

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

最佳創意獎

080406

「毛蟲」「塔」—移位遊戲混合版初探

學校名稱：新北市樹林區樹林國民小學

作者： 小六 李廷浩 小六 鄧晴文	指導老師： 劉宗富 陳鈺臻
-------------------------	---------------------

關鍵詞：毛蟲棋、河內塔、問題解決

「毛蟲」「塔」-移位遊戲混合版初探

摘要

因為數學課中了解數學有許多規律，又加上玩了許多移位遊戲，因此試著「改變遊戲條件」，我們自創「河內塔」，其規則為：1.每次只移動一個圓盤；2.小圓盤必須在大圓盤之上；3.移動次數愈少愈好；4.移動方式有鄰位移位及隔位移位兩種方式。經過多次試驗，分出兩種策略「前B後D」和「前D後B」，另發現步數變化與「盤子數」、「分堆方式」、「移位策略」有關聯性。盤數越多，步數越多；且將圓盤分成3堆，但奇偶數盤有不同的分法；「前B後D」使用於4到9盤，而「前D後B」運用在10~15盤；大小圓盤抵達終點的步數會劇增。



「毛蟲」「塔」-移位遊戲混合版初探

壹、研究動機

班上上「怎樣解題」這單元時，讓我們發現數學有許多規律，又加上陸續安排一些尋找規律性的課程，例：毛蟲棋、河內塔等，仔細想想，其中題目雖不同，但都是運用「稍微改變遊戲條件」就能創新的原則。既然如此，之前玩的遊戲，我們好奇的想，是否也可以試著創新，按照原訂規則，額外增加不同的條件，最少移位次數是否仍有規律性？為了解決困惑、滿足我熱愛探索的心，我就想藉著這次獨立研究清楚了解。

貳、研究目的

- 一、了解河內塔、毛蟲棋的相關研究。
- 二、結合兩者，另創遊戲規則，看看能否找到其規律。

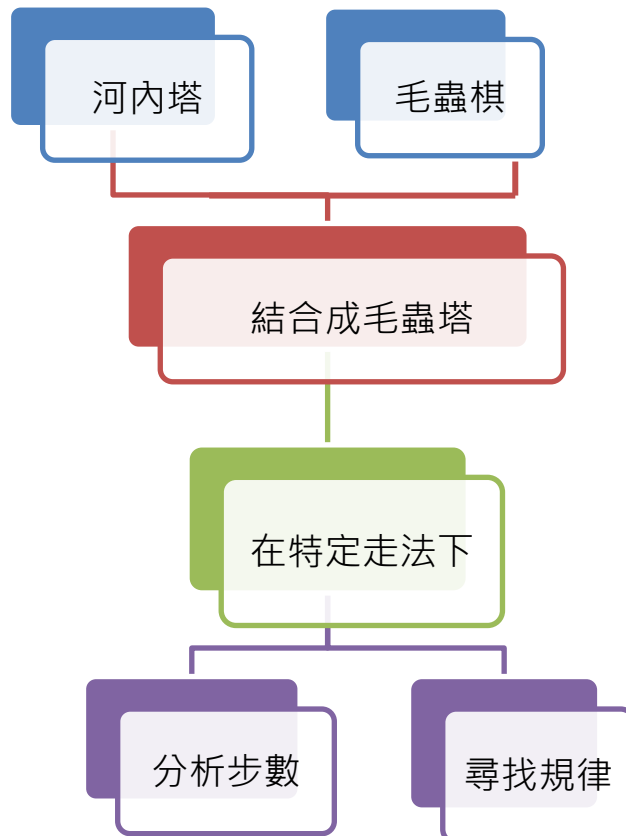
參、研究問題

- 一、如何制定毛蟲塔的遊戲規則？
- 二、毛蟲塔的規律是什麼？

肆、研究器材與設備

墊板、玩具籌碼、筆記本、筆、電腦

伍、研究架構



陸、文獻探討

一、相關作品分析：

「毛蟲棋」移位遊戲歷屆作品：

序號	屆別/組別	科展得獎名次	主題名稱	研究簡特色	與我們研究的關係
1	24 屆初小	全國第三名	有趣的移位遊戲	基礎的移位遊戲，是日後研究的基石。	移位時會產生對稱的狀況。
2	34 屆高小組	全國第二名	毛毛蟲變蝴蝶~移位遊戲的新發現	針對兩邊棋子數不相等的部分做了完整研究，討論並歸納出規律與公式。	
3	第 41 屆國中組	全國第二名	解開難題的奧秘--「個人移位跳棋」遊戲的探討。	探討不同變化型態的移位遊戲，並找出其遊戲規則與規律，探討最少步數的公式。	
4	44 屆國小組	第一名	三色移位毛毛蟲~三色移位遊戲的探討	由毛蟲棋改編而成，增加了棋子的顏色，並且進一步變成中胖型及中瘦型，在大量的實驗中，有找出規律並歸納	
5	48 屆國小組	全國佳作	毛毛蟲爬眼鏡-移位遊戲變形玩法	了解毛蟲棋一般直線、環狀與十字形移位遊戲的規律，並改變棋盤形狀改變(翻轉扭曲)，歸類移位規律。一開始就說出自己的特色。	

「河內塔」移位遊戲歷屆作品：

序號	屆別/組別	科展得獎名次	主題名稱	研究特色	與我們研究的關係
1	第 27 屆國小組	第三名	河內寶塔與九連環	比較河內寶塔與九連環，並探討兩者的規律與特性。	<ol style="list-style-type: none"> 1. 分堆的概念 2. 前堆與後堆的位置會影響步數的多寡。
2	第 43 屆高中組	第一名	將錯就錯 Knuth 河內塔	把河內塔中規則的「較大盤要在較小盤上」改成「最大盤要在較小盤上」，做了詳細的研究，探討規律。(例:123 在同一柱，只要 3 在最下面，上面是 21 或 12 皆可。)	
3	第 46 屆國中組	沒有得名	河內塔問題	對於「三柱多盤」進行詳細的討論，規律為： $2^n - 1$	
4	第 49 屆國中組	第一名	三柱輪換之移動策略---雞尾酒法	以遞迴方式解開河內塔三柱輪換的最少步數，增加一柱，並放置三堆同樣盤數的盤數，將 A 柱的盤數移至 C 柱，C 柱的盤數移至 B 柱，B 柱的盤數移至 A 柱。	

二、我們作品的特色和價值

(一)毛蟲塔有下列特色：

- 1.每次只能移動一個圓盤
- 2.小圓盤必須在大圓盤之上
- 3.移動次數愈少愈好

(二)每一個被移動的圓盤，可以選擇以下兩種方式進行。

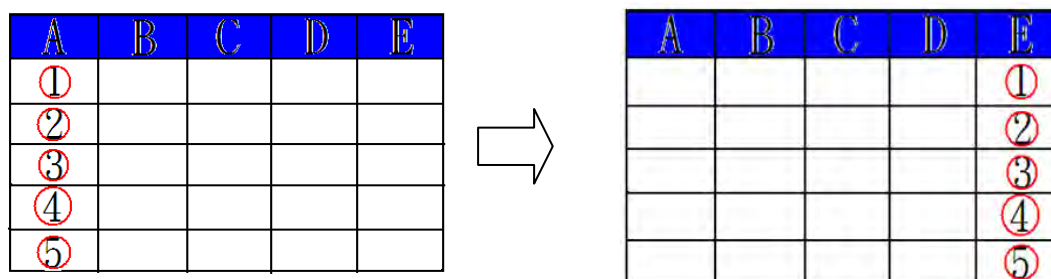
- 1.一個圓盤旁邊有空格時，可以移動一格到空格中。
- 2.一顆圓盤旁邊有緊鄰的圓盤，可以跳過它到另一個空格中。

(三)價值

- 1.題目是自己在研究中發會創意結合出來的遊戲。
- 2.利用不同的策略進行探討，反覆思考實際操作，以改進最少步數的策略。
- 3.檢驗研究出的規律，並發展一套可行的解題方式。

柒、名詞解釋

一、A-E 型：將 A 區的盤數全數移置 E 區，並由上至下為數字小至大的排列。並在過程中號碼較小的圓盤必須在號碼較大的圓盤之上。



二、隔位移位：當一顆圓盤旁邊有緊鄰的圓盤，跳過它到另一個空格，稱之。

三、走法方式：

(一)【前 D 後 B】：為前半堆的盤數先移至 D 區，後半堆的盤數再移至 B 區。

(ex:總盤數為 4 盤，先將前半堆盤 1、2 在遵守自訂毛蟲塔的規則下，移至 D 區，後半堆盤 3 則在規則下移至 B 區。而盤 4 為最後盤)

(二)【前 B 後 D】：為前半堆的盤數先移至 B 區，後半堆的盤數再移至 D 區。

(ex:總盤數為 6 盤，先將前半堆盤 1、2、3 在遵守自訂毛蟲塔的規則下，移至 B 區，後半堆盤 4、5 則在規則下移至 D 區。而盤 6 為最後盤)

捌、研究過程與討論

一、當毛蟲塔的區塊數量不變(5 區：A、B、C、D、E)，盤數增加後最少步數如何解？

(一)規則：1.每次只能移動一個圓盤

2.較小圓盤必須在較大圓盤之上

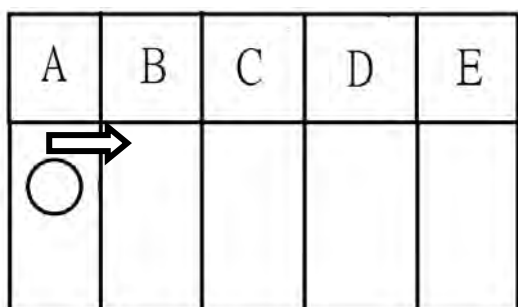
3.移動次數愈少愈好

4.每一個被移動的圓盤，可以選擇以下兩種方式進行。

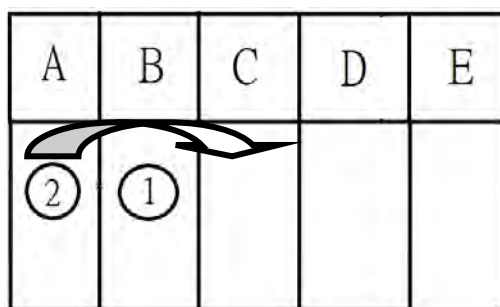
(1)一個圓盤旁邊有空格時，可以移動一格到空格中。如下圖 1。

(2)一個圓盤旁邊有緊鄰的圓盤，可以跳過它到另一個空格中。如下圖 2。

1

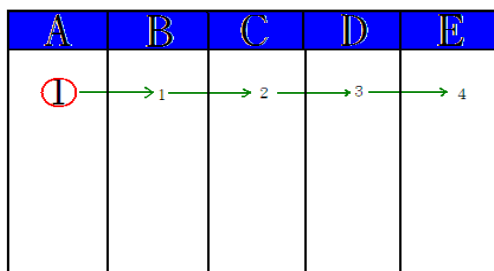


2.



