

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

佳作

080405

一步一腳印－探討方格棋盤中各種路徑問題

學校名稱：嘉義縣阿里山鄉香林國民小學

作者： 小六 簡丞皓	指導老師： 林志豪
-------------------	------------------

關鍵詞：對稱、公因數

一步一腳印-探討方格棋盤中各種路徑問題

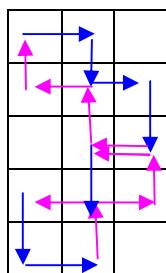
摘要：

在這次的研究中，我深入的研究三種結論：第一，路徑的步數和最大公因數有關。第二，圖形最後會回到起始點，之後路徑就會重覆。第三，如果起始點不同，圖形看起來似乎不一樣，但是實際上是有關聯的。而在同一個棋盤中所有的圖形數也和最大公因數有關。而且，很多圖形看起來好像是無關的，但是我歸納出 7 種基本圖形，所有的圖形都是這 7 種圖形延伸和擴展出來的。最後，在棋盤中，不同的起點會出不同的圖形，當然有些是相同的。我也發現到不同起點但是圖形相同也有規則，剛好形成 S 形的排法。

這些結論其實和線對稱有很大的關係，利用線對稱的想法可以解釋出很多規則。而且，所有的棋盤可以看作是某一個正方形棋盤的延伸。

壹、研究動機：

有一天，老師在上課的時候出了一個題目，老師在黑板上畫了一個直的有 3 行，橫的有 5 列的方形棋盤，如下圖：



老師說：如果從左上角的格子開始，往右移一格，算第一步。再往下移一格，是第二步。繼續以往右、往下...的步驟進行。如果走到盡頭，就往回走。如此一來，最後會走回左上角的起點。這樣繞一圈再回到原點要走幾步呢？由上圖很清楚的知道，總共是 16 步。後來我還畫了很多種不同的正方形棋盤，發現了幾個很有趣的現象。例如，正方形的一定會回到原點、步數和邊長的方格數有關，...等等。之後，我想說，「如果是長方形的呢？」會有相同的結果嗎？如果從不同的格子當起點的話，結果會不一樣嗎？

貳、研究目的

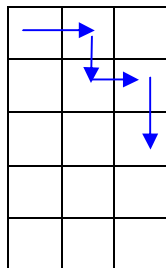
- 一、研究方形棋盤中任何一格為起點時所畫出來的圖形
- 二、研究同一個棋盤中所有圖形的種類數
- 三、研究畫出圖形時所走的路線最少的步數
- 四、研究在不同的棋盤大小，圖形之間的關係
- 五、研究起點坐標和圖形之間的關係

參、研究過程與結果

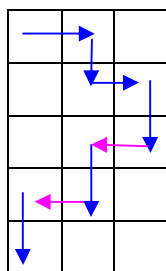
一、研究方形棋盤中任何一格為起點時所畫出來的圖形

(一) 我說明一下圖形的畫法：

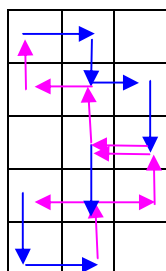
1. 棋盤的大小我是用直角坐標來定為「行×列」，例如下圖是 3×5 的長方形
2. 在棋盤內的任何一個格子都可以當做起點開始走，走的順序是：往右→往下→右→下→右→...



3. 這時，已經不能再往右走，所以改爲往左走，之後就維持往左走，直到不能往左走才能改變方向。但是，此時還可以往下走，所以繼續往下走。



4. 同樣的做法，不能往下走就改為往上走，之後維持往上走，直到不能往上走之後才改為往下走。但是，這時還是可以往右走，就不改變方向。



5. 走的原則就是當某個方向不能再走的時候才可以換方向，如果還可以繼續走就必須走下去不可以換方向。
6. 如果圖形重複之後，我就停止，然後計算總共走了幾步。

(二) 定座標：將棋盤上面的格子標上座標，如下圖的標示。這樣，要討論不同起點所畫出來的圖形時就會比較方便。

(1,5)	(2,5)	(3,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)

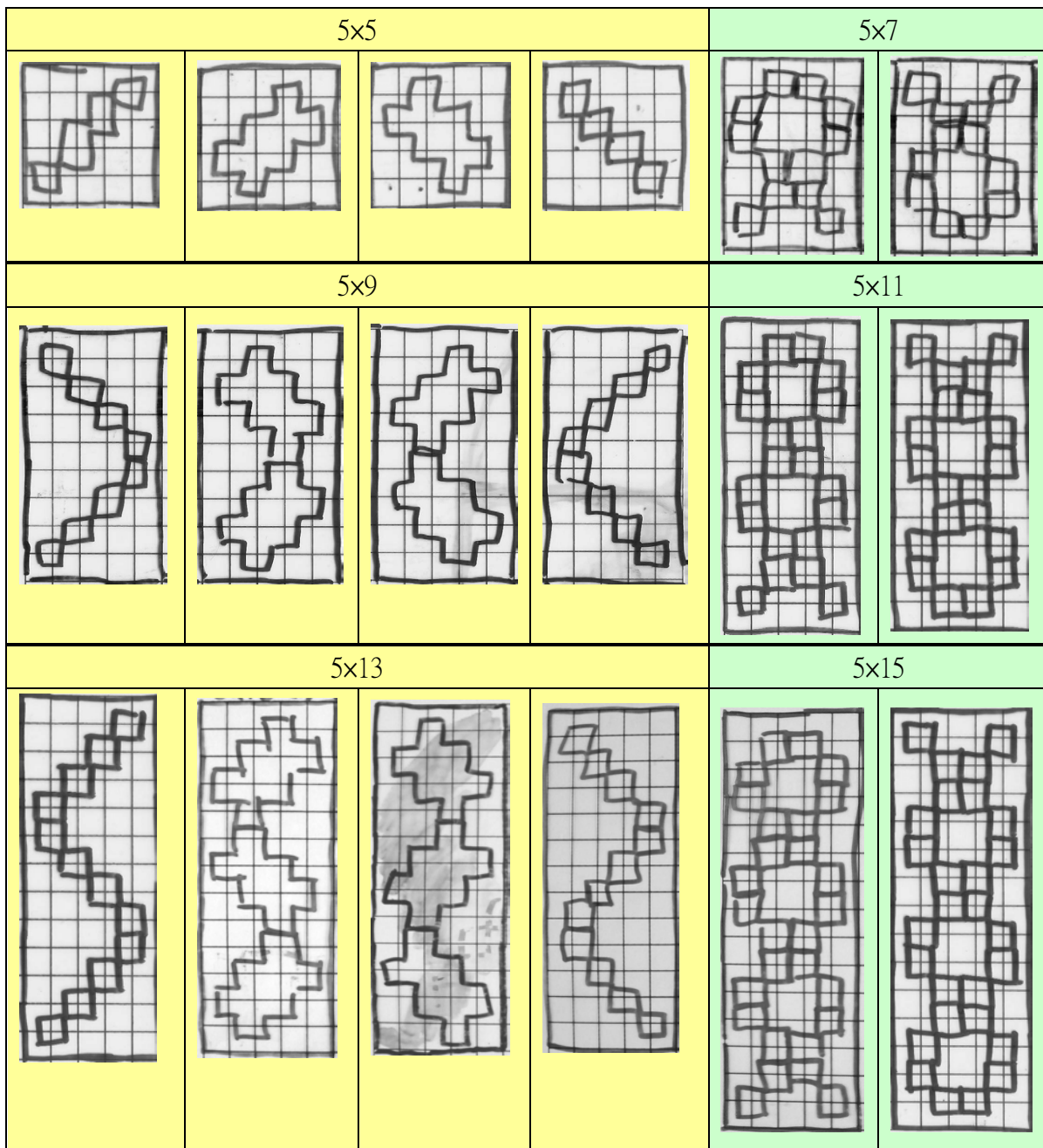
(三) 在畫的過程中，我發現橫的棋盤其實圖形就是直的棋盤的旋轉，所以我只討論直棋盤的結果，底下是方形棋盤中任何一個方格當起點時畫出來的圖形：

