

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國小組 數學科

080404

百『摺』不撓

學校名稱：花蓮縣花蓮市中正國民小學

作者： 小五 鄧崑巖 小五 郭芳妤 小五 賴柏穎 小五 張博鈞	指導老師： 李昕潔 林陳毅
-------------------------------------------------	-------------------------

關鍵詞：多角盒、多邊形、紙盒

百『摺』不撓

摘要

從摺紙盒遊戲中，我們發現「數學」真的是無處不在呀！從中我們找到了一些好玩的數學關係，沒想到利用一些簡單的工具：廢紙、尺、計算機、筆、量角器就能找到隱藏在這些紙盒的數學規律，利用這些規律摺出更多不同邊形的多角盒（三角盒、四角盒、五角盒、六角盒、七角盒、八角盒…等），並找出多角盒與多角盒之間的秘密；從摺紙過程中更發現如何去節省更多的紙張來摺出相同大小的多角盒；採用相同大小的一張紙摺出最大容積的紙盒。希望藉由回收紙再摺紙盒，達到物盡其用的最大功效，節省資源，為地球盡一份心力。

壹、研究動機

在上學期的社團中，我們參加了「巧手摺盒子」這個社團，在上課的過程中，老師很有耐心的一遍又一遍的教導我們利用摺線(谷線和凹線)的方式製作漂亮的多角盒，有四角盒、六角盒、八角盒…等等，因為第一次接觸到這樣的紙盒摺法，開始時往往不能成功，但是我們不放棄，一摺再摺，終於成功的摺出了這些紙盒，也摺出了興趣，或許就是這一股力量吧，讓我們上完課之後又開始思考，除了上課老師所教的這些形狀紙盒的摺法，就沒有其它的嗎？於是我們拆開紙盒，開始研究，我們決定找出其它的摺法！在研究的過程中我們居然發現了一些好玩的數學關係與規律性。

還記得在五上的數學中（南一版），我們曾經學過多邊形和內角和，讓我們想到若利用內角和的概念是否可以找出其它多角盒的摺法，於是，大家絞盡腦汁去思考摺的方法，我們發揮團隊合作的精神，終於，在回收紙上摺出了不同的多邊形角盒。從這有趣的摺紙盒遊戲中，也同時發現一些好玩的數學關係-多角盒的底邊到交叉點的長度(H)和底邊邊長(A)有等比例的關係，現在就讓我們一起來分享這些盒子中的秘密吧。

貳、研究目的

- 一、探討摺出基本形狀的多角盒的方法（四角盒、六角盒、八角盒）。
- 二、探討摺成多角盒的過程中之數學關係。
- 三、在摺多角盒的同時，探討紙張的用量。
- 四、用相同大小的紙張摺出不同形狀的多角盒，探討其容積大小的變化。

參、研究問題

- 一、怎樣徒手摺出基本形狀的多角盒？
- 二、如何摺出更多形狀的多角盒？(三角盒、四角盒、五角盒、六角盒、七角盒…)
- 三、找出底邊到交叉點的長度(H)和多角盒底邊邊長(A)的規律？
- 四、如何減少紙張的用量卻能摺出相同大小的多角盒？
- 五、利用相同大小的紙張摺出不同形狀的多角盒，其容量有何變化？

肆、研究工具：紙、尺、計算機、筆、量角器

伍、研究過程和方法

一、如何摺出多角盒？

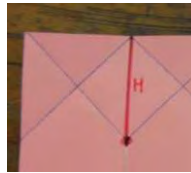
定義： H = 交叉線的高度(如右圖)

A = 底邊邊長

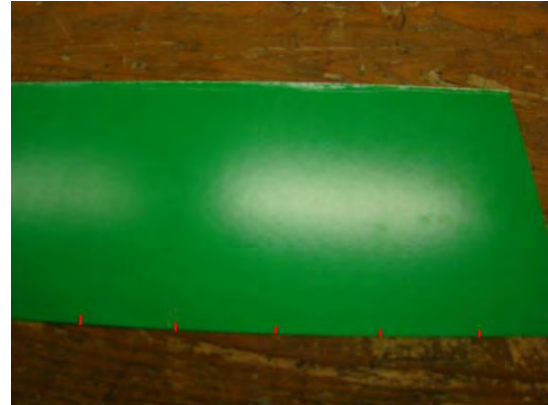
Z = 盒身高度

我們嘗試著從四角盒開始。

【四角盒】



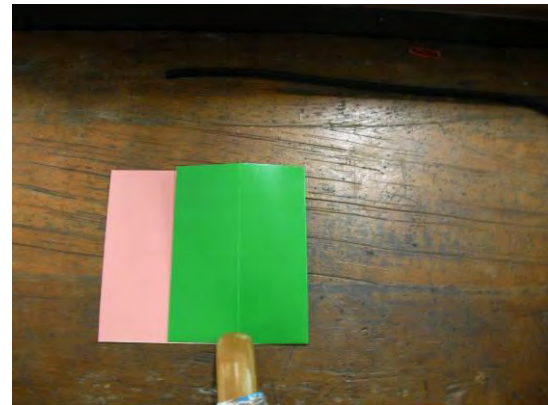
準備一張紙



量出五等分(比邊的數目多一段)



