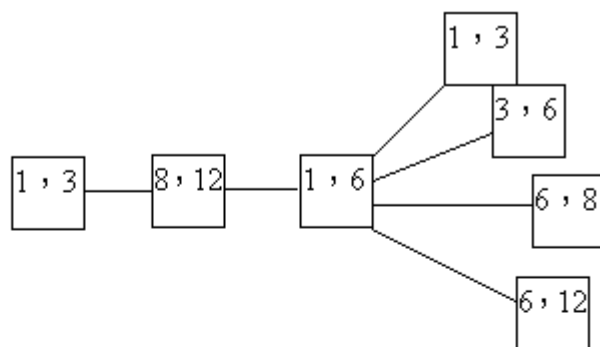
- 1、每個點上面都有 5 條線，每條線的顏色都不一樣。
- 2、共有 15 條線 5 種顏色，每條線都必須放上去。

玩法有好幾種：

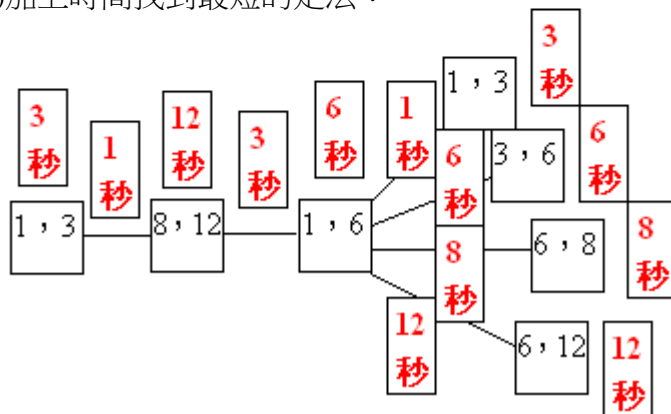
- 1、比賽看誰能拼出最多種類的花色和形狀。
- 2、初學者可以先從拼出完整的圖案開始。
- 3、完成其中一種圖案，並拿掉幾條線，要求玩家利用規律與推理復原成原本的形狀。

四、捷運路線法與過橋遊戲：在網路上有一個過橋遊戲，規則如下：在半夜的橋邊有 5 人要過橋，過橋一定要拿燈，可以 2 人一起上橋，可是只有一盞可以點燃 30 秒的燈，5 人過橋的速度分別是：瘦子 1 秒鐘，小胖子 3 秒鐘，女人 6 秒鐘，大胖子 8 秒鐘，老人 12 秒鐘。

(一)利用捷運路線法把全部的走法列出來：我們把所有可能的方法都用捷運路線法列出來，花了許多時間，範例如下：



(二)加上時間找到最短的走法：



(三)因為路徑很多所以我們用 Excel 統計了所有的數字，找到了時間最短的路徑是 29 秒。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	3	1	12	3	3	1	6	29
2	3	1	12	3	3	3	6	31
3	3	1	12	3	3	8	8	38
4	3	1	12	3	3	12	12	46
5	3	1	12	3	6	1	3	29
6	3	1	12	3	6	6	6	37
7	3	1	12	3	6	8	8	41
8	3	1	12	3	6	12	12	49
9	3	1	12	3	6	3	3	31
10	3	1	12	3	6	6	6	37

陸、研究結果

一、在棋盤點的格式時

- (1)因為必須要 0▲0▲0▲交換走，所以當我們去掉一個「▲」時，「▲」就剩下 21 個，「0」有 23 個，「0」最後會多一個，無法一筆畫走完。
- (2)「0」和「▲」的數目相差大於等於 2 時，就無法一筆畫走完。
- (3)偶數點數的圖形「0」和「▲」的數目相等，只去掉一個「▲」並不會造成「0」和「▲」的數目相差大於等於 2。

二、n 個點的完全圖時

- (1)n 個點可以構成 $n \times (n-1) \div 2$ 條通道
- (2)從不固定的點出發會有 $n!$ 種走法
- (3)固定的點出發會有 $(n-1)!$ 條路徑,但圖形只有 $(n-1)! \div 2$ 種

