中華民國第53屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080408

填滿方格

學校名稱：新北市三峽區龍埔國民小學

作者：	指導老師：
小六 黃瑋筑	龔凡凱

關鍵詞：競賽題、二維表格、填滿

壹、摘要

本研究取自一道 2006 年國際小學數學及自然科學奧林匹亞的題目：在無限大的二維表格中，依某種規律，將正整數 1、2、3、4、…逐一填入每小格中，該題目問了 3 道子題。我解決了該題，之後我更改原題填數字的規律，得到一個新題目，也解決了類似的 3 道問題，不僅如此，對於其他類似填滿表格的方法，我在本研究得到的解法都可解決，使得我的方法具有相當的應用性。

貳、問題介紹

我主要研究 2006 年國際小學數學及自然科學奧林匹亞(International Mathematics and Science Olympiad for Primary School 2006，簡稱 IMSOP2006)第 3 題，如下：

問題 1(IMSOP2006 第 3 題). 表 1 是一種 2 維表格，依某種規律填入 1、2、3、…、等所有正整數。

表 1. 問題 1 所說的二維表格

		列									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
行	1	1	2	6	7	15	16				
	2	3	5	8	14	17					
	3	4	9	13	18						
	4	10	12	19							
	5	11	20								
	6	21									
	7										
	8										
	9										
	⋮										

表 1 的橫向為列，直向為行，例如「第 2 列第 3 行」是 8；「第 4 列第 2 行」是 12。
請問：

問題 1.1. 如果按照表 1 填數字的模式，第 7 列，第 7 行是哪個數字？
問題 1.2. 100 在第幾列，第幾行？
問題 1.3. 150 的下面一格為哪一個數字？

參、研究動機

老師提出一些課外題目，很幸運地，我答對其中幾題，老師便問我是否有興趣做科展，我一口答應。老師給了我問題 1 去思索，於是就此展開我的科展研究之旅。

肆、研究目的

一、解出問題 1 問的 3 道子題。

二、解出關於問題 1 的變化題。

三、承二，解出變化題的更一般化型式。

伍、研究工具

一、計算紙、筆、筆記本。

陸、研究過程

一、解決問題 1

以下我依序解決問題 1.1、1.2、1.3。

(一)解決問題 1.1

問題 1.1. 如果按照表 1 填數字的模式，第 7 列，第 7 行是哪個數字？

1. 發現

由於題目要求第 7 列第 7 行的數字，我開始注意到 m 列 m 行的數字，例如第 1 列第 1 行為 1，第 2 列第 2 行為 5……因為它們恰在表 1 的對角線上，所以我稱它們為「**表 1 的對角線數列**」，列出來就是

(1) $$1，5，13，25，41，\cdots$$

我觀察到(1)的相鄰數的差形成有規律的數列

(2) $$4，8，12，16，\cdots$$

寫成發現 1

發現 1. 表格 1 的對角線數列相鄰數的差即是依 4 的 1 倍、2 倍、3 倍、…排列。

2. 分析

根據發現 1，我就可以把表 1 的對角線數列用「4 的倍數和」來表示，見表 2。

表 2. 表 1 的對角線數列用 4 的倍數和來表示

數字所在的列與行	表 1 對角線數列上的數	用 4 的倍數和表示
第 1 列第 1 列	1	$1=1+0\times4$
第 2 列第 2 列	5	$5=1+0\times4+1\times4$
第 3 列第 3 列	13	$13=1+0\times4+1\times4+2\times4$
第 4 列第 4 列	25	$25=1+0\times4+1\times4+2\times4+3\times4$
第 5 列第 5 列	41	$41=1+0\times4+1\times4+2\times4+3\times4+4\times4$

從表 2 很容易推得第 7 行第 7 列的數即為

(3) $$1+0\times4+1\times4+2\times4+3\times4+4\times4+5\times4+6\times4=85$$

雖然我解出了問題 1.1，但老師提醒我做數學科展就是要嚴謹，要我試著說明發現 1 對所有對角線上的數都成立，所以我提出說明如後。

3. 說明發現 1 對所有正整數都成立

見表 3，我觀察對角線數列中相鄰項的差，可以分成 3 個部份。

表 3. 對角線數上相鄰項的差之組成

		列									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
行	1	1	2	6	7	15	16	28	29	45	
	2	3	5	8	14	17	27	30	44		
	3	4	9	13	18	26	31	43			
	4	10	12	19	25	32	42				
	5	11	20	24	33	41					
	6	21	23	34	40						
	7	22	35	39							
	8	36	38								
	9	37									
	⋮										

舉例來說，25 到 41 之間的差距之間的數字(從 26~41)，如果把它們分類(表 3 用斜線、橙色、灰色標示)

表 4.

25 到 41 之間的數	個數	表格 3 的標示
26、27、28	3	斜線
29、30、31．32、33、34、35、36	8	橙色
37、38、39、40、41	5	灰色

就可以發現 25 和 41 的差 16 可寫成

$$16=3+8+5$$

觀察表 3，由**東北往西南向**的斜底部份(6，14-15，26-28)，格子數量由 1 個，2 個，3 個有規律的增加，類似地，**橙色和灰色的部份也是如此(待改)**。然後我整理對角線上的前 4 個數可得

表 5

對角線數列 第 m 項和 $m-1$ 項的差	對角線上相鄰數的差	差的組成(見表 3)
第 2 項和第 1 項的差	$5-1=4$	$4=0+2+2$
第 3 項和第 2 項的差	$13-5=8$	$8=1+4+3$
第 4 項和第 3 項的差	$25-13=12$	$12=2+6+4$
第 5 項和第 4 項的差	$41-25=16$	$16=3+8+5$

因而可推得第m項和$m-1$項的差為

(4) $$(m-2)+2\times(m-1)+m=4m-4=4\times(m-1)$$

確定了對角線數列上第第m項和$m-1$項的差為$4\times(m-1)$後，接著回想表 2，如果我們要找m列m行的數，便能用下列算式來找

(5) $$1+0\times4+1\times4+2\times4+3\times4+4\times4+\cdots+(m-1)\times4$$

接著求(5)式的和

$$\begin{aligned}
&1+0\times4+1\times4+2\times4+3\times4+4\times4+\cdots+(m-1)\times4\\
&=1+4\times[1+2+3+4+\cdots+(m-1)]\\
&=1+4\times\left[\frac{(1+m-1)\times(m-1)}{2}\right] \qquad \text{（高斯求和法）}\\
&=1+4\times\frac{m\times(m-1)}{2}\\
&=1+2\times m\times(m-1)
\end{aligned}$$

