

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第一名

080403

「POP-UP」－立體書中三角立基的研究

學校名稱：國立嘉義大學附設實驗國民小學

作者：	指導老師：
小六 羅以琳	劉恬如
小六 李孟穎	羅俊明
小六 翁勛堯	
小六 陳宇翔	
小六 賴育珣	

關鍵詞：立體書、三角立基

得獎感言

去年9月我和隊員們已開始找題目了，此時”立體書展”正好開始展出，這熟悉卻從未深入了解的藝術品，激起了我們的興趣，11月我們便決定以”立體書”為主題，造就這令人自豪的研究。

立體書總是巧妙的使平躺於書中的紙片，組合成複雜的立體圖形。這令我們好奇，到底如何在動手完成前，計算好圖形的角度、大小，使圖形既能生動的呈現又能在書本闔起時不超出書本的大小。為了深入探討，我們只以立體圖形最常見的形式”立基”作為研究主軸。

在研究的過程，我們必須不斷地做立基、測量角度，思考各個數據的關聯等等。在這樣反覆的研究下，使我身心疲憊，甚至一度想半途而廢。然而最後我卻選擇了堅持完成這份研究。

當我們的研究快成形時，常會把專有名詞和數據弄錯，此時組員就會和指導老師或和彼此爭論，而我們都能在一次次爭論中釐清許多觀念，也藉此修正了自己在認知上的錯誤。

原以為研究報告出來就能輕鬆許多，後來發現，口頭報告和回答問題才是真正的難題，因為要在有限的時間內，清楚而完整地說出我們研究內容，不僅要台風穩健、口齒清晰和有條理地敘述，這對我們來說是一項挑戰。我們花了許多時間練習比賽時與評審的應對。我們知道比賽中，優秀的作品比比皆是，唯一勝出的方法便是把握與評審交流的那一小段時間。

得知進入了全國賽後，我們還找了指導教授。獲得了許多報告和比賽的技巧，例如教授告訴我們，要將角度改為用長度表示。這個建議使我們的表格數據更加精準，也使我们發現更多研究的方向，豐富了我們的內容，也使我们更加有信心。

比賽時，第一階段的報告因為有充分的練習，所以感覺得心應手。但到了第二階段，我們竟白白讓兩位評審從我們眼前走過!幸好我們回過神來，把後面的兩位評審疲勞轟炸一番，扳回一城。

成績公布的時刻來了，隊員們看似信心滿滿，在座位上自誇著:”第一名不給

我們，還能給誰呀?"根本不用猜，我們一定是第一的!"口頭上這麼說著，內心卻忐忑不安。隨著主持人公布的名單，我的心也跟著緊張發抖。終於要公布數學科的成績了！佳作不是我們，第三名與立體書無關，第二名也不是我們——第一名 POP-UP 名字還沒宣布完，大夥兒早已歡聲雷動！心情真是無與倫比的開心！

得獎後，我們參觀了中研院。看著院士和台下發問的學生，我發現科學還有許多值得我們探索的空間。

最後要感謝師長們辛勤的指導我們的研究報告，以及隊友們的合作無間，使我們能順利抱回冠軍的殊榮。



努力研究討論立體書中的各種角度



自己製作三角立基以測量各種角度



全國比賽中我們與看板的合影

「POP-UP」-立體書中三角立基的研究

摘要

本研究旨在探討立體書中三角立基各種角度與高度的關係。結構角及黏貼角的組合會影響到站立角及站立高度，並進一步影響到基盤開合之間時三角立基頂點的移動角度及移動高度。一般立體書中最常見的設計為「結構角 $\leq 90^\circ$ 及黏貼角 $> 90^\circ$ 」，本研究計算移動高度的結果建議，製作立體書的三角立基結構角要 $\leq 90^\circ$ ，而且結構角越趨近 90° ，黏貼角也趨近 90° ($\neq 90^\circ$)時具有最大「POP-UP」的跳高效果。在製作立體書中的三角立基時，如果已決定結構角與黏貼角時，可以對照圖 5-4-2 找到書本合起來時的頂點高度，就能計算出基背最大容許長度 $=\frac{10}{\text{頂點高度}}\times(\text{書本寬度}X)$ 。