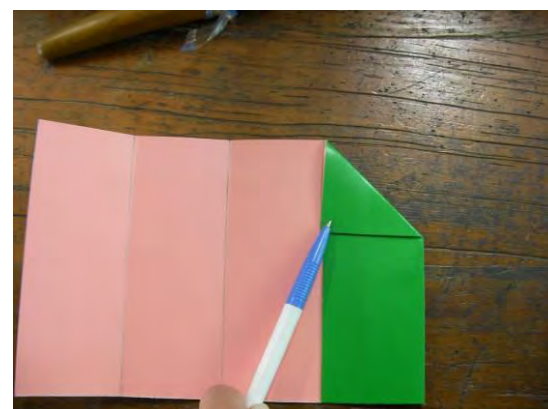
一一向左摺



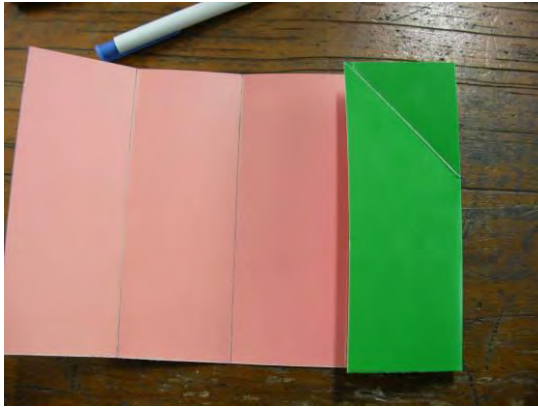
承上



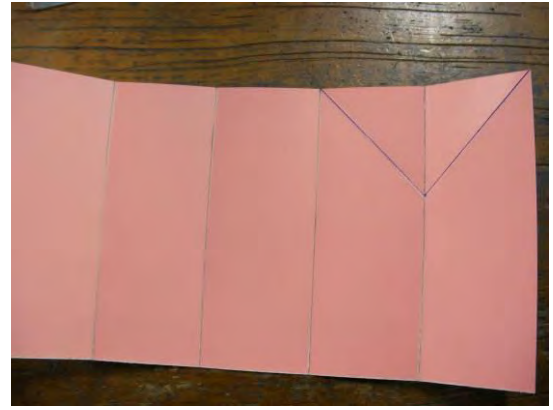
打開，留下摺痕



如圖摺對角



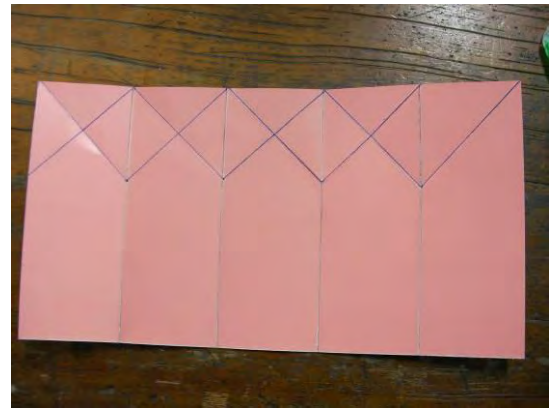
打開，留下摺痕



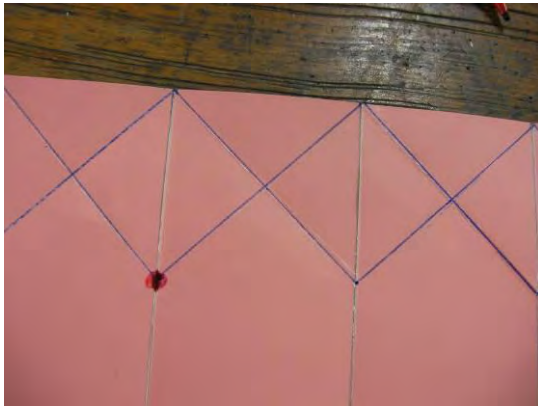
再打開，留下摺痕



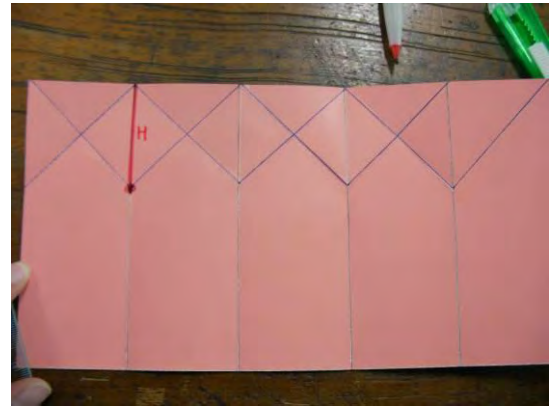
依序摺對角，並一一留下摺痕



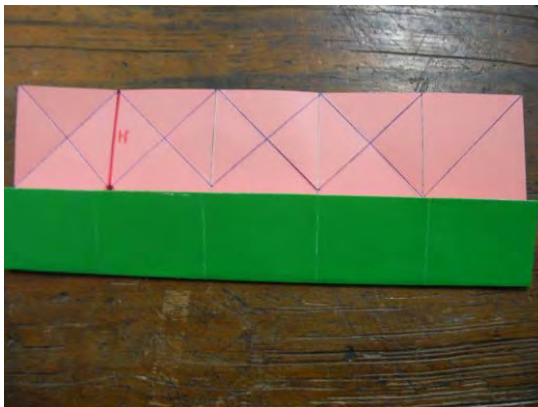
打開後摺痕如上圖



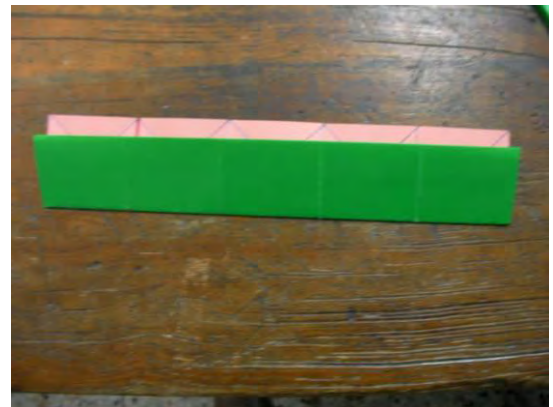
找到紅點（交叉的最高點）



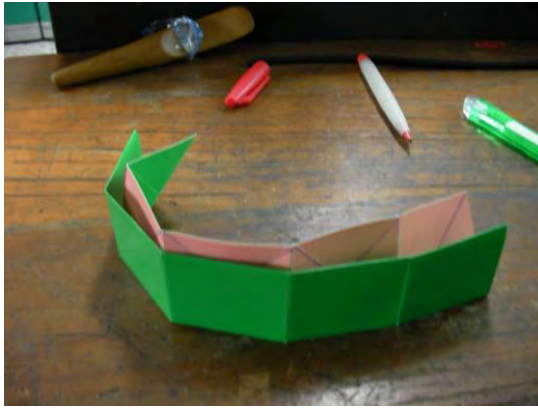
量出 H



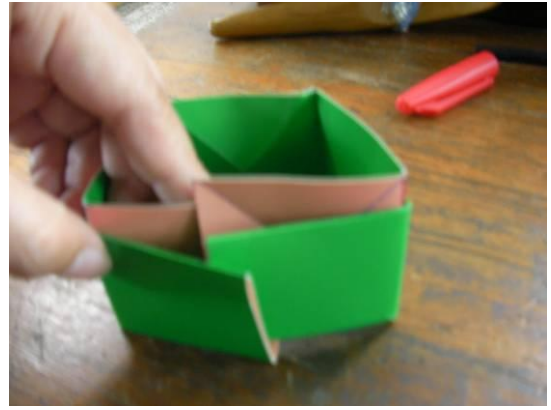
向上摺兩次，摺出盒身高度 Z



之後再向上摺一次



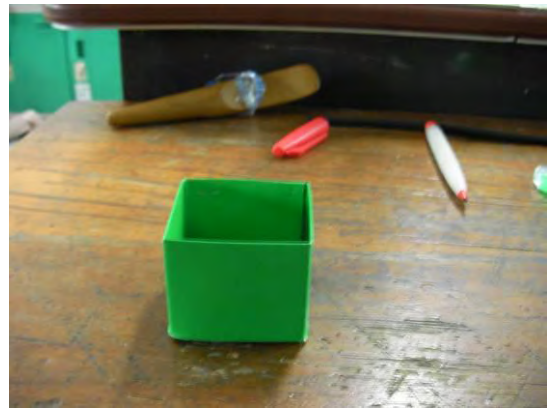
往後摺成四方形



夾進細縫中



再順著摺痕依序摺，壓進裡面成為盒底



完成圖

【六角盒】



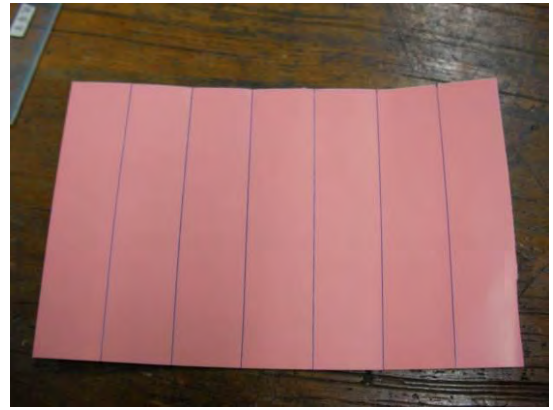
準備一張紙



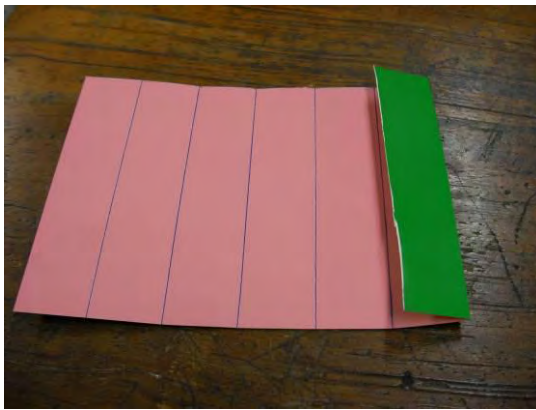
裁切多餘的部份



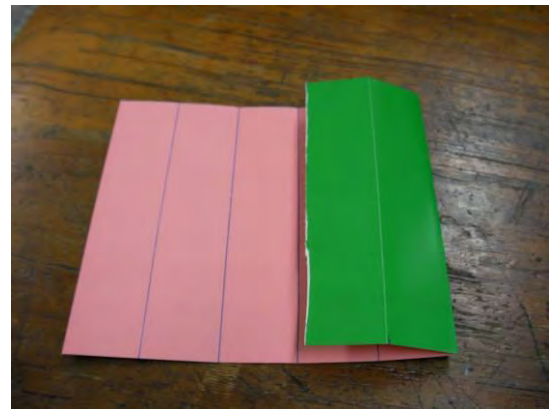
量出七等分(比邊的數目多一段)