所以，我便得出問題 1.1 一般化的結果。

上述「高斯求和法」即是計算 1、2、3、⋯、n這些數之和的方法

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(1+n)\times n}{2}$$

之後本研究會應用到求等差數列的和，因此我學習了公式如下：

公式 A(等差數列求和公式)
給定一等差數列，設首項為a，公差為d，則其前n項和為

$$\frac{[a\times2+(n-1)\times d]\times n}{2}$$

4. 結果

結果(問題 1.1 的一般化解答). 表 1 第m列m行的數為

$$1+2\times m\times(m-1)$$

(二)解決問題 1.2

問題 1.2. 100 在第幾列，第幾行？

1. 觀察

數學課本第二單元裡提到「三角形數」，因此我想到表 1 順時鐘旋轉 90 度就是三角形數的排列(見圖 1)，如果我能知道圖 1 第 n 層的最大值與最小值，就可以確定題目給的數在哪一層，而且看圖 1 的每一層，再對照表 1，便可以知道該層最大數與最小數的「座標」，也就能推出題目問的數其所在的座標。

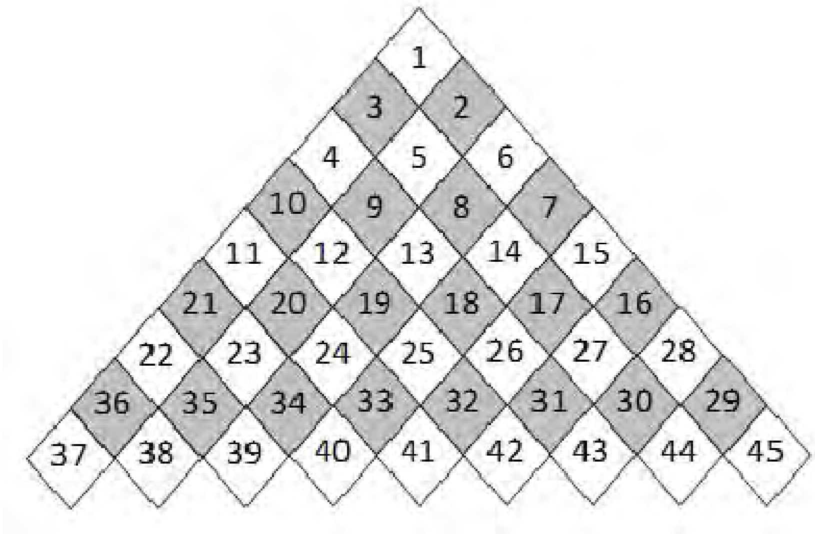

圖 1. 表 1 順時鐘旋轉 90 度後得到三角形數的排列

2. 發現

觀察圖 1 可知，每一層的最大數即是從第 1 層到目前這一層的所有數之個數；每一層的最小數即是上一層最大數加 1。

例如：第 9 層的最大數為 45，

$$45 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9$$

該層最小數為 37，即第 8 層最大數 36 再加 1

$$37 = (1+2+3+4+5+6+7+8)+1$$

我把圖 1 每層的最小數和最大數列在表 6，看看能得到什麼。

3. 分析

表 6. 圖 1 每一層的最小數與最大數

n 值	第 n 層的最小數	第 n 層的最大數	在表 1 中數字由小到大的走向
1	1	1	西南往東北
2	2	3	東北往西南
3	4	6	西南往東北
4	7	10	東北往西南
5	11	15	西南往東北
6	16	21	東北往西南
7	22	28	西南往東北
8	29	36	東北往西南
9	37	45	西南往東北
10	46	55	東北往西南
11	56	66	西南往東北
12	67	78	東北往西南
13	79	91	西南往東北
14	92	105	東北往西南
15	106	120	西南往東北
16	121	136	東北往西南
17	137	153	西南往東北
18	154	161	東北往西南

我順便指出奇數層和偶數層的數字由小到大之走向。注意到圖 1 中奇數層的數字走向，就是在表 1 中由小到大由西南往東北走，而偶數層的數字走向，在表 1 裡由小到大是由東北往西南走，接著來看題目問的「100」在圖 1 的哪一層。

從表 6 可知

$$92 \leqq 100 \leqq 105$$

表示 100 在第 14 層，由於 14 為偶數，表示該層在表 1 中，最小數 92 位於 1 列 14 行，由於

$$100-92=8$$

從 1 列 14 行沿西南方走 8 格即是 100，即 100 位於

「第(1+8)列、第(14-8)行」

也就是第 9 列、第 6 行。

統整上述計算過程，可以得到一般化的求任意正整數n位於哪一列哪一行的做法。

4. 結果

以下為求出題目給的n位於哪一列哪一行的作法。

(1)先找到m使得

$$\frac{(m+1)\times m}{2}+1\le n\le\frac{(m+1+1)\times(m+1)}{2}$$

若$n=\frac{(m+1)\times m}{2}+1$，則$n$在$m$列 1 行，當$m$為奇數；
或在 1 列m行，當m為偶數。

若$n=\frac{(m+1+1)\times(m+1)}{2}$，則推得$n$在 1 列$m$行，當$m$為奇數；
或在m列 1 行，當m為偶數。

(2)如果n既不是該層的最小數或最大數，則令

$$M=\frac{(m+1)\times m}{2}+1，d=n-M$$

a. 若m為奇數，則n的所在位置要從m列 1 行沿著東北方數d格，即n就在

$(m-d)$列，$(1+d)$行

b. 若m為偶數，則n的所在位置要從 1 列m行沿著西南方數d格，即n就在

$(1+d)$列，$(m-d)$行

(三)解決問題 1.3

問題 1.3. 150 的下面一格為哪一個數字？

1.觀察

如果我們能先知道 150 位在表 1 的第幾列第幾行，就能推出 150 下面一格的列行值，只要把 150 的**列值**再加 1 即可，但還要知道從題目給的列行值去推求出該位置數值的方法。

