

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

第三名

080407

環環相扣同心圓・心心相印論骨牌

學校名稱：高雄市三民區十全國民小學

作者：	指導老師：
小六 許宗凱	宋雅筠
小五 周裕翔	侯淑芬
小五 許肇祐	
小五 龔辰陽	
小五 張庭瑜	

關鍵詞：骨牌、總和、比例

環環相扣同心圓·心心相印論骨牌

摘要

本研究根據「同心魔方陣」遊戲改編，結合骨牌重新賦予新玩法與意義。骨牌有 28 張共 56 個數字，當我們進行填數時，發現許多驚奇有趣：

1. 窮盡骨牌能圍成圖形，4×4 骨牌同心圓是最小面積（需使用 8 張骨牌），最大面積 7×7 骨牌同心圓（需使用 24 張骨牌）。
2. 骨牌同心圓內外圓總和有特定比例關係，此可由（ $n \times$ 格子數 = 一條外圓總和數值 \times 外圓總和條數）得知，（內圓和） \div （內圓邊長）= n 。
3. 骨牌同心圓有最佳填數策略。

另外我們使用坊間與骨牌相似的點數遊戲-天九牌進行差異探討，我們觀察到天九牌同心圓內外圓總和比例與骨牌相同，但天九牌同心圓能做出骨牌無法創作出的內外圓關係，但也受限於天九牌點數組合中沒有數字 0，所以會影響內外圓總和最小值。

壹、研究動機

爲了要尋找新奇待開發的研究主題，我們瀏覽歷屆科展作品，對於第 51 屆『骨牌夾心餅之同心圓探討』此主題感到非常好奇，尤其是該作品沒有進一步深入探討對角線總和的關係。數學課本南一版第九冊第三單元「正多邊形」介紹圖形的類型與變化，這引發我們思考骨牌正多邊形同心魔方陣的可能，以及如何做可以找出骨牌 6×6 且對角線總和相同的骨牌同心圓，結果試了好久大家想破頭都無法解出好策略。在好勝心的驅使下，我們決定嘗試骨牌同心圓的研究，俗話說：皇天不負苦心人，只要我們能努力和團隊合作，咱們這一群菜鳥一定能創造出一片屬於我們的天空。

貳、研究目的

一、研究骨牌同心圓

- （一）從 3×3 骨牌同心圓的限制推演 4×4 骨牌同心圓
- （二）探討各式不同規格骨牌同心圓總和的關係

二、以天九牌的點數組合研究同心圓變化

- （一）探討各式不同規格天九牌同心圓的總和關係
- （二）比較骨牌與天九牌所形成之同心圓差異

三、骨牌同心圓的應用設計

參、研究設備與器材

- 一、骨牌
- 二、記錄紙與筆記本
- 三、協助計算程式（Excel）

肆、名詞定義

- 一、骨牌同心圓：下圖以 4×4 為例，使用 8 張骨牌排列，可區分內圓 2×2（虛線部分）和外圓 4×4（粗線部分），此 2×2 內圓每行、每列、對角線總和相同（意即紅色數字每行、每列、對角線、總和為 4）；4×4 方陣也是一個每行、每列、對角線總和為 8 的魔方陣。（此組骨牌同心圓選用 0-2、0-4、1-1、1-2、1-3、2-3、2-4、3-4 這 8 張骨牌）

1	1	3	4
3	2	2	1
4	2	2	0
0	4	1	3

<table border="1"> <tr> <td></td><td>0</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td> </tr> <tr> <td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>1</td> </tr> <tr> <td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td><td>3</td><td>0</td><td>3</td><td>3</td> </tr> <tr> <td>2</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td> </tr> </table> <p>5×5 骨牌同心圓，使用 12 張骨牌排列，分內圓 3×3（虛線）和外圓 5×5（粗線）</p>		0	4	4	2	3	1	4	1	1	4	2	2	2	0	1	3	0	3	3	2	4	0	0	4	<table border="1"> <tr> <td>3</td><td>0</td><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td> </tr> <tr> <td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>5</td><td>3</td> </tr> <tr> <td>2</td><td>6</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td> </tr> <tr> <td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td><td>1</td><td>5</td><td>0</td><td>4</td><td>4</td> </tr> <tr> <td>3</td><td>5</td><td>0</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td> </tr> </table> <p>6×6 骨牌同心圓，使用 18 張骨牌排列，分內圓 4×4（虛線）和外圓 6×6（粗線）</p>	3	0	5	1	4	2	2	0	0	5	5	3	2	6	2	1	1	3	4	3	3	4	0	1	1	1	5	0	4	4	3	5	0	4	1	2	<table border="1"> <tr> <td></td><td>0</td><td>5</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>1</td> </tr> <tr> <td>5</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td> </tr> <tr> <td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td><td>3</td> </tr> <tr> <td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>0</td><td>5</td><td>4</td> </tr> <tr> <td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>6</td><td>1</td><td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>6</td> </tr> <tr> <td>5</td><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>6</td> </tr> </table> <p>7×7 骨牌同心圓，使用 24 張骨牌排列，分內圓 5×5（虛線）和外圓 7×7（粗線）</p>		0	5	4	5	6	1	5	0	5	6	4	0	1	3	4	2	0	3	6	3	2	2	4	4	0	5	4	6	4	3	1	6	1	0	0	5	1	4	2	3	6	5	6	1	2	1	0	6
	0	4	4	2																																																																																																												
3	1	4	1	1																																																																																																												
4	2	2	2	0																																																																																																												
1	3	0	3	3																																																																																																												
2	4	0	0	4																																																																																																												
3	0	5	1	4	2																																																																																																											
2	0	0	5	5	3																																																																																																											
2	6	2	1	1	3																																																																																																											
4	3	3	4	0	1																																																																																																											
1	1	5	0	4	4																																																																																																											
3	5	0	4	1	2																																																																																																											
	0	5	4	5	6	1																																																																																																										
5	0	5	6	4	0	1																																																																																																										
3	4	2	0	3	6	3																																																																																																										
2	2	4	4	0	5	4																																																																																																										
6	4	3	1	6	1	0																																																																																																										
0	5	1	4	2	3	6																																																																																																										
5	6	1	2	1	0	6																																																																																																										

- 二、內外圓總和：以上圖 4×4 骨牌同心圓說明，我們稱此同心圓為內 4 外 8 組合，記作內圓和 4/外圓和 8；5×5 內圓和 6/外圓和 10；6×6 內圓和 10/外圓和 15；7×7 內圓和 15/外圓和 21。

伍、參考文獻

- 一、全國第 51 屆「骨牌夾心餅之同心圓探討」作品中，首度提出骨牌同心圓的概念，其研究結論為下：
- (一) 4×4 骨牌同心圓內圓與外圓總和關係：當 $4 \leq \alpha \leq 8$ 時，其外圓總和 β 的最小值與最大值有其固定的範圍： $\alpha + 1 \leq \beta \leq \alpha + 11$ 。
 - (二) 5×5 骨牌同心圓內圓與外圓總和關係：當 $7 \leq \alpha \leq 9$ 時，其外圓總和 β 的最小值與最大值有其固定的範圍： $\alpha + 1 \leq \beta \leq \alpha + 11$ 。

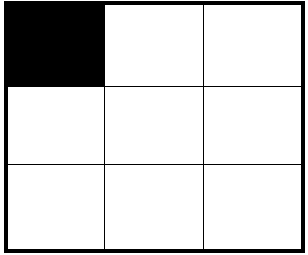
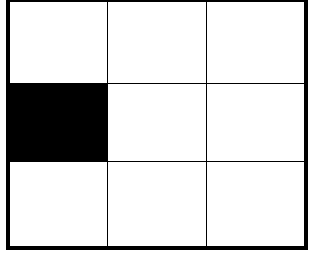
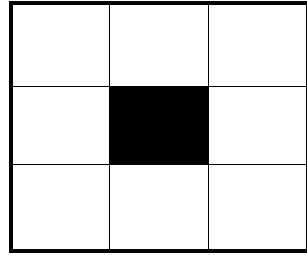
<table border="1" style="margin: auto;"> <tbody> <tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	2	1	0	2	0	0	4	1	0	4	0	1	3	0	1	1	<table border="1" style="margin: auto;"> <tbody> <tr><td>5</td><td>2</td><td>0</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>6</td><td>4</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td style="background-color: black;"></td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>1</td><td>4</td></tr> </tbody> </table>	5	2	0	4	6	5	2	6	4	0	1	6		6	4	2	4	6	2	3	4	3	5	1	4
2	1	0	2																																							
0	0	4	1																																							
0	4	0	1																																							
3	0	1	1																																							
5	2	0	4	6																																						
5	2	6	4	0																																						
1	6		6	4																																						
2	4	6	2	3																																						
4	3	5	1	4																																						
<p>4×4 骨牌同心圓 內圓（紅字）每行每列總和 4 外圓每行每列總和 5</p>	<p>5×5 骨牌同心圓 內圓（紅字）每行每列總和 12 外圓每行每列總和 17</p>																																									

(三) 針對此研究，我們提出兩大疑問：

1. 魔方陣原理是每行、每列，甚至對角線總和皆相同，為什麼對角線總和不同呢？
2. 一副骨牌共有 28 張，若以 6×6 骨牌同心圓而論，總共只需要 18 張骨牌；7×7 骨牌同心圓則需要 24 張骨牌。為什麼沒有探討 6×6 與 7×7 骨牌同心圓呢？
3. 綜合上述兩點，我們決定融入這兩大點的疑問，重新研究骨牌同心圓。

二、定位骨牌同心圓的研究起點：

- (一) 骨牌是兩個正方形所結合成一組長方形圖形，一張骨牌內含兩個數字，其數字 n 範圍介於 $0 \leq n \leq 6$ 之間。
- (二) 骨牌同心圓最小面積應為 3×3，區分成內圓與外圓兩種總和，但是面積 3×3 是奇數，所以只能用 4 張骨牌，剩餘一格我們稱為空格。
- (三) 在面積 3×3 的正方形圖形中，空格位置經過旋轉或翻轉後只有三種不同的變化，當我們填入骨牌後發現 3×3 骨牌同心圓無法成功排列，如下圖所示：