壹、研究動機

趁著假期和家人一起去參觀「立體書的異想世界」，看到各式各樣、充滿奧秘玄機的立體書，在開啟書頁瞬間，圖像就栩栩如生跳出頁面，感到驚奇又有趣。買了幾本立體書回來和同學仔細觀察，發現立體書的製作手法雖然非常多樣，其中一項基本作法就是「三角立基」，大多是以三角形方式黏貼在兩面書頁上，當書頁開啟時，圖案受到兩邊力量拉扯，就會站立起來，原來這就是立體書又稱為「pop-up」的由來。我們查詢歷屆科展中並沒有相關作品，國內的研究報告也很少，於是，我們決定以三角立基為主題，探討它的製作原理和奧秘。(教材相關性：數學翰林版-五下第二單元線對稱圖形；第六單元三角形與扇形)

貳、研究目的

- 一、探討立體書中三角立基的設計。
- 二、探討三角立基結構角、黏貼角與站立角、站立高度的關係。
- 三、分析三角立基的移動角度與移動高度。
- 四、分析三角立基基背容許長度。
- 五、應用三角立基的設計原理製作立體卡片。

參、文獻探討與名詞解釋

一、文獻探討

(一) 立體書

根據「立體書王國」有關立體書簡史的說明，1932年美國紐約出版社 Blue Ribbon 首創“pop-up”這個立體書專有名詞（楊清貴，2008）。一般來說，「立體書」是指翻開書頁時，書面上就會跳出立體的圖片，是遊戲書中最常見的設計。

(二) V型摺疊

通常是將圖案卡紙以「V字型」方式對稱折疊後，沿著書頁中線黏貼，當書頁打開成水平狀時，圖片就自動被拉起彈跳出頁面，因此又稱為「V型摺疊」(V-fold)（胡詠寧，2012）或「V型場景層」（魏鴻麟，2006）。如圖 3-1-1。



圖 3-1-1：立體書 V 型摺疊與三角立基

(三) 三角立基

由於書頁開啟時，「V型摺疊」通常是以「三角立基」的型態站立起來，因此，它黏貼於書頁和站立的角度，應該都可以準確的計算和設計。不過，目前國內有關立體書製作角度的研究非常少見。查詢歷屆科展都沒有「立體書」或「立體卡片」相關研究，論文部分也只找到林心智、張宜玲（2006）發表的〈活動圖卡中三角基的移動方式〉一篇。該研究是將幾種三角基黏貼在圖卡上，或在三角基上黏貼小圖案，然後觀察三角基的移動方式。不過，上述研究的三角基在書頁開啟時都是平貼在書面上，並不會“pop-up”出來，與立體書的定義不同；而且也沒有測量三角基移動幅度的數據。之後，他們在另一篇未正式發表的文章中，將上述研究的三角基稱為「臥基」，並將開啟書頁時會站立起來的三角基稱為「立基」，不過，該研究仍然只有「觀察」立基的移動幅度，沒有提出任何測量數據，更缺乏數學的思考和推算過程。

(四) 本研究的特色

本研究是以立體書中最常見以「V型摺疊」方式站立於書頁的「三角立基」為研究對象，首先探討三角立基在立體書中的黏貼方式和設計原理；進一步探討三角立基的「結構角」及其沿書頁中摺線黏貼的「黏貼角」的不同組合，測量三角立基的「站立角」及在書頁上開合時產生的「移動角度」；分析當書頁閉合時，基背的傾倒角度和基背長度；提出三角立基的數學原理，以應用於立體書的設計。