2.分析

運用先前找給定 n 求其位置的方法，可以找出 150 所在的列行值，見表 6 可知

137≦150≦153

150 位在第 17 層，因為 17 為奇數，所以 150 要從 17 列 1 行往東北方數

150-137＝13(格)

因而 150 位在第 4 列、第 14 行，換句話說，題目 1.3 等同要我們找「第 5 列第 14 行」是哪一個數。

從第 5 列第 14 行沿著西南方走到底即是第 18 列第 1 行，也就是圖 1 的第 18 層，見表 6 可知第 18 層的最小值為 154，由於 18 為偶數，所以最小數位於第 1 列第 18 行，而第 5 列第 14 行就是從第 1 列第 18 沿西南走 4 格，因而 150 的下一格就是

154+4＝158

3.結果

承上，我的重點是依據題目給定列行值 (i, j) ，要找出該位置的數值之一般化的作法

(1)將題目給的列行值沿東北或西南走到底，直到 1 列 m 行或 m 列 1 行為止，其中 $m = i + j - 1$ 。

(2)此時就能知道該列行值位於圖 1 的第 m 層。

(3)依據 m 的奇偶，判斷在表 1 中由小到大的走向，確定第 m 層最小數是在 1 列 m 行或 m 列 1 行。

(4)設從最小數為 M ，並從它的位置需走 d 格才到題目問的位置，若 m 為偶數，則 $d = i - 1$ ； m 為奇數，則 $d = j - 1$ 。

(5)則題目要找的數為

$$M + d$$

二、我自己擬的新題目

問題 2.（我參考問題 1，自己擬的新題目）

表 7. 問題 2 所說的表格

		列										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
	1	1	2	3	14	15	16	39	40	41	76	
	2	6	5	4	13	18	17	38	43	42	75	
	3	7	10	11	12	19	36	37	44	73	74	
	4	8	9	22	21	20	35	46	45	72		
	5	25	24	23	32	33	34	47	70	71		
行	6	26	29	30	31	50	49	48	69			
	7	27	28	53	52	51	66	67	68			
	8	56	55	54	63	64	65					
	9	57	60	61	62							
	10	58	59									
	⋮											

請問：

問題 2.1. 如果按照表 7 填數字的模式，第 7 列，第 7 行是哪個數字？
問題 2.2. 100 在第幾列，第幾行？
問題 2.3. 150 的下面一格為哪一個數字？

問題 2 的數字排列模式：依下列順序填入 1、2、3、4、5、6、…所有正整數；從第 1 列第 1 行出發，向東走到第 3 格，向南 1 格，往西走 2 格直到第 2 列第 1 行為止，再向南 2 格，向東 1 格，如此延前面已走過的格子走下方尚未走過的格子，直到第一列時要走 3 格再往南 1 格，再延著已走過的格子的下方等…，走到第 1 行時，要往南走 3 格才能轉向東方走 1 格…

(一)解決問題 2.1

問題 2.1. 如果按照表 7 填數字的模式，第 7 列，第 7 行是哪個數字？

1. 觀察

類似問題 1.1 的觀察，我先將表 7 對角線上的數字列出來

(6) 1，5，11，21，33，49，67，…

便得知問題 2.1 的解答為 67。

接著為了尋求對角線數列的規律，我將(6)式相鄰數的差列出來

(7) 4，6，10，12，16，18，…

(7)式可看作交錯型等差數列，即分別由

(8) 4，10，16，…

(9) 6，12，18，…

兩個公差都是 6 的等差數列交錯而成，寫成發現 2 如下。

發現 2. 表 7 的對角線數列，其**相鄰數的差**形成交錯型等差數列，公差都是 6

2. 分析

想要知道 m 列 m 行的數字，就要掌握數列(7)，因為它是對角線數列相鄰項的差，由於它是交錯型等差數列，如果能知道兩等差數列的首項，再依題目問的列行值，知道要計數到數列的第幾項，就能算出對角線上的每個數。

3. 一般化的結果

這裡敘述求對角線數列的一般化方法。

問題 2.1*. 參見表 7，請問 m 列 m 行的數字是多少？

主要是從 1 出發，加上 1 到 m 列 m 行那一格之間的差距，即為所求，因此接下來是找「求差距總和」的方法，先觀察數據，分 m 為奇和偶來看。

$m=11$，表示(7)式有 6 個奇數項，5 個偶數項，如下

(10) 4，10，16，22，28，34

(11)　6，12，18，24，30

則 11 列 11 行的值為

$$\boxed{1}+4+6+10+12+16+18+22+24+28+30+34$$

注意到 $\boxed{1}$ 為對角線數列的第 1 項。

$m=12$，表示(7)式有 6 個奇數項，6 個偶數項，如下

(12)　4，10，16，22，28，34

(13)　6，12，18，24，30，36

則 12 列 12 行的值為

$$\boxed{1}+4+6+10+12+16+18+22+24+28+30+34+36$$

從上述兩個觀察，可以知道就是要將兩個等差數列加起來，再加上 1，就能求出 m 列 m 行的數值，應用前述求等差數列和的公式 A，再分類奇數項的個數和偶數項的個數，寫成算式，計算後就能得到問題 2.1*的答案。

(1)如果 m 是奇數，則有 $\frac{m+1}{2}$ 個奇數項，$\frac{m-1}{2}$ 個偶數項，那麼

奇數項相加得

$$\begin{aligned}&4+10+16+\cdots\cdots\\&=\frac{[2\times4+(\frac{m+1}{2}-1)\times6]\times(\frac{m+1}{2})}{2}\\&=(8+3m-3)\times\frac{m+1}{4}\\&=\frac{(m+1)}{4}\times(3m+5)\end{aligned}$$

偶數項相加得

$$\begin{aligned}&6+12+18+\cdots\cdots\\&=\frac{[2\times6+(\frac{m-1}{2}-1)\times6]\times(\frac{m-1}{2})}{2}\\&=(12+3m-9)\times\frac{m-1}{4}\\&=\frac{(m-1)}{4}\times(3m+3)\end{aligned}$$