																													
空格在四角	空格在中點	空格在中央																											
<table border="1" style="margin: auto;"> <tbody> <tr><td style="background-color: black;"></td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>4</td></tr> </tbody> </table>		4	2	4	2	0	2	0	4	<table border="1" style="margin: auto;"> <tbody> <tr><td>6</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td style="background-color: black;"></td><td>3</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	6	0	3		3	6	3	6	0	<table border="1" style="margin: auto;"> <tbody> <tr><td>0</td><td>4</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td style="background-color: black;"></td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>4</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	0	4	0	4		0	0	4	0
	4	2																											
4	2	0																											
2	0	4																											
6	0	3																											
	3	6																											
3	6	0																											
0	4	0																											
4		0																											
0	4	0																											
骨牌 2-4 重複出現兩張	圖形出現四 T 連塊，骨牌排法無法成功	對角線總和錯誤																											

(四) 由上可知，我們發現兩個重要關鍵：

1. 骨牌同心圓最小面積應是 4×4 。
2. 內外圓總和有特殊的關係，當內圓總和為 1，外圓總和為 2；當內圓總和為 2，外圓總和為 4；當內圓總和為 3，外圓總和為 6。我們猜測兩者總和之間可能有固定的比例關係。

陸、研究過程與發現

【研究目的一】研究骨牌同心圓

一、從 3×3 骨牌同心圓的限制推演 4×4 骨牌同心圓：

(一) 以 3×3 魔方陣填數策略來論同心圓，能填入的數字為 1~9，根據每行、每列和對角線總和相同，最佳填數方式為：

1. 先填入中央數 1~9 數列中的平均數 5。
2. 依照一筆畫順序依序填數。
3. 對角線數字 2 與數字 8 互換。

<table border="1" style="width: 100px; height: 100px;"> <tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td>5</td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr> </table>					5					<table border="1" style="width: 100px; height: 100px;"> <tr> <td style="text-align: center;">←② 2</td> <td style="text-align: center;">←① 1</td> <td style="text-align: center;">↓⑤ 6</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↓③ 3</td> <td style="text-align: center;">↗5</td> <td style="text-align: center;">↓⑥ 7</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↖④ 4</td> <td style="text-align: center;">←⑧ 9</td> <td style="text-align: center;">←⑦ 8</td> </tr> </table>	←② 2	←① 1	↓⑤ 6	↓③ 3	↗5	↓⑥ 7	↖④ 4	←⑧ 9	←⑦ 8	<table border="1" style="width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">6</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">7</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">2</td></tr> </table>	8	1	6	3	5	7	4	9	2
	5																												
←② 2	←① 1	↓⑤ 6																											
↓③ 3	↗5	↓⑥ 7																											
↖④ 4	←⑧ 9	←⑦ 8																											
8	1	6																											
3	5	7																											
4	9	2																											
中央數先填平均數 5	①~⑧表示一筆畫填數順序	數字 2 和 8 互換																											

(二) 3×3 骨牌同心圓的內外圓總和之間可能有固定的比例關係，而 3×3 魔方陣填數時中央數字是以數列平均數為優先選擇，所以我們推論在試作 4×4 骨牌同心圓時，可以先從骨牌數字的平均數開始討論，再佐以試探內外圓總和比例。

1. 4×4 骨牌同心圓的中央數就表示內圓，若以骨牌填數為原則，數字是 0~6，平均數為 $(0+1+2+3+4+5+6) \div 7 = 3$ 。
2. 4×4 骨牌同心圓內圓每行每列有 2 格，假設每個格子的數字為 3，內圓和 6；外圓每行每列有 4 格，總和為 12。

<table border="1" style="width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> </table>	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	<p>虛線圈 2×2 總和 6(每邊格子數\times平均數)</p> <p>粗線圈 4×4 總和 12(每邊格子數\times平均數)</p> <p>內圓總和：外圓總和 = $2 \times 3 : 4 \times 3 = 2 : 4 = 1 : 2$</p> <p>所以內外圓總和比例為 1 : 2</p>
3	3	3	3														
3	3	3	3														
3	3	3	3														
3	3	3	3														

3. 以下是我們找到的 4×4 骨牌同心圓的成功實例。

<table border="1"> <tbody> <tr><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td></tr> </tbody> </table>	1	4	3	0	1	2	2	3	2	2	2	2	4	0	1	3	<table border="1"> <tbody> <tr><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>0</td><td>3</td><td>3</td><td>6</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	5	4	2	1	2	3	3	4	0	3	3	6	5	2	4	1	<table border="1"> <tbody> <tr><td>2</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr> </tbody> </table>	2	6	6	2	3	4	4	5	5	4	4	3	6	2	2	6
1	4	3	0																																															
1	2	2	3																																															
2	2	2	2																																															
4	0	1	3																																															
5	4	2	1																																															
2	3	3	4																																															
0	3	3	6																																															
5	2	4	1																																															
2	6	6	2																																															
3	4	4	5																																															
5	4	4	3																																															
6	2	2	6																																															
內圓和 4/外圓和 8	內圓和 6/外圓和 12	內圓和 8/外圓和 16																																																

4. 4×4 骨牌同心圓內外圓成敗因素的討論：

- (1) 內圓和 2/外圓和 4 不能成功，因為內圓只能放 4 個 1，且外圓只能選擇 0、1、2 等數字，依骨牌只有 0-0、0-1、0-2、1-1、1-2、2-2 六張組合，但 4×4 骨牌同心圓需要 8 張骨牌，所以內圓和 2/外圓和 4 不能成功。
- (2) 內圓和 10/外圓和 20 不能成功，因為內圓只能放 5，再加上外圓不能放 0、1、2、3 這 3 個數字（因為 0、1、2、3 的對面分別是 10、9、8、7，而骨牌最大點數是 6，所以外圓就只能放 4、5、6 這 3 數），依骨牌只有 4-4、4-5、4-6、5-5、5-6、6-6 這 6 張骨牌，但 4×4 骨牌同心圓需要 8 張骨牌，所以內圓和 10/外圓和 20 不能成功。

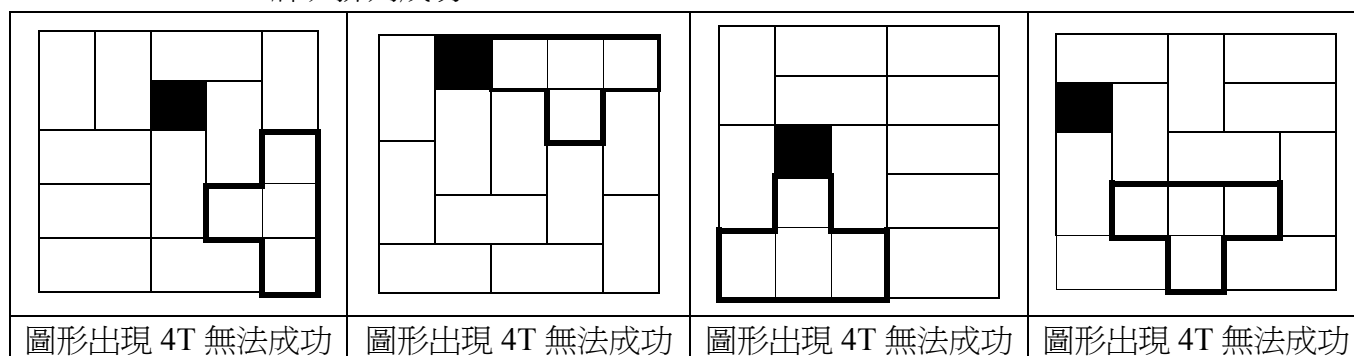
(三) 發現：

1. 根據我們的實作後得知，4×4 骨牌同心圓內外圓總和比例為 1：2。
2. 內圓四個數都是相同數： $2 \leq \text{內圓四數} \leq 4$ 。
3. 骨牌張數是影響骨牌同心圓成功與否的重要元素之一。

二、探討各式不同規格骨牌同心圓總和的關係：

(一) 5×5 骨牌同心圓

1. 因為 5×5 骨牌是奇數，可是一張骨牌的組合是偶數，所以必須要有一格作為空格。在 5×5 格子中，不同位置的空格變化會影響骨牌的排列，以 4×4 為例，當圖中出現 4T 連塊，則該圖形無法用二連塊（骨牌）排列成功。在 5×5 圖形中，當空格若在以下四個位置，則會出現 4T 連塊，也是無法用二連塊（骨牌）排列成功。



2. 我們發現最中央位置不可以是數字 0，若中間放數字 0，則無法符合每行、每列、對角線總和相同的原理，換句話說，當中央位置不為 0 時，即可表示中央位置不可能是空格位置。

	a	b	c	
	d	0	e	
	f	g	h	

若每行、每列、對角線總和相同

則 $a+b+c=d+0+e=f+g+h=a+0+h=c+0+f=b+0+g=a+d+f=c+e+h$

但是 $a+b+c \neq a+0+h$ $c+0+f \neq f+g+h$ $d+0+e \neq c+e+h$

3. 骨牌經過不同角度的旋轉或翻轉後，空格的變化如下圖所示，打叉的格子表示不可以是空格位置。所以 5x5 骨牌同心圓排法能成功的空格位置有三種變化：四角（以★表示）、中點（以◻表示）、內圓四角（以▲表示）。