二、名詞解釋

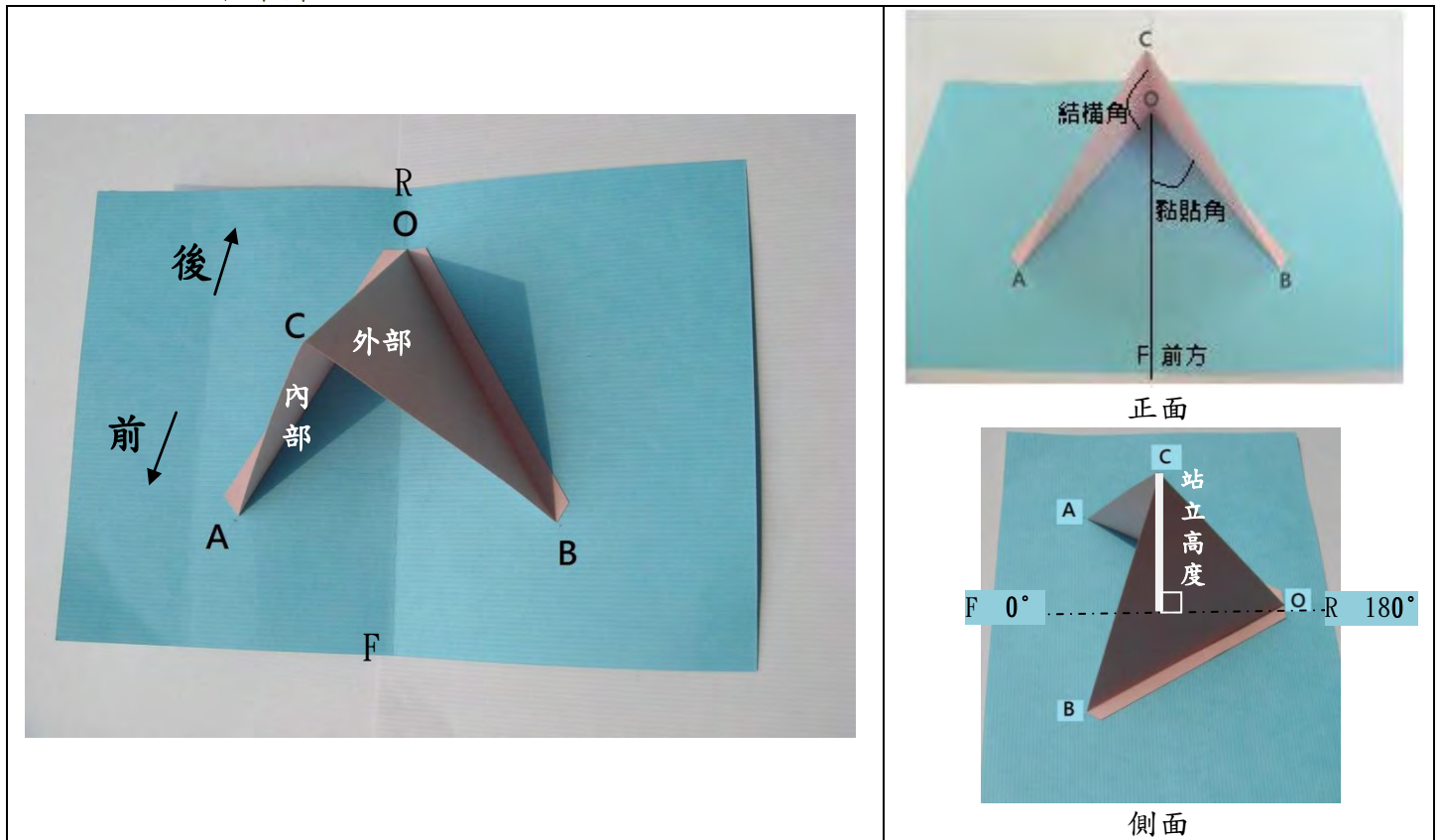
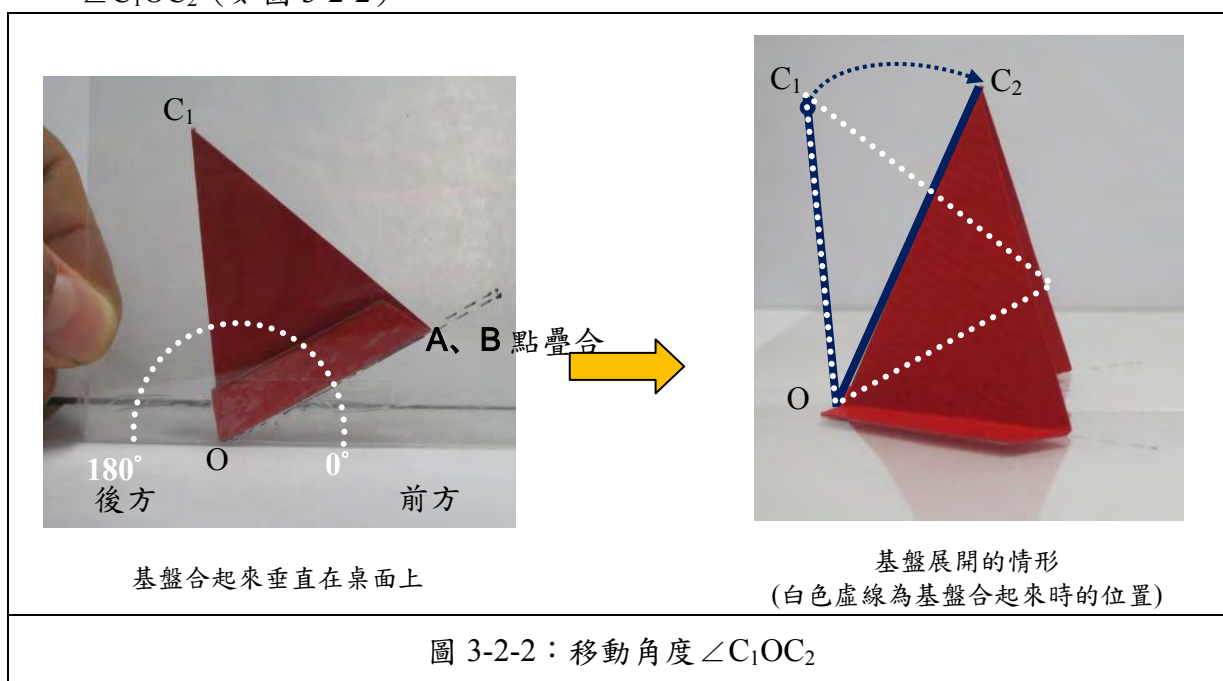