(二)情境 1：盤數為 1 盤，須由 A 區移到 E 區

走法：

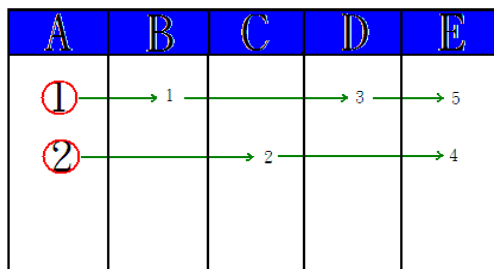


發現：

1.僅一個盤數，所以無隔位移位及大小盤上下的問題。

(三)情境 2：盤數為 2 盤，須由 A 區移到 E 區

走法：



發現：

1. 開始利用到毛蟲棋的走法(隔位移位)，盤1先走到B區後，盤1、2因圓盤相鄰，需要用隔位移動，故輪流跳到E區。

(四)情境 3：盤數為 3 盤，須由 A 區移到 E 區

方式	前 D 後 B	前 B 後 D
走法		
總步數	9 步	9 步

發現：

1. 利用攤開的方式，求最少的步數。
2. 已經開始有分堆的情況產生。

(五)情境 4：盤數為 4 盤，須由 A 區移到 E 區

方式	前 D 後 B	前 B 後 D
走法		
總步數	14 步	14 步

發現：

1. 開始使用分堆方式求最少步數。
2. 前D後B：盤1、2、3中的盤2、3先移至D區，盤1則移至B區，盤4就可直接跳至C區至E區。
3. 前B後D：盤1、2、3中的盤1、2先移至B區，盤3則移至D區，盤4就可直接跳至C區至E區。
4. 方式一、二過程不同，但最後皆為14步。

(六)情境 5：盤數為 5 盤，須由 A 區移到 E 區

方式	前 D 後 B	前 B 後 D
走法		
總步數	19 步	19 步

發現：

- 1.持續使用分堆方式，求最少步數。
- 2.前D後B：盤1、2先移至D區，盤3、4移至B區，盤5就可直接跳至C區至E區。
- 3.前B後D：盤1、2先移至B區，盤3、4移至D區，盤5就可直接跳至C區至E區。
- 4.方式一、二過程不同，但最後皆為19步。

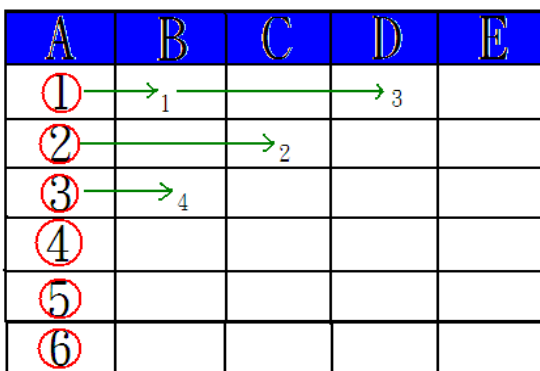
(七)情境 6：盤數為 6 盤，須由 A 區移到 E 區

由前 D 後 B 及前 B 後 D 這兩種方式，我們得到以下的步數及走法。

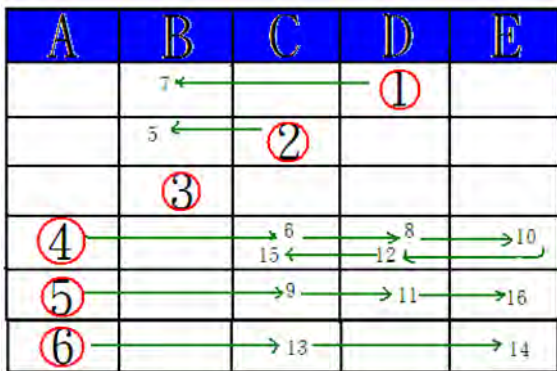
前 D 後 B	1-B	2-C	1-D	1-E	3-B	3-D	2-D	1-D	4-B
	4-C	5-B	4-B	6-C	6-E	4-A	5-C	5-E	4-B
共 27 步	4-C	4-E	1-C	2-B	3-E	2-D	2-E	1-D	1-E
前 B 後 D	1-B	2-C	1-D	3-B	2-B	4-C	4-E	5-C	1-B
	5-D	4-D	6-C	6-E	4-C	5-E	1-D	4-E	2-C
共 24 步	1-C	3-D	3-E	1-D	2-E	1-E			

其走法如下：【前 B 後 D】

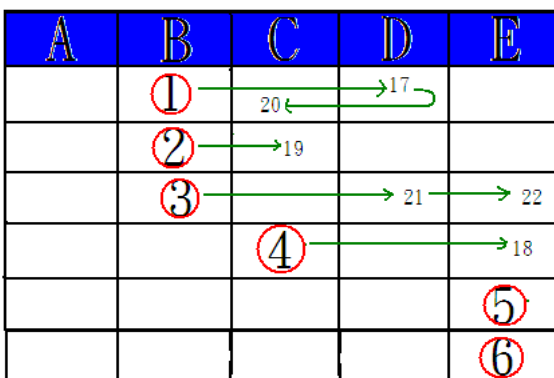
1.



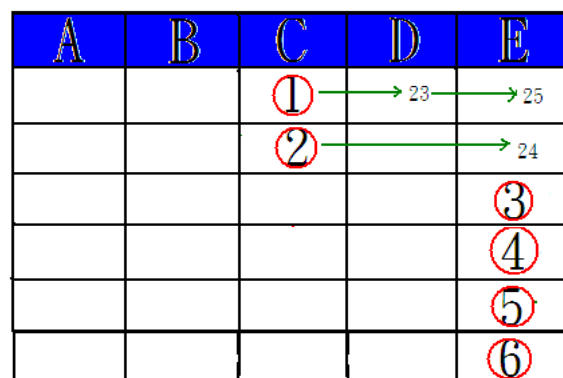
2.



3.



4.



發現：

- 1.持續使用分堆方式，求最少步數。
- 2.前D後B：盤1、2、3先移至D區，盤4、5移至B區，盤6可直接跳至C區至E區。
- 3.前B後D：盤1、2、3先移至B區，盤4、5移至D區，盤6可直接跳至C區至E區。
- 4.方式一、二過程不同，其走出的步數也不同，以前B後D的方式走了24步，為最少的方式。

(八)情境 7：盤數為 7 盤，須由 A 區移到 E 區

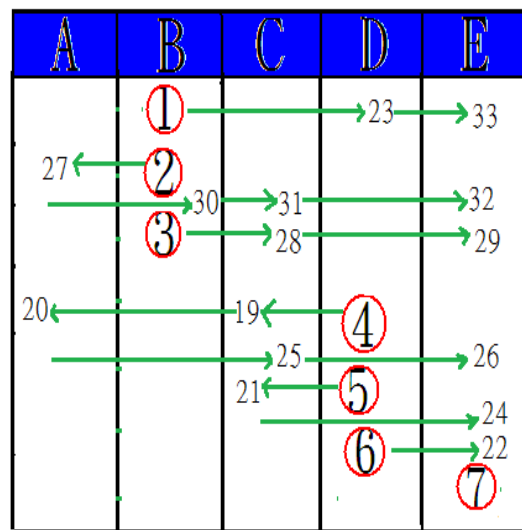
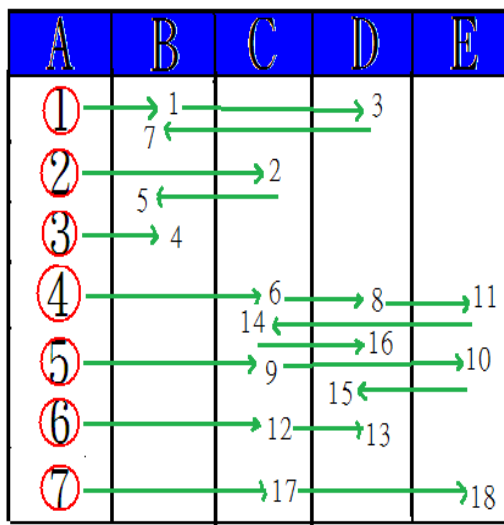
由前 D 後 B 及前 B 後 D 這兩種方式，我們得到以下的步數及走法。

前 D 後 B	1-B	2-C	1-C	3-B	3-D	1-B	2-D	4-C	1-D
	4-E	5-B	5-C	6-B	5-B	4-C	4-B	7-C	7-E
	4-C	5-A	4-A	6-C	6-E	4-B	5-C	5-E	4-C
共 35 步	4-E	1-E	2-C	1-C	3-E	1-D	2-E	1-E	
前 B 後 D	1-B	2-C	1-D	3-B	2-B	4-C	1-B	4-D	5-C
	5-E	4-E	6-C	6-D	4-C	5-D	4-D	7-C	7-E
	4-C	4-A	5-C	6-E	1-D	5-E	4-C	4-E	2-A
共 33 步	3-C	3-E	2-B	2-C	2-E	1-E			

其走法如下：【前 B 後 D】

1.

2.



發現：

1. 持續使用分堆方式，求最少步數。
2. 前 D 後 B：盤 1、2、3 先移至 D 區，盤 4、5、6 移至 B 區，盤 7 就可直接跳至 C 區至 E 區。
3. 前 B 後 D：盤 1、2、3 先移至 B 區，盤 4、5、6 移至 D 區，盤 7 就可直接跳至 C 區至 E 區。
4. 方式一、二過程不同，其走出的步數也不同，以【前 B 後 D】的方式走了 33 步，為最少的方式。

(九)情境 8：盤數為 8 盤，須由 A 區移到 E 區

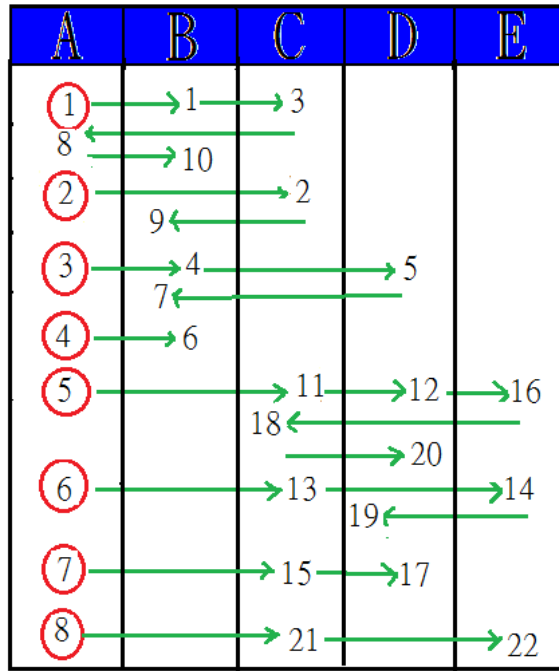
由前 D 後 B 及前 B 後 D 這兩種方式，我們得到以下的步數及走法。

前 D 後 B	1-B	2-C	1-C	3-B	3-D	3-E	4-B	4-D	3-E
	1-B	2-D	5-C	1-D	5-E	6-B	6-C	7-B	6-B
	5-C	5-B	8-C	8-E	5-C	6-A	5-A	7-C	7-E
	5-B	6-C	6-E	5-C	5-E	1-C	2-B	1-B	3-C
共 42 步	4-E	1-D	3-E	2-C	2-E	1-E			