★	×	◻	×	★
×	▲	×	▲	×
◻	×	■	×	◻
×	▲	×	▲	×
★	×	◻	×	★

1. 打叉格子為不可以是空格的位置。
2. 有符號格子為空格的位置。
3. 紅色格子雖然可以是空格，但是無法完成填數。

4. 以下是我們找到的 5x5 骨牌同心圓的成功實例。

<table border="1"> <tr><td>4</td><td>4</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>0</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>■</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td><td>4</td><td>2</td><td>0</td></tr> </table> <p>內圓和 6/外圓和 10</p>	4	4	0	2	0	1	3	0	3	3	■	2	2	2	4	1	1	4	1	3	4	0	4	2	0	<table border="1"> <tr><td>■</td><td>0</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>0</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td></tr> </table> <p>內圓和 6/外圓和 10</p>	■	0	4	4	2	3	1	4	1	1	4	2	2	2	0	1	3	0	3	3	2	4	0	0	4	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>■</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>0</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td>3</td></tr> </table> <p>內圓和 6/外圓和 10</p>	1	4	4	0	1	1	■	4	2	3	3	4	2	0	1	2	2	0	4	2	3	0	0	4	3
4	4	0	2	0																																																																									
1	3	0	3	3																																																																									
■	2	2	2	4																																																																									
1	1	4	1	3																																																																									
4	0	4	2	0																																																																									
■	0	4	4	2																																																																									
3	1	4	1	1																																																																									
4	2	2	2	0																																																																									
1	3	0	3	3																																																																									
2	4	0	0	4																																																																									
1	4	4	0	1																																																																									
1	■	4	2	3																																																																									
3	4	2	0	1																																																																									
2	2	0	4	2																																																																									
3	0	0	4	3																																																																									
<table border="1"> <tr><td>0</td><td>6</td><td>0</td><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>6</td><td>3</td><td>0</td><td>■</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>6</td><td>0</td><td>6</td></tr> </table> <p>內圓和 9/外圓和 15</p>	0	6	0	6	3	1	1	4	4	5	6	6	3	0	■	5	2	2	5	1	3	0	6	0	6	<table border="1"> <tr><td>■</td><td>3</td><td>0</td><td>6</td><td>6</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>3</td><td>6</td><td>0</td><td>6</td></tr> </table> <p>內圓和 9/外圓和 15</p>	■	3	0	6	6	5	4	2	3	1	5	2	3	4	1	5	3	4	2	1	0	3	6	0	6	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>0</td><td>6</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>6</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>■</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>0</td><td>6</td></tr> </table> <p>內圓和 9/外圓和 15</p>	0	4	2	6	3	5	3	0	6	1	6	6	3	0	0	1	■	6	3	5	3	2	4	0	6
0	6	0	6	3																																																																									
1	1	4	4	5																																																																									
6	6	3	0	■																																																																									
5	2	2	5	1																																																																									
3	0	6	0	6																																																																									
■	3	0	6	6																																																																									
5	4	2	3	1																																																																									
5	2	3	4	1																																																																									
5	3	4	2	1																																																																									
0	3	6	0	6																																																																									
0	4	2	6	3																																																																									
5	3	0	6	1																																																																									
6	6	3	0	0																																																																									
1	■	6	3	5																																																																									
3	2	4	0	6																																																																									

5. 5×5 骨牌同心圓內外圓成敗因素的討論：

- (1) 內圓和 3/外圓和 5 只能放數字 0、1、2、3，所以只有 10 張組合，並沒有符合 5×5 的骨牌數(12 張)，所以無法成功。
- (2) 內圓和 12/外圓和 20 無法成功，因為若空格放在正中央的話，內圓就只能放八個 6，且外圈只有 2-6、3-5、4-4 的對邊組合，其中並沒有 1 和 0 這兩個數，骨牌本身每個數最多只能用八次，6-0、6-1 這兩個骨牌都無法使用；若空格放在內圓角落，對角線的和 18 (6+6+6)，如圖紅色部份；但如果是放置在外圓，空格的對邊一定會是 8，所以無法成功。

		6	6	
	6	6	0	
	6	0	6	

6. 發現：

- (1) 5×5 骨牌同心圓成功類型是內圓和 6/外圓和 10、內圓和 9/外圓和 15 兩種。
- (2) 5×5 骨牌同心圓內外圓總和比例為 3 : 5 (3×3 : 3×5 = 9 : 15 = 3 : 5)。
- (3) 三種空白位置的變化皆能正確組合出正確的 5×5 骨牌同心圓。

(二) 6×6 骨牌同心圓

1. 以 6×6 骨牌同心圓而言，內圓是一個 4×4 骨牌魔方陣，若以每格平均數 3 解釋，設內圓其中一邊總和為 12，2×2 會等於 4×4 其中一邊的總和， $x+y+a+b = X+Y+A+B = Q+W+E+R = 12$ 。

Q					W
	X			Y	
		x	y		
		a	b		
	A			B	
R					E

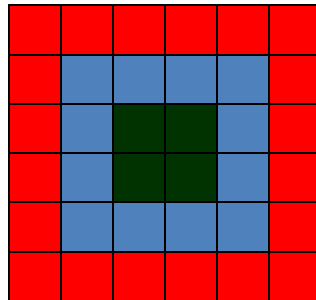
2. 以下是我們找到的 6×6 骨牌同心圓的成功實例。

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>0</td><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">5</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">1</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">4</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>0</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	3	0	5	1	4	2	2	0	0	5	5	3	2	6	2	1	1	3	4	3	3	4	0	1	1	1	5	0	4	4	3	5	0	4	1	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">0</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">1</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">5</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">6</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>5</td><td>1</td><td>3</td></tr> </table>	3	1	5	1	5	3	4	6	2	4	0	2	2	5	0	6	1	4	2	1	6	0	5	4	4	0	4	2	6	2	3	1	5	5	1	3	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>6</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">5</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">5</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">0</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">4</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> </table>	6	2	1	4	3	5	6	5	2	2	5	1	2	6	0	3	5	5	3	3	6	5	0	4	2	0	6	4	4	5	2	5	6	3	4	1
3	0	5	1	4	2																																																																																																									
2	0	0	5	5	3																																																																																																									
2	6	2	1	1	3																																																																																																									
4	3	3	4	0	1																																																																																																									
1	1	5	0	4	4																																																																																																									
3	5	0	4	1	2																																																																																																									
3	1	5	1	5	3																																																																																																									
4	6	2	4	0	2																																																																																																									
2	5	0	6	1	4																																																																																																									
2	1	6	0	5	4																																																																																																									
4	0	4	2	6	2																																																																																																									
3	1	5	5	1	3																																																																																																									
6	2	1	4	3	5																																																																																																									
6	5	2	2	5	1																																																																																																									
2	6	0	3	5	5																																																																																																									
3	3	6	5	0	4																																																																																																									
2	0	6	4	4	5																																																																																																									
2	5	6	3	4	1																																																																																																									
內圓和 10/外圓和 15	內圓和 12/外圓 18	內圓和 14/外圓和 21																																																																																																												

3. 6×6 骨牌同心圓內外圓成敗因素的討論：

- (1) 內圓總和 8/外圓總和 12 無法成功，因為內圓的最中央四格必須是相同數字 2，而內圓其餘只能有 0-1-4、0-2-3 或 0-2-2 這三種排列組合，外圓也只能 0-1-4、0-2-3 和 0-2-2，因此可用骨牌只有 15 張，並不足 18 張。
- (2) 內圓總和 16/外圓總和 24 無法成功，因為內圓不能放 0 和 1 這兩個數字，因此會少 15 張骨牌，剩下 13 (28-15) 張骨牌，不足 18 張骨牌。

4. 我們發現**骨牌同心圓之內圓總和=綠色四格數字總和=n**；藍色總格數總和為 3n；紅色總格數總和為 5n，綠：藍：紅=1：3：5。



5. 發現：

- (1) 6×6 骨牌同心圓成功類型是內圓和 9/外圓和 15、內圓和 12/外圓和 18、內圓和 14/外圓和 21 三種。
- (2) 6×6 骨牌同心圓內外圓總和比例為 2：3 (3×4：3×6=12：18=2：3)。

(三) 7×7 骨牌同心圓

1. 7×7 骨牌同心圓是奇數格，空格位置扣除旋轉或翻轉的重複後，共有 6 組：

◇		✱		✱		◇
	✱		☆		✱	
✱		⊙		⊙		✱
	☆		★		☆	
✱		⊙		⊙		✱
	✱		☆		✱	
◇		✱		✱		◇

- 第一組 (◇) 有 4 個，分別是四角。
- 第二組 (✱) 有 8 個，分別在四邊。
- 第三組 (✱) 有 4 個，分別在 5×5 的四角。
- 第四組 (☆) 有 4 個，分別在 5×5 的四邊的中點。
- 第五組 (⊙) 有 4 個，分別在 3×3 的四角。
- 第六組 (★) 有 1 個，位於中央數。