	3x3		3x4	3x5		3x7	
圖形結果							

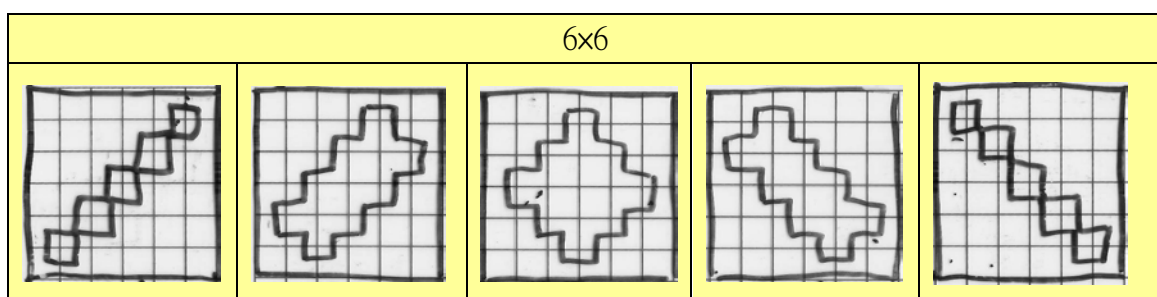
4xn

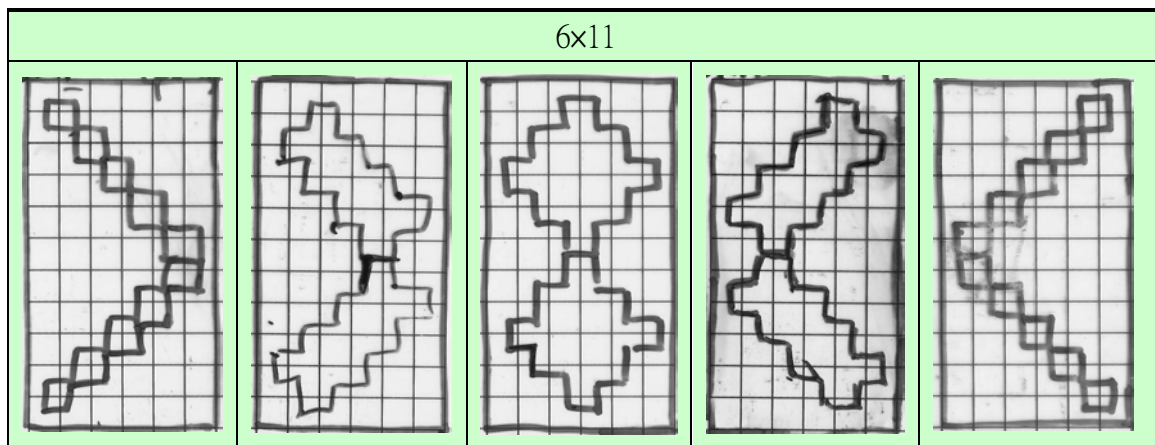
4x4			4x7		
4x10					