三、n 個點的完全圖時

- (1)n 是奇數時，會有 $(n-1) \div 2$ 個完全不同的圈
- (2)n 是偶數時，會有 $(n-2) \div 2$ 個完全不同的圈

四、n 個點的完全圖時，在固定距離 d 之下

- (1)當 n 和 d 互質時，會形成一個一筆畫的圈
- (2)當 n 和 d 的最大公因素是 g 時，會形成 g 個圈，每個圈會有 $n \div g$ 個點

五、可以利用必要的路徑和沒用的路徑判斷圖形是否可以形成點一筆畫的圈

六、(1)利用捷運路線法可以找出點一筆畫的路徑與圈。

(2)正方體的頂點與邊可以形成 3 種點一筆畫路徑與一個點一筆畫的圈。

(3)沿著正方體的 3 種點一筆畫路徑去切割，可形成 3 種正方體展開圖。

七、在 22 分組(象棋分組)中

- (1)只要數字是 2 的 n 次方，都很好分。
- (2)時鐘分組法：1 為圓心，數字 2~n 平均分布在圓周上，當 1 和數字 a 同組時，以直線 1，a 為對稱軸，其他任 2 個對應點分同組。共分 $(n-1)$ 場，每場有 $n \div 2$ 組

- (3)時鐘分組法分出的任 2 組可形成一個一筆畫的圈。
- (4)我們可以利用時鐘分組法來分座位。
- (5)發現三(1) n 是奇數時，會有 $(n-1) \div 2$ 個完全不同的圈→可用時鐘分組法來解釋。

八、在 33 分組(跳棋分組)中

- (1) 偶數和 $5+6n$ 的數字皆不能 33 分組。
- (2) $7+6n$ 和 $3+6n$ 可以用慢慢找出的方式 33 分組

九、在平面中有 n 個點， $n \geq 3$ 時

- (1) 最少路徑數的 2 個頂點的路徑數相加如果大於或等於 n 時可以有一筆畫的圈。
- (2) 每個頂點的路徑數都比 $n \div 2$ 還多的時候一定可以有一筆畫的圈。

十、33 分組時

- (1)方法一：利用發現七--(1)與時鐘分組法。數字 $Z=3+12t$ 或 $7+12t$ 時可以使用
- (2)方法二：利用發現八與發現四。數字 $Z=9+12t$ 或 $1+12t$ 時可以使用

柒、結論

這次的研究讓我們知道了點和點之間的部份關係，也知道了千元大鈔是一定拿不到了，可是我們有了更寶貴的收穫。現在只要給一個圖形，就可以利用必要的路徑和沒用的路徑判斷出是否可以點的一筆畫。我們也知道了哪些圖形一定會有一筆畫的圈。發現了時鐘分組法之後，不管是分組、座位、紀錄路徑都可以輕易的解決。至於捷運路徑法確實是一個很好的解決問題的萬用法門，可惜需要花很多的時間來推算，所以將電腦學好，利用電腦來計算資料是很重要的。22 分組或 33 分組是很好的分組工具，在分組之後都不會有重複分組的問題。最後我們覺得數學果然不止步於數字之上，沒有數字的數學也很重要，而且更能運用於日常生活之中。

捌、參考資料及其他

- 一、七橋問題：<http://apollonius.math.nthu.edu.tw/d1/ne01/jyt/famousthm/7bridge.htm>
- 二、康軒文教事業（2012）。國民小學數學學習領域第9冊第5單元線對稱圖形。新北市：康軒。
- 三、康軒文教事業（2012）。國民小學數學學習領域第11冊第1單元最大公因數與最小公倍數。新北市：康軒。

【評語】 080412

藉由討論“怎樣的圖形可以點一筆畫走完”以及“如何有效地 33
分組”，進而探討“點一筆畫”和“分組”二者間的關聯，循序解決問題的努力，值得鼓勵。