2. 以下是我們找到的 7×7 骨牌同心圓的成功實例。

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>5</td><td>0</td><td style="background-color: black;"></td></tr> <tr><td>1</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">0</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">4</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">2</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">4</td><td>6</td></tr> <tr><td>6</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">5</td><td>0</td></tr> <tr><td>6</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>6</td><td>5</td></tr> </table> <p>內圓和 15/外圓和 21</p>	1	6	5	4	5	0		1	0	4	6	5	0	5	3	6	3	0	2	4	3	4	5	0	4	4	2	2	0	1	6	1	3	4	6	6	3	2	4	1	5	0	6	0	1	2	1	6	5	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>0</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">6</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">2</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">3</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">1</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">3</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td style="background-color: black;"></td><td>3</td><td>6</td></tr> </table> <p>內圓和 15/外圓和 21</p>	0	3	5	4	6	3	0	0	4	1	4	0	6	6	1	2	5	4	2	2	5	5	2	4	0	6	3	1	5	5	5	1	3	1	1	4	2	0	6	4	3	2	6	3	1	2		3	6	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>5</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td style="background-color: black;"></td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">0</td><td>5</td></tr> <tr><td>0</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">4</td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">4</td><td>4</td></tr> <tr><td>6</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">2</td><td>0</td></tr> <tr><td>5</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">5</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>6</td><td>5</td></tr> </table> <p>內圓和 15/外圓和 21</p>	1	5	4	6	5	0	0	1		4	6	5	0	5	0	6	3	0	2	4	6	2	3	0	4	4	4	4	6	3	6	1	3	2	0	5	3	2	4	1	5	1	6	1	2	0	1	6	5
1	6	5	4	5	0																																																																																																																																																
1	0	4	6	5	0	5																																																																																																																																															
3	6	3	0	2	4	3																																																																																																																																															
4	5	0	4	4	2	2																																																																																																																																															
0	1	6	1	3	4	6																																																																																																																																															
6	3	2	4	1	5	0																																																																																																																																															
6	0	1	2	1	6	5																																																																																																																																															
0	3	5	4	6	3	0																																																																																																																																															
0	4	1	4	0	6	6																																																																																																																																															
1	2	5	4	2	2	5																																																																																																																																															
5	2	4	0	6	3	1																																																																																																																																															
5	5	5	1	3	1	1																																																																																																																																															
4	2	0	6	4	3	2																																																																																																																																															
6	3	1	2		3	6																																																																																																																																															
1	5	4	6	5	0	0																																																																																																																																															
1		4	6	5	0	5																																																																																																																																															
0	6	3	0	2	4	6																																																																																																																																															
2	3	0	4	4	4	4																																																																																																																																															
6	3	6	1	3	2	0																																																																																																																																															
5	3	2	4	1	5	1																																																																																																																																															
6	1	2	0	1	6	5																																																																																																																																															

1	6	5	5	3	0	1	4	5	5	2	3	2	0	0	3	5	4	6	3	0
6	6	2	■	3	4	0	0	4	3	2	0	6	6	0	4	1	4	0	6	6
3	0	5	6	3	1	3	4	6	■	5	1	3	2	1	2	5	4	2	2	5
4	0	5	0	6	4	2	6	1	5	4	5	0	0	5	2	4	■	6	3	1
2	3	2	4	2	4	4	0	2	2	4	4	3	6	5	5	5	1	3	1	1
0	6	1	5	1	2	6	1	2	5	0	5	3	5	4	2	0	6	4	3	2
5	0	1	1	3	6	5	6	1	1	4	3	4	2	6	3	1	2	0	3	6
內圓和 15/外圓和 21							內圓和 15/外圓和 21							內圓和 15/外圓和 21						

3. 發現：

- (1) 7×7 骨牌同心圓可以成功的類型分別是內圓和 15/外圓和 21 一種可能。
- (2) 7×7 骨牌同心圓內外圓總和比例為 5 : 7 (3×5 : 3×7 = 15 : 21 = 5 : 7)。

三、綜合討論

(一) 歸納各式不同規格骨牌同心圓總和規律

1. 4×4、5×5、6×6 和 7×7 骨牌同心圓內外圓總和關係如下表所示：

骨牌同心圓	內外圓邊長比例	內外圓總和比例 (邊長) × 平均數 3	內外圓總和組型
4×4	1 : 2	2×3 : 4×3	內圓和 4/外圓和 8
			內圓和 6/外圓和 12
			內圓和 8/外圓和 16
5×5	3 : 5	3×3 : 5×3	內圓和 6/外圓和 10
			內圓和 9/外圓和 15
6×6	2 : 3	4×3 : 6×3	內圓和 10/外圓和 15
			內圓和 12/外圓和 18
			內圓和 14/外圓和 21
7×7	5 : 7	5×3 : 7×3	內圓和 15/外圓和 21

2. 從上表可知，內外圓總和比例的關係應區分奇數格與偶數格兩大類來看：

(1) 偶數格內外圓總和比例的關係是內外圓總和比例遞增 + 1：

骨牌同心圓	內外圓總和比例
4×4	1 : 2
6×6	2 : 3

+1 < > +1

(2) 奇數格內外圓總和比例的關係是內外圓總和比例遞增 + 2：

骨牌同心圓	內外圓總和比例
5×5	3 : 5
7×7	5 : 7

+2 < > +2

3. 從計算內圓總和比例的方式可知道各式不同規格骨牌同心圓總和：
 固定內圓邊長，假設（內圓和）÷（內圓邊長）為 n ，
 此計算方式為 $n \times \text{格子數} = \text{一條外圓總和數值} \times \text{外圓總和條數}$ 。

骨牌同心圓	$n \times \text{格子數} = \text{一條外圓總和} \times \text{外圓總和條數}$
4×4 (內圓邊長 2)	$(4 \div 2) \times 16 = 8 \times 4$
	$(6 \div 2) \times 16 = 12 \times 4$
	$(8 \div 2) \times 16 = 16 \times 4$
5×5 (內圓邊長 3)	$(6 \div 3) \times 25 = 10 \times 5$
	$(9 \div 3) \times 25 = 15 \times 5$
6×6 (內圓邊長 4)	$(10 \div 4) \times 36 = 15 \times 6$
	$(12 \div 4) \times 36 = 18 \times 6$
	$(14 \div 4) \times 36 = 21 \times 6$
7×7 (內圓邊長 5)	$(15 \div 3) \times 49 = 21 \times 7$

(二) 整理各式不同規格骨牌同心圓總和較佳填數策略

1. 我們發現骨牌同心圓較佳填數方式，針對 4×4、5×5 和 6×6 骨牌同心圓舉例說明：

(1) 4×4 骨牌同心圓較佳填數策略

填入內圓數字，對角線總和一樣，四數是相同數。 $2 \leq 2 \times 2 \text{ 內圓數字} \leq 4$ 。	填入外圓紅色格子數字，原則： $4a = b + c + d + e$ 若 $a = 3$ ，則 $b + c + d + e = 12$	填上紫色位置數字，原則： $f + g + h + i + j + k + l + m = 8a$	內圓和 6 外圓和 12

(2) 5×5 骨牌同心圓較佳填數策略

中央數(紅色位置)2 或 3(內圓總和 6 中央數填 2; 內圓總和 9, 中央數填 3)。	$c、e、g$ 三數可填入相同數。 $b + d + f + h = 4e$ $a + i = 2e$	依序寫入數字，並套用骨牌排法，即可成功。 範例：內圓和 9/外圓和 15

(3) 6×6 骨牌同心圓較佳填數策略

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>e</td><td style="background-color: red;">f</td><td style="background-color: red;">g</td><td>h</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>i</td><td style="background-color: red;">j</td><td style="background-color: red;">k</td><td>l</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>m</td><td>n</td><td>o</td><td>p</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>								a	b	c	d			e	f	g	h			i	j	k	l			m	n	o	p								<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>e</td><td style="background-color: red;">f</td><td style="background-color: red;">g</td><td>h</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>i</td><td style="background-color: red;">j</td><td style="background-color: red;">k</td><td>l</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>m</td><td>n</td><td>o</td><td>p</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>								a	b	c	d			e	f	g	h			i	j	k	l			m	n	o	p								<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>3</td><td>0</td><td>6</td><td>6</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td style="background-color: red;">4</td><td style="background-color: red;">1</td><td style="background-color: red;">5</td><td style="background-color: red;">2</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td style="background-color: red;">6</td><td style="background-color: red;">2</td><td style="background-color: red;">4</td><td style="background-color: red;">0</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td style="background-color: red;">0</td><td style="background-color: red;">4</td><td style="background-color: red;">2</td><td style="background-color: red;">6</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td style="background-color: red;">2</td><td style="background-color: red;">5</td><td style="background-color: red;">1</td><td style="background-color: red;">4</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>0</td><td>0</td><td>6</td><td>3</td></tr> </table>	3	0	6	6	0	3	5	4	1	5	2	1	1	6	2	4	0	5	1	0	4	2	6	5	5	2	5	1	4	1	3	6	0	0	6	3
	a	b	c	d																																																																																																										
	e	f	g	h																																																																																																										
	i	j	k	l																																																																																																										
	m	n	o	p																																																																																																										
	a	b	c	d																																																																																																										
	e	f	g	h																																																																																																										
	i	j	k	l																																																																																																										
	m	n	o	p																																																																																																										
3	0	6	6	0	3																																																																																																									
5	4	1	5	2	1																																																																																																									
1	6	2	4	0	5																																																																																																									
1	0	4	2	6	5																																																																																																									
5	2	5	1	4	1																																																																																																									
3	6	0	0	6	3																																																																																																									
<p>填入 2×2 內圓數字 f、g、j、k 四數。原則：$f+g+j+k=a+d+m+p=$內圓總和。</p>	<p>填入 b、c、e、h、i、l、n、o 等八數。原則：$b+c+e+h+i+l+n+o=2\times(f+g+j+k)$。</p>	<p>依序寫入數字，並套用骨牌排法，即可成功。 範例：內圓和 12/外圓和 18</p>																																																																																																												

2. 填數限制說明：每行、每列或對角線最多只能填入兩個 0，原因如下說明（以 5×5 骨牌同心圓為例）：

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>y</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>z</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>								x					y					z								<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>a</td><td>a2</td><td>a3</td><td>a4</td><td>a5</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	a	a2	a3	a4	a5																				
		x																																																	
		y																																																	
		z																																																	
a	a2	a3	a4	a5																																															
<p>令 3×3 內圓總和其中一列 $x+y+z$ 若中央數=0 ($y=0$) 設 $x=0\dots(1)$ $z\leq 6\dots(2)$ 因 $x+y+z=9$ 由 (1) 得知 x、y 等於 0 $x+y+z=0+0+z=9$ 可是由 (2) 得知 $z\leq 6$ 所以 $0+0+z\neq 9$ 結論：當 y 為 0 時，x、z 不可為 0</p>	<p>外圓和 $a1+a2+a3+a4+a5=15$ ($a1\sim a5\leq 6$) 若 $a1、a2、a4=0$ $a1+a2+a3+a4+a5=0+0+a3+0+a5=15$ 可是 $a3、a5\leq 6$ $6+6=12, 12\neq 15$ 所以每排最多只能放 2 個 0</p>																																																		