最後把 1 及奇數項和併偶數項和一起加總得

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{(m+1)}{4}\times(3m+5)+\frac{(m-1)}{4}\times(3m+3)\\
&=1+\frac{3m^2+8m+5}{4}+\frac{3m^2-3}{4}\\
&=\frac{3m^2+4m+3}{2}
\end{aligned}
$$

(2)如果 m 是偶數，則有 $\frac{m}{2}$ 個奇數項，$\frac{m}{2}$ 個偶數項，那麼

奇數項相加得

$$
\begin{aligned}
&4+10+16+\cdots\cdots\\
&=\frac{[2\times4+(\frac{m}{2}-1)\times6]\times(\frac{m}{2})}{2}\\
&=(8+3m-6)\times\frac{m}{4}\\
&=\frac{m}{4}\times(3m+2)
\end{aligned}
$$

偶數項相加得

$$
\begin{aligned}
&6+12+18+\cdots\cdots\\
&=\frac{[2\times6+(\frac{m}{2}-1)\times6]\times(\frac{m}{2})}{2}\\
&=(12+3m-6)\times\frac{m}{4}\\
&=\frac{m}{4}\times(3m+6)
\end{aligned}
$$

最後把 1 及奇數項和併偶數項和一起加總得

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{m}{4}\times(3m+2)+\frac{m}{4}\times(3m+6)\\
&=1+\frac{3m^2+2m}{4}+\frac{3m^2+6m}{4}\\
&=\frac{3m^2+4m+2}{2}
\end{aligned}
$$

4. 對角線數列規律成立理由

發現 2 成立的理由

表 8

		列													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
行	1	**1**	2	3	14	15	16	39	40	41	76	77	78		
	2	6	**5**	4	13	18	17	38	43	42	75	80	79		
	3	7	10	**11**	12	19	36	37	44	73	74	81			
	4	8	9	22	**21**	20	35	46	45	72	83	82			
	5	25	24	23	32	**33**	34	47	70	71	84				
	6	26	29	30	31	50	**49**	48	69	86	85				
	7	27	28	53	52	51	66	**67**	68	87					
	8	56	55	54	63	64	65								
	9	57	60	61	62										
	10	58	59												
	⋮														

以下以說明「11~21 的差距」與「1~5 的差距」相差 6 為例。

見表 8，1~5 之間的差距以著色 2、3、4、5 的格子表示、11~21 的差距以 12~21 的格子著色。觀察表 8 知，2~5 之間的部份可嵌入 12~21 區域中(即嵌入 12，19，20，21 的部份)，則 12~21 的區域還有 6 格(即 13~18 的部份)，便知「11~21 的差距」與「1~5 的差距」相差 6。

接著說明「5~11 的差距」與「21~33 的差距」相差 6 為例。

見表 8，5~11 之間的差距以著色 6~11 的格子來表示、21~33 的差距在 22~33 的格子著色。觀察表 8 知，2~5 之間的部份可嵌入 12~21 區域中(即嵌入 12，19，20，21 的部份)，則 12~21 的區域還有 6 格(即 24~29 的部份)，便知「5~11 的差距」與「21~33 的差距」相差 6。

(二)解決問題 2.2

問題 2.2. 100 在第幾列第幾行？

1. 階梯排列

我參考解決問題 1.2 的方法，仿照圖 1 的作法，也想將表格 7 轉成一個類似三角形的樣子，但由於表 7 的數字走向並非沿著西南-東北「整齊」的排列，而是有不同的規律，經過我一再觀察後，發覺表 7 的數字像「階梯」一樣地排列，見表 9。

表 9. 表 7 的數字分布可看成一層又一層的階梯

		列											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
	1	1	2	3	14	15	16	39	40	41	76	77	
	2	6	5	4	13	18	17	38	43	42	75		
	3	7	10	11	12	19	36	37	44	73	74		
	4	8	9	22	21	20	35	46	45	72			
	5	25	24	23	32	33	34	47	70	71			
行	6	26	29	30	31	50	49	48	69				
	7	27	28	53	52	51	66	67	68				
	8	56	55	54	63	64	65						
	9	57	60	61	62								
	10	58	59										
	⋮												

我將表 7 的數字分成一層層(表 9 中以黃色或橙色分層)，如果只看單一層，有點像階梯一格一格由西南往東北爬，因此我稱之為「n 層階梯」，例如
第 3 層階梯的數列為：

8，9，10，11，12，13，14，15

第 5 層的數列為

27，28，29，30，……，40

接著我會希望知道各層階梯的組成，以方便我去找出題目問的數字會在那一層，因此列表觀察，見表 10。

表 10. n 層階梯的組成

層數 n	該層的數字範圍	該層的數字個數	數字的走向	層數的奇偶
1	1～2	2	西南→東北	奇
2	3～7	5	東北→西南	偶
3	8～15	8	西南→東北	奇
4	16～26	11	東北→西南	偶
5	27～40	14	西南→東北	奇
6	41～57	17	東北→西南	偶
7	58～77	20	西南→東北	奇
8	78～100	23	東北→西南	偶
9	101～126	26	西南→東北	奇
10	127～155	29	東北→西南	偶
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m		$3m-1$	西南→東北	奇
$m+1$		$3m+2$	東北→西南	偶

(1)從表 10 可知，相鄰層的數字數量即形成公差為 3 的等差數列，因而可以計算出第 n 層的數字範圍

n 層階梯中第 n 層的最大值。

$$
\begin{aligned}
&2+5+8+\cdots+[2+(n-1)\times 3] \\
&=\frac{[2+(2+(n-1)\times 3]\times n}{2} \\
&=\frac{n\times(3n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

n 層階梯中第 n 層的最小值。

$$
\begin{aligned}
&2+5+8+\cdots+[2+(n-2)\times 3]+1 \\
&=\frac{[2+(2+(n-2)\times 3]\times(n-1)}{2}+1 \\
&=\frac{(n-1)\times(3n-2)}{2}+1
\end{aligned}
$$

(2)除了知道 n 層階梯最大值與最小值的計數方法外，我還觀察出最大值與最小值所在的座標

表 11.　n 層階梯最小值與最大值的座標

	n 為奇數	n 為偶數
最小值	$(\frac{3n-1}{2}，1)$	$(1，\frac{3}{2}n)$
最大值	$(1，\frac{3n+1}{2})$	$(\frac{3}{2}n，1)$