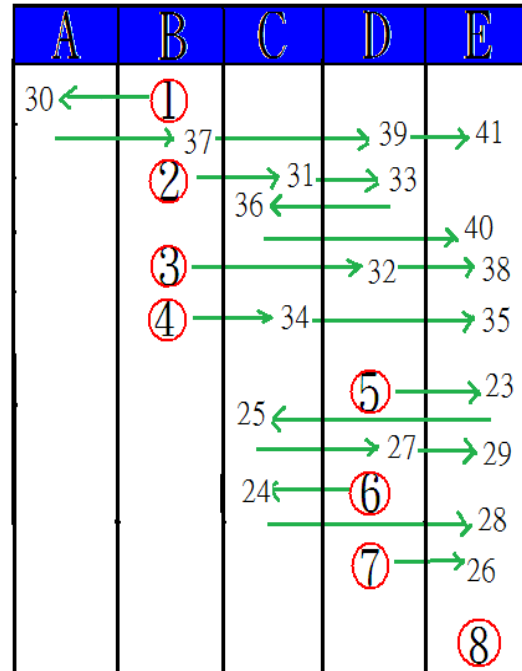
前 B 後 D	1-B	2-C	1-C	3-B	3-D	4-B	3-B	1-A	2-B
	1-B	5-C	5-D	6-C	6-E	7-C	5-E	7-D	5-C
	6-D	5-D	8-C	8-E	5-E	6-C	5-C	7-E	5-D
	6-E	5-E	1-A	2-C	3-D	2-D	4-C	4-E	2-C
共 41 步	1-B	3-E	1-D	2-E	1-E				

其走法如下：【前 B 後 D】

1.



2.



發現：

- 1.持續使用分堆方式，求最少步數。
- 2.前D後B：盤1、2、3、4先移至D區，盤5、6、7移至B區，盤8就可直接跳至C區至E區。
- 3.前B後D：盤1、2、3、4先移至B區，盤5、6、7移至D區，盤8就可直接跳至C區至E區。
- 4.方式一、二過程不同，其走出的步數也不同，以【前B後D】的方式走了41步，為最少的方式。

(十)情境 9：盤數為 9 盤，須由 A 區移到 E 區

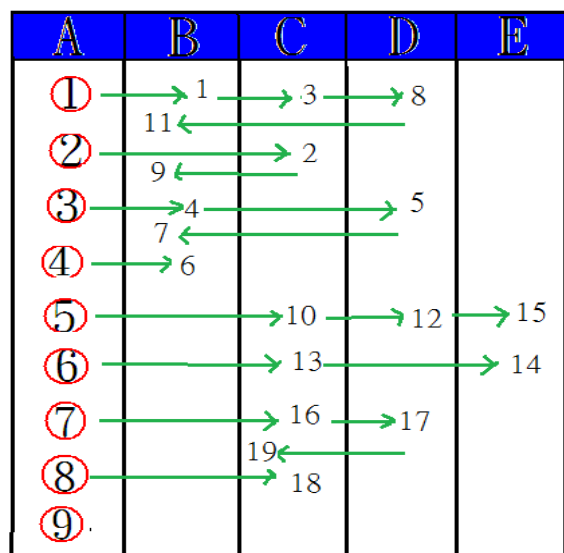
由前 D 後 B 及前 B 後 D 這兩種方式，我們得到以下的步數及走法。

前 D 後 B	1-B	2-C	1-C	3-B	3-D	3-E	4-B	4-D	3-D
	1-B	2-D	5-C	1-D	5-E	6-B	7-C	6-C	8-B
	6-A	7-B	6-B	5-C	5-E	9-C	9-E	5-C	5-E
	6-C	7-A	6-A	5-C	5-A	8-C	8-E	5-B	5-C
	6-B	5-B	7-C	7-E	5-A	6-C	6-E	1-C	2-B
	1-B	5-C	5-E	3-C	7-E	1-D	3-E	2-C	2-E
共 55 步	1-E								

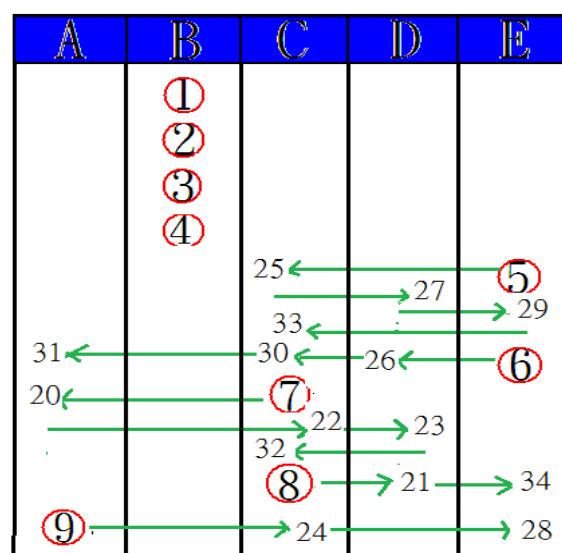
前 B 後 D	1-B	2-C	1-C	3-B	3-D	4-B	3-B	1-D	2-B
	5-C	1-B	5-D	6-C	6-E	5-E	7-C	7-D	8-C
	7-C	7-A	8-D	7-C	7-D	9-C	5-C	6-D	5-D
	9-E	5-E	6-C	6-A	7-C	5-C	8-E	5-D	7-E
	6-C	6-E	5-E	1-A	2-C	3-D	2-D	4-C	4-E
共 51 步	2-C	3-E	1-B	1-D	2-E	1-E			

其走法如下：【前 B 後 D】

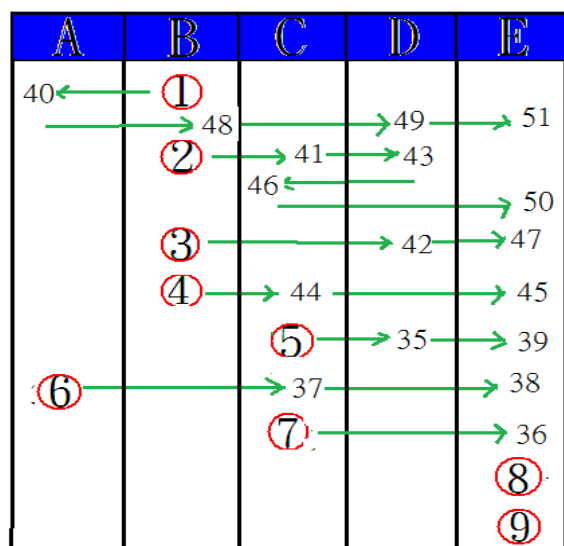
1.



2.



3.



發現：

- 1.持續使用分堆方式，求最少步數。
- 2.前D後B：盤1、2、3、4先移至D區，盤5、6、7、8移至B區，盤9就可直接跳至C區至E區。
- 3.前B後D：盤1、2、3、4先移至B區，盤5、6、7、8移至D區，盤9就可直接跳至C區至E區。
- 4.方式一、二過程不同，其走出的步數也不同，以【前B後D】的方式走了51步，為最少的方式。

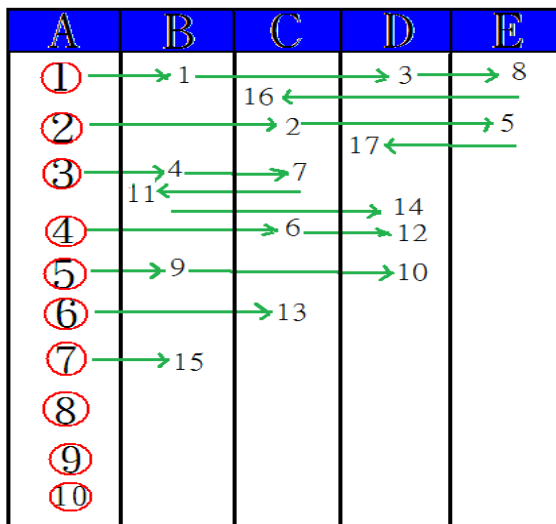
(十一)情境 10：盤數為 10 盤，須由 A 區移到 E 區

由前 D 後 B 及前 B 後 D 這兩種方式，我們得到以下的步數及走法。

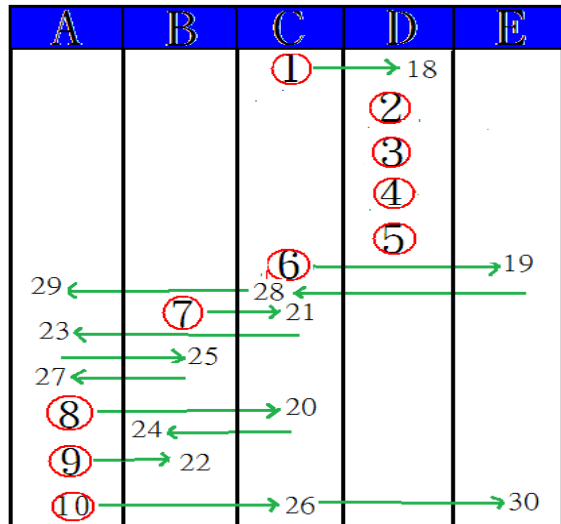
前 D 後 B	1-B	2-C	1-D	3-B	2-E	4-C	3-C	1-E	5-B
	5-D	3-B	4-D	6-C	3-D	7-B	1-C	2-D	1-D
	6-E	8-C	7-C	9-B	7-A	8-B	7-B	10-C	7-A
	6-C	6-A	10-E	8-C	8-E	9-C	8-C	8-B	9-E
	8-C	8-E	6-B	7-C	7-E	6-C	6-E	1-C	2-B
	1-B	3-C	3-A	4-C	5-E	1-D	4-E	3-C	3-E
共 57 步	2-C	2-E	1-E						
前 B 後 D	1-B	2-C	1-D	2-E	3-B	4-C	3-C	5-B	3-A
	4-B	3-B	2-C	2-B	6-C	1-B	6-D	7-C	7-E
	6-E	8-C	8-D	9-C	8-C	8-A	9-D	8-C	8-D
	6-C	7-D	6-D	10-C	10-E	6-C	6-A	7-E	8-C
	7-C	9-E	7-D	8-E	7-E	6-C	1-D	6-E	2-C
	3-A	2-A	4-C	1-C	5-D	5-E	1-D	4-E	2-B
共 59 步	3-C	3-E	2-C	2-E	1-E				

其走法如下：【前 D 後 B】

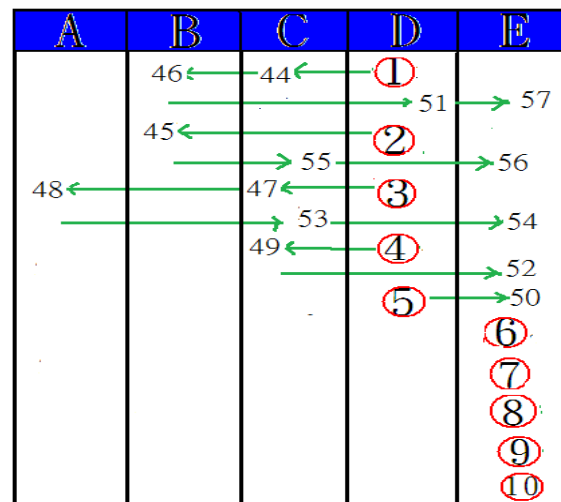
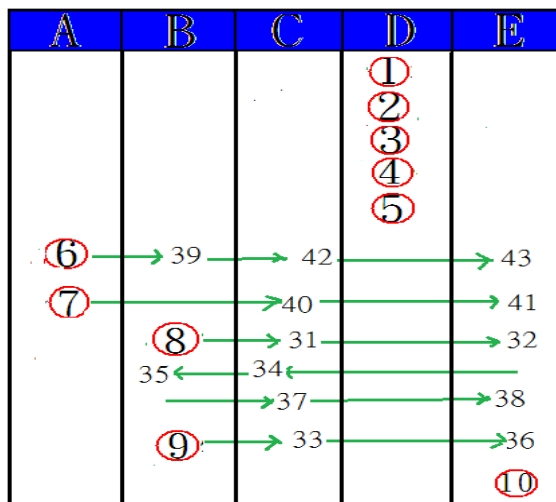
1.