【研究目的二】以天九牌的點數組合研究同心圓變化

在一個很偶然的機會，我們發現書店有販售天九牌的遊戲，第一次看到天九牌就覺得它和骨牌很像，都是利用點數來設計不同的牌張，不過仔細觀察後發現天九牌和骨牌的差異。我們開始討論如果可以進一步討論天九牌同心圓，是否也可以找到一些新鮮的趣事，也可以和骨牌同心圓一起分析與比較，所以我們投入天九牌同心圓的研究中。

一、探討各式不同規格天九牌同心圓的總和關係

(一) 分析天九牌點數組合

1. 天九牌的點數組合與骨牌有著很大的差異，我們分別從三點來分析比較：

- (1) 張數：天九牌有 32 張，總和 6 是最多張數 5 張；骨牌只有 28 張，總和 6 是最多張數 4 張。骨牌每個點數都出現 8 個，但天九牌的點數出現次數不一，點數 1 和 6 有 12 個、點數 2 有 9 個、點數 3 和 4 有 10 個、點數 5 有 11 個。
- (2) 總和：天九牌全部點數總和為 227，骨牌點數總和是 168。
- (3) 點數：天九牌有重複的點數（1-1、1-3、1-5、1-6、2-2、3-3、4-4、4-6、5-5、5-6、6-6），且沒有點數 0，但是骨牌沒有重複的點數組合，數字從 0~6。

天九牌牌張組合

總和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
張數	2	1	4	2	5	4	4	2	4	2	2
組合	1 1 1 1	1 2	1 3 1 3 2 2 2 2	1 4 2 3	1 5 1 5 2 4 3 3 3 3	1 6 1 6 2 5 3 4	2 6 3 5 4 4 4 4	3 6 4 5	4 6 4 6 5 5 5 5	5 6 5 6	6 6 6 6

骨牌牌張組合

總和	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
張數	1	1	2	2	3	3	4	3	3	2	2	1	1
組合	0 0	0 1	0 2 1 1	0 3 1 2	0 4 1 3 2 2	0 5 1 4 2 3	0 6 1 5 2 4 3 3	1 6 2 5 3 4	2 6 3 5 4 4	3 6 4 5	4 6 5 5	5 6	6 6

2. 從上述的比較後，我們提出兩個發現：

- (1) 因為天九牌與骨牌的牌張有重複的組合，也表示當骨牌同心圓沒有使用點數 0 的成功類型，就可以用天九牌實作得出。

2	6	6	2
3	4	4	5
5	4	4	3
6	2	2	6

4×4 同心圓內圓和 8/外圓和 16 的填數範例

<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>2</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">天九牌組合可以重複 (黃色表示重複)</p>	2	6	6	2	3	4	4	5	5	4	4	3	6	2	2	6	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>2</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">骨牌組合不可以重複</p>	2	6	6	2	3	4	4	5	5	4	4	3	6	2	2	6
2	6	6	2																														
3	4	4	5																														
5	4	4	3																														
6	2	2	6																														
2	6	6	2																														
3	4	4	5																														
5	4	4	3																														
6	2	2	6																														

(2) 天九牌沒有點數 0，所以我們猜測天九牌同心圓最小值應該會與骨牌同心圓不一樣。另外天九牌的點數較大，最大值應該也會大於骨牌同心圓。

(二) 我們開始驗證大家推測想法的可信度。

1. 4×4 天九牌同心圓內外圓總和類型 (黃色表示重複牌組)：

<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">3</td></tr> <tr><td>3</td><td style="background-color: yellow;">2</td><td style="background-color: yellow;">2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td style="background-color: yellow;">2</td><td style="background-color: yellow;">2</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr> </table> <p>內圓和 4/外圓和 8</p>	1	1	3	3	3	2	2	1	3	2	2	1	1	3	1	3	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td style="background-color: yellow;">1</td></tr> <tr><td>1</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">5</td></tr> <tr><td>2</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr> </table> <p>內圓和 6/外圓和 12</p>	4	5	2	1	1	3	3	5	2	3	3	4	5	1	4	2	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>2</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr> </table> <p>內圓和 8/外圓和 16</p>	2	6	6	2	3	4	4	5	5	4	4	3	6	2	2	6	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">6</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td style="background-color: yellow;">6</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td>4</td></tr> <tr><td style="background-color: yellow;">6</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td>4</td></tr> <tr><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td>6</td><td>6</td></tr> </table> <p>內圓和 10/外圓和 20</p>	4	6	4	6	6	5	5	4	6	5	5	4	4	4	6	6
1	1	3	3																																																																
3	2	2	1																																																																
3	2	2	1																																																																
1	3	1	3																																																																
4	5	2	1																																																																
1	3	3	5																																																																
2	3	3	4																																																																
5	1	4	2																																																																
2	6	6	2																																																																
3	4	4	5																																																																
5	4	4	3																																																																
6	2	2	6																																																																
4	6	4	6																																																																
6	5	5	4																																																																
6	5	5	4																																																																
4	4	6	6																																																																

(1) 4×4 天九牌同心圓可以成功的類型分別是內圓和 4/外圓和 8、內圓和 6/外圓和 12、內圓和 8/外圓和 16、內圓和 10/外圓和 20 四種可能。

(2) 4×4 天九牌同心圓內外圓總和比例為 1 : 2 (3×2 : 3×4 = 6 : 12 = 1 : 2)。

2. 5×5 天九牌同心圓內外圓總和類型：

<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td style="background-color: black;"></td><td>5</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td>4</td></tr> <tr><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td></tr> </table> <p>內圓和 9/外圓和 15</p>		5	5	2	3	5	3	5	1	1	2	1	3	5	4	5	5	1	3	1	3	1	1	4	6	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>3</td><td>5</td><td style="background-color: black;"></td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">2</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">2</td><td>2</td></tr> <tr><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table> <p>內圓和 9/外圓和 15</p>	3	5		4	3	1	4	3	2	5	4	1	3	5	2	4	4	3	2	2	3	1	6	2	3
	5	5	2	3																																															
5	3	5	1	1																																															
2	1	3	5	4																																															
5	5	1	3	1																																															
3	1	1	4	6																																															
3	5		4	3																																															
1	4	3	2	5																																															
4	1	3	5	2																																															
4	4	3	2	2																																															
3	1	6	2	3																																															

- (1) 5×5 天九牌同心圓可以成功的類型只有內圓和 9/外圓和 15 一種。
- (2) 5×5 天九牌同心圓內外圓總和比例為 3 : 5 ($3 \times 3 : 3 \times 5 = 9 : 15 = 3 : 5$)。
- (3) 三種空白位置的變化會影響天九牌同心圓，空格在 3×3 內圓四角的位置無法順利排出 5×5 天九牌同心圓。原因說明如下：

		6	3	
		6	3	0
		3	0	6

5×5 天九牌內圓和 9/外圓和 15 的中央數必是點數 3，但是受限於空格位置在 3×3 的四角處，所以造成對角線兩數相加等於 9 的情況下只有 3+6 的組合，因而影響內圓的填數出現點數 0，不過天九牌沒有點數 0，所以無法成功。

3. 6×6 天九牌同心圓內外圓總和：

<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">2</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td style="background-color: yellow;">1</td></tr> <tr><td>2</td><td style="background-color: yellow;">2</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td style="background-color: yellow;">2</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">5</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table> <p>內圓和 12/外圓和 18</p>	3	5	1	2	4	3	5	5	4	2	1	1	2	2	1	5	4	4	4	4	5	1	2	2	1	1	2	4	5	5	3	1	5	5	2	3	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td>5</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td style="background-color: yellow;">2</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">6</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">6</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td style="background-color: yellow;">6</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td style="background-color: yellow;">6</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">2</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td></tr> </table> <p>內圓和 14/外圓和 21</p>	2	2	6	1	5	4	5	1	2	5	6	2	2	4	6	1	4	5	2	3	1	6	5	5	6	6	5	2	1	1	3	5	1	6	2	4	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>4</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">4</td></tr> <tr><td>3</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">6</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td>6</td></tr> <tr><td>6</td><td style="background-color: yellow;">2</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">6</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr> </table> <p>內圓和 16/外圓和 24</p>	3	6	3	4	4	4	3	5	1	4	6	5	6	4	5	3	4	2	2	5	5	3	3	6	6	2	5	6	3	2	4	2	5	4	4	5
3	5	1	2	4	3																																																																																																									
5	5	4	2	1	1																																																																																																									
2	2	1	5	4	4																																																																																																									
4	4	5	1	2	2																																																																																																									
1	1	2	4	5	5																																																																																																									
3	1	5	5	2	3																																																																																																									
2	2	6	1	5	4																																																																																																									
5	1	2	5	6	2																																																																																																									
2	4	6	1	4	5																																																																																																									
2	3	1	6	5	5																																																																																																									
6	6	5	2	1	1																																																																																																									
3	5	1	6	2	4																																																																																																									
3	6	3	4	4	4																																																																																																									
3	5	1	4	6	5																																																																																																									
6	4	5	3	4	2																																																																																																									
2	5	5	3	3	6																																																																																																									
6	2	5	6	3	2																																																																																																									
4	2	5	4	4	5																																																																																																									

- (1) 6×6 天九牌同心圓成功類型分別是內圓和 12/外圓和 18、內圓和 14/外圓和 21、內圓和 16/外圓和 24 三種。
- (2) 內圓和 10/外圓和 15 不能成功的原因如下說明：

a	b	c	d	e	f
g					h
i					j
k					l
m					n
o	p	q	r	s	t

以 6×6 天九牌外圓所示，任一條對角線兩數相加必為 5 ($a+t=f+o=b+p=c+q=d+r=e+s=g+h=i+j=k+l=m+n=5$)，但天九牌沒有 0，所以點數 5 不可使用。一副天九牌共有 32 張，6×6 同心圓需要 18 張，扣除有點數 6 和 5 的張數後 ($32-10$ (點數 6) -7 (點數 5) $=15$)，因此無法排出內圓和 10/外圓和 15 的組型。