(3)**「階梯數列」的個數為公差 3 的等差數列的理由**

以下觀察 $2\leq n\leq 5$ 的 n 層階梯相鄰　　層數字個數的差。

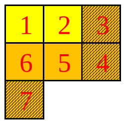

圖 2.　第 2 層階梯的數字個數比第 1 層階梯的數字個數還多 3 個(見斜線部份)

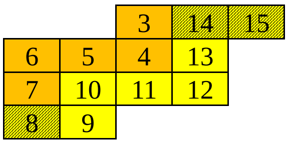

圖 3. 第 3 層階梯的數字個數比第 2 層階梯的數字個數還多 3 個(見斜線部份)

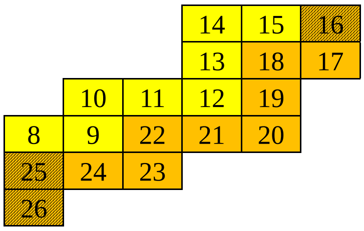

圖 4. 第 4 層階梯的數字個數比第 3 層階梯的數字個數還多 3 個(見斜線部份)

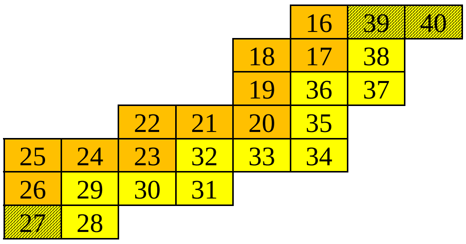

圖 5. 第 5 層階梯的數字個數比第 4 層階梯的數字個數還多 3 個(見斜線部份)

觀察圖 2 至圖 5，可發現第 k 層有一部份形狀和第 $k+1$ 層的形狀是一模一樣的，至於第 $k+1$ 和第 k 層不同的地方，就是多了 3 格，因而可知階梯數列中，相鄰層總相差 3 格，這解釋了每一層的數字數量會形成以 3 為公差的等差數列。

2. 階梯排列中每一層以「上對角線」為軸形成線對稱。

透過階梯排列，我可以知道題目問的數字在哪一層，但還不能掌握它的位置，因為每一層階梯並不如圖 1 的三角形是數字不是往東北或西南排列，而是有些「曲折」，幸好經過觀察後，我發覺對奇偶層的階梯，「曲折」都有其規律，以下分別以第 7 層及第 8 層為例

表 12. 第 7 層的階梯

		列											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	⋯
行	1	1	2	3	14	15	16	39	40	41	76	77	
	2	6	5	4	13	18	17	38	43	42	75		
	3	7	10	11	12	19	36	37	44	73	74		
	4	8	9	22	21	20	35	46	45	72			
	5	25	24	23	32	33	34	47	70	71			
	6	26	29	30	31	50	49	48	69				
	7	27	28	53	52	51	66	67	68				
	8	56	55	54	63	64	65						
	9	57	60	61	62								
	10	58	59										
	⋮												

規定 3(上對角線). 從第 1 列第 2 行出發，西北-東南向的數列為「上對角線」(見表 12 和表 13 的藍色直線)。

補充說明 4. 注意到上對角線裡每個數的座標其行值比列值多 1。

補充說明 5. 上對角線裡數的列值即代表它位於哪一層階梯。

補充說明 6. 上對角線裡數的項數即代表它位於哪一層階梯。

分析 7. 我發現第 7 層的階梯排列以上對角線為對稱軸，除了 58，59，77 之外，其餘有著「線對稱」的關係。紅框的格子有 3 個，紫框的格子也有 3 個，每個框裡都是 3 個數字—我稱每個框為「3 連格」。

表 13. 第 8 層的階梯

		列											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
行	1	1	2	3	14	15	16	39	40	41	76	77	78
	2	6	5	4	13	18	17	38	43	42	75	80	79
	3	7	10	11	12	19	36	37	44	73	74	81	
	4	8	9	22	21	20	35	46	45	72	83	82	
	5	25	24	23	32	33	34	47	70	71	84		
	6	26	29	30	31	50	49	48	69	86	85		
	7	27	28	53	52	51	66	67	68	87			
	8	56	55	54	63	64	65	90	89	88			
	9	57	60	61	62	93	92	91					
	10	58	59	96	95	94							
	11	99	98	97									
	12	100											

分析 8. 第 8 層的階梯排列以上對角線為對稱軸，除了 78，79，100 之外，其餘有著接近「線對稱」的關係。紅框的格子有 4 個，紫框的格子有 3 個，即紅框比紫框多 1 個，且每個框裡都是 3 個數字。

根據分析 7 和分析 8，再加上觀察其它層的階梯，我可以統整階梯的結構

結論 9(m **層階梯的結構).**

1. 若 m 為奇數，除了該層階梯的最小值和最小值加 1 和最大值，則其餘數字以上對角線為對稱軸，上對角線的西南邊會有 $\frac{m-1}{2}$ 個橫向 3 連格，3 連格裡的數字由小至大從左至右排列；上對角線的東北方會有 $\frac{m-1}{2}$ 縱向 3 連格，3 連格裡的數字由小至大從下至上排列。橫向 3 連格與縱向 3 連格的交點在上對線。
2. 若 m 為偶數，除了該層階梯的最小值和最小值加 1 和最大值，則其餘數字以上對角線為對稱軸，上對角線的西南邊會有 $\frac{m}{2}$ 個橫向 3 連格，3 連格裡的數字由小至大從右至左排列；上對角線的東北方會有 $\frac{m-2}{2}$ 縱向 3 連格，3 連格裡的數字由小至大從上至下排列。橫向 3 連格與縱向 3 連格的交點在上對角線上。