2.



3.



發現：

- 1.持續使用分堆方式，求最少步數。
- 2.前D後B：盤1、2、3、4、5先移至D區，盤6、7、8、9移至B區，盤10就可直接跳至C區至E區。
- 3.前B後D：盤1、2、3、4、5先移至B區，盤6、7、8、9移至D區，盤10就可直接跳至C區至E區。
- 4.方式一、二過程不同，其走出的步數也不同，以【前D後B】的方式走了57步，為最少的方式。
- 5.不同分堆方式開是出現了轉變，由原先【前B後D】的方式可以走出最少步數，轉換成【前D後B】的方式可以走出最少步數。

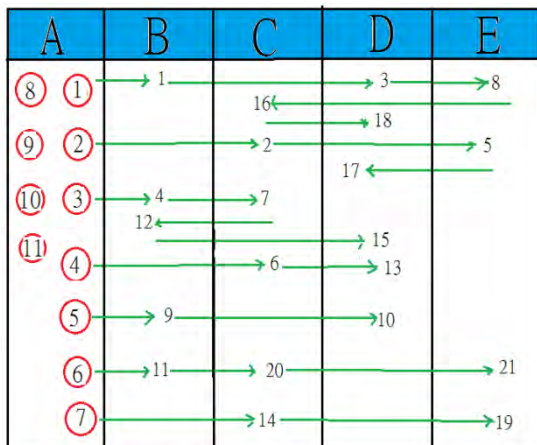
(十二)情境 11：盤數為 11 盤，須由 A 區移到 E 區

由前 D 後 B 及前 B 後 D 這兩種方式，我們得到以下的步數及走法。

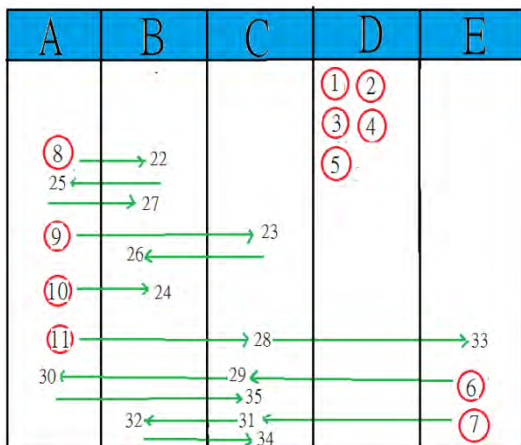
前 D 後 B	1-B	2-C	1-D	3-B	2-E	4-C	3-C	1-E	5-B
	5-D	6-B	3-B	4-D	7-C	3-D	1-C	2-D	1-D
	7-E	6-C	6-E	8-B	9-C	10-B	8-A	9-B	8-B
	11-C	6-C	6-A	7-C	7-B	11-E	7-C	6-C	8-A
	6-B	7-A	6-A	9-C	9-E	10-C	9-C	9-B	10-E
	9-C	9-E	6-B	6-C	7-B	6-B	8-C	8-E	6-A
	7-C	7-E	1-C	2-B	1-B	6-C	6-E	3-C	3-A
共 72 步	4-C	5-E	1-D	4-E	3-C	3-E	2-C	2-E	1-E
前 B 後 D	1-B	2-C	1-D	2-E	3-B	4-C	3-C	5-B	3-A
	4-B	3-B	2-C	2-B	6-C	1-B	6-D	6-E	7-C
	7-D	6-D	8-C	8-E	9-C	6-C	7-E	6-D	6-E
	9-D	10-C	9-C	9-A	10-D	9-C	9-D	6-D	7-C
	6-C	8-D	6-E	7-D	6-D	11-C	11-E	6-E	7-C
	7-A	6-C	6-A	8-E	9-C	8-C	10-E	8-D	9-E
	8-E	6-C	6-D	7-C	7-E	6-E	1-C	2-D	1-D
共 77 步	3-C	4-A	3-A	5-C	5-E	3-B	4-C	4-E	3-C

其走法如下：【前 D 後 B】

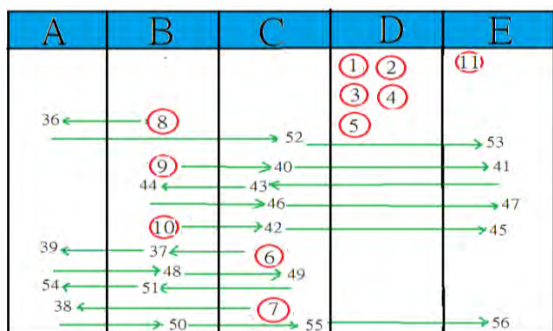
1.



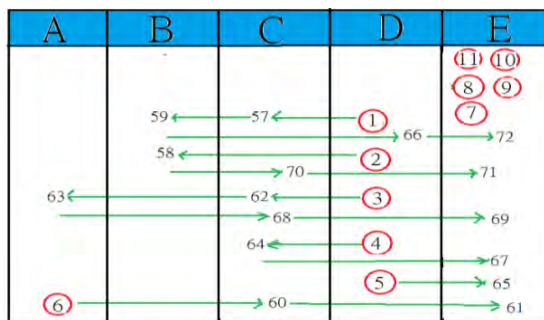
2.



3.



4.



發現：

- 1.持續使用分堆方式，求最少步數。
- 2.前D後B：盤1、2、3、4、5先移至D區，盤6、7、8、9、10移至B區，盤11就可直接跳至C區至E區。
- 3.前B後D：盤1、2、3、4、5先移至B區，盤6、7、8、9、10移至D區，盤11就可直接跳至C區至E區。
- 4.方式一、二過程不同，其走出的步數也不同，以【前D後B】的方式走了72步，為最少的方式。
- 5.與10盤【前D後B】的方式可以走出最少步數結果一致。

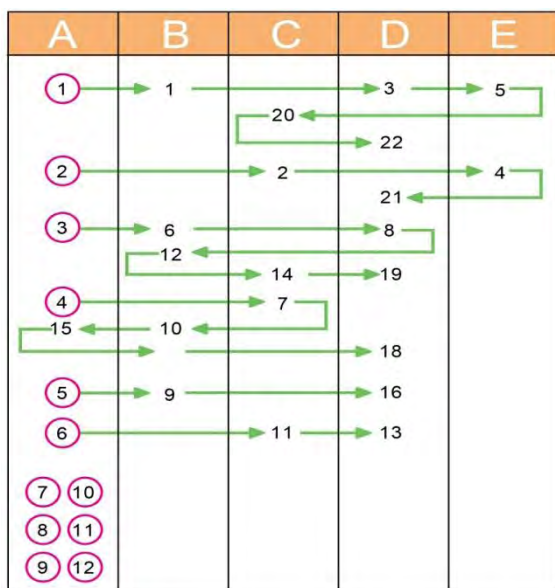
(十三)情境 12：盤數為 12 盤，須由 A 區移到 E 區

由前 D 後 B 及前 B 後 D 這兩種方式，我們得到以下的步數及走法。

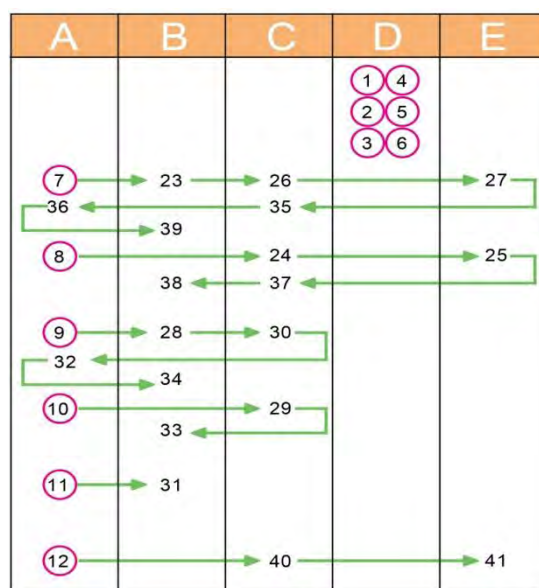
前 D 後 B	1-B	2-C	1-D	2-E	1-E	3-B	4-C	3-D	5-B
	4-B	6-C	3-B	6-D	3-C	4-A	5-D	4-B	4-D
	3-D	1-C	2-D	1-D	7-B	8-C	8-E	7-C	7-E
	9-B	10-C	9-C	11-B	9-A	10-B	9-B	7-C	7-A
	8-C	8-B	7-B	12-C	12-E	7-A	8-C	8-E	9-C
	7-C	10-A	7-B	9-A	8-C	8-A	7-A	11-C	11-E
	7-B	8-C	7-C	9-B	7-A	8-B	7-B	10-C	10-E
	7-C	8-A	7-A	9-C	9-E	7-B	8-C	8-E	7-C
	7-E	1-C	2-B	1-A	3-C	2-C	4-B	1-C	4-A
共 94 步	3-E	2-C	2-E	1-E					
前 B 後 D	1-B	2-C	2-D	3-C	2-C	1-C	4-B	4-D	4-E
	5-B	5-D	6-B	5-B	4-D	4-B	1-D	2-E	3-B
	7-C	2-C	2-B	1-B	7-D	8-C	8-E	7-E	9-C
	9-D	10-C	7-C	8-D	7-D	10-E	11-C	10-C	10-A
	11-E	10-C	10-E	12-C	10-C	10-A	11-C	10-C	10-E
	11-A	10-C	10-A	12-E	10-C	10-E	11-C	10-C	10-A
	10-E	10-C	10-E	7-E	8-C	7-C	9-E	7-D	8-E
	7-E	1-A	2-C	2-D	3-C	2-C	1-C	4-D	5-A
	4-B	4-A	6-D	6-E	4-B	4-D	5-B	4-E	5-D
共 94 步	1-C	2-E	1-D	1-E					

其走法如下：【前D後B】

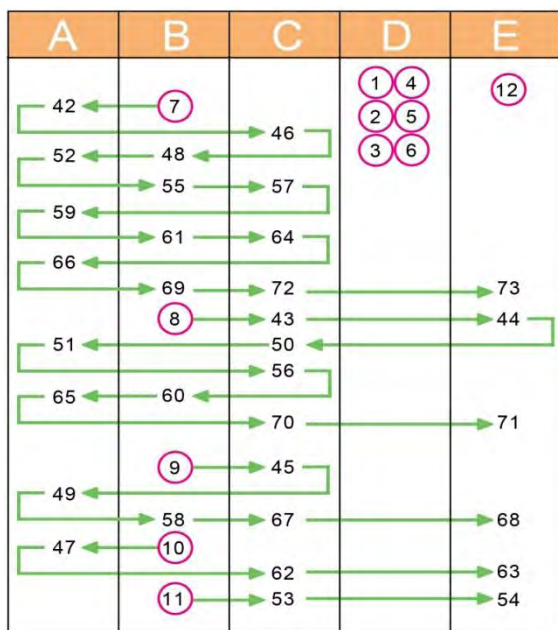
1.