圖 3-2-1：三角立基與基盤

1. **三角立基**：將紙卡以左右對稱的 V 型摺疊方式，沿基盤中摺線 \overline{FR} 黏貼，摺疊合起時是三角形，而兩邊展開時則像風箏形狀，如圖 3-2-1 AOB 所形成的三角錐即三角立基。
2. **基盤**：書本張開後所形成的平面，以及書本合起來時形成垂直的法平面；本研究中使用透明片為基盤，藉以觀察和測量移動角度。
3. **底點和頂點**：三角立基黏貼在基盤時，中摺線 \overline{FR} 上 V 型摺疊的中心點就是「底點」，如圖 3-2-1 中的 O 點；立基最高的點就是「頂點」，如圖 3-2-1 中的 C 點。
4. **基背、黏貼線和黏貼邊**：三角立基底點 O 和頂點 C 之間的連線 \overline{OC} 就是「基背」；立基底部與基盤黏貼的界線 \overline{OA} 和 \overline{OB} 稱為「黏貼線」，立基底部與基盤黏貼的長條形範圍稱為「黏貼邊」。黏貼邊可以視需要調整摺邊面是要往內黏或往外黏，以圖 3-2-1 為例是往外黏貼。
5. **結構角**：製作三角立基時，沿卡片中線（基背 \overline{OC} ）摺疊後，從底點 O 向外開展的角度，也就是基背 \overline{OC} 和黏貼線 \overline{OA} 或 \overline{OB} 所形成的角度。如圖中，三角立基的結構角 = $\angle AOC = \angle BOC$ 。
6. **黏貼角**：指三角立基黏貼在基盤上的角度。由基盤前方看過去，黏貼線 \overline{OA} 或 \overline{OB} 與中摺線 \overline{FR} 所成的角度。如圖 3-2-1 中，黏貼角 = $\angle AOF = \angle BOF$ 。

7. **內部面或外部面**：三角立基內凹面稱為內部面，另一面即為外部面，所以，同一個結構角可以因黏貼角不同，使三角立基中，原為內部的面變成外部的面。
8. **站立角**：當基盤左右兩邊完全展開成為平面時，基背 \overline{OC} 和基盤中摺線 \overline{FR} 所形成的角度稱為站立角 $=\angle FOC$ ，以F為前方(0°)，以R為後方(180°)。
9. **站立高度**：當基盤展開時，C點到中摺線的垂直距離。
10. **移動角度**：基盤展開時是平放在桌面上，基盤合起來時是中摺線上垂直於桌面的法平面，移動角度就是當基盤開合之間，立基頂點C在法平面上前後移動的角度。例如：當基盤合起時，三角立基的頂點C在 C_1 位置；當基盤展開時，頂點C移到 C_2 位置，移動角度 $=\angle C_1OC_2$ （如圖 3-2-2）。



11. **頂點高度**：當基盤閉合時，立基頂點C在垂直的法平面上，頂點高度就是頂點C到中摺線的距離（圖 3-2-2）。

肆、研究設備及器材

1. 立體書
2. A4 透明投影片
3. 粉彩紙、西卡紙、標籤紙
4. 直尺、量角器
5. 膠水、膠帶、雙面膠
6. 油性細字筆、彩色筆
7. 剪刀、美工刀



圖 4-1-1：本研究使用的立體書


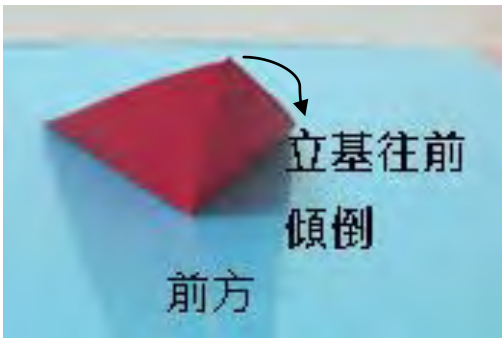
伍、研究方法、結果與討論

一、研究一：立體書三角立基設計探討

我們蒐集幾本應用 V 型摺疊和三角立基製作的立體書，仔細觀察三角立基在立體書中面向、黏貼位置、結構角和黏貼角的關係，針對結構角和黏貼角大於、等於、小於 90° 的組合關係進行比較分析，得到以下結果與討論。