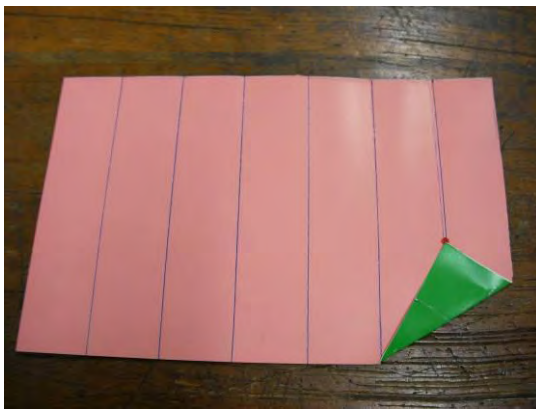
如圖向左摺



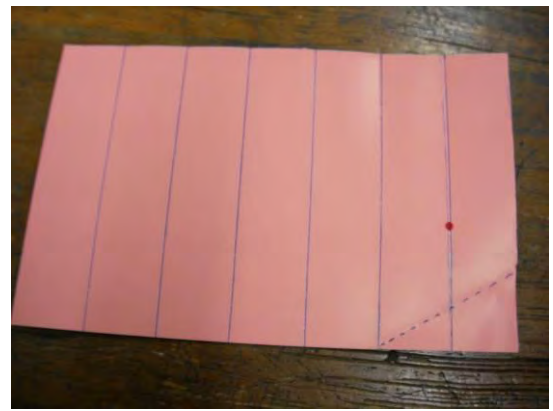
一一向左摺、並留下摺痕



承上個步驟



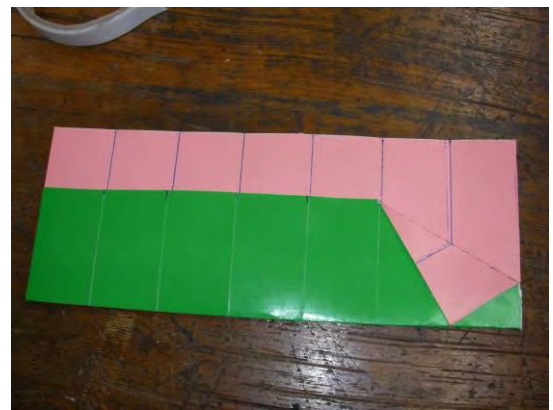
將右下角往旁摺，找到紅點



打開圖



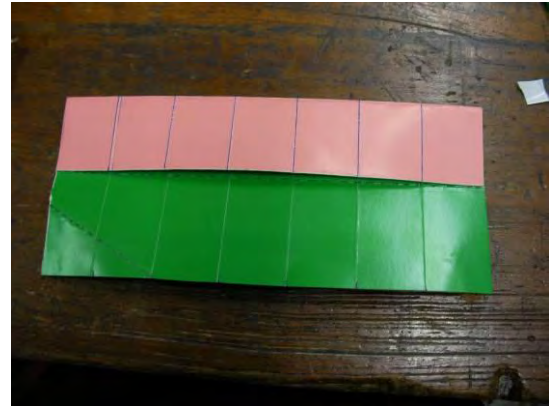
轉過來再摺一次



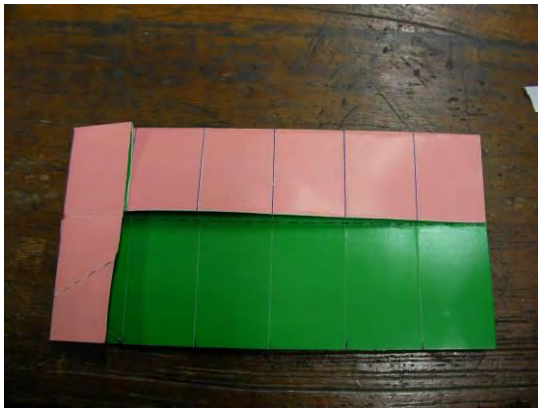
依照紅點的高度往上摺



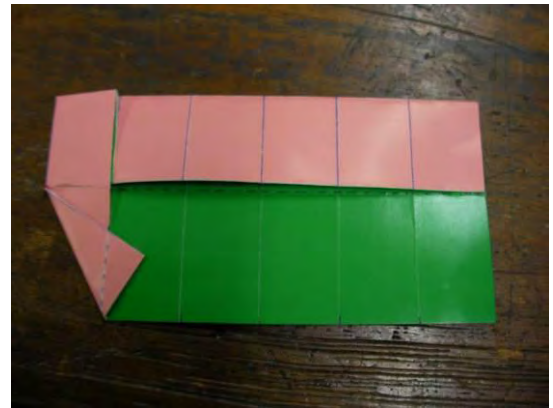
打開，摺痕如上圖



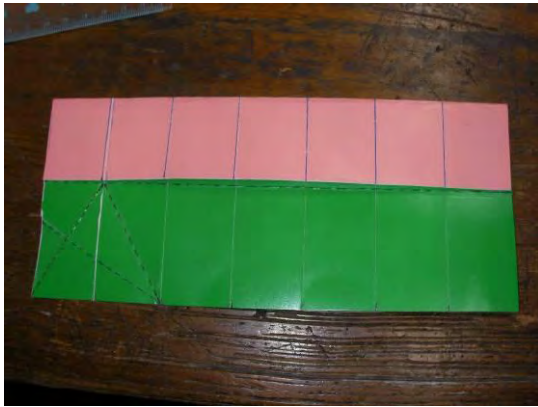
先往下摺一次



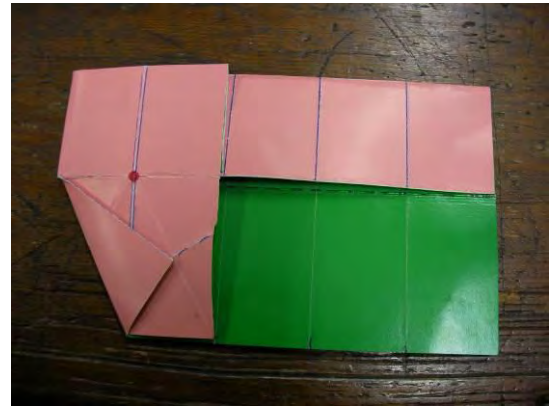
向右摺



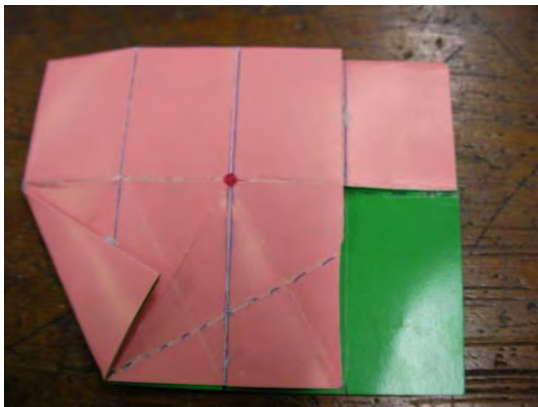
左下角往上摺



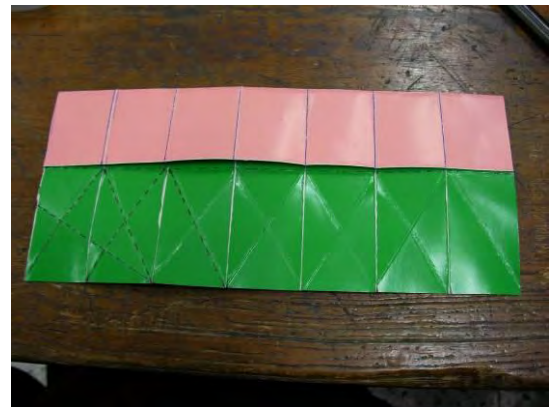
打開並留下摺痕



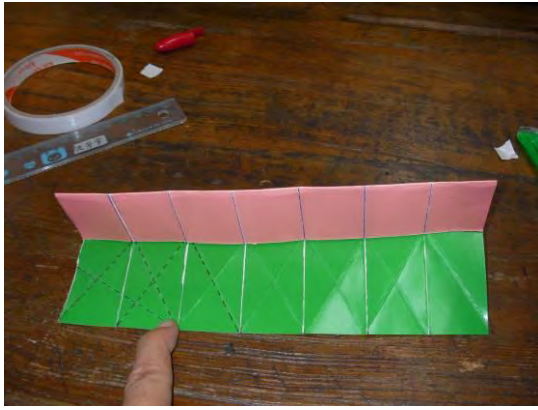
依序往右摺並留下摺痕



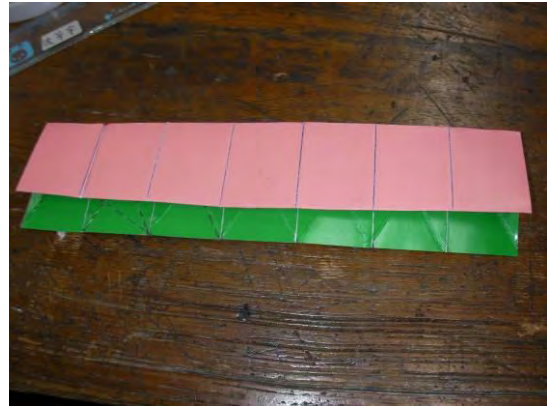
承上



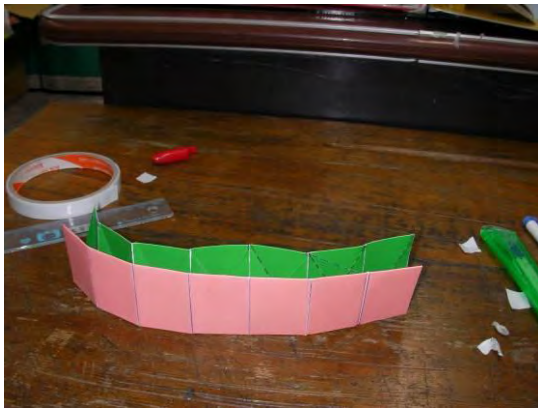
摺好之摺痕如圖



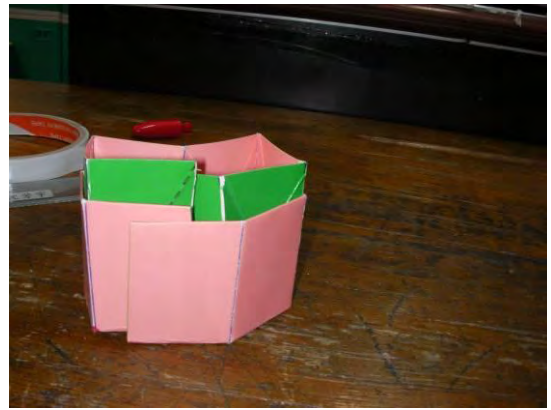
往下摺出盒子高度 Z



承上



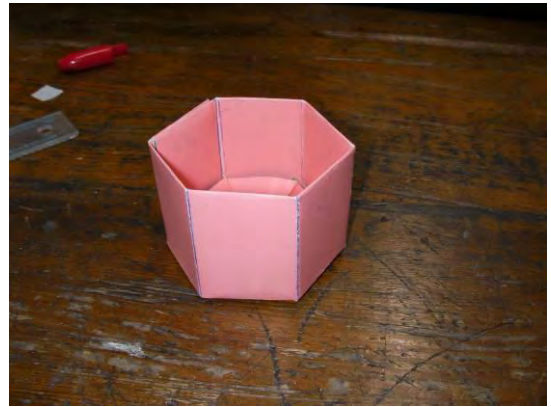
往後摺成六角形



夾進細縫中



順著摺痕依序摺，壓進裡面成爲盒底



完成六角盒

【八角盒】



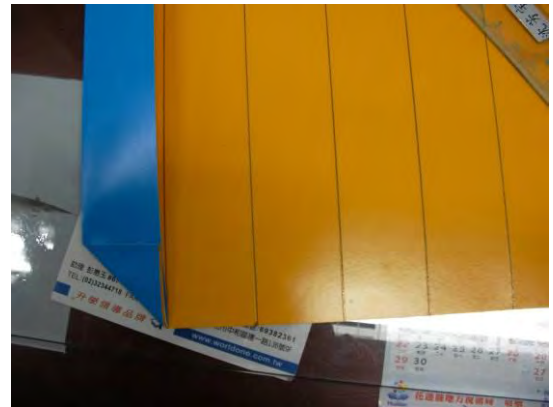
準備一張紙



量出九等分(比邊的數目多一段)



向左摺、並留下摺痕



摺上對角(如圖)



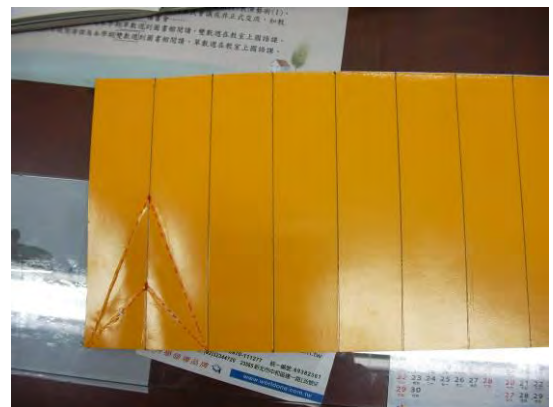
打開，留下摺痕



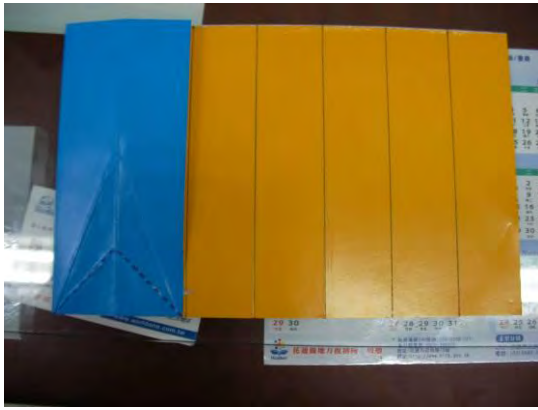
摺痕對齊第二條直線



承上



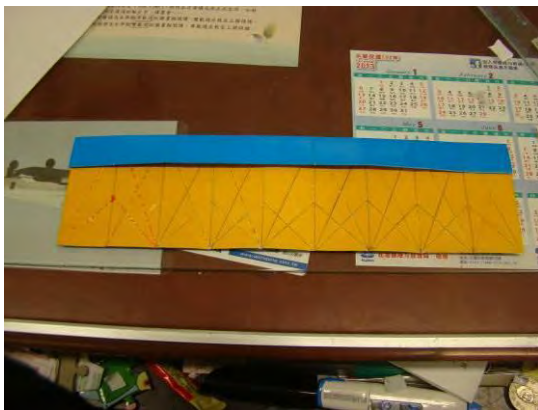
打開，其摺痕如上圖



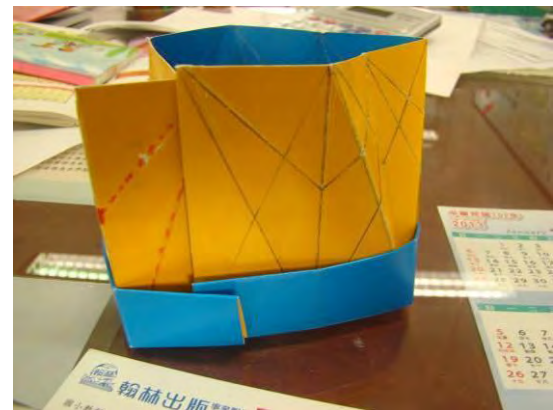
承上，依序摺完所有的



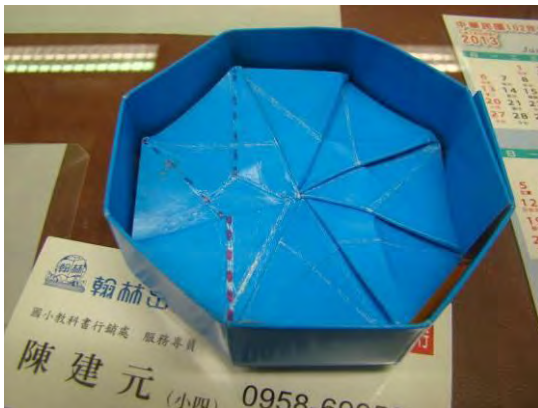
留下摺痕



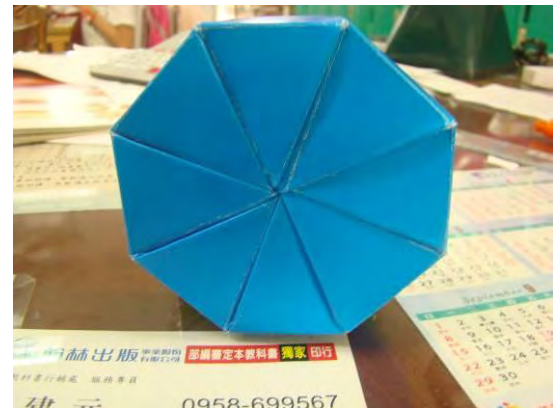
往下摺出盒子高度 Z



往外摺成八角形



順著摺痕依序摺，壓進裡面成為盒底



完成圖

以上這些好玩的紙盒摺法是上課時老師所教我們的，因為第一次接觸到這樣的紙盒摺法，開始時往往不能成功，但是我們並不放棄，一摺再摺，終於成功的摺出了這些紙盒，也摺出了興趣，或許就是這一股力量吧，讓我們上完課之後又開始思考，除了上課老師所教的這些形狀紙盒的摺法，就沒有其他的嗎？於是我們拆開紙盒，開始研究，我們決定找出其它的摺法！

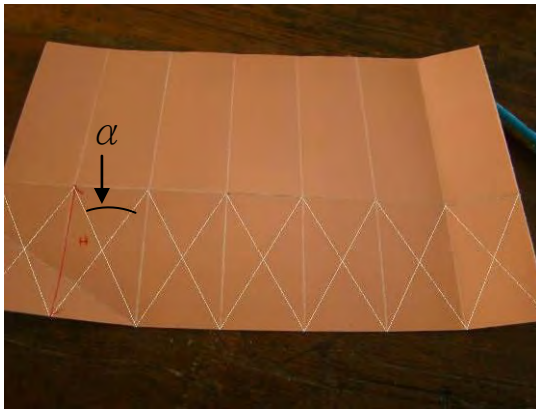
二、如何摺出其他邊形的紙盒(五角盒、七角盒、九角盒...)