- (3) 6×6 天九牌同心圓內外圓總和比例為 2 : 3 ($3 \times 4 : 3 \times 6 = 12 : 18 = 2 : 3$)。

4. 7×7 天九牌同心圓內外圓總和：

<table border="1"> <tr><td>5</td><td>2</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> </table> <p>內圓和 15/外圓和 21</p>	5	2	5	2	3	2	2	5		6	4	3	2	1	1	6	3	3	1	2	5	2	2	1	2	4	6	4	1	1	4	3	6	1	5	3	6	1	3	1	4	3	4	4	1	4	3	4	1	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>6</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td></tr> </table> <p>內圓和 15/外圓和 21</p>	1	5	4	4	3	3	1	4	1	4	3	4	3	2	1	6		1	2	6	5	1	3	2	6	1	3	5	4	4	3	1	6	1	2	5	1	6	4	2	2	1	5	1	2	2	3	3	5	<table border="1"> <tr><td></td><td>4</td><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td><td>1</td><td>6</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>1</td><td>6</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td></tr> </table> <p>內圓和 15/外圓和 21</p>		4	2	5	3	4	3	3	3	2	1	3	6	3	5	2	6	4	2	1	1	4	6	1	4	3	1	2	5	2	1	5	1	6	1	1	2	5	1	6	1	5	3	2	4	1	3	2	6
5	2	5	2	3	2	2																																																																																																																																															
5		6	4	3	2	1																																																																																																																																															
1	6	3	3	1	2	5																																																																																																																																															
2	2	1	2	4	6	4																																																																																																																																															
1	1	4	3	6	1	5																																																																																																																																															
3	6	1	3	1	4	3																																																																																																																																															
4	4	1	4	3	4	1																																																																																																																																															
1	5	4	4	3	3	1																																																																																																																																															
4	1	4	3	4	3	2																																																																																																																																															
1	6		1	2	6	5																																																																																																																																															
1	3	2	6	1	3	5																																																																																																																																															
4	4	3	1	6	1	2																																																																																																																																															
5	1	6	4	2	2	1																																																																																																																																															
5	1	2	2	3	3	5																																																																																																																																															
	4	2	5	3	4	3																																																																																																																																															
3	3	2	1	3	6	3																																																																																																																																															
5	2	6	4	2	1	1																																																																																																																																															
4	6	1	4	3	1	2																																																																																																																																															
5	2	1	5	1	6	1																																																																																																																																															
1	2	5	1	6	1	5																																																																																																																																															
3	2	4	1	3	2	6																																																																																																																																															
<table border="1"> <tr><td>3</td><td>5</td><td>2</td><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>6</td><td></td><td>3</td><td>5</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>6</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr> </table> <p>內圓和 15/外圓和 21</p>	3	5	2	5	1	2	3	3	3	2	6	1	3	3	4	1	2	6	4	2	2	1	1	6		3	5	5	2	4	2	2	6	1	4	5	6	3	1	1	4	1	3	1	4	1	5	4	3	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>6</td><td></td><td>2</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>6</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>1</td><td>1</td><td>6</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>6</td><td>5</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>1</td><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr> </table> <p>內圓和 15/外圓和 21</p>	2	3	3	5	2	3	3	4	1	6		2	6	2	2	1	6	3	1	4	4	5	5	1	1	6	2	1	1	2	1	6	5	1	5	4	6	1	5	1	2	2	3	3	3	1	4	3	4	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td></td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td><td>1</td><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>6</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>6</td><td>4</td><td>4</td></tr> </table> <p>內圓和 15/外圓和 21</p>	2	5	5	5		2	2	5	3	3	1	3	5	1	2	1	6	4	2	2	4	3	6	1	4	3	1	3	3	2	1	5	1	6	3	2	3	4	1	6	1	4	4	1	1	1	6	4	4
3	5	2	5	1	2	3																																																																																																																																															
3	3	2	6	1	3	3																																																																																																																																															
4	1	2	6	4	2	2																																																																																																																																															
1	1	6		3	5	5																																																																																																																																															
2	4	2	2	6	1	4																																																																																																																																															
5	6	3	1	1	4	1																																																																																																																																															
3	1	4	1	5	4	3																																																																																																																																															
2	3	3	5	2	3	3																																																																																																																																															
4	1	6		2	6	2																																																																																																																																															
2	1	6	3	1	4	4																																																																																																																																															
5	5	1	1	6	2	1																																																																																																																																															
1	2	1	6	5	1	5																																																																																																																																															
4	6	1	5	1	2	2																																																																																																																																															
3	3	3	1	4	3	4																																																																																																																																															
2	5	5	5		2	2																																																																																																																																															
5	3	3	1	3	5	1																																																																																																																																															
2	1	6	4	2	2	4																																																																																																																																															
3	6	1	4	3	1	3																																																																																																																																															
3	2	1	5	1	6	3																																																																																																																																															
2	3	4	1	6	1	4																																																																																																																																															
4	1	1	1	6	4	4																																																																																																																																															

- (1) 7×7 天九牌同心圓可以成功的類型只有內圓和 15/外圓和 21 一種。
- (2) 7×7 天九牌同心圓內外圓總和比例為 5 : 7 (3×5 : 3×7 = 15 : 21 = 5 : 7)。
- (3) 六種空白位置的變化皆可順利排出 7×7 天九牌同心圓。

二、比較骨牌與天九牌所形成之同心圓差異

(一) 歸納各式不同規格天九牌同心圓總和規律

1. 將 4×4、5×5、6×6 和 7×7 天九牌同心圓內外圓總和關係，整理如下表所示：

天九牌同心圓	內外圓邊長比例	內外圓總和比例 (邊長) × 平均數 3.5	內外圓總和組型
4×4	1 : 2	2×3.5 : 4×3.5	內圓和 4/外圓和 8
			內圓和 6/外圓和 12
			內圓和 8/外圓和 16
			內圓和 10/外圓和 20
5×5	3 : 5	3×3.5 : 5×3.5	內圓和 9/外圓和 15
6×6	2 : 3	4×3.5 : 6×3.5	內圓和 12/外圓和 18
			內圓和 14/外圓和 21
			內圓和 16/外圓和 24
7×7	5 : 7	5×3.5 : 7×3.5	內圓和 15/外圓和 21

2. 從上表可知，內外圓總和比例的關係應區分奇數格與偶數格兩大類來看：

(1) 偶數格內外圓總和比例的關係是內外圓總和比例遞增 + 1：

天九牌同心圓	內外圓總和比例
4×4	+1 < 1 : 2 > +1
6×6	2 : 3

(2) 奇數格內外圓總和比例的關係是內外圓總和比例遞增 + 2：

天九牌同心圓	內外圓總和比例
5×5	+2 < 3 : 5 > +2
7×7	5 : 7

3. 奇數格天九牌同心圓能成功的內外圓總和都只有一組，其中 7×7 天九牌同心圓的實作結果與骨牌同心圓一致，所以我們針對 5×5 天九牌同心圓解釋：

(1) 5×5 天九牌內圓和 6/外圓和 10 無法成功，因為只能使用 1、2、3、4 這 4 個數字，而天九牌有 1-1 (2 張)、1-2、1-3 (2 張)、1-4、2-2 (2 張)、2-3、2-4、3-3 (2 張) 這 12 張點數組合，但 5×5 天九牌同心圓只能出現 1 個點數 4，所以能用的天九牌只有 11 張，因此無法成功。

	a	b	c	d
e	2	3	1	f
g	1	2	3	h
i	3	1	2	j
k	1	m	n	4

圖中空格可視為點數 0，其餘位置不可再放點數 0 (因為天九牌沒有 0)，所以只能出現一個 4。
 說明：圖中每個點數的範圍介於 $1 \leq \text{英文 } a \sim n \leq 3$ ，任一條對角線兩英文字母相加等於 4，例如： $a+1=b+m=c+n=d+k=e+f=g+h=i+j=4$ 。

(2) 5×5 天九牌內圓和 12/外圓和 20 無法成功，因為天九牌點數最大為 6，無論空格放在哪個位置，會造成點數出現 8，則無法順利排出。

<table border="1"> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>b</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>c</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>8</td> </tr> </tbody> </table> <p>當空格在四角時，內圓和 $a+b+c=12$；外圓和 $a+b+c+8=20$。因為 $1 \leq \text{天九牌點數} \leq 6$，所以無法成功。</p>							a						b						c						8	<table border="1"> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>d</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>e</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>f</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>8</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>當空格在中點時，內圓和 $d+e+f=12$；外圓和 $a+b+c+8=20$。因為 $1 \leq \text{天九牌點數} \leq 6$，所以無法成功。</p>								d					e					f					8		
	a																																																		
		b																																																	
			c																																																
				8																																															
		d																																																	
		e																																																	
		f																																																	
		8																																																	

(二) 骨牌與天九牌同心圓內外圓總和類型比較

1. 4×4 、 5×5 、 6×6 和 7×7 骨牌和天九牌同心圓內外圓總和關係，整理如下表：

同心圓類型	各式同心圓內外圓總和類型			
	4×4	5×5	6×6	7×7
骨牌同心圓	內圓 4/外圓 8	內圓 6/外圓 10	內圓 10/外圓 15	內圓 15/外圓 21
	內圓 6/外圓 12	內圓 9/外圓 15	內圓 12/外圓 18	
	內圓 8/外圓 16		內圓 14/外圓 21	
天九牌同心圓	內圓 4/外圓 8	內圓 9/外圓 15	內圓 12/外圓 18	內圓 15/外圓 21
	內圓 6/外圓 12		內圓 14/外圓 21	
	內圓 8/外圓 16		內圓 16/外圓 24	
	內圓 10/外圓 20			
同心圓類型	各式同心圓內外圓總和比例			
	4×4	5×5	6×6	7×7
骨牌同心圓	1 : 2	3 : 5	2 : 3	5 : 7
天九牌同心圓	1 : 2	3 : 5	2 : 3	5 : 7