(一) 大部分的立基都是「結構角 $\leq 90^\circ$ 」：

一般立體書中的圖案大多設計在「外部面」，如果結構角 $> 90^\circ$ ，黏貼角 $< 90^\circ$ 時，變成內部呈現在讀者前方；黏貼角 $> 90^\circ$ 時，雖然「外部面」呈現在讀者前方，但立基往前傾倒反而看不清楚。所以立體書中立基以「結構角 $\leq 90^\circ$ 」居多。

	
<p>圖 5-1-1：結構角 $> 90^\circ$，黏貼角 $< 90^\circ$ 內部面朝前。</p>	<p>圖 5-1-2：黏貼角 $> 90^\circ$，立基往前傾倒。</p>

(二) 黏貼角大小與黏貼位置

黏貼角以 90° 區分為三種情況列表說明於表 5-1-1：

表 5-1-1：立體書中三角立基分析表

分析項目	黏貼角	黏貼角 $> 90^\circ$	結構角 = 黏貼角	黏貼角 $< 90^\circ$
黏貼位置	書頁後方	前後均可	前後均可	書頁前方
內部或外部朝前	外部朝前	前後均可	前後均可	內部朝前
圖案向前傾或後仰	向後仰	平貼書頁	平貼書頁	向前傾
書頁閉合時	向前傾倒	向上凸起	向上凸起	向後傾倒
備註	最常見 (圖 5-1-3)	少見 (圖 5-1-4)	少見 (圖 5-1-4)	常與黏貼角 $> 90^\circ$ 的立基配 合成為一組 (圖 5-1-5 之立基 B)