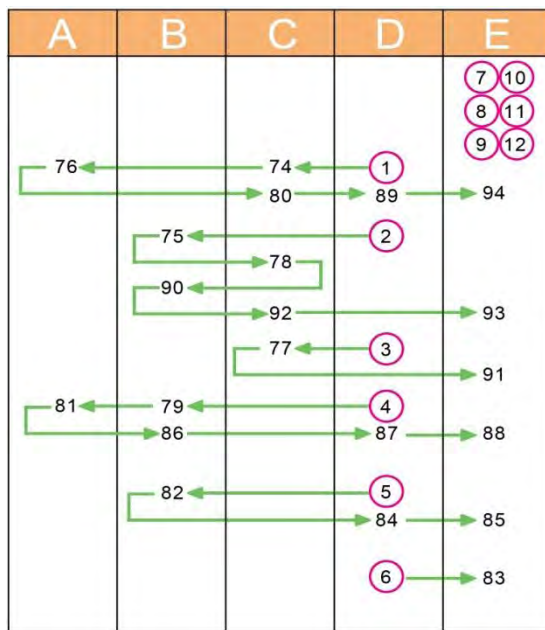
2.



3.



4.



發現：

1. 持續使用分堆方式，求最少步數。
2. 前D後B：盤1、2、3、4、5、6先移至D區，盤7、8、9、10、11移至B區，盤12就可直接跳至C區至E區。
3. 前B後D：盤1、2、3、4、5、6先移至B區，盤7、8、9、10、11移至D區，盤12就可直接跳至C區至E區。
4. 方式一、二過程不同，但其走出的步數相同，文中以【前D後B】的方式來呈現。

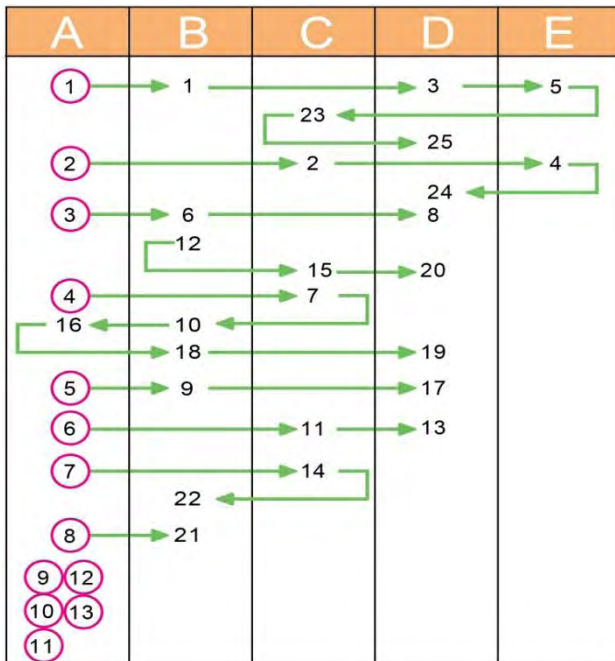
(十四)情境 13：盤數為 13 盤，須由 A 區移到 E 區

由前 D 後 B 及前 B 後 D 這兩種方式，我們得到以下的步數及走法。

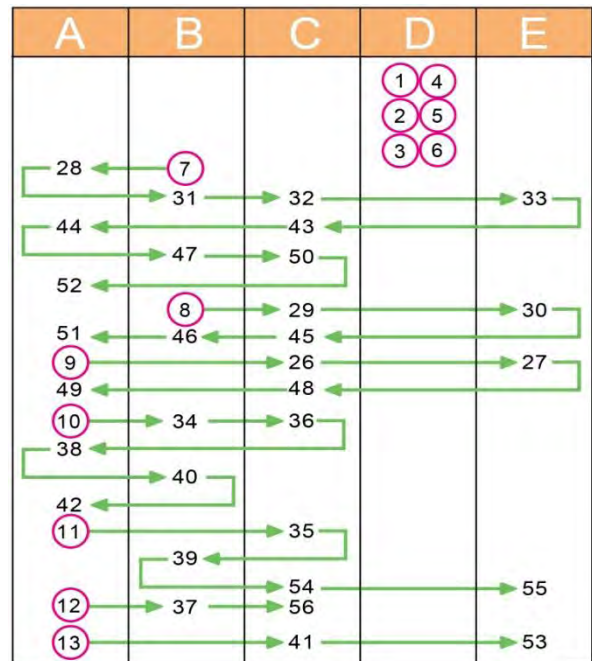
前 D 後 B	1-B	2-C	1-D	2-E	1-E	3-B	4-C	3-D	5-B
	4-B	6-C	3-B	6-D	7-C	3-C	4-A	5-D	4-B
	4-D	3-D	8-B	7-B	1-C	2-D	1-D	9-C	9-E
	7-A	8-C	8-E	7-B	7-C	7-E	10-B	11-C	10-C
	12-B	10-A	11-B	10-B	13-C	10-A	7-C	7-A	8-C
	8-B	7-B	9-C	9-A	7-C	8-A	7-A	13-E	11-C
	11-E	12-C	11-C	11-B	12-E	11-C	11-E	7-B	8-C
	7-C	9-B	7-A	8-B	7-B	10-C	10-E	7-C	8-A
	7-A	9-C	9-E	7-B	8-C	8-E	7-C	7-E	1-C
	2-B	2-A	3-B	2-B	1-B	4-C	4-A	5-C	6-E
共 101 步	2-E	1-E							
前 B 後 D	1-B	2-C	1-D	2-E	1-E	3-B	4-C	3-C	5-B
	5-D	6-B	5-B	3-D	4-B	7-C	3-B	7-D	8-C
	1-C	2-D	2-B	1-B	8-E	7-E	9-C	9-D	10-C
	7-C	8-D	7-D	10-E	7-E	8-C	7-C	9-E	7-D
	8-E	7-E	11-C	11-D	12-C	11-C	11-A	12-D	11-C
	11-D	13-C	7-D	8-C	7-C	9-D	7-E	8-D	7-D
	10-C	10-A	13-E	7-C	8-E	7-E	9-C	9-A	11-C
	7-D	8-C	8-A	7-C	7-A	12-E	11-D	11-E	7-C
	7-D	8-C	8-E	7-E	9-C	9-D	10-C	7-C	8-D
	7-D	10-E	7-E	8-C	7-C	9-E	7-D	8-E	7-E
	1-C	2-D	3-A	2-B	2-A	1-A	4-C	5-D	4-D
	6-C	6-E	4-C	5-E	1-B	1-D	4-E	2-B	3-C
共 112 步	3-E	2-C	2-E	1-E					

其走法如下：【前 D 後 B】

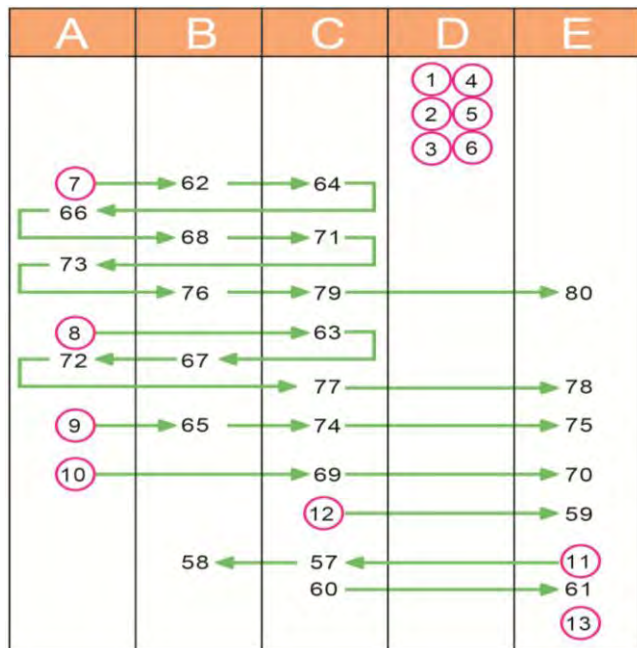
1.



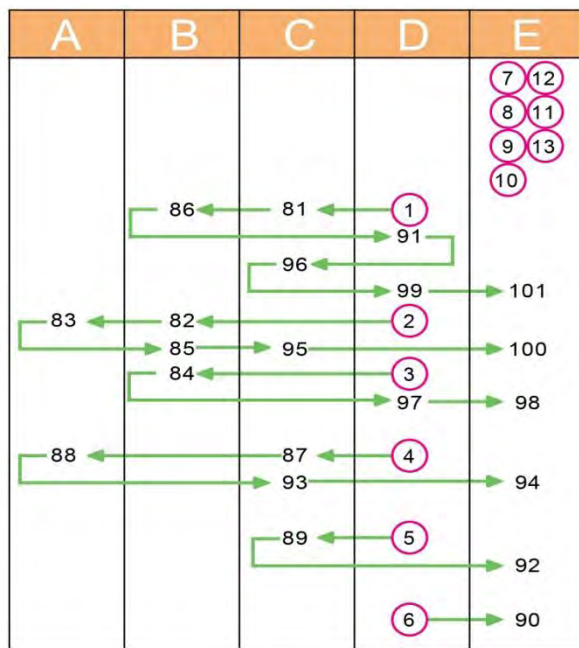
2.



3.



4.