定義：N = 多邊形的邊數

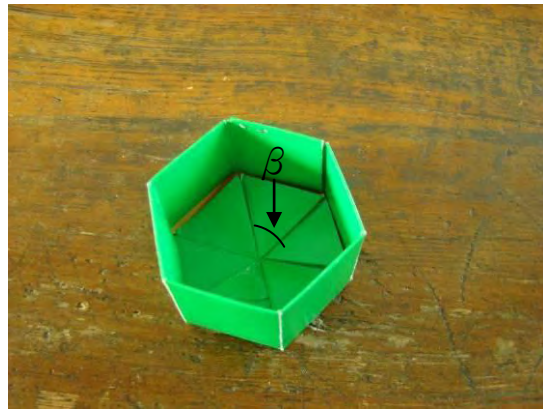
α = 展開圖的交叉角度(如下左圖)

β = 完成盒的角度(如下右圖)

在摺紙的過程中，我們發現不管是哪一種形狀的紙盒中間都會有一個交叉的摺痕，於是我們開始思索這些交叉的摺痕跟紙盒本身又有什麼樣的關係？除了長短的不一、角度大小也不盡相同，後來我們發現這些交叉的摺痕摺成紙盒之後就是多角盒底部中間的角度。再量量它們的角度，於是我們有了令人吃驚的發現喔！



六角盒展開圖角度 $\alpha = 59.9$ 度圖



六角盒完成盒的角度 $\beta = 59.7$ 度

- (一)、四角盒的展開圖的 α 是 89.6 度，完成盒的 β 是 89 度 → 接近 90 度
- (二)、六角盒的展開圖的 α 是 59.9 度，完成盒的 β 是 59.7 度 → 接近 60 度
- (三)、八角盒的展開圖的 α 是 44.5 度，完成盒的 β 是 44.3 度 → 接近 45 度

仔細觀察，這些角度剛好等於一個圓的度數去除以多邊形的邊數，如果依照這個規則來測量角度後再去摺其他多角盒是否可行呢？如果上面的方法是正確的，我們就能利用量角器測量來完成所有的多角盒！現在就讓我們來摺摺看吧

$$\alpha = 360 \text{ 度} \div N \text{ (多邊形的邊數)}$$

利用公式： $\alpha = 360 \text{ 度} \div N$ ，找出角度，摺出多角盒

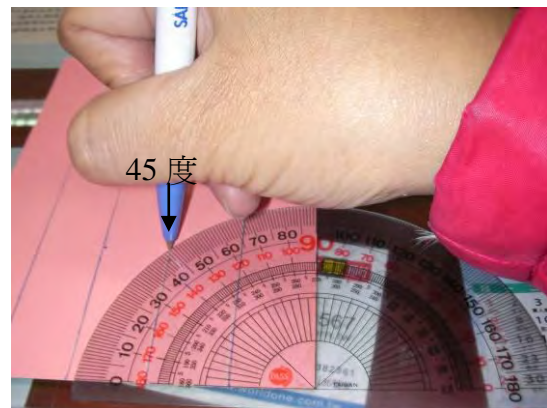
表(一)

N 角盒	三角盒	四角盒	五角盒	六角盒	七角盒	八角盒	九角盒	十角盒
角度	120 度	90 度	72 度	60 度	51 度	45 度	40 度	36 度

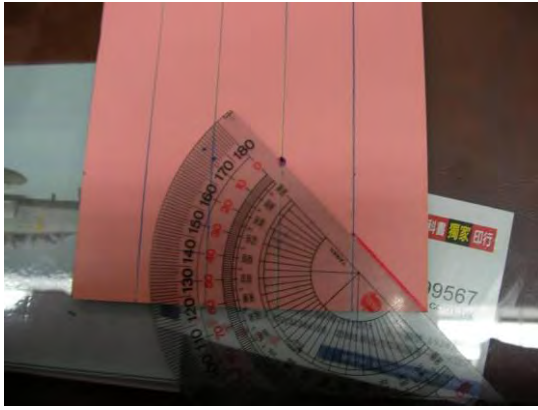
【以四角盒為例】



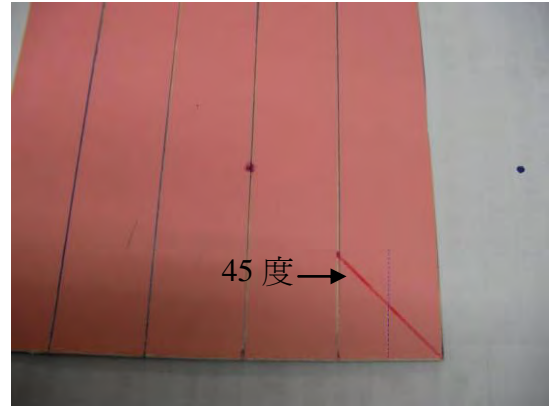
量出五等分(比邊的數目多一段)



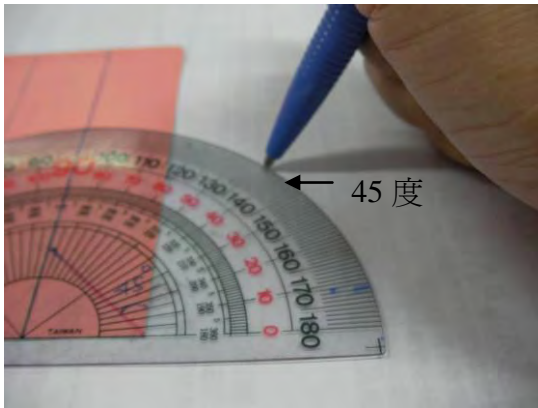
要讓中間的角度 90 度，(根據表一)，所以一邊 45 度



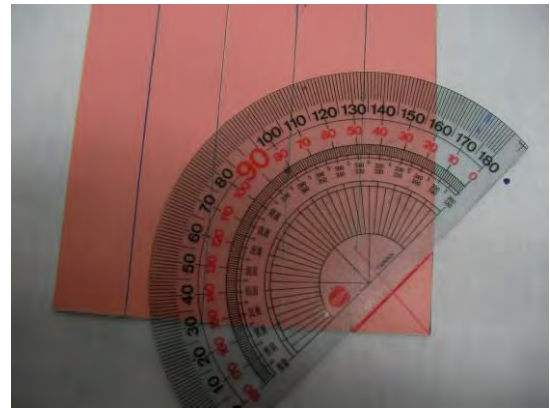
畫上 45 度線



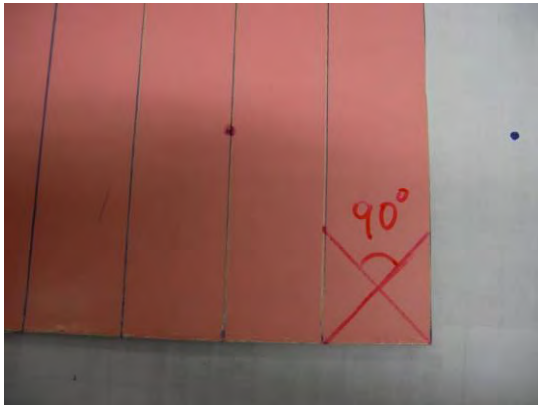
如圖



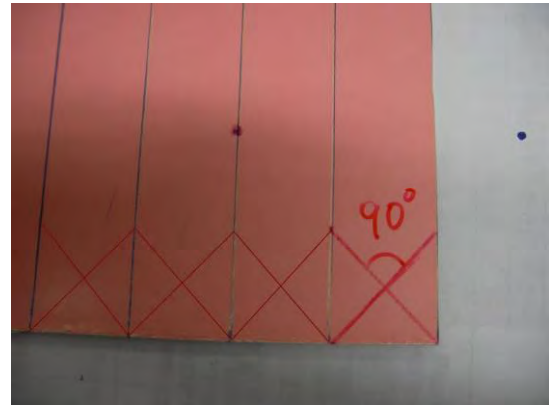
另一邊一樣量出 45 度角



畫上 45 度線



這樣就可以使中間為 90 度角



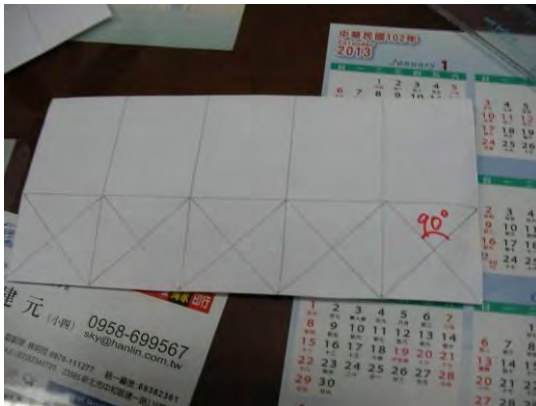
依照此法找出其他的摺線

承上述步驟之後，接下來就是按照徒手摺紙盒的步驟，摺出多角盒，以下就是我們實際摺出來的多角盒！

三角盒【 $\alpha = 120$ 度】



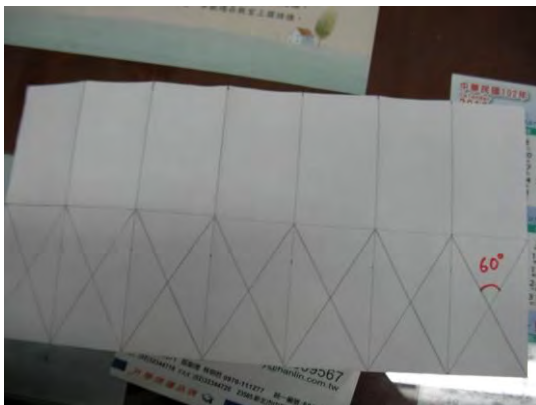
四角盒【 $\alpha = 90$ 度】



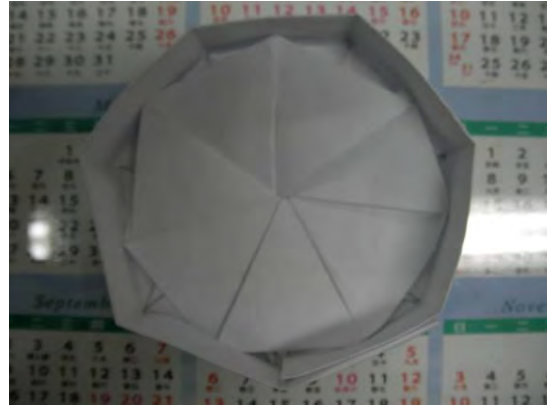
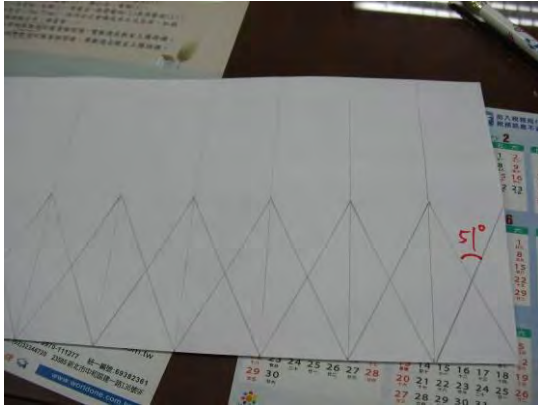
五角盒【 $\alpha = 72$ 度】