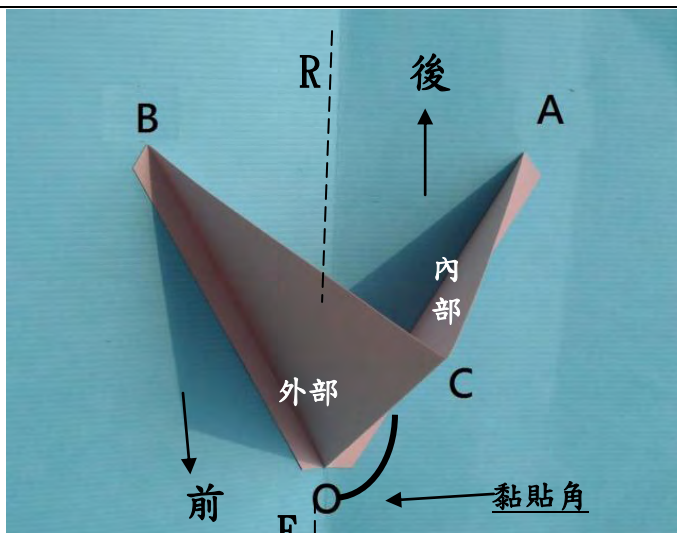


圖 5-1-2：立體書與三角立基名稱對照

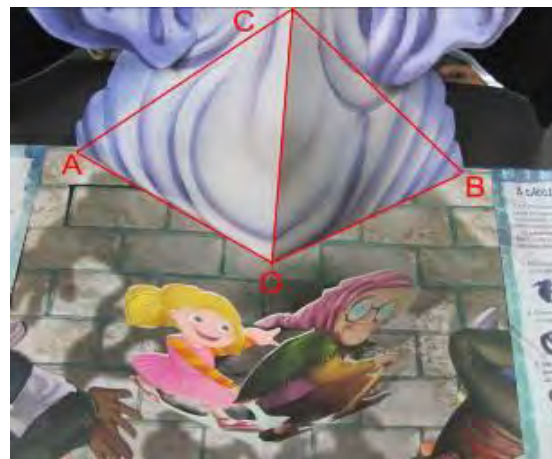


圖 5-1-3：黏貼角 $> 90^\circ$



圖 5-1-4：結構角=黏貼角=45°，下方立基完全平貼於書頁上

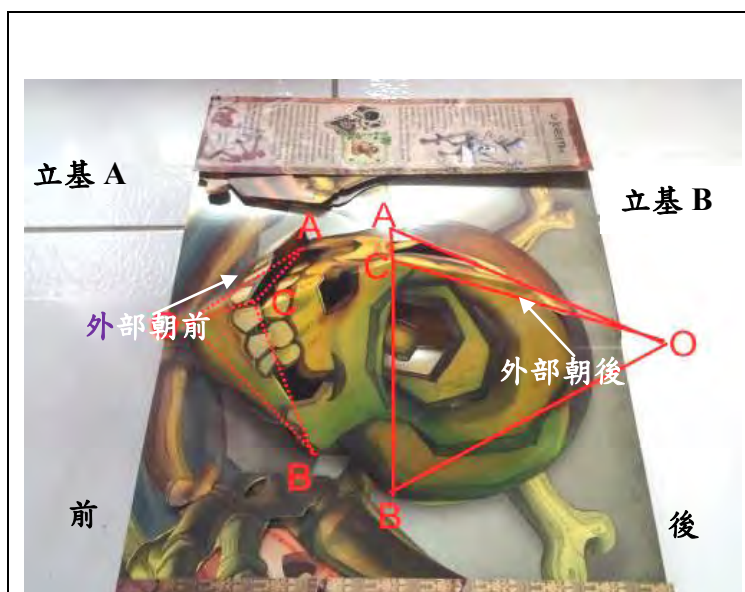


圖 5-1-5：二個三角立基相對黏貼

二、研究二：三角立基結構角、黏貼角與站立角、站立高度的探討

從研究一立體書的探討，發現大部分三角立基是「結構角 $\leq 90^\circ$ 」；黏貼角大小，似乎會影響立基的站立情形。

因此，我們自己製作各種不同結構角的三角立基(附件一)，結構角設為 $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 165^\circ$ 等 11 項不同角度，黏貼角從 0° 開始，以每 15° 遞增方式，若遇到無法黏貼則跳過，直到黏貼角 180° 為止。以此來探索立基的結構角、黏貼角與站立角、站立高度的關係。



圖 5-2-1：結構角 $=15^\circ$ ，但黏貼角有 $0^\circ, 15^\circ, 165^\circ, 180^\circ$ 四種。

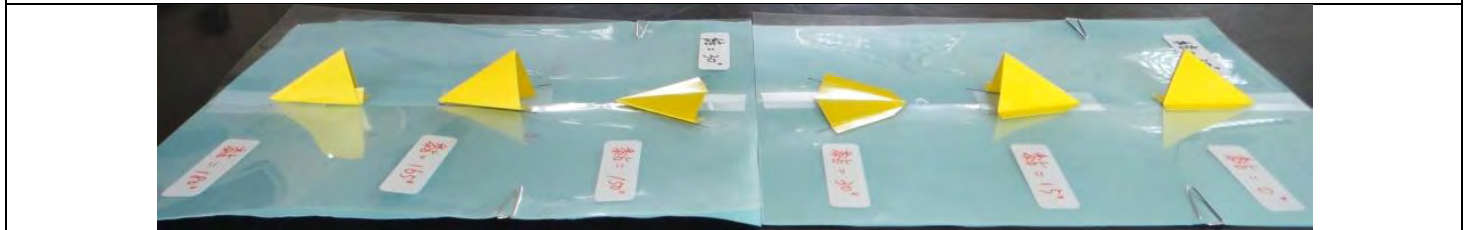


圖 5-2-2：結構角 $=30^\circ$ ，但黏貼角 $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 165^\circ, 180^\circ$ 有六種。



圖 5-2-3：結構角 $=45^\circ$ ，但黏貼角 $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 165^\circ, 180^\circ$ 八種。

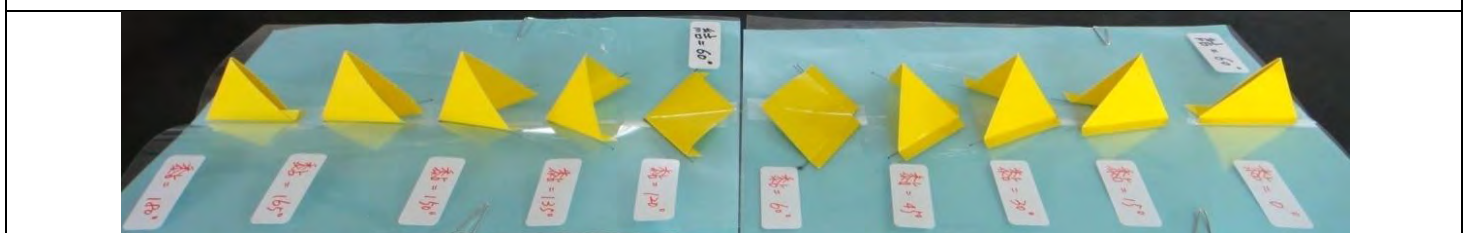


圖 5-2-4：結構角 $=60^\circ$ ，但黏貼角 $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 165^\circ, 180^\circ$ 十種。