發現：

1. 持續使用分堆方式，求最少步數。
2. 前D後B：盤1、2、3、4、5、6先移至D區，盤7、8、9、10、11、12移至B區，盤13就可直接跳至C區至E區。
3. 前B後D：盤1、2、3、4、5、6先移至B區，盤7、8、9、10、11、12移至D區，盤13就可直接跳至C區至E區。
4. 方式一、二過程不同，其走出的步數也不同，以【前D後B】的方式走了101步，為最少的方式。

(十五)情境 14：盤數為 14 盤，須由 A 區移到 E 區

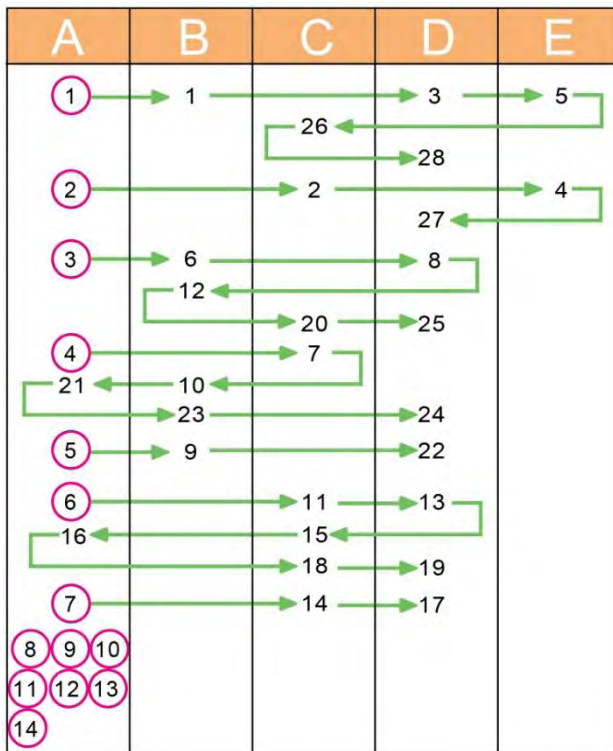
由前 D 後 B 及前 B 後 D 這兩種方式，我們得到以下的步數及走法。

前 D 後 B	1-B	2-C	1-D	2-E	1-E	3-B	4-C	3-D	5-B
	4-B	6-C	3-B	6-D	7-C	6-C	6-A	7-D	6-C
	6-D	3-C	4-A	5-D	4-B	4-D	3-D	1-C	2-D
	1-D	8-B	8-C	9-B	8-B	10-C	10-E	8-A	9-C
	9-E	8-B	8-C	8-E	11-B	12-C	11-C	13-B	11-A
	12-B	11-B	8-C	8-B	9-C	9-A	10-C	8-A	10-B
	8-C	9-B	8-B	14-C	14-E	8-C	8-E	9-A	10-C
	9-C	11-A	9-B	10-A	9-A	8-C	8-A	12-C	12-E
	13-C	12-C	12-B	13-E	12-C	12-E	8-B	8-C	9-B
	8-B	10-C	10-E	11-C	10-C	10-A	11-E	10-C	10-E
	8-A	9-C	9-E	8-B	8-C	8-E	1-C	2-B	1-A
	3-C	2-C	4-B	1-C	4-A	5-B	4-B	4-D	5-A
	4-B	4-A	6-B	7-E	6-D	6-E	4-B	4-D	5-B
4-B	4-A	5-D	5-E	4-B	4-D	4-E	1-D	2-B	
共 130 步	3-E	2-C	2-E	1-E					

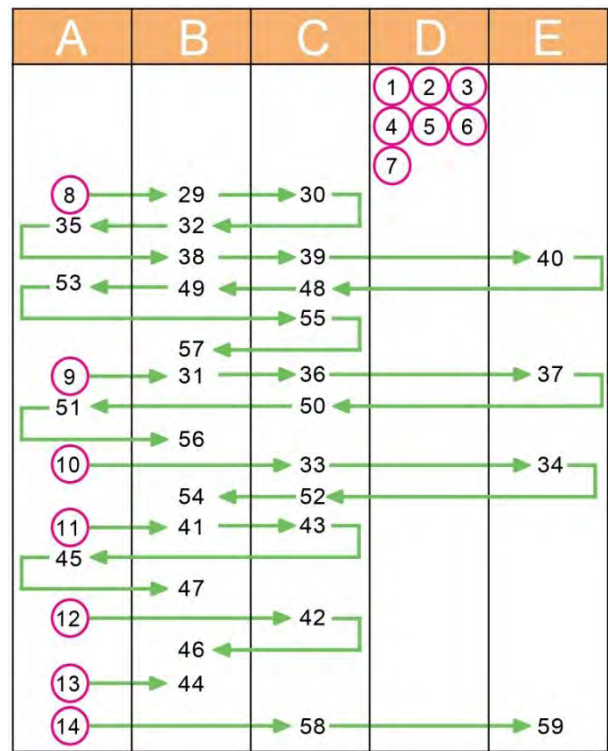
前 B 後 D	1-B	2-C	2-D	3-C	2-C	1-C	4-B	4-D	4-E
	5-B	5-D	6-B	5-B	5-A	6-D	5-B	5-D	7-B
	5-B	5-A	6-B	5-B	4-D	4-B	1-D	2-E	3-B
	2-C	2-B	8-C	1-B	8-D	8-E	9-C	9-D	8-D
	10-C	10-E	11-C	8-C	9-E	8-D	8-E	11-D	12-C
	11-C	11-A	12-D	11-C	11-D	13-C	11-C	11-A	12-C
	11-C	11-D	12-A	11-C	11-A	13-D	11-C	11-D	12-C
	11-C	11-A	12-D	11-C	11-D	8-C	8-A	9-C	10-D
	9-D	8-C	8-D	14-C	14-E	8-C	9-E	8-E	10-C
	10-A	8-D	9-C	9-A	8-C	8-A	11-E	12-C	11-C
	13-E	11-D	12-E	11-E	8-C	8-D	9-C	8-E	9-D
	8-D	10-C	10-E	8-C	9-D	8-D	8-E	1-A	2-C
	3-D	3-E	4-D	3-D	2-D	1-C	1-D	5-C	6-A
	5-A	7-C	7-E	5-B	6-C	6-E	5-C	5-E	1-C
2-B	1-A	3-C	4-E	2-D	3-E	1-B	1-C	2-E	
共 137 步	1-D	1-E							

其走法如下：【前 D 後 B】

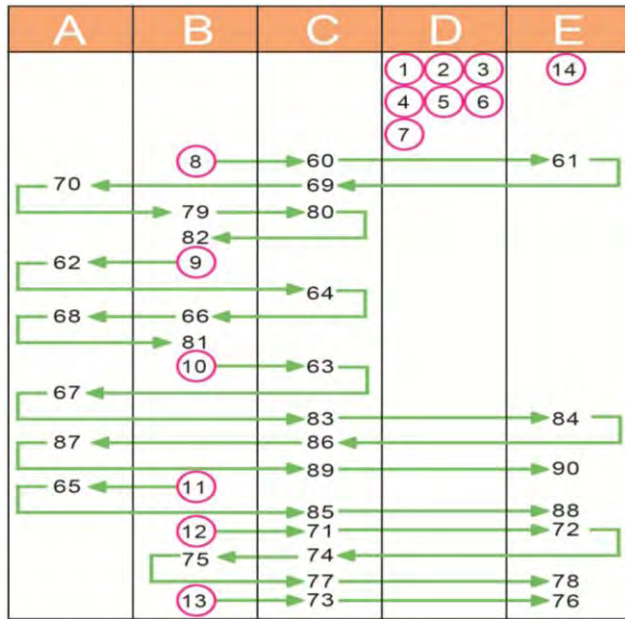
1.



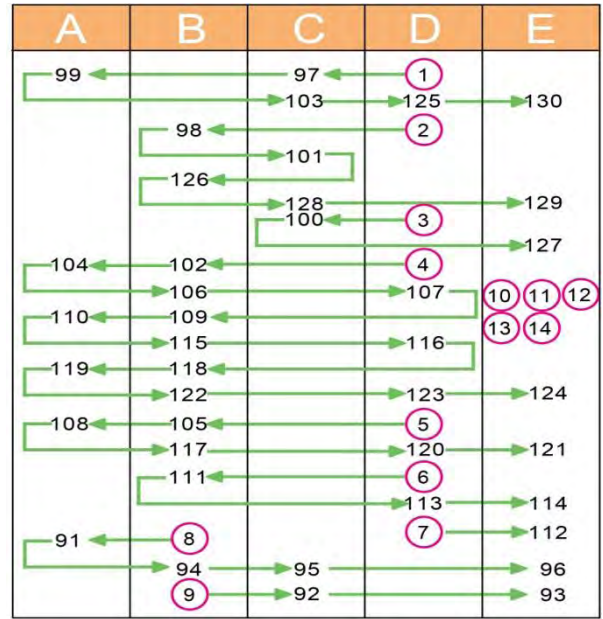
2.



3.



4.



發現：

1. 持續使用分堆方式，求最少步數。
2. 前D後B：盤1、2、3、4、5、6、7先移至D區，盤8、9、10、11、12、13移至B區，盤14就可直接跳至C區至E區。
3. 前B後D：盤1、2、3、4、5、6、7先移至B區，盤8、9、10、11、12、13移至D區，盤14就可直接跳至C區至E區。
4. 方式一、二過程不同，其走出的步數也不同，以【前D後B】的方式走了130步，為最少的方式。

(十六)情境 15：盤數為 15 盤，須由 A 區移到 E 區

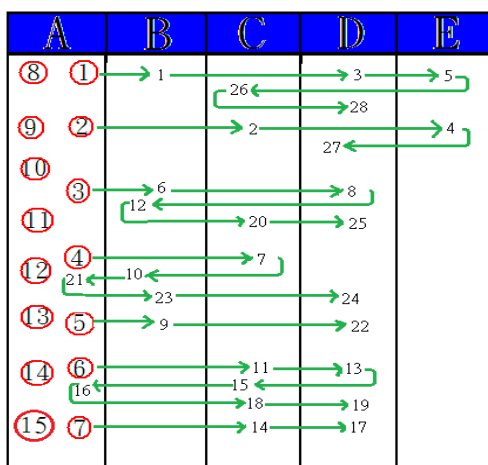
由前 D 後 B 及前 B 後 D 這兩種方式，我們得到以下的步數及走法。

前 D 後 B	1-B	2-C	1-D	2-E	1-E	3-B	4-C	3-D	5-B
	4-B	6-C	3-B	6-D	7-C	6-C	6-A	7-D	6-C
	6-D	3-C	4-A	5-D	4-B	4-D	3-D	1-C	2-D
	1-D	8-B	8-C	9-B	8-B	10-C	10-E	8-A	9-C
	9-E	8-B	8-C	8-E	11-B	11-C	12-B	11-B	13-C
	11-A	12-C	11-B	11-C	14-B	11-B	12-A	11-A	13-B
	11-C	12-B	11-B	8-C	8-B	9-C	9-A	10-C	8-A
	10-B	8-C	9-B	8-B	15-C	15-E	8-A	9-C	9-E
	8-C	8-E	10-A	11-C	10-C	12-A	10-B	11-A	10-A
	8-C	8-B	9-C	9-A	8-A	13-C	13-E	14-C	13-C
	13-B	14-E	13-C	13-E	8-B	9-C	8-C	10-B	8-A
	9-B	8-B	11-C	11-E	12-C	11-C	11-A	12-E	11-C
	11-E	8-C	9-A	8-A	10-C	10-E	8-B	9-C	9-E
	8-C	8-E	1-C	2-B	1-A	3-C	2-C	4-B	1-C
4-A	5-B	4-B	4-D	5-A	4-B	4-A	6-B	7-E	
6-D	6-E	4-B	4-D	5-B	4-B	4-A	5-D	5-E	
共 153 步	4-B	4-D	4-E	1-D	2-B	3-E	2-C	2-E	1-E