5xn

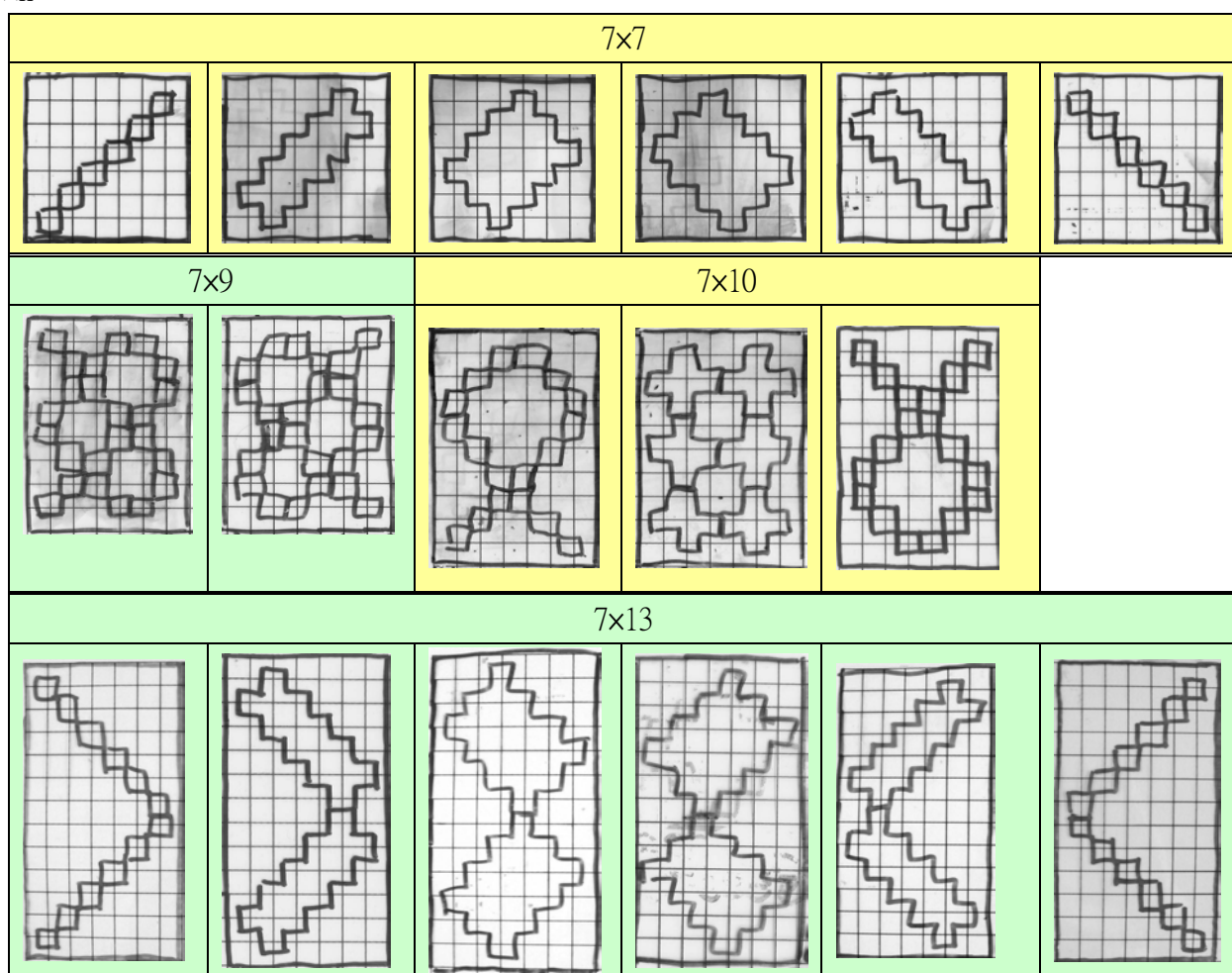


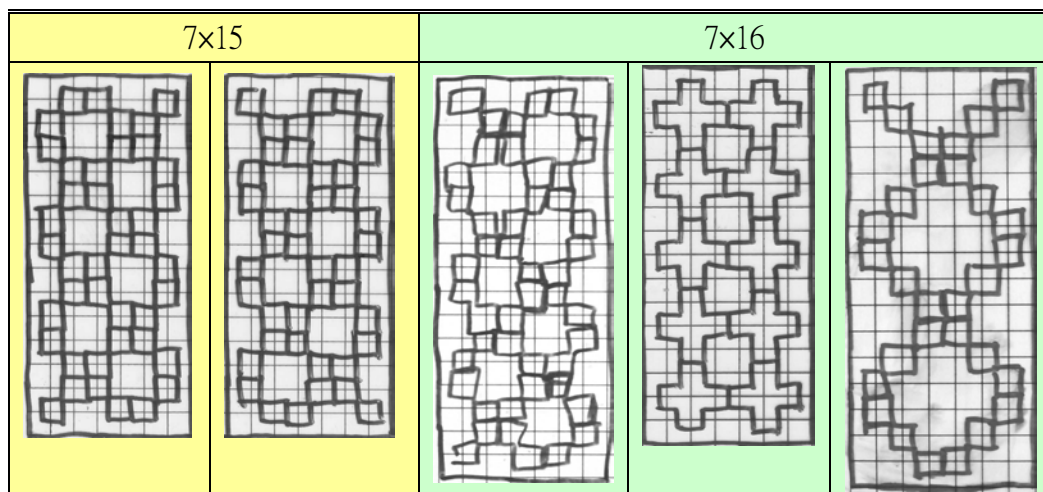
6xn



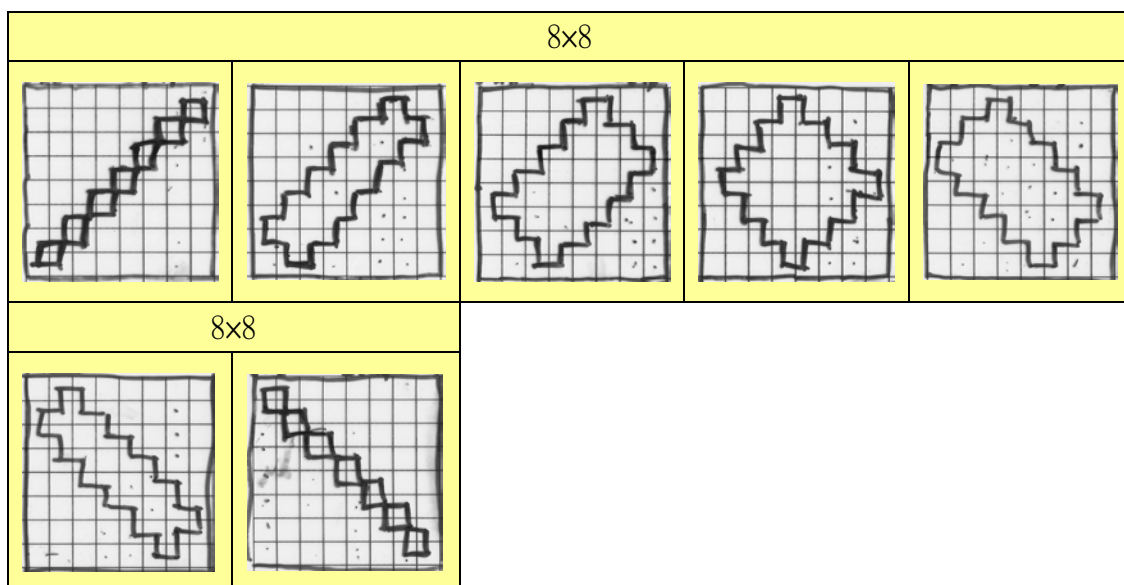