2. 根據上表發現，骨牌和天九牌同心圓在內外圓總和上有些許的差異，與我們先前猜測的答案顯然有些誤差。天九牌同心圓的內外圓總和比例關係與骨牌同心圓一致，但在內外圓總和組型中，天九牌同心圓與骨牌同心圓有差異。

(1) 骨牌同心圓的內外圓組合類型可利用以下算式檢驗：

(平均數 3 × 格子總數) × 組數 ≥ 外圓每條和 × 條數

- A. 4×4 骨牌同心圓共有三組成功，因為可從算式得知： $3 \times 16 \times 3 = 8 \times 4 + 12 \times 4 + 16 \times 4 = 144$ ，就表示 4×4 骨牌同心圓內圓和 4/外圓和 8、內圓和 6/外圓和 12、內圓和 8/外圓和 16 為成功組型。
- B. 5×5 骨牌同心圓共有兩組成功，因為可從算式得知： $3 \times 25 \times 2 \geq 10 \times 5 + 15 \times 6 = 125$ ，就表示 5×5 骨牌同心圓內圓和 6/外圓和 10、內圓和 9/外圓和 15 為成功組型。
- C. 6×6 骨牌同心圓共有三組成功，因為可從算式得知： $3 \times 36 \times 3 = 15 \times 6 + 18 \times 6 + 21 \times 6 = 324$ ，就表示 6×6 骨牌同心圓內圓和 10/外圓和 15、內圓和 12/外圓和 18、內圓和 14/外圓和 21 為成功組型。
- D. 7×7 骨牌同心圓只有一組成功，因為可從算式得知： $3 \times 49 \times 1 = 21 \times 7 = 147$ ，就表示 7×7 骨牌同心圓內圓和 15/外圓和 21 為成功組型。

(2) 天九牌同心圓的內外圓組合類型可利用以下算式檢驗：

(平均數 3.5 × 格子總數) × 組數 ≥ 外圓每條和 × 條數

- A. 4×4 天九牌同心圓共有四組成功，因為可從算式得知： $3.5 \times 16 \times 4 = 8 \times 4 + 12 \times 4 + 16 \times 4 + 20 \times 4 = 224$ ，就表示 4×4 天九牌同心圓內圓和 4/外圓和 8、內圓和 6/外圓和 12、內圓和 8/外圓和 16、內圓和 10/外圓和 20 為成功組型。
- B. 5×5 天九牌同心圓只有一組成功，因為可從算式得知： $3.5 \times 25 \times 1 \geq 15$

$\times 5 = 75$ ，就表示 5x5 天九牌同心圓內圓和 9/外圓和 15 為成功組型。

C. 6x6 天九牌同心圓共有三組成功，因為可從算式得知： $3.5 \times 36 \times 3 = 18 \times 6 + 21 \times 6 + 24 \times 6 = 378$ ，就表示 6x6 天九牌同心圓內圓和 12/外圓和 18、內圓和 14/外圓和 21、內圓和 16/外圓和 24 為成功組型。

D. 7x7 天九牌同心圓只有一組成功，因為可從算式得知： $3.5 \times 49 \times 1 \geq 21 \times 7 = 147$ ，就表示 7x7 天九牌同心圓內圓和 15/外圓和 21 為成功組型。

(三) 解釋 8x8 天九牌同心圓無法成功因素：

1. 以比例關係猜測 8x8 組合類型有內圓和 18 /外圓和 24、內圓和 21/外圓和 28、內圓和 24/外圓和 32 等三種，如果利用檢驗組合類型公式來說明可能成功的組合，則會出現矛盾現象。
 - (1) $3.5 \times 64 \times 3 \geq (24+28+32) \times 8$三組都有可能成功。
 - (2) $3.5 \times 64 \times 2 \geq (24+28) \times 8$內 18 外 24、內 21 外 28 可能成功。
 - (3) $3.5 \times 64 \times 2 < (28+32) \times 8$內 21 外 28、內 24 外 32 不可能成功。
 - (4) $3.5 \times 64 \times 2 \geq (24+32) \times 8$內 18 外 24、內 24 外 32 可能成功。
 - (5) $3.5 \times 64 \times 1 \geq 24 \times 8$內 18 外 24 可能成功。
 - (6) $3.5 \times 64 \times 1 \geq 28 \times 8$內 21 外 28 可能成功。
 - (7) $3.5 \times 64 \times 1 < 32 \times 8$內 24 外 32 不可能成功。
2. 最後改以內外圓總和的點數來解釋：天九牌點數和 - 外圈數字和 = 內圓數字和。
 - (1) 內圓和 18 /外圓和 24： $227 - 24 \times 2 - 6 \times 6 \neq 6 \times 12 + 3.5 \times 24$ (點數 6 全放在內圓)。
 - (2) 內圓和 21/外圓和 28： $227 - 28 \times 2 - 7 \times 6 \neq 3.5 \times 36$ 。
 - (3) 內圓和 24/外圓和 32： $227 - 32 \times 2 - 8 \times 6 \neq 3.5 \times 36$ 。
3. 由此可知，雖然天九牌有 32 張，可以組合成 8x8 面積，但是因天九牌點數總和不足因素，所以 8x8 天九牌同心圓無法成功。

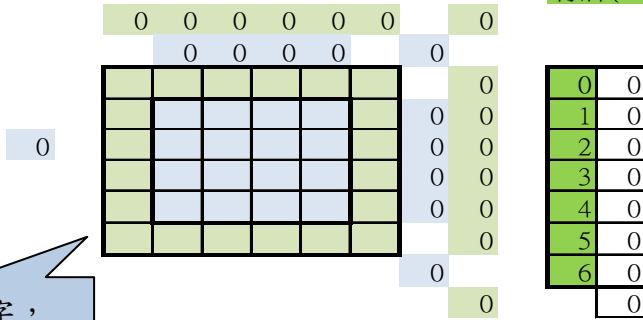
【研究目的三】骨牌同心圓的應用設計

一、為了更方便骨牌同心圓填數的效率性，我們透過電腦 Excel 工具設計了骨牌、天九牌同心圓的填數輔助計算程式 (感謝肇祐爸爸技術指導)。

(一) 骨牌同心圓的填數 Excel 輔助計算程式：

1. 依照填數原則將數字輸入程式 ($0 \leq \text{骨牌點數} \leq 6$; $1 \leq \text{天九牌點數} \leq 6$)。
2. 系統會主動計算出內外圓每行、每列和對角線的總和。
3. 系統會主動計算出內外圓每個點數使用的次數 (骨牌點數每個至多出現 8 個；天九牌點數 1 和 6 有 12 個、點數 2 有 9 個、點數 3 和 4 有 10 個、點數 5 有 11 個)。
4. 填數完畢，系統會產生一組骨牌同心圓。舉例 6x6 骨牌、天九牌同心圓的填數 Excel 輔助計算程式：

骨牌(6*6)



0	0	8
1	0	8
2	0	8
3	0	8
4	0	8
5	0	8
6	0	8
0	0	8

在此填入數字，系統會自動計算內外圓總和，藍色表示內圓，綠色表示外圓總和。

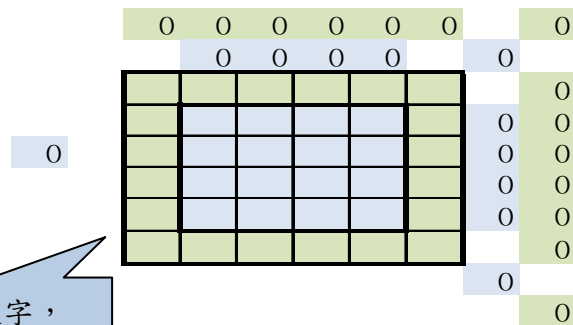
填完數字後，系統會自動計算出每個數字使用的次數。

此為骨牌排法的檢驗區。

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6		
0	2	1	3	2	4	3	5	4	6				
0	3	1	4	2	5	3	6						
0	4	1	5	2	6								
0	5	1	6										
0	6												

天九牌(6*6)



1	0	12
2	0	9
3	0	10
4	0	10
5	0	11
6	0	12
0	0	12

在此填入數字，系統會自動計算內外圓總和，藍色表示內圓，綠色表示外圓總和。

填完數字後，系統會自動計算出每個數字使用的次數。

此為骨牌排法的檢驗區。

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
1	2	2	3	3	4	4	5	5	6		
1	3	2	4	3	5	4	6	5	6		
1	3	2	5	3	6	4	6				
1	4	2	6								
1	5										
1	5										
1	6										
1	6										

(二) 在應用設計中，我們也利用 Excel 程式將骨牌同心圓的排法繪製整理，便於同心圓填數後的有效運用。

1. 利用 Excel 試算表推演、篩選所排出 4×4、5×5、6×6 同心圓的排列方式。我們以 2×2 方陣個數分類，例如在 6×6 方陣中，最多有 9 個 2×2 方陣，最少 1 個，因此可分別探討含有 9 個、8 個、7 個……、2 個和 1 個 2×2 方陣的排法。

內含 2×2 方陣個數	9	8	7	6	5
舉例					
內含 2×2 方陣個數	4	3	2	1	
舉例					

2. 利用 Excel 做出各種組合方式，以 6×6 方陣，有 4 個 2×2 方陣為例：

Microsoft Excel - 6階田-4編輯.xls

檔案(F) 編輯(E) 檢視(V) 插入(I) 格式(O) 工具(T) 資料(L) 視窗(W) 說明(H)