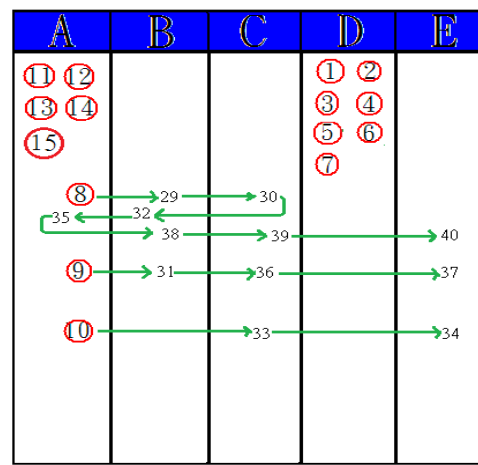
前 B 後 D	1-B	2-C	2-D	3-C	3-E	4-C	2-E	4-D	5-C
	4-D	1-D	1-E	6-B	6-D	7-B	6-B	4-D	5-B
	8-C	4-B	8-D	9-C	1-D	2-C	1-C	3-D	3-B
	1-D	2-B	1-B	9-E	8-E	10-C	10-D	11-C	8-C
	9-D	8-D	11-E	12-C	11-C	11-A	12-E	11-C	11-E
	8-E	9-C	8-C	10-E	8-D	9-E	8-E	13-C	13-D
	14-C	13-C	13-A	14-D	13-C	13-D	15-C	8-C	9-D
	8-D	10-C	8-E	9-C	8-C	11-D	8-D	9-E	8-E
	10-D	8-C	9-D	8-D	12-C	12-A	15-E	8-E	9-C
	8-C	10-E	8-D	9-E	8-E	11-C	11-A	13-C	8-C
	9-D	8-D	10-C	10-A	8-E	9-C	9-A	8-C	8-A
	14-E	13-D	13-E	8-C	8-D	9-C	9-E	8-E	10-C
	10-D	11-C	10-C	10-A	11-D	10-C	10-D	12-C	8-C
	9-D	8-D	12-E	8-C	9-E	8-E	10-C	8-D	9-C
	8-C	11-E	8-D	8-E	9-D	8-D	10-E	1-A	2-C
	1-C	3-A	1-B	2-A	1-A	8-C	9-E	4-D	8-C
5-C	4-C	6-D	4-B	5-D	4-C	4-D	7-C	7-D	
4-C	5-B	6-E	5-D	5-E	1-B	1-D	4-E	2-B	
共 167 步	3-C	3-E	2-C	2-E	1-E				

其走法如下：【前 D 後 B】

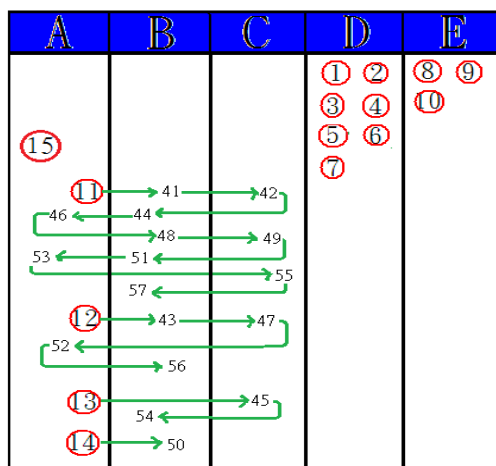
1.



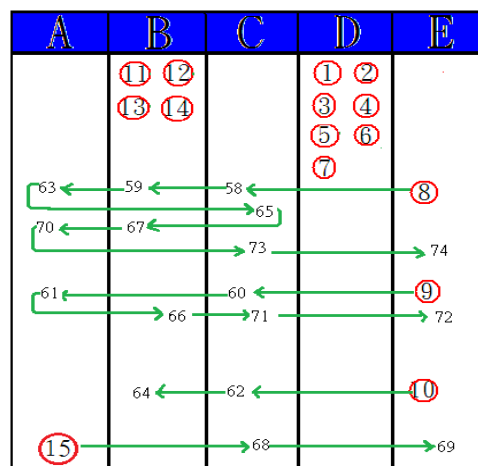
2.



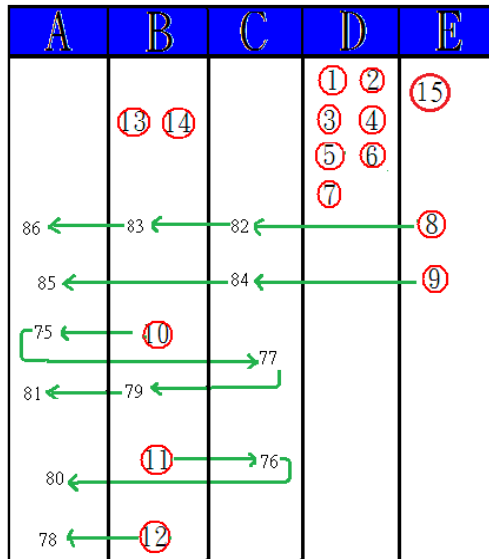
3.



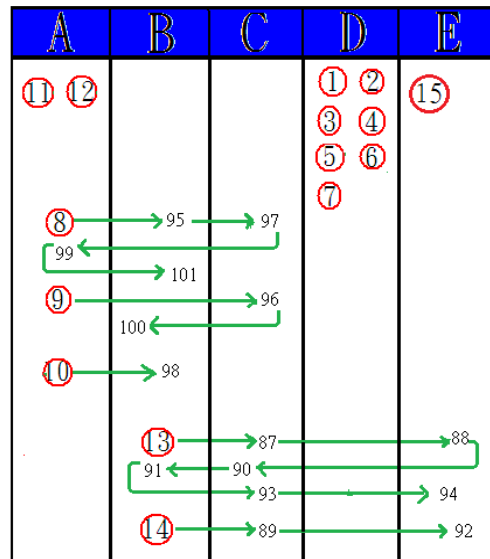
4.



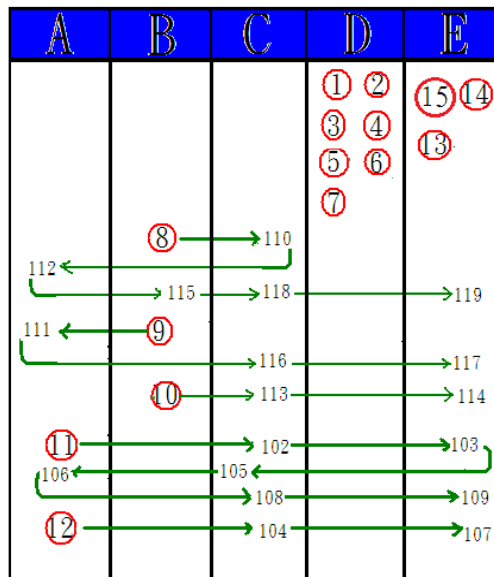
5.



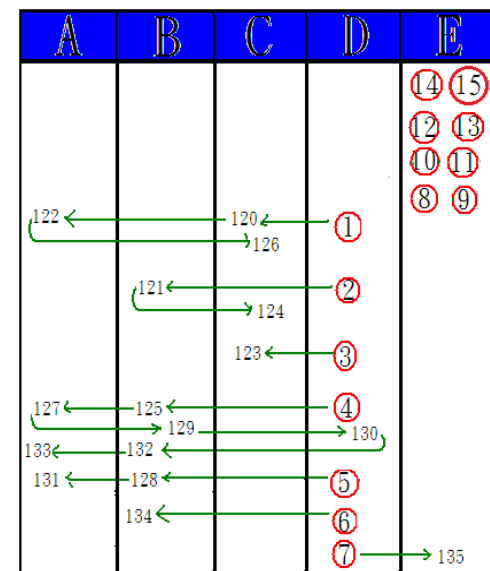
6.



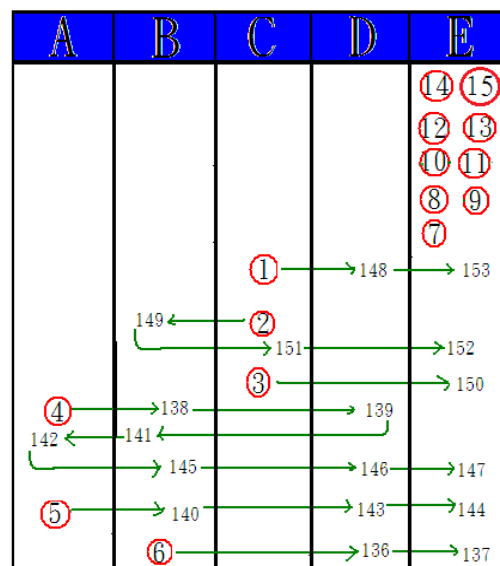
7.



8.



9.



發現：

1. 持續使用分堆方式，求最少步數。
2. 前D後B：盤1、2、3、4、5、6、7先移至D區，盤8、9、10、11、12、13、14移至B區，盤15就可直接跳至C區至E區。
3. 前B後D：盤1、2、3、4、5、6、7先移至B區，盤8、9、10、11、12、13、14移至D區，盤15就可直接跳至C區至E區。
4. 方式一、二過程不同，其走出的步數也不同，以【前D後B】的方式走了153步，為最少的方式。

二、研究限制

(一) 我們分別做A-E型(將全部盤數從A區走到E區)及B-D型(將全部盤數從B-區走到D區)，留下不同走法及不同步數資料，經過比較後將最低步資料列表，又因依據小組討論的限制之下，最後只留下A-E型1~15盤。