7xn

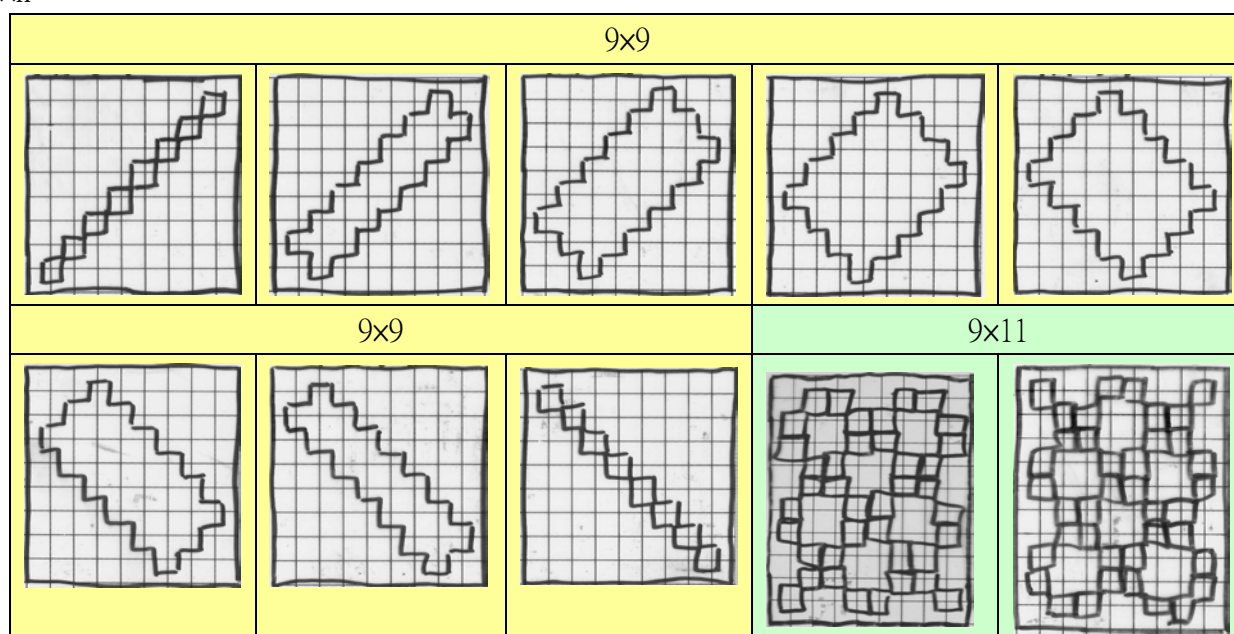


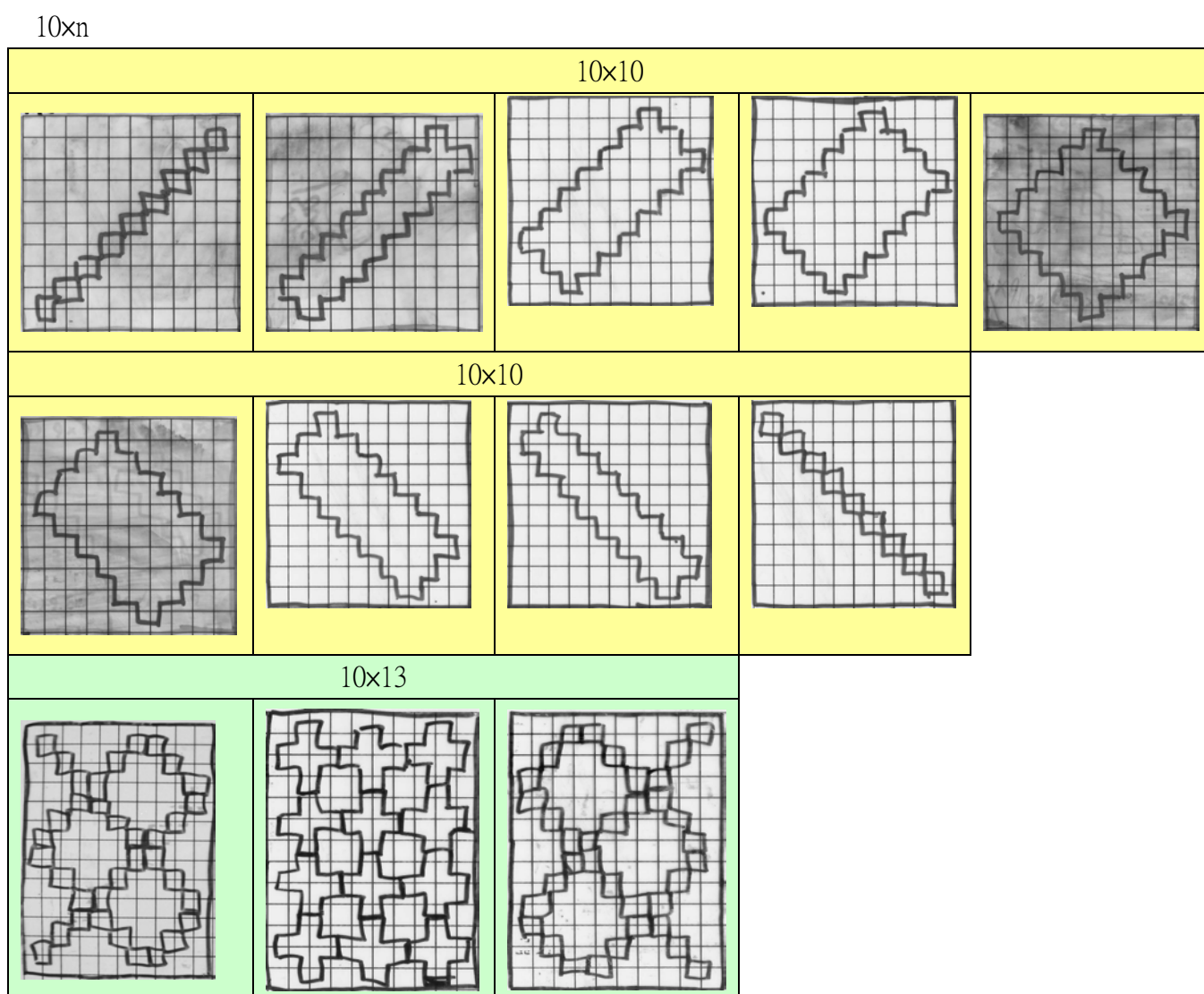
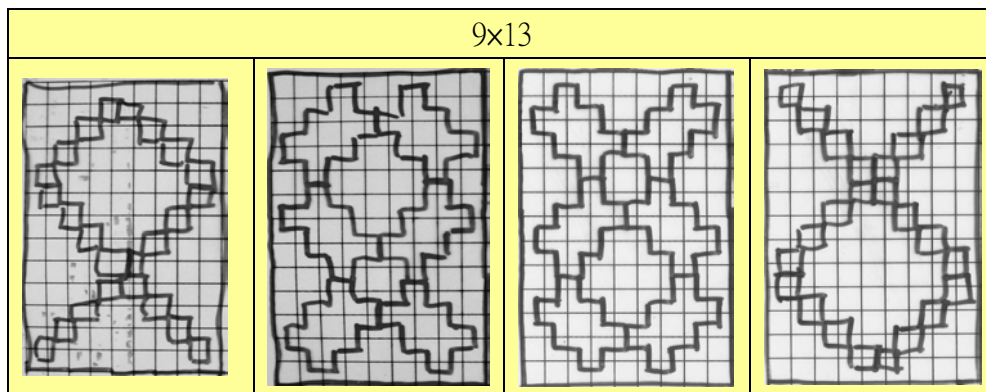