3. 利用上對角線定出題目問的數字的方位

問題 2.2 是找出給定數字的位置，由於表格 7 並不像問題 1 那樣排得一目瞭然，所以我想用「上對角線」來幫我確定數字的位置。

注意到上對角線中數字的規律和對角線一樣，其相鄰項的差都是公差為 6 的交錯型等差數列，

(14)　　2，4，12，20，34，48，68

(15)　　2，8，8，14，14，20

這表示我可以知道上對角線裡的每個數。

經過整理後，我歸納出解決問題 2.2 的步驟。

由於問題 2.2 問的「100」就是第 8 層階梯的最大值，從表 11 就可知道 100 在第 12 列第 1 行，於是我改個數字去試算。

問題 2.2*.　135 在第幾列第幾行？

注意到

$$127 \leqq 135 \leqq 155$$

根據表 10 得知它在第 10 層階梯。

先計數出上對角線的數列的第 10 項

$$2，4，12，20，34，48，68，88，114，140$$

由於

$$135 < 140$$

又 10 為偶數，故知道 135 位於 140 的東北方，在某個縱向 3 連格裡。

再來從

$$140 - 3\times 1 > 135 > 140 - 3\times 2$$

得知 135 位於 140 所在縱向 3 連格的東北第 2 個 3 連格裡

可以推算出 135 所在座標。因為 140 位於第 10 列第 11 行(補充說明?)，

列值：10—5＝5

行值：11＋2＝13

得知 135 位於表 7 的第 5 列第 13 行。

4. 用階梯排列、上對角線來解決問題 2.2 一般化的作法

方法 B. 解決問題 2.2 的一般化步驟

找出 n 在第幾列第幾行

1. 找出 n 在哪個 m 層階梯上。
2. 確認 m 的奇偶，判斷該層的數字由小到大是西南走向東北，或東北走向西南。
3. 找出上對角線與 m 層階梯交點的數字 M ，並且掌握 a 的座標。
4. 根據 m 的奇偶，及 M 與 n 的大小關係，去判斷 n 在階梯上，是位於 a 的東北方或西南方。
5. 計算 M 與 n 的的差，由 M 的座標出發，根據 m 層階梯的結構(結論 9)，就能推求出 n 的座標了。

5. 上對角線的數字規律成立的理由

為何上對角線數列相鄰項的差形成的數列，為兩公差均為 6 的交錯型數列？

(16)　　　　　　2，4，12，20，34，48，68

相鄰項差形成的數列為

(17)　　　　　　2，8，8，14，14，20

(17)的奇數項：

(18)　　　　　　2，8，14

以下說明 2~4 與 4~12 的差距相差 6，下表以不同顏色標示，注意到 2~4 的差距即是從 3 計數到 4 之間的數字個數，12~20 的差距即是從 13 計數到 20 之間的數字個數，見表 14

表 14.

		列													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
行	1	1	**2**	3	14	15	16	39	40	41	76	77	78		
	2	6	5	**4**	13	18	17	38	43	42	75	80	79		
	3	7	10	11	**12**	19	36	37	44	73	74	81			
	4	8	9	22	21	**20**	35	46	45	72	83	82			
	5	**25**	**24**	23	32	33	**34**	47	70	71	84				
	6	**26**	**29**	30	31	50	49	**48**	69	86	85				
	7	**27**	**28**	53	52	51	66	67	**68**	87					
	8	56	55	54	63	64	65								
	9	57	60	61	62										
	10	58	59												
	⋮														

觀察表 14 即知，2~4 間的差距形成的區塊，可嵌入 13~20 差距區域的紅框部份，而且 13~20 差距區域還多了 6 個數字(即表 14 的 13~18)。

接著說明 4~12 與 20~34 的差距相差 6，注意到 4～12 的差距即是從 5 計數到 12 之間的數字個數，20~34 的差距即是從 21 計數到 34 之間的數字個數，見表 14

觀察表 14 即知，4~12 間的差距形成的區塊，可嵌入 20~34 差距區域的紅框部份，而且 20~34 差距區域還多了 6 個數字(即表 14 的 24~29)，由此規律延伸，就可知道(17)將會形成公差 6 的交錯型等差數列。

我們說明上述規律的主要概念都是：前 2 項的差距形成的區域圖形可以剛好嵌入下 2 項差距形成的區域中。

(三)解決問題 2.3

問題 2.3. 150 的下面一格是多少？

(1)分析：從解決問題 1.3 的過程可以知道，我先求 150 的座標，就能知道其下面一格的座標，表示我其實要解決「從已知座標其求這個位置的數值」。

(2) 從已知座標其求這個位置的數值

表 15.

		列											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	1	2	3	14	15	16	39	40	41	76	77	78
	2	6	5	4	13	18	17	38	43	42	75	80	79
	3	7	10	11	12	19	36	37	44	73	74	81	
	4	8	9	22	21	20	35	46	45	72	83	82	
	5	25	24	23	32	33	34	47	70	71	84		
行	6	26	29	30	31	50	49	48	69	86	85		
	7	27	28	53	52	51	66	67	68	87			
	8	56	55	54	63	64	65	90	89	88			
	9	57	60	61	62	93	92	91					
	10	58	59	96	95	94							
	11	99	98	97									
	12	100											

a. 從簡單的例子觀察

舉個例子來說，我想知道第 8 列第 5 行的數。

觀察表 15，我發覺第 8 列第 5 行就在上對角線的第 8 列第 9 行的左邊 4 格，而且我可從「在上對角線某數的左邊 4 格」推測出題目問的座標在哪一層階梯上。

因為上對線左邊是橫向 3 連格，皆一層緊貼著一層，由於我已經可從上對角線得知 8 列 9 行是在第 8 層階梯，所以「在上對角線某數的左邊 4 格」是指該座標位於階梯的第

$$8-1=7$$

層。

由於我已掌握階梯的結構(見結論 9)，所以可以從第 7 層階梯的最小值或最大值出發去推算出第 8 列第 5 行的數值。

由於上對角線的第 7 項為 68，其座標為第 7 列第 8 行，所在的橫向 3 連格數字由左至右為 66，67，68。第 8 列表示位中心橫向 3 連格的左邊之 3 連格，第 5 行表示要從第 8 行數 4 個數，因而推得第 8 列第 5 行為