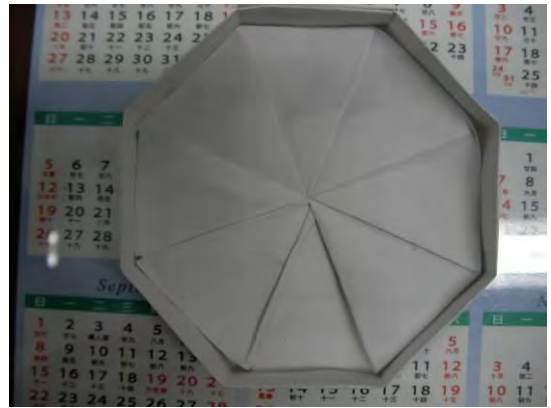
六角盒【 $\alpha = 60$ 度】



七角盒【 $\alpha = 51$ 度】



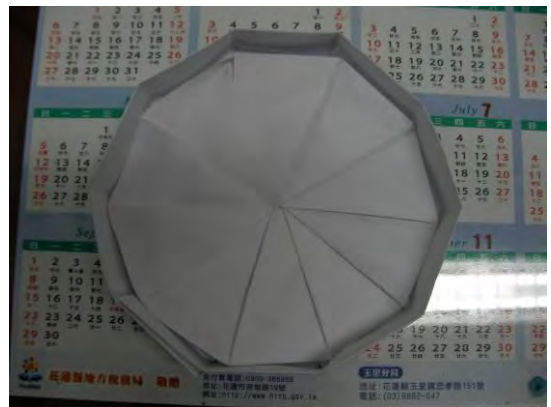
八角盒【 $\alpha = 45$ 度】



九角盒【 $\alpha = 40$ 度】



十角盒【 $\alpha = 36$ 度】



三、找出四角盒、六角盒、八角盒、十角盒、十二角盒的交叉線的高度(H)和底邊邊長(A)的規律！

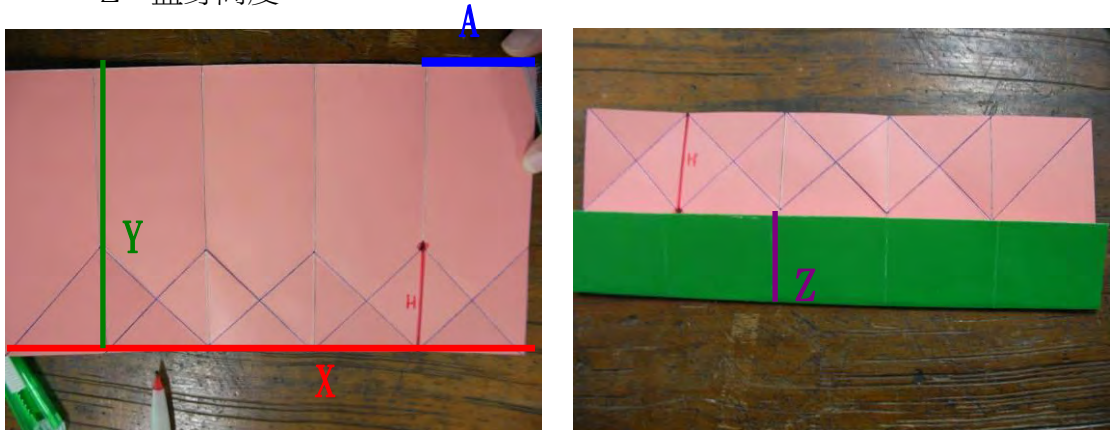
定義：H=交叉線的高度

A=底邊邊長

X=紙張長度

Y=紙張寬度

Z=盒身高度



(一)、四角盒

我們根據以上四角盒的摺法，一一摺出 A=1、2、3、4、5……的四角盒，再用直尺實際測量 H 的長度！整理成下表(二)

表(二)

A	1 公分	2 公分	3 公分	4 公分	5 公分	6 公分	7 公分	8 公分	9 公分
H	1 公分	2 公分	3 公分	4 公分	5 公分	6 公分	7 公分	8 公分	9 公分

觀察表(二)，我們發現了一些規律性：

當 A=1，H=1；

當 A=2，H=2；

當 A=3，H =3……

由以上關係，我們可以知道 四角盒 $H = A$

說明：

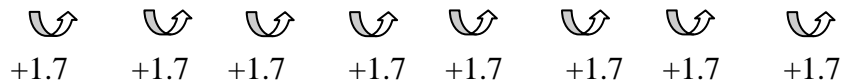
- 1、整理上述的例子，我們歸納出如何摺出一個四邊形的盒子
- 2、準備一張長方形(X*Y)的紙，在長邊(X)量好五等分。
- 3、找出四條摺痕，也就是四條邊，從底邊開始找出一段 H，使得 $A=X/5$ 。
- 4、讓 $Z=(Y-H)/2$ 成為多角盒盒身的高度
- 5、完成

(二)、六角盒

我們根據以上六角盒的摺法，一一摺出 A=1、2、3、4、5……的六角盒，再用直尺實際測量 H 的長度！整理成下表(三)

表(三)

A	1 公分	2 公分	3 公分	4 公分	5 公分	6 公分	7 公分	8 公分	9 公分
H	1.8 公分	3.5 公分	5.2 公分	6.9 公分	8.6 公分	10.3 公分	12 公分	13.7 公分	15.4 公分



觀察表(三)，我們發現了一些規律性：

當 A=1，H=1.8；

當 A=2，H=3.5；

當 A=3，H =5.2……

A 每次增加 1 公分，H 就會增加 1.7 公分，由以上關係我們可以知道六角盒：

$$H=1.8+ 1.7 \times (A-1)$$

說明：

- 1、整理上述的例子，我們歸納出如何摺出一個六邊形的盒子
- 2、準備一張長方形(X*Y)的紙，在長邊(X)量好七等分。
- 3、找出六條摺痕，也就是六條邊，從底邊開始找出一段 H，使得 A=X/7。
- 4、讓 Z=(Y-H)/2 成爲多角盒盒身的高度
- 5、完成【六角盒】

(三)、八角盒

我們根據以上八角盒的摺法，一一摺出 A=1、2、3、4、5……的八角盒，再用直尺實際測量 H 的長度！整理成下表(四)

表(四)

A	1 公分	2 公分	3 公分	4 公分	5 公分	6 公分	7 公分	8 公分	9 公分
H	2.4 公分	4.8 公分	7.2 公分	9.6 公分	12 公分	14.4 公分	16.8 公分	19.2 公分	21.6 公分



觀察表(四)，我們發現了一些規律性：

當 A=1，H=2.4；

當 A=2，H=4.8；

當 A=3，H=7.2……

A 每次增加 1 公分，H 就會增加 2.4 公分，由以上關係我們可以知道八角盒：

$$H=2.4+ 2.4 \times (A-1)$$










說明：

- 1、整理上述的例子，我們歸納出如何摺出一個八邊形的盒子
- 2、準備一張長方形(X*Y)的紙，在長邊(X)量好九等分。
- 3、找出八條摺痕，也就是八條邊，從底邊開始找出一段 H，使得 $A=X/9$ 。
- 4、讓 $Z=(Y-H)/2$ 成爲多角盒盒身的高度
- 5、完成

(四)、十角盒

我們根據以上十角盒的摺法，一一摺出 $A=1、2、3、4、5……$ 的十角盒，再用直尺實際測量 H 的長度！整理成下表(五)

表(五)

A	1 公分	2 公分	3 公分	4 公分	5 公分	6 公分	7 公分	8 公分	9 公分
H	3 公分	6.1 公分	9.2 公分	12.3 公分	15.4 公分	18.5 公分	21.6 公分	24.7 公分	27.8 公分
									
	+3.1	+3.1	+3.1	+3.1	+3.1	+3.1	+3.1	+3.1	+3.1

觀察表(五)，我們發現了一些規律性：

當 $A=1$ ， $H=3$ ；

當 $A=2$ ， $H=3.1$ ；

當 $A=3$ ， $H=9.2……$

A 每次增加 1 公分，H 就會增加 3.1 公分，由以上關係我們可以知道十角盒：

$$H=3+3.1 \times (A-1)$$










說明：

- 1、整理上述的例子，我們歸納出如何摺出一個十邊形的盒子
- 2、準備一張長方形(X*Y)的紙，在長邊(X)量好十一等分。
- 3、找出十條摺痕，也就是十條邊，從底邊開始找出一段 H，使得 $A=X/11$ 。
- 4、讓 $Z=(Y-H)/2$ 成爲多角盒盒身的高度
- 5、完成

(五)、十二角盒

我們根據以上十二角盒的摺法，一一摺出 $A=1、2、3、4、5……$ 的十角盒，再用直尺實際測量 H 的長度！整理成下(表六)

表(六)

A	1 公分	2 公分	3 公分	4 公分	5 公分	6 公分	7 公分	8 公分	9 公分
H	3.6 公分	7.4 公分	11.2 公分	15 公分	18.8 公分	22.6 公分	26.4 公分	30.2 公分	34 公分
									
	+3.8	+3.8	+3.8	+3.8	+3.8	+3.8	+3.8	+3.8	+3.8

觀察表(六)，我們發現了一些規律性：

當 $A=1$ ， $H=3.6$ ；

當 $A=2$ ， $H=7.4$ ；

當 $A=3$ ， $H=11.2$ ……

A 每次增加 1 公分，H 就會增加 3.8 公分，由以上關係我們可以知道十二角盒：

$$H=3.6+3.8 \times (A-1)$$

說明：

- 1、整理上述的例子，我們歸納出如何摺出一個十二邊形的盒子
- 2、準備一張長方形(X*Y)的紙，在長邊(X)量好十三等分。
- 3、找出十二條摺痕，也就是十二條邊，從底邊開始找出一段 H，使得 $A=X/12$ 。
- 4、讓 $Z=(Y-H)/2$ 成爲多角盒盒身的高度
- 5、完成

【歸納】：將上列所量得的 H 與 A 的關係歸納爲（表七）

表(七)

	H
四角盒	$H = A$
六角盒	$H=1.8+ 1.7 \times (A-1)$
八角盒	$H=2.4+ 2.4 \times (A-1)$
十角盒	$H=3.0+ 3.1 \times (A-1)$
十二角盒	$H=3.6+ 3.8 \times (A-1)$
N 角盒	$H=0.6 (N \div 2) + \mathbf{【1+0.35 \times (N-4)】} \times (A-1)$

【驗證】：先將多邊形 N 代入， 再來實際摺摺看吧！

1、五角盒 N=5 代入

$$H=0.6 (\mathbf{5} \div 2) + \mathbf{【1+0.35 \times (\mathbf{5}-4)】} \times (A-1)$$

$$=1.5 + \mathbf{【1+0.35】} \times (A-1) = 1.5 + 1.35 \times (A-1)$$

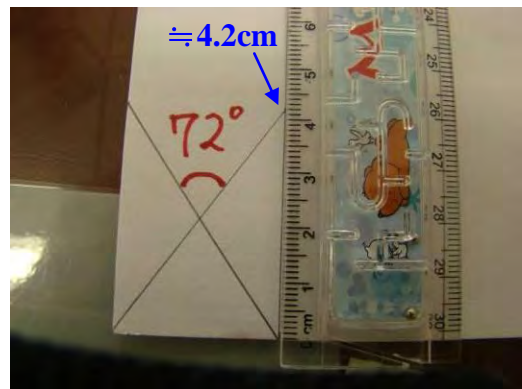
$$\text{再令其 A 皆爲 3 公分代入：} H=1.5 + 1.35 \times (A-1)$$

$$=1.5 + 1.35 \times (\mathbf{3}-1) = 4.2$$

實際動手摺摺看並且量一量：H≈4.2 cm



畫上 36 度線，使中心角爲 72 度



中心角爲 72 度，測量 H

2、**七角盒**

N=7 代入

$$\begin{aligned} H &= 0.6 \left(\frac{7}{2} \right) + \left[1 + 0.35 \times (7 - 4) \right] \times (A - 1) \\ &= 1.5 + \left[1 + 1.05 \right] \times (A - 1) \\ &= 2.1 + 2.05 \times (A - 1) \end{aligned}$$