8xn



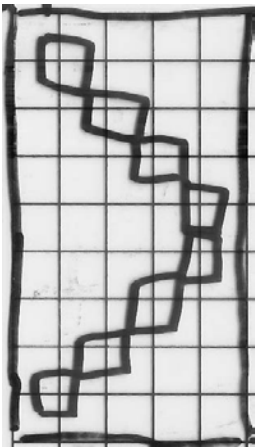
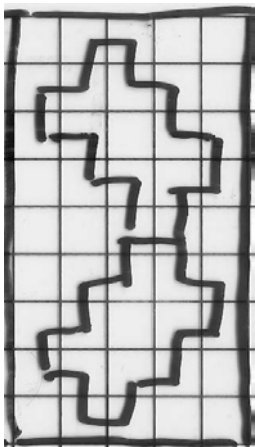
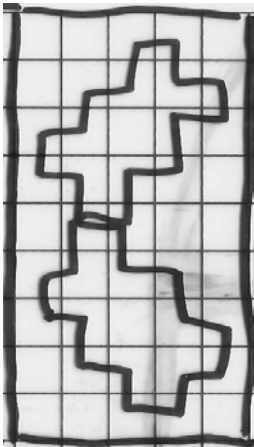
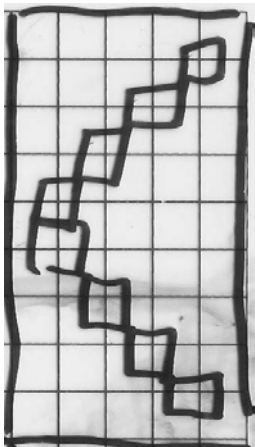
9xn





三、研究同一個棋盤中所有圖形的種類

(一) 我可以發現到，在同一個棋盤中，有些不同的起點會畫出不一樣的圖形；而有些雖然起點不同，但是畫出來的圖形卻是相同的。

棋盤大小	5×9	5×9	5×9	5×9
起點坐標	(1,1) (1,8),(2,7),(3,6), (4,5),(5,4) (1,9),(2,8),(3,7), (4,6),(5,5)	(1,2),(2,1) (1,7),(2,6),(3,5), (4,4),(5,3) (2,9),(3,8),(4,7), (5,6)	(1,3),(2,2),(3,1) (1,6),(2,5),(3,4), (4,3),(5,2) (3,9),(4,8),(5,7)	(1,4),(2,3),(3,2), (4,1) (1,5),(2,4),(3,3), (4,2),(5,1) (4,9),(5,8) (5,9)
圖形				

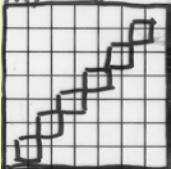
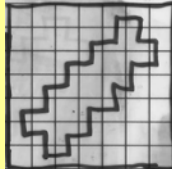
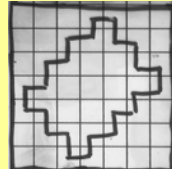
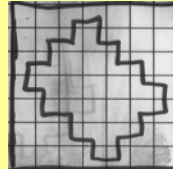
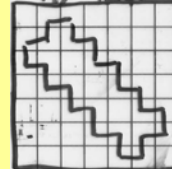
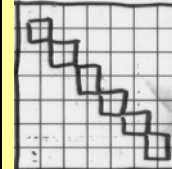
(二) 我把同一個棋盤中所有的圖形種類的數量列出來：

		列							
×		3	4	5	6	7	8	9	10
行	3	2	1	2	1	2	1	2	1
	4	1	3	1	1	3	1	1	3
	5	2	1	4	1	2	1	4	1
	6	1	1	1	5	1	1	1	1
	7	2	3	2	1	6	1	2	3
	8	1	1	1	1	1	7	1	1
	9	2	1	4	1	2	1	8	1
	10	1	3	1	1	3	1	1	9

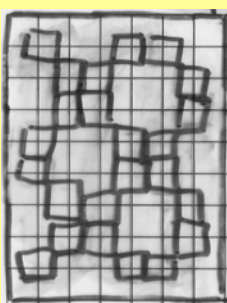
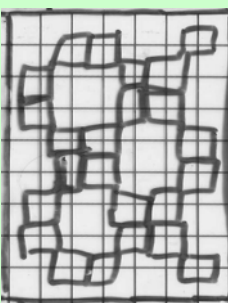
(三) 從上表中可以知道，在同一個棋盤中所有的圖形種類數量
=[(行-1)和(列-1)的最大公因數]

(四) 從圖形中也可以發現：在同一個棋盤中所有的圖形種類會形成一個線對稱的關係。例如：

7x7

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
					

7x9

(1,1)	(1,2)
	

三、研究畫出圖形時所走的路線最少的步數

(一) 我在畫的時候發現在同一個棋盤中，無論起點在哪一個位置，所走的步數都是一樣的，現在將每種棋盤的圖形所走的最少步數列在下表：

		列							
		3	4	5	6	7	8	9	10
行	3	8	24	16	40	24	56	32	72
	4	24	12	48	60	24	84	96	36
	5	16	48	16	80	48	112	32	144
	6	40	60	80	20	120	140	160	180
	7	24	24	48	120	24	168	96	72
	8	56	84	112	140	168	28	224	252
	9	32	96	32	160	96	224	32	288
	10	72	36	144	180	72	252	288	36

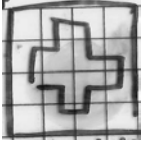
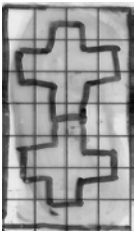
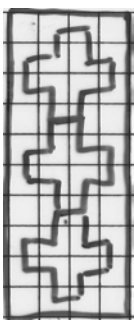
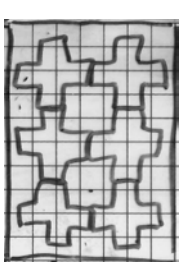
(二) 我發現，步數有一個規則：步數=(行-1)×(列-1)×4÷[(行-1)和(列-1)的最大公因數]。

比如：10×13，步數=(10-1)×(13-1)×4÷(9,12)=9×12×4÷3=144

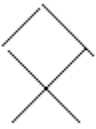
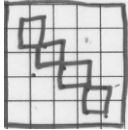
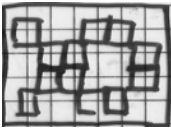
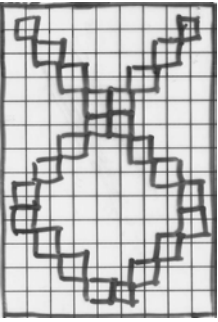
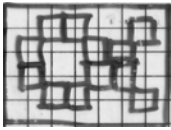
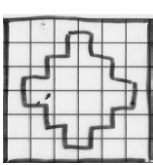
四、研究在不同大小的棋盤中各種圖形之間的關係

底下分為幾點來討論：

(一) 基本圖形的種類：我發現當我把棋盤的行或列增加但是[(行-1)和(列-1)的最大公因數]和起點坐標都不改變的時候，圖形是相似的，而且是延伸下去的。

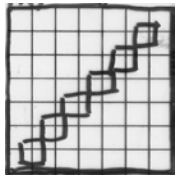
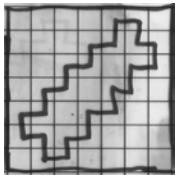
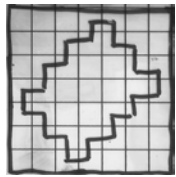
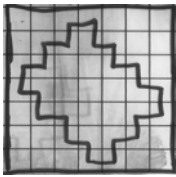
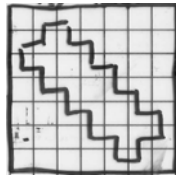
4×4， 起點坐標(1,2)， 最大公因數=3	4×7， 起點坐標(1,2)， 最大公因數=3	4×10， 起點坐標(1,2)， 最大公因數=3	7×10， 起點坐標(1,2)， 最大公因數=3
			