圖 5-2-5：結構角 $=75^\circ$ ，但黏貼角 $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 115^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 165^\circ, 180^\circ$ 十二種。

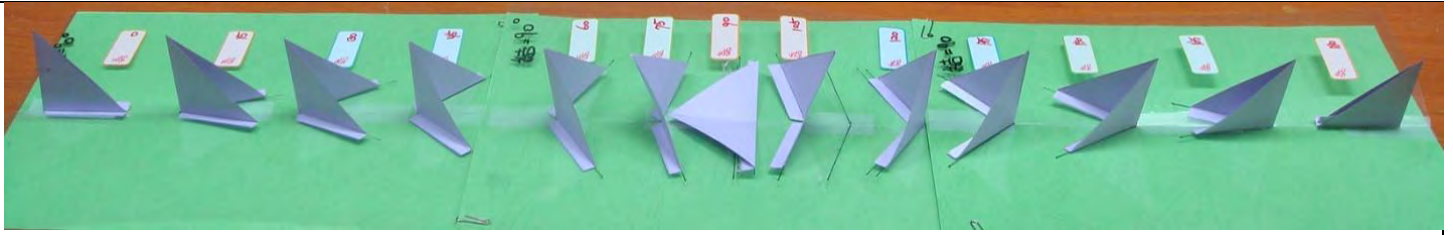


圖 5-2-6：結構角=90°，但黏貼角 0°、15°、30°、45°、60°、75°、90°、115°、120°、135°、150°、165°、180° 十三種。