$$68-(3\times1+1)=64。$$

b. 解決問題 2.3

b-1　根據解決問題 2.2 的方法，可以知道 150 位於第 13 列第 4 行，因而題目 2.3 要問的是第 14 列第 4 行的數字為何。

b-2　上對角線第 14 項的座標為第 14 列第 15 行，就是位於第 14 層階梯上，所求的座標位於上對角線第 14 項的左邊 11 格。

b-3　注意上對角線左邊都是橫向 3 連格，且 11－2＝3x3，所求的座標位於第

$$14-3=11$$

層階梯上。

b-4　由於我們根據結論 9 可以掌握第 11 層階梯上的數字，因而推算出第 14 列第 4 行為

$$161$$

C. 最後，解決問題 2.3 一般化的步驟如下

問題 2.3*.　n 的下面一格是多少？

c-1　根據解決問題 2.2 的方法，可以知道 n 位於第 I 列第 J 行，因而題目 2.3*要問的是第 $I+1$ 列第 J 行的數字為何。

c-2　上對角線第 $I+1$ 項的座標為第 $I+1$ 列第 $I+2$ 行，就是位於第 $I+1$ 層階梯上，所求的座標位於上對角線第 $I+1$ 項的左邊 $I+1-J$ 格。

c-3　注意上對角線左邊都是橫向 3 連格，且 $(I+1-J-2)\div 3=b\cdots r$，所求的座標位於第

$$I-(b+1)$$

層階梯上。

c-4　由於我們根據結論 9 可以掌握第 $I-(b+1)$ 層階梯上的數字，因而推算出第 $I+1$ 列第 J 行的數字。

三、先填滿第一列前 a 行的數字模式

回想起表格 7 的數字模式，一開始是從第 1 列第 1 行出發，是先填滿第 1 列的第 1、2、3 行，之後延著已走過的格子下方排入數字。我想到如果一開始從第 1 列第 1 行出發，先填滿第 1 列的第 1、2、3、…a 行，也可填滿方格，為了有更進一步的研究，以下分別觀察 $a=4,5,6$ 的情形，並分析每一種填滿的方法有沒有類似表 7 的規律。

(一)先填滿第 1 列的第 1、2、3、4 行，$a=4$

表 16. 先填滿第 1 列的第 1、2、3、4 行，$a=4$

		列													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
行	1	**1**	2	3	4	19	20	21	22	53	54	55	56	103	
	2	8	**7**	6	5	18	25	24	23	52	59	58	57	102	
	3	9	14	**15**	16	17	26	49	50	51	60	99	100	101	
	4	10	13	30	**29**	28	27	48	63	62	61	98			
	5	11	12	31	44	**45**	46	47	64	95	96	97			
	6	34	33	32	43	68	**67**	66	65	94					
	7	35	40	41	42	69	90	**91**	92	93					
	8	36	39	72	71	70	89								
	9	37	38	73	86	87	88								
	10	76	75	74	85										
	⋮	77	82	83	84										
		78	81												
		79	80												

表 16 的數字填寫規則. 依下列順序填入 1、2、3、4、5、6、…所有正整數；從第 1 列第 1 行出發，向東走到第 4 格，向南 1 格，往西走 3 格直到第 2 列第 1 行為止，再向南 3 格，向東 1 格，如此延前面已走過的格子走下方尚未走過的格子，直到第一列時要走 4 格再往南 1 格，再延著已走過的格子的下方等…，走到第 1 行時，要往南走 4 格才能轉向東方走 1 格…

分析

1. 對角線數列的規律

(19)　　1，7，15，29，45，67，91

其相鄰項的差

(20)　　6，8，14，16，22，24

以奇偶項分別來看

(20-奇)　　6，14，22

(20-偶)　　8，16，24

是兩公差為 8 的交錯型等差數列。

2. 上對角線數列的規律

(21)　　2，6，16，28，46，66

其相鄰項的差

(22)　　4，10，12，18，20

以奇偶項分別來看

(22-奇)　　　　　　　4，12，20

(22-偶)　　　　　　　10，18

是兩公差為 8 的交錯型等差數列。

3. 階梯構造

(1)也可用「階梯排列」的概念將表 16 分成若干層，且奇偶層除了部份的數，其餘也會形成有規律的從西南往東北一階階往上爬，這些階是由一些橫向或縱向的 3 連格組成。

(2)每層階梯的數字數量形成以 4 為公差的等差數列。

(3)不分奇偶層，都有「中心橫向 4 連格」。

(4)注意到表 16 的每層階梯不是依著上對角線形成對稱，而是依中心橫向 4 連格的正中心處形成對稱。

發現. 有了上述分析，我知道表 15 的對角線、以階梯分層都有規律，所以以拿來解決類似競賽題的 3 道子題，也就是可以從數值找座標、從座標找數值。

(二)先填滿第 1 列的第 1、2、3、4、5 行，$a=5$

表 17. 先填滿第 1 列的第 1、2、3、4、5 行，$a=5$

	列															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
行	1	**1**	2	3	4	5	24	25	26	27	28	67	68	69	70	71	
	2	10	**9**	8	7	6	23	32	31	30	29	66	75	74	73	72	
	3	11	18	**19**	20	21	22	33	62	63	64	65	76				
	4	12	17	38	**37**	36	35	34	61	80	79	78	77				
	5	13	16	39	56	**57**	58	59	60	81							
	6	14	15	40	55	86	**85**	84	83	82							
	7	43	42	41	54	87											
	8	44	51	52	53	88											
	9	45	50	91	90	89											
	10	46	49	92													
	11	47	48	93													
	12	96	95	94													

以下為了篇幅簡潔，我就直接寫結果。

表 17 的數字填寫規則：和表 7、表 16 的數字填寫規則大同小異，只是一開始向東走 5 格，數字走到第 1 列或第 1 行時，要走 5 格才能轉東或南方繼續走下去。

1. **對角線數列的規律**

是兩公差為 10 的交錯型等差數列。

2. **上對角線數列的規律**

是兩公差為 10 的交錯型等差數列。

3. **階梯構造**

(1)也可用「階梯排列」的概念將表 17 分成若干層，且奇偶層除了部份的數，其餘也會形成有規律的從西南往東北一階階往上爬，這些階是由一些橫向或縱向的 3 連格、4 連格組成。