新細明體 12 B I U

BULL 田-4

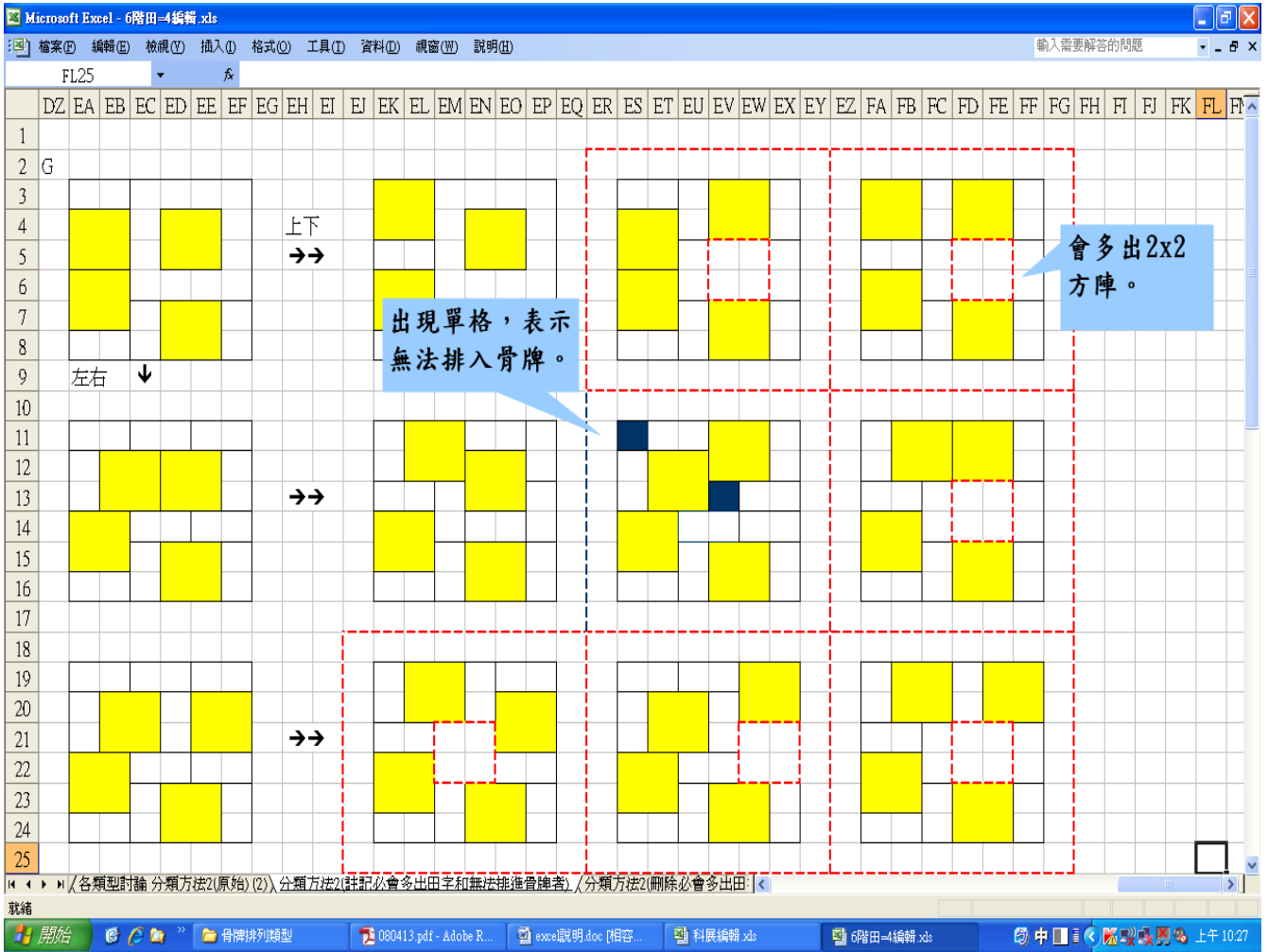
用顏色區隔不同的部件，再有規律的加以配對組合。

各類型討論/分類方法2(原始)(2)/分類方法2(註記必會多出田字和無法排進骨牌者)/分類方法2(刪除必會多出田)

就緒

開始 骨牌排列類型 080413.pdf - Adobe R... exs說明.doc [相容... 科展編輯.xls 6階田-4編輯.xls 中 下午 01.06

3. 刪去不符合條件之 2x2 方陣或無法排列的類型：



4. 刪去經翻轉後相同類型：方陣翻轉方式有 14 種，有些翻法結果是相同，經整理後可發現翻法分成 7 種。我們將 2x2 方陣中，骨牌的排列方式數值化：橫向排列 () 記作 0，直向排列 () 記作 1。為便於討論，我們將這些翻法以代號表示，說明如下：

翻轉的方式	代號
右轉 90°	T90°
右轉 180°	T180°
右轉 270°	T270°
水平鏡射	M
水平鏡射後再右轉 90°	T90°(M)
水平鏡射後再右轉 180°	T180°(M)
水平鏡射後再右轉 270°	T270°(M)

Microsoft Excel - 科展編輯.xls

檔案(F) 編輯(E) 檢視(V) 插入(I) 格式(O) 工具(T) 資料(D) 視窗(W) 說明(H)

C13

6階

將「2x2方格」的骨牌排列方式數值化。

註記0和1的個數與位置

各2x2方格定義名稱

轉動90度、270度「2x2方格」的骨牌排列方式數值變化，例：
 J13:=IF(a,0,1)
 J13:=IF(b,0,1)
 K13:=IF(c,0,1)
 K14:=IF(d,0,1)
 K15:=IF(e,0,1)
 J15:=IF(f,0,1)
 I15:=IF(g,0,1)
 I14:=IF(h,0,1)
 J14:=IF(i,0,1)

翻轉後的骨牌排列方式，例：
 T270'(M)表示對水平鏡射後再向右轉270'。
 Q22:=aa
 R22:=hh
 S22:=gg
 S23:=ff
 S24:=ee
 R24:=dd
 Q24:=cc
 Q23:=bb
 R23:=ii

原	原	原
1 1 0	0 0 1	a b c
0 0 1	1 1 0	h i d
0 0 0	1 1 1	g f e

T 90°	T 270°	T 90°(M)	T 270°(M)
1 1 0	1 0 1	1 0 1	0 1 1
1 1 0	0 1 1	1 1 0	0 1 1
1 0 1	0 1 1	1 1 0	1 0 1

T 180°	M	T 180°(M)
0 0 0	0 1 1	0 0 0
1 0 0	1 0 0	0 0 1
0 1 1	0 0 0	1 1 0

(三) 綜合上述，當同心圓結合 Excel 輔助程式，能有效完成填數與骨牌排列，將有助於推廣與應用。

柒、研究結論

- 同心魔方陣的數學問題能應用在骨牌的遊戲中，成功創作出 4×4、5×5、6×6 和 7×7 骨牌同心圓，其中 4×4 是最小同心圓實例（選用 8 張骨牌）；7×7 是最大同心圓（選用 24 張骨牌）。
- 骨牌同心圓填數原則：數字選取介於 0~6，平均數為 $(0+1+2+3+4+5+6) \div 7 = 3$ ，可計算內外圓總和比例。計算公式： 3 （平均數） $\times n$ （內圓格子數）： 3 （平均數） $\times (n+2)$ （外圓格子數）。
- 天九牌同心圓填數原則：數字選取介於 1~6，平均數為 $(1+2+3+4+5+6) \div 6 = 3.5$ ，可計算內外圓總和比例。計算公式為： 3.5 （平均數） $\times n$ （內圓格子數）： 3.5 （平均數） $\times (n+2)$ （外圓格子數）。
- 實作出同心圓內圓總和後，即可利用算式找出相對應的外圓總和。固定內圓邊長，設（內圓和） \div （內圓邊長）為 n ， $n \times$ 格子數 = 一條外圓總和數值 \times 外圓總和條數。

- 五、 骨牌或天九牌都是二連塊，當遇到奇數格面積時，則需要預留空格（可視為點數 0）。
5×5 同心圓的空格變化有三種；7×7 同心圓則有六種。
- 六、 無論任何面積的骨牌同心圓，每行、每列和對角線中，最多只會同時出現兩個 0。
- 七、 骨牌同心圓的空格變化，並不會影響內外圓總和組型，不同空格位置皆可成功找出填數解答。唯在天九牌同心圓的實作上，因沒有點數 0，所以空格位置的變化會造成內外圓總和組型的不同。
- 八、 骨牌或天九牌同心圓，其內外圓總和比例關係皆相同，不過內外圓總和組型會因為點數組合而有差異。
- 九、 骨牌同心圓內外圓組合類型之算式檢驗： $(\text{平均數 } 3 \times \text{格子總數}) \times \text{組數} \geq \text{外圓每條和} \times \text{條數}$ ；天九牌同心圓內外圓組合類型算式： $(\text{平均數 } 3.5 \times \text{格子總數}) \times \text{組數} \geq \text{外圓每條和} \times \text{條數}$ 。
- 十、 骨牌或天九牌的張數與點數，可用來分析與解釋各內外圓總和組型極限大、小值。
- 十一、 從較佳填數策略可知，掌握填數位置之間的數值關係，更能有效完成同心圓。
- 十二、 應用 Excel 計算程式，讓同心圓的遊戲可以 E 化操作，更有利遊戲推廣的便捷性。

捌、展望

本研究目的為探討點數組合與總和對同心圓實作的影響，並試著提出數學性邏輯思考策略來加以分析與比較差異。研究發現不同點數組合會改變同心圓內外圓總和，其內外圓總和也有特定比例關係。我們將持續鑽研三層同心圓的數學解題，透過層層抽絲剝繭來深究同心圓數學問題，同時我們也期許能發展 E 化同心圓遊戲程式，讓更多人開始接觸填數遊戲。

玖、參考資料 中華民國第五十一屆中小學科學展覽會佳作作品-骨牌夾心餅之同心圓探討。

【評語】 080407

- 能對有趣的數學遊戲進行一連串的研究，探究精神值得鼓勵！