所以，我認為圖形是從一些最基本的圖形延伸出來的。我總共歸納出 7 種基本的圖形：

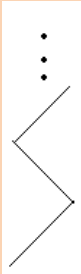
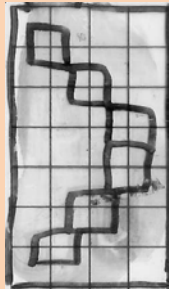
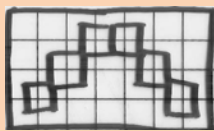
	基本圖形種類						
							
圖 例	4×4， (1,1) 	5×5，(1,4) 	5×7，(1,4) 	7×5，(1,1) 	9×13，(1,4) 	7×5，(1,3) 	6×6，(1,4) 

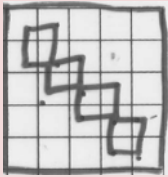
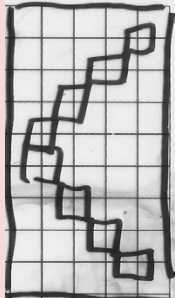
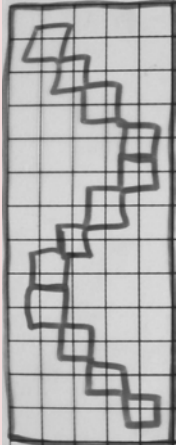
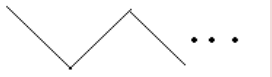
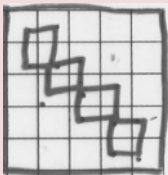
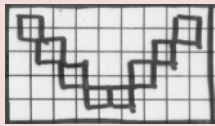
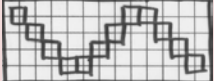
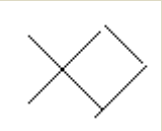
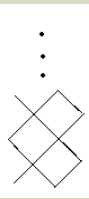
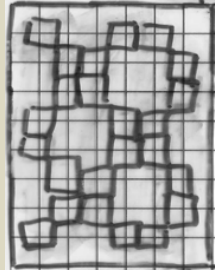
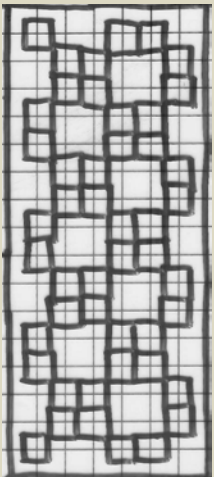
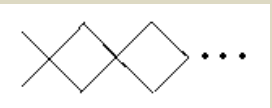
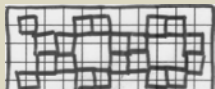
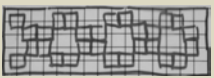
(二) 圖形的擴展：我可以發現，有些圖形是屬於 的類型，但是有的中間會有空白的地方，圖形中間空白的格子會隨著坐標的不同而變化。例如：

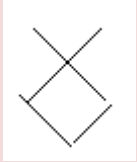
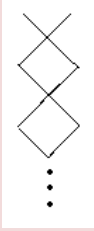
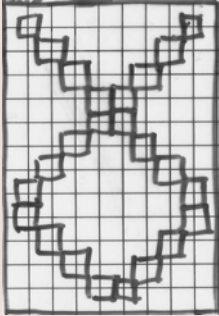
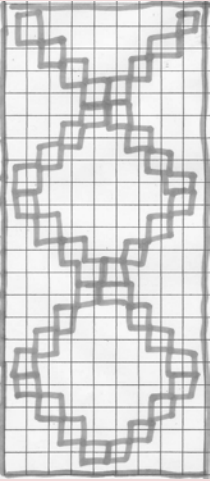
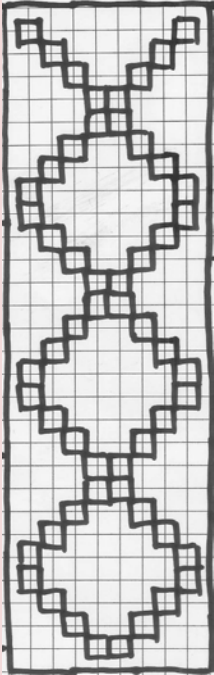
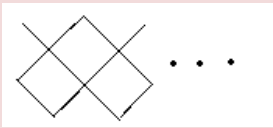
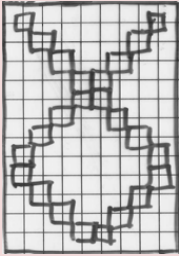
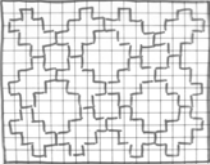
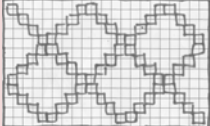
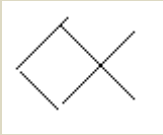
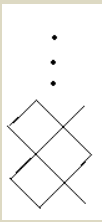
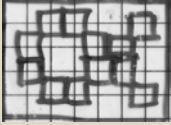
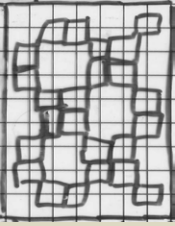
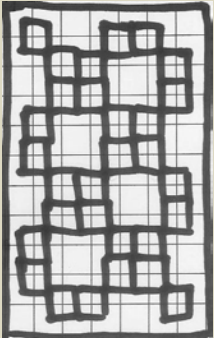
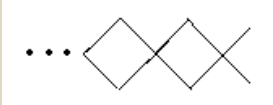
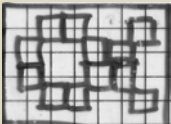
7×7