(2)每層階梯的數字數量形成以 5 為公差的等差數列。

(3)不分奇偶層，都有「中心橫向 5 連格」。

(4)注意到表 17 的每層階梯是依著上對角線形成對稱。

發現. 有了上述分析，我知道表 17 的對角線、以階梯分層都有規律，所以以拿來解決類似競賽題的 3 道子題，也就是可以從數值找座標、從座標找數值。

(三)先填滿第 1 列的第 1、2、3、4、5、6 行，$a=6$

表 18. 先填滿第 1 列的第 1、2、3、4、5 行，$a=5$

		列														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
行	1	**1**	2	3	4	5	6	29	30	31	32	33	34	81	82	83	
	2	12	**11**	10	9	8	7	28	39	38	37	36	35	80	91	90	
	3	13	22	**23**	24	25	26	27	40	75	76	77	78	79	92		
	4	14	21	46	**45**	44	43	42	41	74	97	96	95	94	93		
	5	15	20	47	68	**69**	70	71	72	73	98						
	6	16	19	48	67	104	**103**	102	101	100	99						
	7	17	18	49	66	105											
	8	52	51	50	65	106											
	9	53	62	63	64	107											
	10	54	61	110	109	108											
	11	55	60	111													
	12	56	59	112													
	13	57	58	113													
	14	116	115	114													

表 18 的數字填寫規則：和表 16、表 17 數字填寫規則大同小異，只是一開始向東走 6 格，數

字走到第 1 列或第 1 行時，要走 6 格才能轉東或南方繼續走下去。

1. 對角線數列的規律

是兩公差為 12 的交錯型等差數列。

2. 上對角線數列的規律

是兩公差為 12 的交錯型等差數列。

3. 階梯構造

(1)也可用「階梯排列」的概念將表 18 分成若干層，且奇偶層除了部份的數，其餘也會形成有規律的從西南往東北一階階往上爬，這些階是由一些橫向或縱向的 3 連格、5 連格組成。

(2)每層階梯的數字數量形成以 6 為公差的等差數列。

(3)不分奇偶層，都有「中心橫向 6 連格」。

(4)注意到表 18 的每層階梯不是依著上對角線形成對稱，而是依中心橫向 6 連格的正中心處形成對稱。

發現. 有了上述分析，我知道表 18 對角線、以階梯分層都有規律，所以以拿來解決類似競賽題的 3 道子題，也就是可以從數值找座標、從座標找數值。

(四)先填滿第 1 列的第 1、2、3、…、a 行

根據表 7、16、17、18，我統整出一般化的規律

規則 10. 一般化的表格數字填寫規則. 依下列順序填入 1、2、3、4、5、6、…所有正整數；從第 1 列第 1 行出發，向東走到第 a 格，向南 1 格，往西走 a-1 格直到第 2 列第 1 行為止，再向南 a-1 格，向東 1 格，如此延前面已走過的格子走下方尚未走過的格子，直到第一列時要再走 a-1 格再往南 1 格，再延著已走過的格子的下方等…，走到第 1 行時，要往南走 a-1 格才能轉向東方走 1 格…

分析 11

1. 對角線數列的規律

相鄰項的差是兩公差為 $2\times a$ 的交錯型等差數列。

2. 上對角線數列的規律

相鄰項的差是兩公差為 $2\times a$ 的交錯型等差數列。

3. 階梯構造

(1)可用「階梯排列」的概念將表格分成若干層，且奇偶層除了部份的數，其餘也會形成有規律的從西南往東北一階階往上爬，這些階是由一些橫向或縱向的 3 連格或 a-1 格組成。

(2)每層階梯的數字數量形成以 a 為公差的等差數列。

(3)不分奇偶層，都有「中心橫向 a 連格」。

(4) 若 a 是奇數，除部份數字外，每層階梯依上對角線形成對稱。若 a 是偶數，除部份數字外，每層階梯依中心橫向 a 連格的正中心處形成對稱。

4. 發現. 先填滿第 1 列的第 1、2、3、…、a 行的方式去填滿方格，也能解決類似競賽題的 3 道子題，也就是可以從數值找座標、從座標找數值。

5. 依規則 10 填滿方格後，求解決類似競賽題 3 道子題的策略

(1)由於對角線上的數列相鄰項的差是以 $2\times a$ 為公差的等差數列，所以可以算出對角線上的每個數。

(2)因為階梯的數字數量是以 a 為公差的等差數列，故可算出每層階梯的最小值與最大值。

(3)承上，最小值與最大值的所在座標也可觀察出規律。

(4)因為階梯是由一些橫向或縱向的 3 連格或 a-1 格組成，也有對稱情形，故可推算出階梯上數字的座標。

柒、未來展望

本研究探討了「先填滿第 1 列的第 1、2、3、…、a 行的方式」去填滿方格的解題策略，也得到結果，但不能說我研究了「無限多種」填滿方格的方式，因為嚴格說來，我探討的只是「某一種模式」的填滿方格，還不知填滿方格的「模式」是有限種或無限種，也不確定每一種填滿方格的模式都會有規律可供由座標找數字，或由數字找座標，希望將來有機會研究。

捌、研究結論

一、我解決了 2006 年國際小學數學及自然科學奧林匹亞(簡稱 IMSOP2006)第 3 題。

二、我更改 IMSOP2006 第 3 題的條件，設定一個新題目，也給出了類似題目的答案。

三、我對新題目的更一般化類型去探討，得到了解決類似新題目的題型的解決策略。

玖、參考資料

【1】2006 國際小學數學及科學奧林匹亞。九章數學教育基金會。上網日期：2012 年 9 月 2 日。取自 http://www.chiuchang.org.tw/modules/mydownloads/viewcat.php?cid=24

【2】南一書局國小數學教科書編撰委員會(民 99)。等量公理。國民小學數學課本第十一冊。臺南市。南一文教事業股份有限公司。

【3】科展群傑廳(2012)。國立科學教育館。2012 年 9 月 01 日取自 http://science.ntsec.edu.tw/Science.aspx?cat=21&a=6821

【4】南一書局國小數學教科書編撰委員會(民 100)。怎樣解題(一)(二)。國民小學數學課本第十二冊。臺南市。南一文教事業股份有限公司。

【評語】080408

- 能由科學競賽問題延伸探討，並嘗試自定規則，衍生出更具挑戰性的問題型態。
- 探究過程清晰，未來若能發展出更精確的推算法則，會更完整。