(二)將A-E型1~15盤的最低步資料做比對，希望能找到棋子數和最少步數之間的關係。

三、制定策略過程說明：

(一) 首先隨意走跳，並無特別走法。

(二) 觀察記錄：比對在眾多紀錄中，發現最大盤只跳兩步將是最少步數的走法。

(三) 察覺規律，但此階段尚為得到具體結果，不過在整理過程中，我們又進行討論：

1. 利用河內塔「盤大於柱」狀況時的分堆原理，將圓盤分成兩堆。
2. 經過我們兩人討論，推論要將其他圓盤先擺放置B及D，所以有了【前B後D】、【前D後B】兩種

(四) 制定策略後，開始操作紀錄驗證策略。

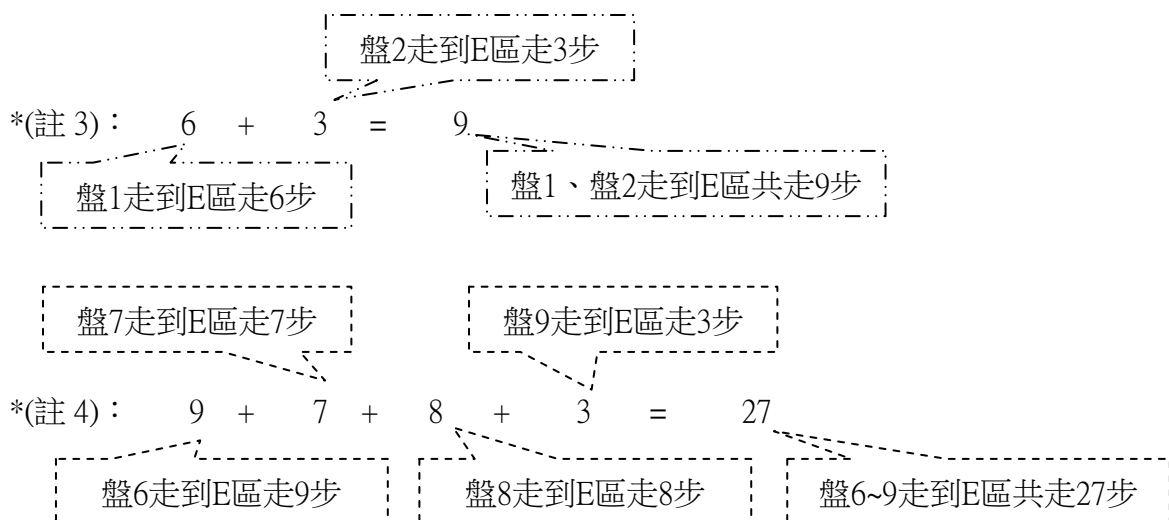
主要驗證方式：「操作紀錄」、「數學歸納法」，操作不同盤數的毛蟲塔過程中產生最小數據，必須經兩人個別、合作驗證達七次以上皆為此最小數據才列為結果。

(五)以下為4-15盤【前B 後D】及【前D後B】的操作數據

【前B 後D】操作數據				
盤數	分堆步數			總步數
	前半堆*(註 1)	後半堆*(註 2)	最後盤	
4	6+3=9*(註 3)	3	2	14
5	5+3=8	6+3=9	2	19
6	7+4+3=14	5+3=8	2	24
7	5+6+3=14	9+5+3=17	2	33
8	8+6+5+3=22	9+5+3=17	2	41
9	8+6+5+3 = 22	9+7+8+3 = 27	2	51
10	7+9+7+4+3=30	9+7+8+3=27*(註 4)	2	59
11	8+6+9+5+3=31	17+9+7+8+3=44	2	77
12	11+11+4+15+7+3=51	9+5+3+18+6=41	2	94
13	10+10+7+6+5+3=41	27+15+9+6+9+3=69	2	112
14	13+11+7+7+14+6+3=61	23+11+7+22+8+3+2=76	2	137
15	14+10+7+12+7+5+3=58	40+21+16+12+6+9+3=107	2	167

* (註 1)：前半堆：為總圓盤數除以 2，並無條件捨去至個位數，即為前半堆的盤數。
 (例如：9 盤的前半堆，9 除以 2 等於 4.5，無條件捨去至個位數為 4，4 即為前半堆的盤數)

* (註 2)：後半堆：為總圓盤數減去前半堆的盤數再減一，即為後半堆的盤數。
 (例如：9 盤的後半堆，9-4-1=4，4 即為後半堆的盤數)



【前 D 後 B】操作數據				
盤數	分堆步數			總步數
	前半堆	後半堆	最後盤	
4	6+3=9	3	2	14
5	5+3=8	6+3=9	2	19
6	7+5+3=15	7+3=10	2	27
7	8+4+3=15	9+6+3=18	2	35
8	8+5+6+3=22	9+6+3=18	2	42
9	8+5+6+3=22	14+9+5+3=31	2	55
10	8+7+8+4+3=30	7+7+8+3=25	2	57
11	9+6+8+4+3=30	14+9+6+8+3=40	2	72
12	10+8+7+10+5+3=43	19+13+9+5+3=49	2	94
13	11+8+8+9+4+3=43	20+11+7+7+8+3=56	2	101
14	10+8+7+18+7+9+3=62	23+13+12+7+8+3=66	2	130
15	10+8+7+18+7+9+3=62	27+15+11+18+7+8+3=89	2	153

(六) 驗證結論

玖、結論與展望

一、移位遊戲研究中，都將移位步數精簡至極致為目標，也就是求出最小值。而在移位遊戲中，發現其步數的變化與「棋子數」、「移位策略」等變因均有關。

(一) 棋子數越多：移位的步數隨之增加。

(二) 移位策略：可分成「前半堆在 B，後半堆在 D」、「前半堆在 D，後半堆在 B」

二、盤數與走法的關係

- (一)三個圓盤以下：因為棋盤格數足夠，不用讓圓盤重疊，所以走或跳就可到達終點。
 (二)四個圓盤以上：因為棋盤格數開始不足，必須將圓盤分堆重疊，才能順利以最少步數抵達終點。

三、分堆圓盤個數：因三個圓盤不需要分堆，故假設圓盤個數為 N 個 ($N \geq 4$)

	前半堆		後半堆		最後盤	
	個數	編號	個數	編號	個數	編號
盤數為奇數	$\frac{N-1}{2}$	$1 \sim \frac{N-1}{2}$	$\frac{N-1}{2}$	$\frac{N-1}{2}+1 \sim N-1$	1	N
盤數為偶數	$\frac{N}{2}$	$1 \sim \frac{N}{2}$	$\frac{N}{2}-1$	$\frac{N}{2}+1 \sim N-1$	1	N

四、走法：

- (一)4 盤~10 盤：將圓盤分成較小盤先分到 B，較大盤分到 D。
 (二)11 盤~16 盤：將圓盤分成較小盤先分到 D，較大盤分到 B。
 (三)所有盤數的最後一堆是最大盤，它的走法是跳 C，再跳到 E，總共兩步。這是最節省步數的方法。

五、4 盤以上的分堆最少步數分析：

策略	盤數	分堆步數			總步數
		前半堆	後半堆	最後盤	
前 B 後 D	4	$6+3=9$	3	2	14
	5	$5+3=8$	$6+3=9$	2	19
	6	$7+4+3=14$	$5+3=8$	2	24
	7	$5+6+3=14$	$9+5+3=17$	2	33
	8	$8+6+5+3=22$	$9+5+3=17$	2	41
	9	$8+6+5+3=22$	$9+7+8+3=27$	2	51
前 D 後 B	10	$8+7+8+4+3=30$	$7+7+8+3=25$	2	57
	11	$9+6+8+4+3=30$	$14+9+6+8+3=40$	2	72
	12	$10+8+7+10+5+3=43$	$19+13+9+5+3=49$	2	94
	13	$11+8+8+9+4+3=43$	$20+11+7+7+8+3=56$	2	101
	14	$10+8+7+18+7+9+3=62$	$23+13+12+7+8+3=66$	2	130
	15	$10+8+7+18+7+9+3=62$	$27+15+11+18+7+8+3=89$	2	153

由上表可發現

- (一)前堆及後堆的最後一盤步數皆為 3 步。
 (二)從 11 圓盤後，第二堆走的步數會多於第一堆的步數。
 (三)6~15 盤的前半堆：6、7 盤皆是 14 步；8、9 盤皆是 22 步；10、11 盤皆是 30 步；12、13 盤皆是 43 步；14、15 盤皆是 62 步；其細部的步數也極為相似，因為在固定的步數內，可允許先後走法的不同，才會造成個別盤數的步數有微調的狀況。

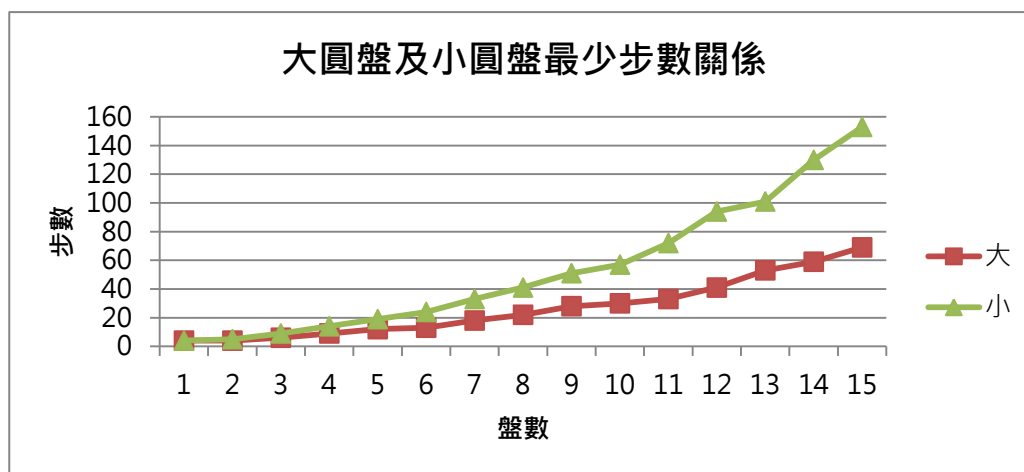
六、大圓盤及小圓盤最少步數之關係

圓盤數	1	2	3	4	5	6	7	8
大	4	4	6	9	12	13	18	22
小	4	5	9	14	19	24	33	41

圓盤數	9	10	11	12	13	14	15	/
大	28	30	33	41	53	59	69	
小	51	57	72	94	101	130	153	

大：為最後盤到終點的步數。(例如：9 盤的盤 9 即為最後盤，移動到 E 區，走了 28 步)

小：為最小盤到終點的步數。(即為該盤數之移動總步數)



由上表得知，盤數越多，最大盤及最小盤的最後步數差距越大，且每增加一盤，增加的步數會急速增加。

七、展望

- (一) 因為這次研究主要為 5 格的棋盤，15 以內的圓盤走法。若之後有興趣研究此相關移位遊戲的同學，可以增加棋盤格數或者是增加圓盤數，觀察其走法與規律。
- (二) 這次的棋盤主要是直線，可朝改變棋盤形狀進行深入探討及研究。

拾、參考資料

- 一、郭哲維(2001)。**解開難題的奧秘--「個人移位跳棋」遊戲的探討**。國立科學教育館：全國中小學科學展覽第 41 屆國中組數學科。
- 二、許哲維、黃怡諶、陳怡潔、陳琬璇、王啟任(2004)。**三色移位毛毛蟲—三色移位遊戲的探討**。國立科學教育館：全國中小學科學展覽第 44 屆國小組數學科。
- 三、陳妍廷、李奇軒、吳睿軒、簡子賀(2008)。**毛毛蟲爬眼鏡-移位遊戲變形玩法**。國立科學教育館：全國中小學科學展覽第 48 屆國小組數學科。
- 四、陳博勝、莊美蘭、陳紋招(1987)。**河內寶塔與九連環**。國立科學教育館：全國中小學科學展覽第 27 屆國小組數學科。
- 五、陳璿、林亮辰、曹瑀、吳侑璋(2009)。**三柱輪換之移動策略---雞尾酒法**。國立科學教育館：全國中小學科學展覽第 49 屆國中組數學科。
- 六、許介彥(2005)。**數學悠哉遊**。臺北市：三民。

【評語】 080406

- 將「毛蟲棋」與「河內塔」兩種遊戲結合，創發出更多變、更具挑戰的「毛蟲塔」移位遊戲，別具創意。
- 移位步數的探究過程若能提高檢證的完整度更佳。