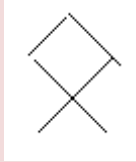
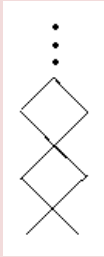
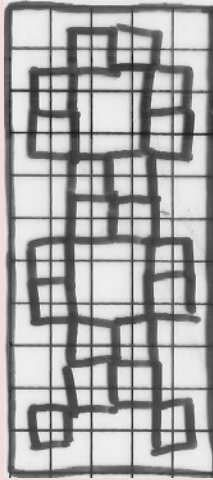
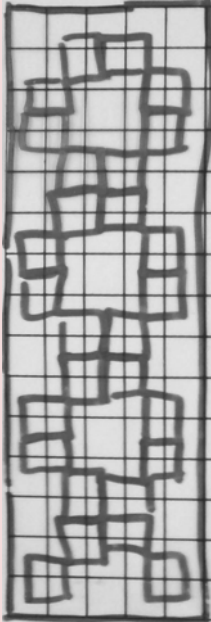
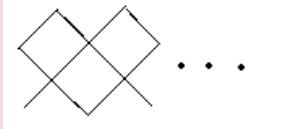
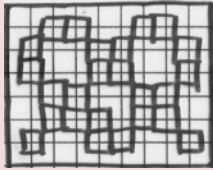
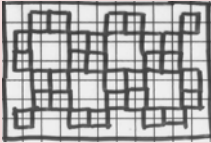
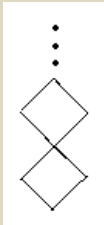
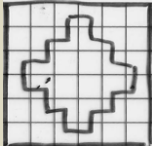
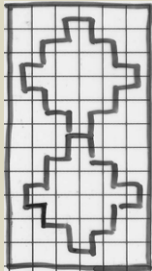
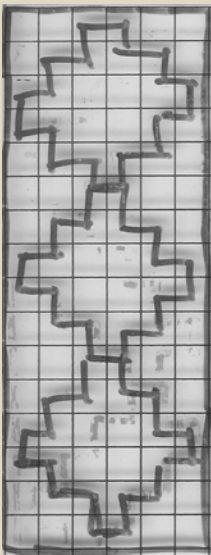
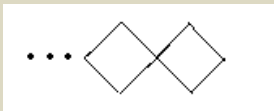
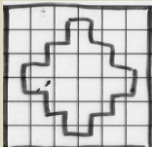
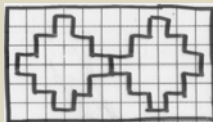
起點坐標	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
圖形						

(三) 基本圖形的延伸：很多圖形都是從基本圖形向上延伸或是向右延伸出來的。當我把棋盤的行或列增加但是[(行-1)和(列-1)的最大公因數]和起點坐標都不改變的時候，圖形是和基本圖形以線對稱的方式延伸下去。

基本圖形種類		圖例		
	向上延伸 	4×4 , (1,1) 	4×4 , (1,1) → 4×7 , (1,1) 	4×7 , (1,1) → 4×10 , (1,1) 
	向右延伸 	4×4 , (1,1) 	4×4 , (1,1) → 7×4 , (1,1) 	7×4 , (1,1) → 10×4 , (1,1) 

		$5 \times 5, (1,4)$ 	$5 \times 5, (1,4) \rightarrow$ $5 \times 9, (1,4)$ 	$5 \times 9, (1,4) \rightarrow$ $5 \times 13, (1,4)$ 
		$5 \times 5, (1,4)$ 	$5 \times 5, (1,4) \rightarrow$ $9 \times 5, (1,4)$ 	$9 \times 5, (1,4) \rightarrow$ $13 \times 5, (1,4)$ 
		$7 \times 5, (1,1)$ 	$7 \times 5, (1,1) \rightarrow$ $7 \times 9, (1,1)$ 	$7 \times 9, (1,1) \rightarrow$ $7 \times 17, (1,1)$ 
		$7 \times 5, (1,1)$ 	$7 \times 5, (1,1) \rightarrow$ $11 \times 5, (1,1)$ 	$11 \times 5, (1,1) \rightarrow$ $15 \times 5, (1,1)$ 

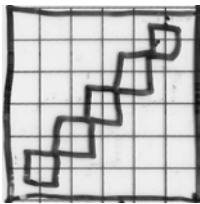
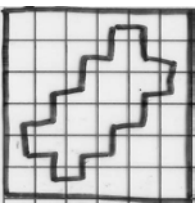
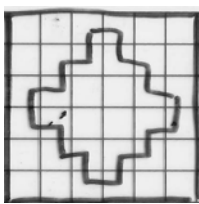
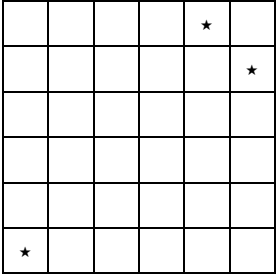
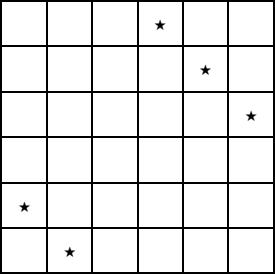
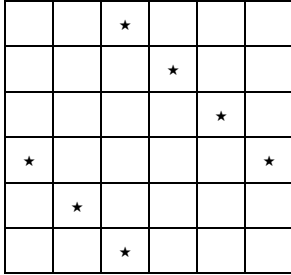
		$9 \times 13, (1,4)$ 	$9 \times 13, (1,4) \rightarrow 9 \times 21, (1,4)$ 	$9 \times 13, (1,4) \rightarrow 9 \times 29, (1,4)$ 
		$9 \times 13, (1,4)$ 	$9 \times 13, (1,4) \rightarrow 17 \times 13, (1,4)$ 	$17 \times 13, (1,4) \rightarrow 21 \times 13, (1,4)$ 
		$7 \times 5, (1,3)$ 	$7 \times 5, (1,3) \rightarrow 7 \times 9, (1,3)$ 	$7 \times 5, (1,3) \rightarrow 7 \times 11, (1,3)$ 
		$7 \times 5, (1,3)$ 	$7 \times 5, (1,3) \rightarrow 11 \times 5, (1,3)$ 	$11 \times 5, (1,3) \rightarrow 15 \times 5, (1,3)$ 

		$5 \times 7, (1,4)$ 	$5 \times 7, (1,4) \rightarrow$ $5 \times 11, (1,4)$ 	$5 \times 11, (1,4) \rightarrow$ $5 \times 15, (1,4)$ 
		$5 \times 7, (1,4)$ 	$5 \times 7, (1,4) \rightarrow$ $9 \times 7, (1,4)$ 	$9 \times 7, (1,4) \rightarrow$ $11 \times 7, (1,4)$ 
		$6 \times 6, (1,3)$ 	$6 \times 6, (1,3) \rightarrow$ $6 \times 11, (1,3)$ 	$6 \times 11, (1,3) \rightarrow$ $6 \times 16, (1,3)$ 
		$6 \times 6, (1,4)$ 	$6 \times 6, (1,3) \rightarrow$ $11 \times 6, (1,3)$ 	$11 \times 6, (1,3) \rightarrow$ $16 \times 6, (1,3)$ 

五、研究起點坐標和圖形之間的關係

- (一) 圖形變化和起標坐標：我可以發現到相同圖形中起點坐標的位置剛好形成一條向右下的斜線。也就是說，起點坐標的位置剛好是「x 軸數字加 1，y 軸數字減 1」。所以，我可以利用這個結果，只要找一個坐標當起點，那麼就可以找出其他和相同圖形的起點坐標。

6x6

起點坐標	(1,1) (5,6),(6,5), (6,6)	(1,2),(2,1) (4,6),(5,5),(6,4)	(1,3),(2,2),(3,1) (3,6),(4,5),(5,4), (6,3)
圖形			
起點坐標位置			