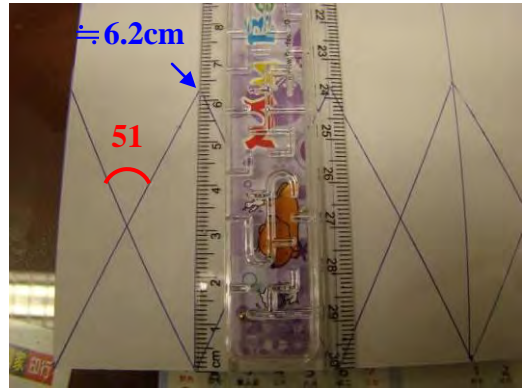
再令其 A 皆為 3 公分代入：H=2.1+ 2.05 × (A-1)

$$= 2.1 + 2.05 \times (3 - 1) = 6.2$$

實際動手摺摺看並且量一量：H≐6.2 cm



畫上 25.5 度線，使中心角為 51 度



中心角為 51 度，測量 H

3、**九角盒**

N=9 代入

$$\begin{aligned} H &= 0.6 \left(\frac{9}{2} \right) + \left[1 + 0.35 \times (9 - 4) \right] \times (A - 1) \\ &= 1.5 + \left[1 + 1.75 \right] \times (A - 1) \\ &= 2.7 + 2.75 \times (A - 1) \end{aligned}$$

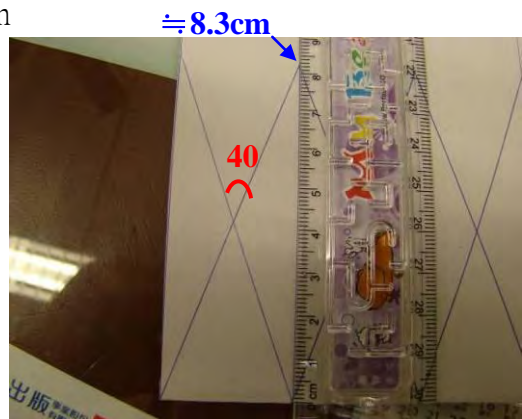
再令其 A 皆為 3 公分代入：H=2.7+ 2.75 × (A-1)

$$= 2.7 + 2.75 \times (3 - 1) = 8.2$$

實際動手摺摺看並且量一量：H≐8.3cm



畫上 20 度線，使中心角為 40 度



中心角為 40 度，測量 H

4、**十一角盒**

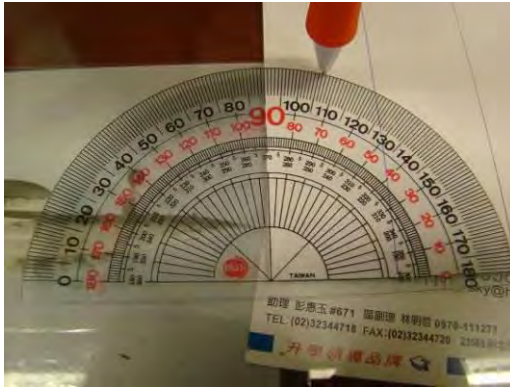
N=11 代入

$$\begin{aligned} H &= 0.6 \left(\frac{11}{2} \right) + \left[1 + 0.35 \times (11 - 4) \right] \times (A - 1) \\ &= 1.5 + \left[1 + 2.45 \right] \times (A - 1) \\ &= 3.3 + 3.45 \times (A - 1) \end{aligned}$$

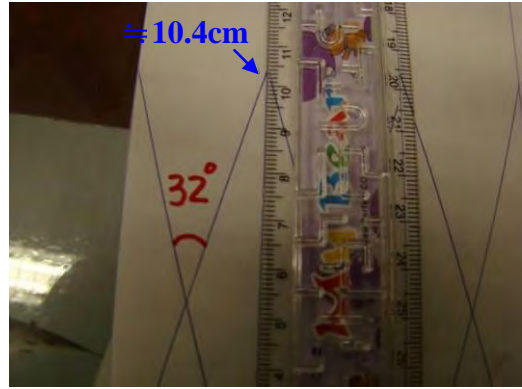
再令其 A 皆為 3 公分代入：H=3.3+ 3.45 × (A-1)

$$= 3.0 + 3.45 \times (3 - 1) = 10.2$$

實際動手摺摺看並且量一量：H≐10.4cm



畫上 16 度線，使中心角為 32 度



中心角為 32 度，測量 H

將上述幾項整理為表(八)：

表(八)

	H	公式計算	實際測量	誤差
五角盒	$H=1.5+1.35 \times (A-1)$	H=4.2	H=4.2	0%
七角盒	$H=2.1+2.05 \times (A-1)$	H=6.2	H=6.2	0%
九角盒	$H=2.7+2.75 \times (A-1)$	H=8.2	H=8.3	1.2%
十一角盒	$H=3.3+3.45 \times (A-1)$	H=10.2	H=10.4	1.9%

由上述實際測量驗證可知，高度 H 和邊長 A 的關係約為

$$N \text{ 角盒} \quad H=0.6(N \div 2) + \mathbf{【1+0.35 \times (N-4)】} \times (A-1) \quad N > 4 \quad A \geq 1$$

四、如何減少紙張的用量卻能摺出相同大小的多角盒？

以六角盒為例，N=6，A=3 公分，每次在 H 上裁切 0.5cm（如下列圖示）

註 1：A=3 cm，七等分，故長邊皆為 $3 \times 7 = 21$ cm

註 2：節省的面積 = 21 cm × 裁切的 H 長度

【不裁切紙張】



H=5.2 cm(原本)

節省紙張 0 平方公分



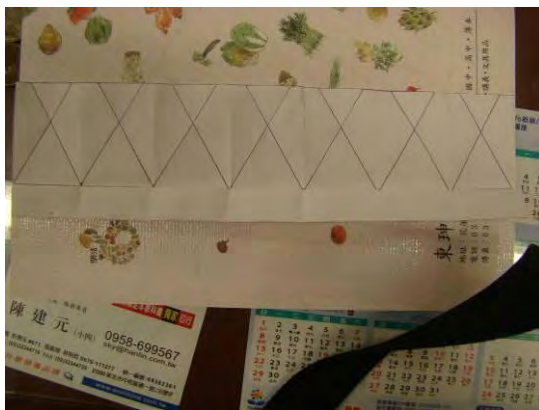
摺成六角盒底面

【在 H 上裁切掉 0.5×1cm】



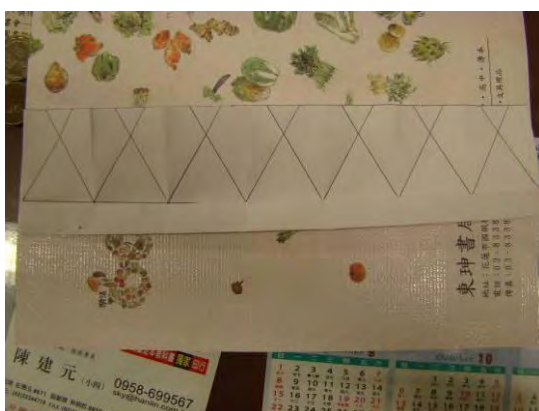
節省紙張面積 $21\text{cm} \times 0.5\text{cm} = 10.5$ 平方公分 摺成六角盒底面的變化(內縮 0.5cm)
H 剩下： $5.2 - 0.5 = 4.7\text{cm}$

【在 H 上裁切掉 $0.5 \times 2 = 1\text{cm}$ 】



節省紙張面積 $21\text{cm} \times 1\text{cm} = 21$ 平方公分 摺成六角盒底面的變化(內縮 1cm)
H 剩下： $5.2 - 0.5 \times 2 = 4.2\text{cm}$

【在 H 上裁切掉 $0.5 \times 3 = 1.5\text{cm}$ 】



節省紙張面積 $21\text{cm} \times 1.5\text{cm} = 31.5$ 平方公分 摺成六角盒底面的變化(內縮 1.5cm)
H 剩下： $5.2 - 0.5 \times 3 = 3.7\text{cm}$

【在 H 上裁切掉 $0.5 \times 4 = 2\text{cm}$ 】



節省紙張面積 $21\text{cm} \times 2\text{cm} = 42$ 平方公分
H 剩下： $5.2 - 0.5 \times 4 = 3.2\text{cm}$

摺成六角盒底面的變化(內縮 2cm)

【在 H 上裁切掉 $0.5 \times 5 = 2.5\text{cm}$ 】



節省紙張面積 $21\text{cm} \times 2.5\text{cm} = 52.5$ 平方公分
H 剩下： $5.2 - 0.5 \times 5 = 2.7\text{cm}$

摺成六角盒底面的變化(內縮 2.5cm)

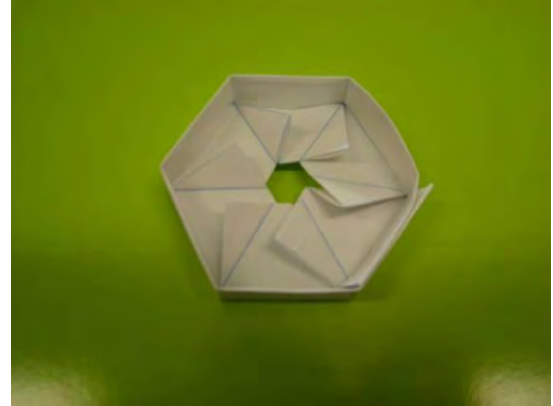
【在 H 上裁切掉 $H/2 = 2.6\text{cm}$ 】



節省紙張面積 $21\text{cm} \times 2.6\text{cm} = 54.6$ 平方公分
H 剩下： $5.2 - 2.6 = 2.6\text{cm}$

摺成六角盒底面的變化(內縮 2.6cm)

【在 H 上裁切掉 $0.5 \times 6 = 3\text{cm}$ 】



節省紙張面積 $21\text{cm} \times 3\text{cm} = 63$ 平方公分 中間會有空洞，無法摺成六角盒了
 H 剩下： $5.2 - 3 = 2.2$ cm

將上述幾項整理為表(九)：

表(九)

裁切 H (cm)	底邊長度(A×7)	節省紙張面積(A)	節省的百分率
0 公分	21 公分	0 平方公分	0 %
0.5 公分	21 公分	10.5 平方公分	9.62 %
1.0 公分	21 公分	21 平方公分	19.23 %
1.5 公分	21 公分	31.5 平方公分	28.85 %
2.0 公分	21 公分	42 平方公分	38.46 %
2.5 公分	21 公分	52.5 平方公分	48.08 %
2.6 公分	21 公分	54.6 平方公分	50 %

【歸納】

- (一)、在節省紙張的同時，我們發現所有紙盒節省的最大的限度不可以超過 $H/2$ 。
- (二)、在不節省任何紙張的量的情況下，我們發現越多邊形的角盒越穩固。

五、用大小相同的紙摺出不同的多角盒，探討其容積的變化

我們嘗試利用相同大小的紙張 ($29.8\text{cm} \times 20.6\text{cm}$) 摺出三角盒、四角盒、五角盒…，將沙子倒入角盒內，再將角盒內的沙子倒至量杯中，觀察其容積的變化，最後實際計算紙盒的容量，探討之間的誤差！

(表十)

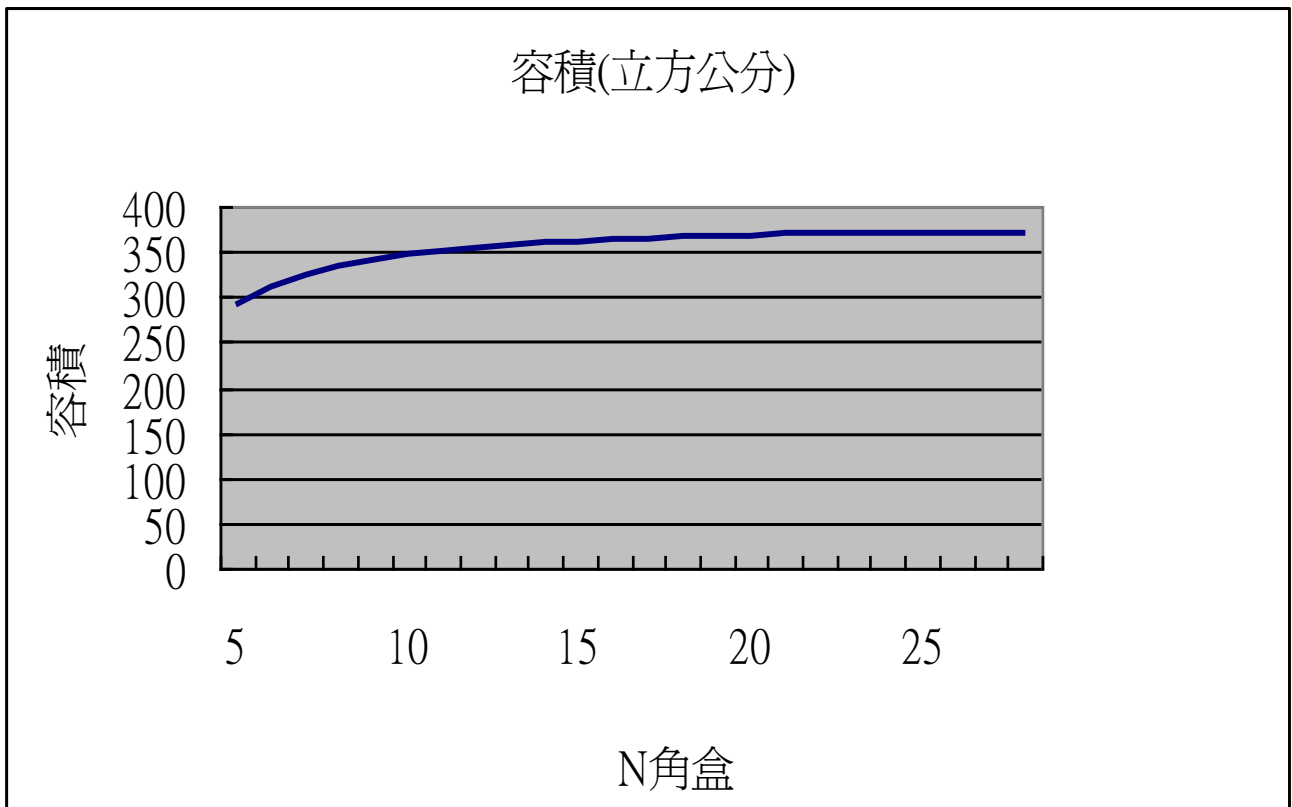
N 角盒	容量(量杯實際測量)	公式計算	誤差
四角盒	255 立方公分	260 立方公分	1.92%
五角盒	285 立方公分	292.48 立方公分	2.56%
六角盒	305 立方公分	310.7 立方公分	1.83%
七角盒	315 立方公分	323.52 立方公分	2.63%
八角盒	325 立方公分	332.94 立方公分	2.38%
九角盒	330 立方公分	340.1 立方公分	2.97%
十角盒	335 立方公分	345.69 立方公分	3.09%

註 1：N 角盒容積計算(表十一)

N 角盒	A $29.8 \div (N+1)$	H (代入公 式, 如註 2)	H/2	底面積[(A $\times H/2)]/2 \times N$	盒身 $(20.6-H) \div 2$	容積 (底面積 \times 盒身)
四角盒	5.96	5.96	2.98	35.52	7.32	260 立方公分
五角盒	4.97	6.86	3.43	42.56	6.87	292.48 立方公分
六角盒	4.26	7.34	3.67	46.85	6.63	310.7 立方公分
七角盒	3.73	7.69	3.84	50.1	6.46	323.52 立方公分
八角盒	3.31	7.95	3.97	52.62	6.33	332.94 立方公分
九角盒	2.98	8.15	4.07	54.61	6.23	340.1 立方公分
十角盒	2.71	8.3	4.15	56.2	6.15	345.69 立方公分
十五角盒	1.86	8.68	4.34	60.65	5.96	361.36 立方公分
二十角盒	1.42	8.77	4.38	62.19	5.92	368.02 立方公分
二十五角盒	1.15	8.72	4.36	62.47	5.94	371.05 立方公分
二十六角盒	1.1	8.7	4.35	62.43	5.95	371.39 立方公分
二十七角盒	1.06	8.68	4.34	62.37	5.96	371.67 立方公分
二十八角盒	1.03	8.66	4.33	62.29	5.97	371.88 立方公分

註 2：表十一中 H 的計算過程 (表十二)

H (N 角盒) : $0.6 (N \div 2) + [1 + 0.35 \times (N - 4)] \times (A - 1)$
H (五角盒) : $1.5 + 1.35 \times (A - 1) = 1.5 + 1.35 \times (4.97 - 1) = 6.86$
H (六角盒) : $1.8 + 1.7 \times (A - 1) = 1.8 + 1.7 \times (4.26 - 1) = 7.34$
H (七角盒) : $2.1 + 2.05 \times (A - 1) = 2.1 + 2.05 \times (3.73 - 1) = 7.69$
H (八角盒) : $2.4 + 2.4 \times (A - 1) = 2.4 + 2.4 \times (3.31 - 1) = 7.95$
H (九角盒) : $2.7 + 2.75 \times (A - 1) = 2.7 + 2.75 \times (2.98 - 1) = 8.15$
H (十角盒) : $3.0 + 3.1 \times (A - 1) = 3.0 + 3.1 \times (2.71 - 1) = 8.3$
H (十五角盒) : $4.5 + 4.85 \times (A - 1) = 4.5 + 4.85 \times (1.86 - 1) = 8.68$
H (二十角盒) : $6 + 6.6 \times (A - 1) = 6 + 6.6 \times (1.42 - 1) = 8.77$
H (二十五角盒) : $7.5 + 8.35 \times (A - 1) = 7.5 + 8.35 \times (1.15 - 1) = 8.72$
H (二十六角盒) : $7.8 + 8.7 \times (A - 1) = 7.8 + 8.7 \times (1.1 - 1) = 8.7$
H (二十七角盒) : $8.1 + 9.05 \times (A - 1) = 8.1 + 9.05 \times (1.06 - 1) = 8.68$
H (二十八角盒) : $8.4 + 9.4 \times (A - 1) = 8.4 + 9.4 \times (1.03 - 1) = 8.66$



容積變化圖

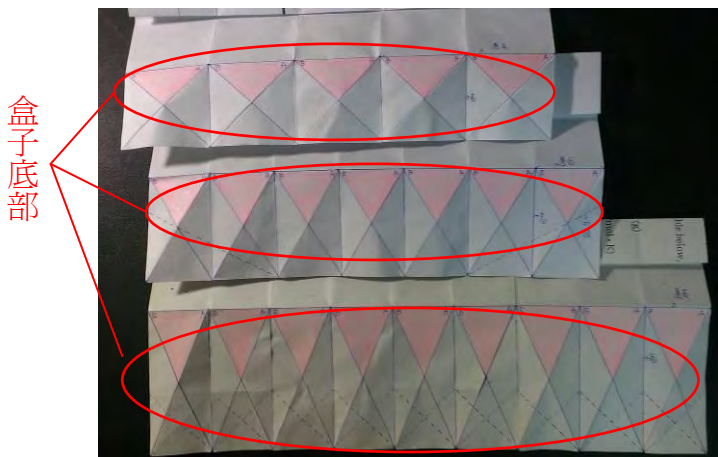
【歸納】：

- (一)、實際裝沙測量的容積皆比公式計算的容積還來的小，探究其原因可能是因為紙張的厚度未扣除及人為摺紙所產生的誤差！
- (二)、由表十一和表十二中我們發現利用大小相同的紙摺不同的多角盒時，它的容積會慢慢隨著 N 值增大而變大，到 N 為 28 時，容積最大，為 371.88 立方公分，超過 N=28 時，它的邊長 A 值就會小於 1，就不符合我們這個公式了。

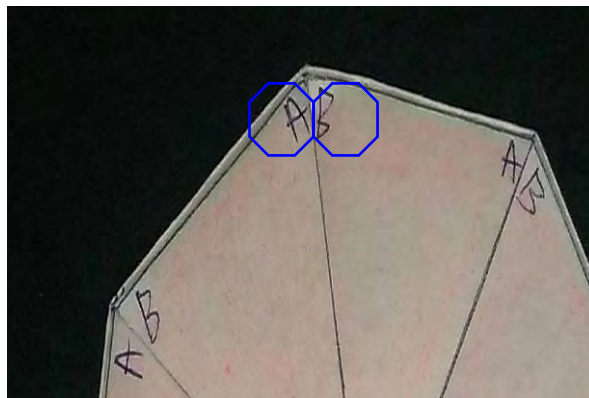
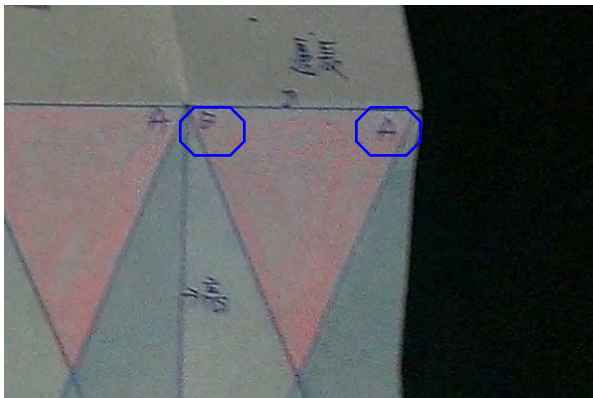
陸、討論

回想當初參加社團時，為何老師請我們一把尺就可以輕鬆的摺出四角盒、六角盒、八角盒，而不需要用到其他的工具？就讓我們一起來探討吧！

首先，我們從展開圖中發現，摺好的多邊形紙盒底部是由 $H \times N \times A$ 所構成的（如下左圖）所組成。其兩條對角線所構成的上半部之三角形摺成多角盒後，如下右圖所示：

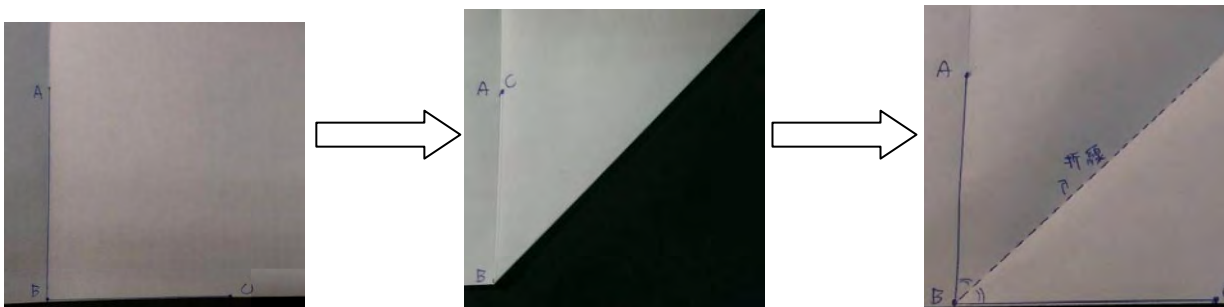


而在觀察之後發現，多角盒的底部為一正多邊形，其內角就是由展開圖之對角線所構成的等腰三角形的兩底角(角 A、角 B)所組成，因為角 A = 角 B (等腰三角形兩底角相等)，所以我們可以知道將多角盒底部的多邊形內角除以 2，就會等於角 A 或是角 B，而我們可以利用在五上所學的多邊形的內角公式： $180 \times (n-2) / n$ 來計算底部多邊形內角角度，就可以輕鬆得到展開圖中的等腰三角形的兩底角角度了