(三) 起點坐標的次序：從上一個結論中，只要討論黃色部分的起點坐標就可以找出所有起點坐標的圖形。如果從(1,1)開始沿著黃色的部分往上移動，走到最上面時改為往右，可以發現，這樣的順序和圖形的變化也有關係。

例如：6x6 的圖形

起點坐標	(1,1) (5,6) (6,6)	(1,2) (4,6)	(1,3) (3,6)	(1,4) (2,6)	(1,5) (1,6)
圖形					

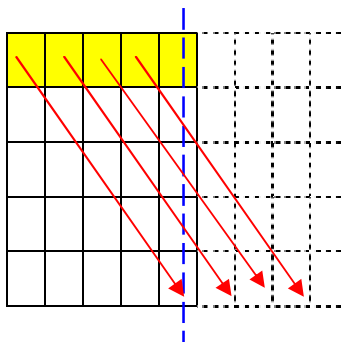
從上面可以發現，6x6 會有 5 種不同圖形。而起點坐標剛好也會跟著圖形的順序而改變。當坐標排到最後一個圖形時再從最後一個排回來。

(1,1)→	(1,2)→	(1,3)→	(1,4)→	(1,5) ↓
(5,6)← ↓	(4,6)←	(3,6)←	(2,6)←	(1,6)
(6,6)				

肆、討論與結論

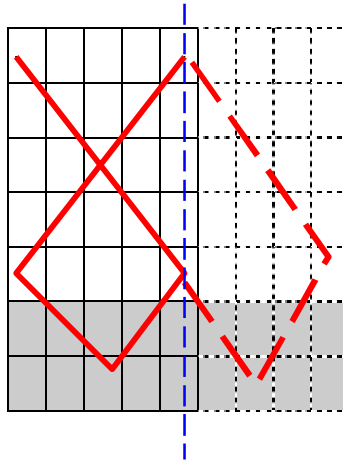
一、我覺得上面發現到的這些結論，可以用格子內的交叉點和假想的對稱軸來解釋。

(一) 先從正方形棋盤來看，例如：5x5 的棋盤，其中內部有 4x4 個交叉點，所以應該會有 16 種不同的圖形。但是，如果我想像有一條對稱軸從第 5 列穿過。因為，同一條對角線上的格子為起點所畫出來的圖形是一樣的。所以，當我選擇其中一個格子當作起點時，等於是從 4 條紅線中選了一條，所以圖形的種類數量是 4，也就是(列-1)個。



(二) 長方形棋盤可以看作是正方形棋盤的延伸，例如：7×5，我把它當作是 5×5 的棋盤再往下加 2 列。所以，交叉點就多了 4×2 個。同樣的，利用第(一)的結論可以發現：紅色虛線對稱過來就是實線的圖形，而且最後會經過(1,5)。所以，圖形種類的數量就會更少。因此，我發現一個通用在方形棋盤的規則：

圖形種類的數量=(行-1)和(列-1)的最大公因數



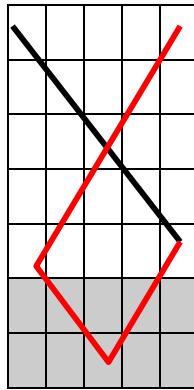
(三) 也因為對稱軸的關係，所以同一個棋盤中所有的圖形會有線對稱的關係。

(四) 畫路徑的時候，可以看作是在交叉點的四周繞一圈。所以，步數是 $\times 4$ 。而且，在一個棋盤中，每一行最多會有(行-1)個點被畫到，每一列最多也有(列-1)個點被畫到，所以步數就變成了(行-1) $\times$ (列-1) $\times 4$ 。但是，由上面的第(一)和(二)結論來看，在 5×5 的棋盤中只有一種圖形會被選中，所以要除以 4。因此，**步數=(行-1) $\times$ (列-1) $\times 4 \div$ [(行-1)和(列-1)的最大公因數]**

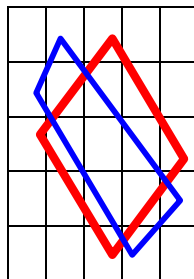
(五) 如果從對稱軸將虛線格子對映過來的話，就解釋了起點坐標所畫出來的圖形會形成 S 形的規律。

二、圖形是從 7 種基本圖形延伸和擴展出來的，我的想法是這樣：

(一) 我認為所有的圖形種類其實都是從正方形棋盤延伸出去的。例如：從 5×5 的棋盤，再加 2 列變成 5×7 的棋盤。這時路徑會因為只有 5 行而轉向，經過多次的轉向之後就成了一個魚形。

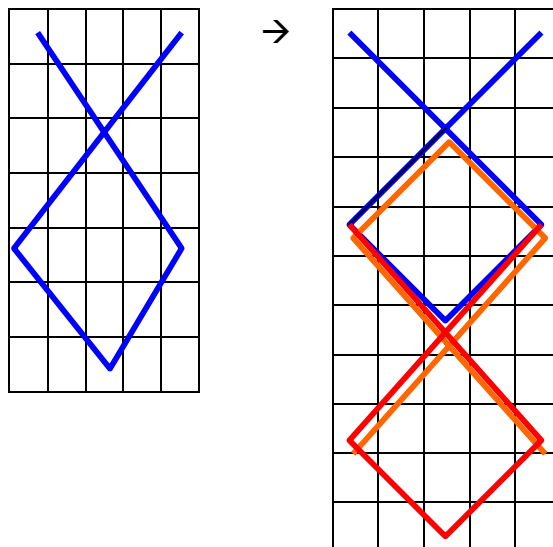


- (二) 圖形的擴展：當起點坐標愈接近列的中間時，路徑裡面的空白部分就會愈大。用坐標來看的話，起點愈中間，路徑轉向位置的坐標，就會中間一點，所以，空白部分愈大(紅色部分)。起點愈旁邊的話，轉向位置的坐標就會愈旁邊，所以畫出來的圖形會比較細(藍色部分)。



- (三) 圖形的延伸：同樣的，可以用第(二)來解釋圖形的延伸，當我把某一個正方形棋盤加了[(行-1)和(列-1)的最大公因數]的倍數行或列時，但是最大公因數不變。那麼，就會變成以左右對稱或上下對稱方式去做圖形的延伸。

$$5 \times 7 \rightarrow 5 \times 11$$



三、這次的研究是研究方格棋盤中的路徑問題。如果，把棋盤改成三角形或是其他形狀的話不知道會有什麼樣的結果。如果是立體的話，也不知道又會是怎樣的情形。希望以後能夠再把所有的問題研究出來。

【評語】 080405

1. 面對看似平凡無奇的方格棋盤路徑問題，能以縝密的圖像推演及記錄，探究出潛藏其中的數學法則。
2. 作品之完整性及展現數學探究之妙值得嘉許！