其中又以四角盒，六角盒和八角盒這些底角的角度最特別，所以可以不用用到其它工具，徒手就可以摺出來了！

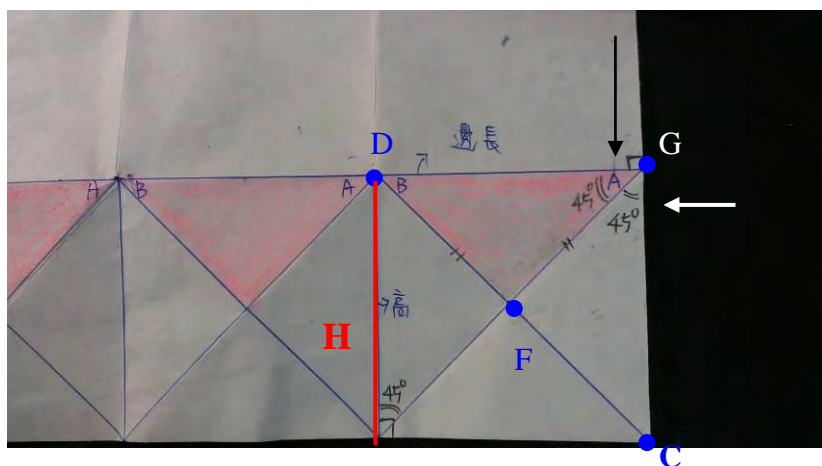
還有一個基本的觀念，我們必須先了解，兩條不平行的線在交會處可以形成夾角，若將此兩條有夾角的線段對摺使其重合，則其形成的夾角角度也會對分，如下圖所示：



有了以上的觀念我們就可以解釋四角盒和八角盒為什麼不需要使用到量角器了。

一、四角盒：

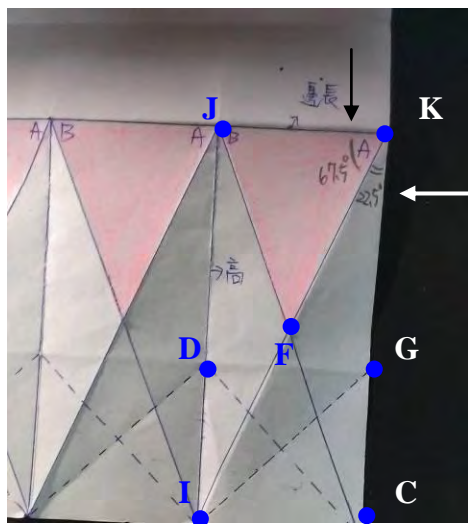
透過觀察和測量的結果發現，四角盒展開圖中的對角線和邊長(A)的夾角角度為 45 度角 (如圖黑色箭頭)，而對角線和 H 的夾角角度也為 45 度角 (如圖白色箭頭)，所以我們只要想办法摺出 45 度角，使其對角線的交叉的角度為 90 度即可。



首先我們先將線段 GC 往上摺與線段 GD 重合，C 點與 D 點重合，而 D 點到邊長(A)垂直高度就是我們的 H，同時我們就會發現 45 度角出現了（因為 90 度角對分之後的角度剛好會是 45 度角），而對角線角度（角 DFG）會等於 90 度。

二、八角盒：

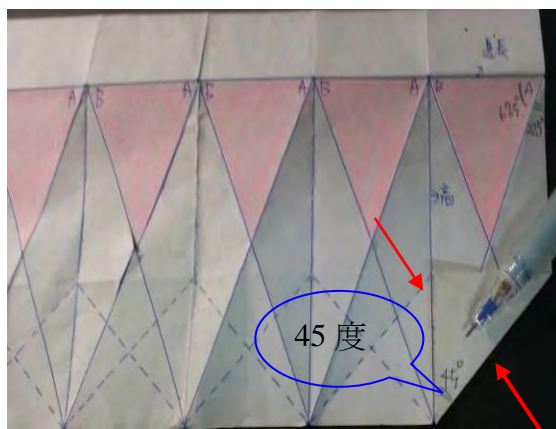
透過觀察和測量的結果發現，八角盒展開圖中的對角線和邊長(A)的夾角角度為 67.5 度角（如圖黑色箭頭），而對角線和 H 的夾角角度也為 22.5 度角（如圖白色箭頭），所以我們只要想办法摺出 67.5 度角和 22.5 度角，使其對角線的交叉的角度為 45 度即可。



第一個步驟：是先將先將線段 GC 往上摺與線段 GD 重合，C 點與 D 點重合，可先摺出 45 度角（因為 90 度角對分之後的角度剛好會是 45 度角）。

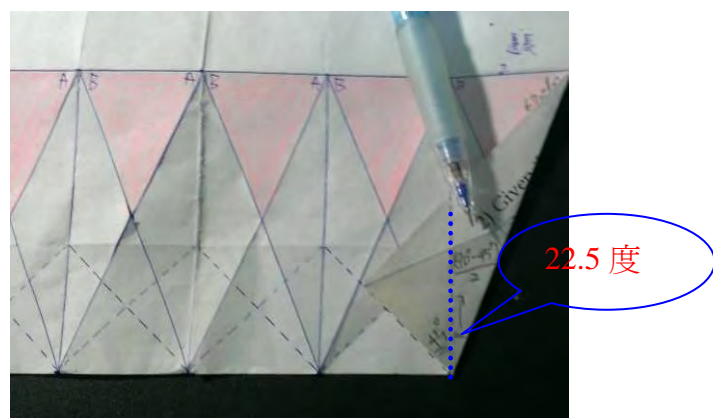
第二個步驟：將線段 IG 往左摺與線段 ID 再次重合（如下圖），此時又將 45 度角再次對分，就可以得到 67.5 度角 22.5 度角，而對角線角度（角 IFC）會等於 45 度，角 JFK = 45 度。

【第一步驟】



再使箭頭指的兩線重合

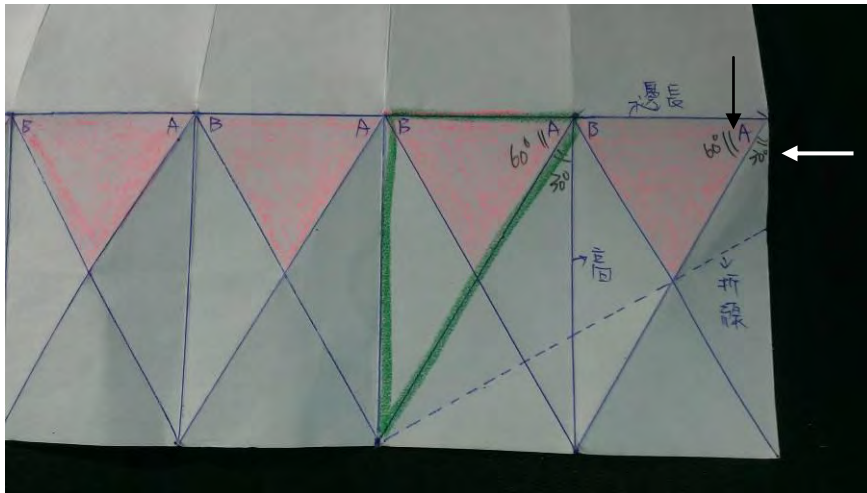
【第二步驟】



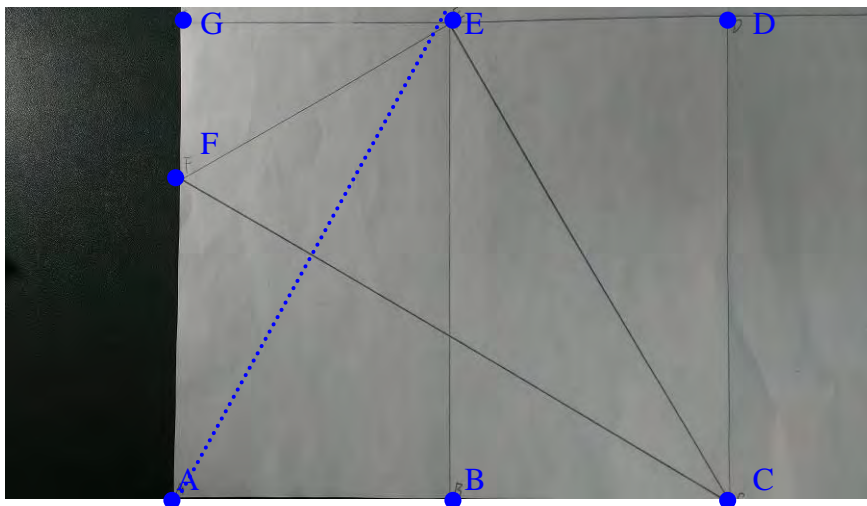
就會得到 22.5 度角

三、六角盒

透過觀察和測量的結果發現，六角盒展開圖中的對角線和邊長(A)的夾角角度為 60 度角（如圖黑色箭頭），而對角線和H的夾角角度也為 30 度角（如圖白色箭頭），所以我們只要想办法摺出 60 度角和 30 度角，使其對角線的交叉的角度為 60 度即可。



第一個步驟：先取兩倍邊長(A)的長度，如下圖中的線段 AC，A 點往上摺到 E 點，E 點至邊長 A 的垂直距離就是 H，觀察線段 AC=線段 CE，因為線段 AE 是四邊形 GABE 的對角線，線段 CE 是四邊形 EBCD 的對角線，所以由此可知，線段 AE=線段 CE，由上述可知：線段 AC=線段 CE=線段 AE，由此可證△ACE 為一正三角形，其內角皆為 60 度，所以角 GAE 為 30 度



柒、結論

- 一、利用一些特別的角度，不需要任何工具，我們便可以徒手摺出特定的多角盒，如：四角盒、六角盒、八角盒…
- 二、想要摺出更多的多角盒並不難，我們可以利用公式：角盒交叉角度 = $360 \text{ 度} \div N$ ，先找出多角盒交叉的角度，再依序摺出多角盒。
- 三、在摺多角盒的過程當中，我們意外的發現高度 H 和邊長 A 的關係為

$$\boxed{N \text{ 角盒} \quad H = 0.6 (N \div 2) + \mathbf{【1 + 0.35 \times (N - 4)】} \times (A - 1)} \quad N > 4 \quad A \geq 1$$

這個發現，讓多角盒的摺法又多了一種，同時也可以精準的摺出多角盒。

四、爲了應應環保，我們不但利用廢紙來摺紙盒，還想盡辦法讓紙張的用量節省到最低，所有紙盒節省的最大的限度不可以超過 $H/2$ ，在不節省任何紙張的量的情況下，我們也發現越多邊形的角盒越穩固。

五、利用『相同大小』的紙張摺出不同形狀的多角盒，我們會發現越多邊形的角盒其容量也會跟著變大。



捌、推廣與未來工作

- 一、未來我們希望摺出更多不同的多角盒，這些多角盒可以用來當作筆筒、媽媽的珠寶盒、我們的文具盒…
- 二、 N 等於多少時，盒子承受力是否有差別？影響多大？找出承受力最佳的 N 值！
- 三、希望藉由回收紙再摺紙盒，達到物盡其用的最大功效，節省資源，爲地球盡一份心力！

玖、參考資料

- 一、王或華 巧手摺禮盒 九版 台北市 美勞教育出版有限公司 一九九五年五月

拾、附件：操作紀錄 請參閱實驗日誌。

【評語】 080404

1. 問題具有一定的趣味性，但是本主題是常被探討的問題。
2. 作品討論的深度、廣度應再進一步加強，若能再加更多的創意，才能使本件作品更豐富，也才有更高的可讀性。