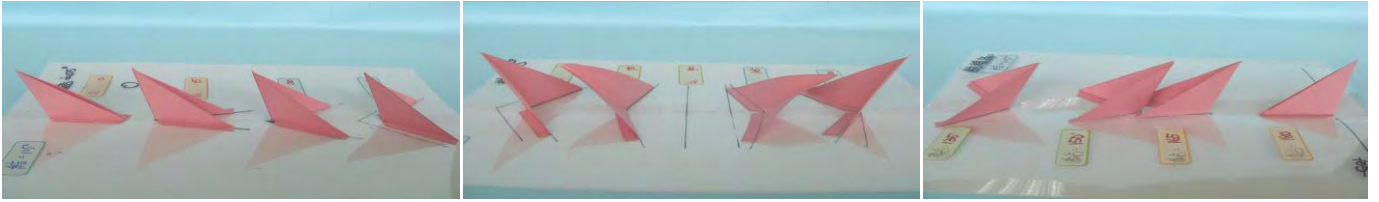


圖 5-2-7：結構角=105°，但黏貼角 0°、15°、30°、45°、60°、75°、115°、120°、135°、150°、165°、180° 十二種。



圖 5-2-8：結構角=120°，但黏貼角 0°、15°、30°、45°、60°、120°、135°、150°、165°、180° 十種。

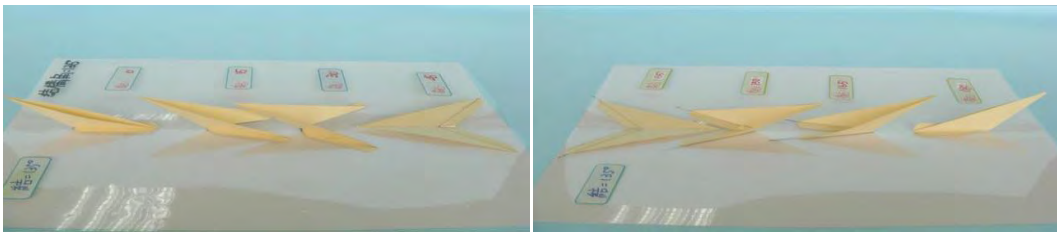


圖 5-2-9：結構角=135°，但黏貼角 0°、15°、30°、45°、135°、150°、165°、180° 八種。



圖 5-2-10：結構角=150°，但黏貼角 0°、15°、30°、150°、165°、180° 有六種。

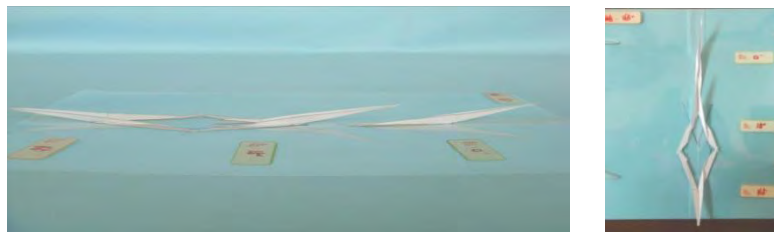


圖 5-2-11：結構角=165°，但黏貼角有 0°、15°、165°、180° 四種。

(一)三角立基站立角的測量方法如下：

- 1.將量角器塑膠板下方的空格以美工刀切除(圖 5-2-12)。
- 2.將基盤完全展開,在中摺線 \overline{FR} 上的底點 O 作一垂直線 \overline{OH} ,把鐵尺的一邊對準此垂直線 \overline{OH} ,鐵尺的面平貼於三角立基的基背 \overline{OC} 上,利用量角器測量站立起來的鐵尺與平面的角度,此角度即為站立角 $\angle FOC$,本研究中的站立角一律以基盤前方為 0° (圖 5-2-13)。



圖 5-2-12：切除量角器下方空格

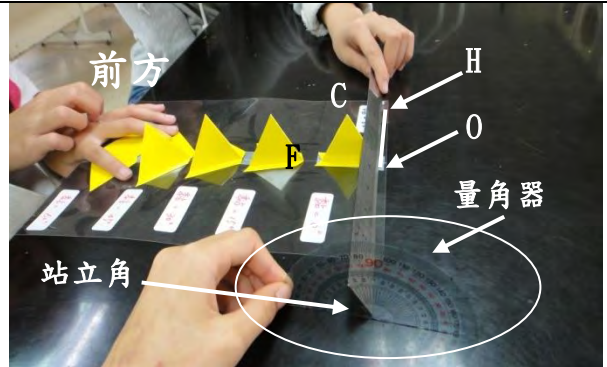


圖 5-2-13：測量站立角

(二)站立高度的測量方法如下：

三角立基基背長設定 10cm，測量基盤展開時，立基在不同黏貼角時，頂點 C 垂直於基盤的長度即為站立高度。

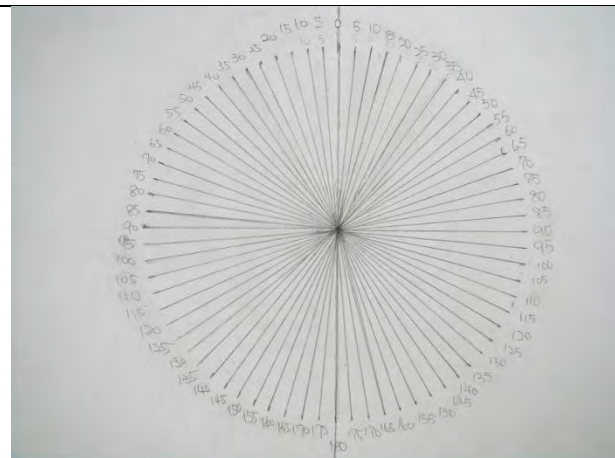


圖 5-2-14：基盤上每隔 5° 做一直線，方便操作黏貼角。

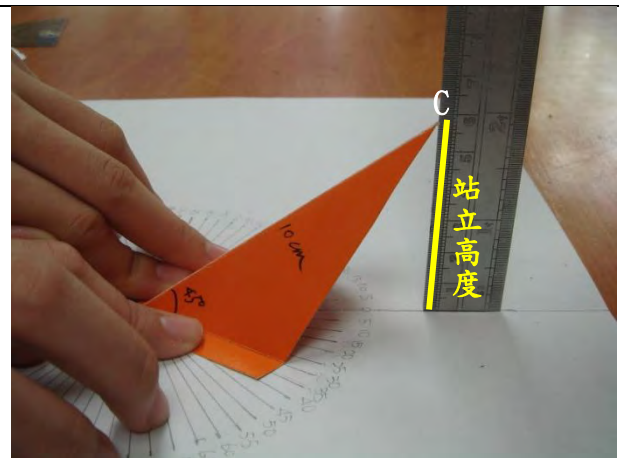


圖 5-2-15：測量站立高度

(三)結果

1.站立程度總表

(1)測量站立角的結果：

用量角器分別去測量每一種結構角和黏貼角組合立基的站立角，將結果整理成圖 5-2-16。

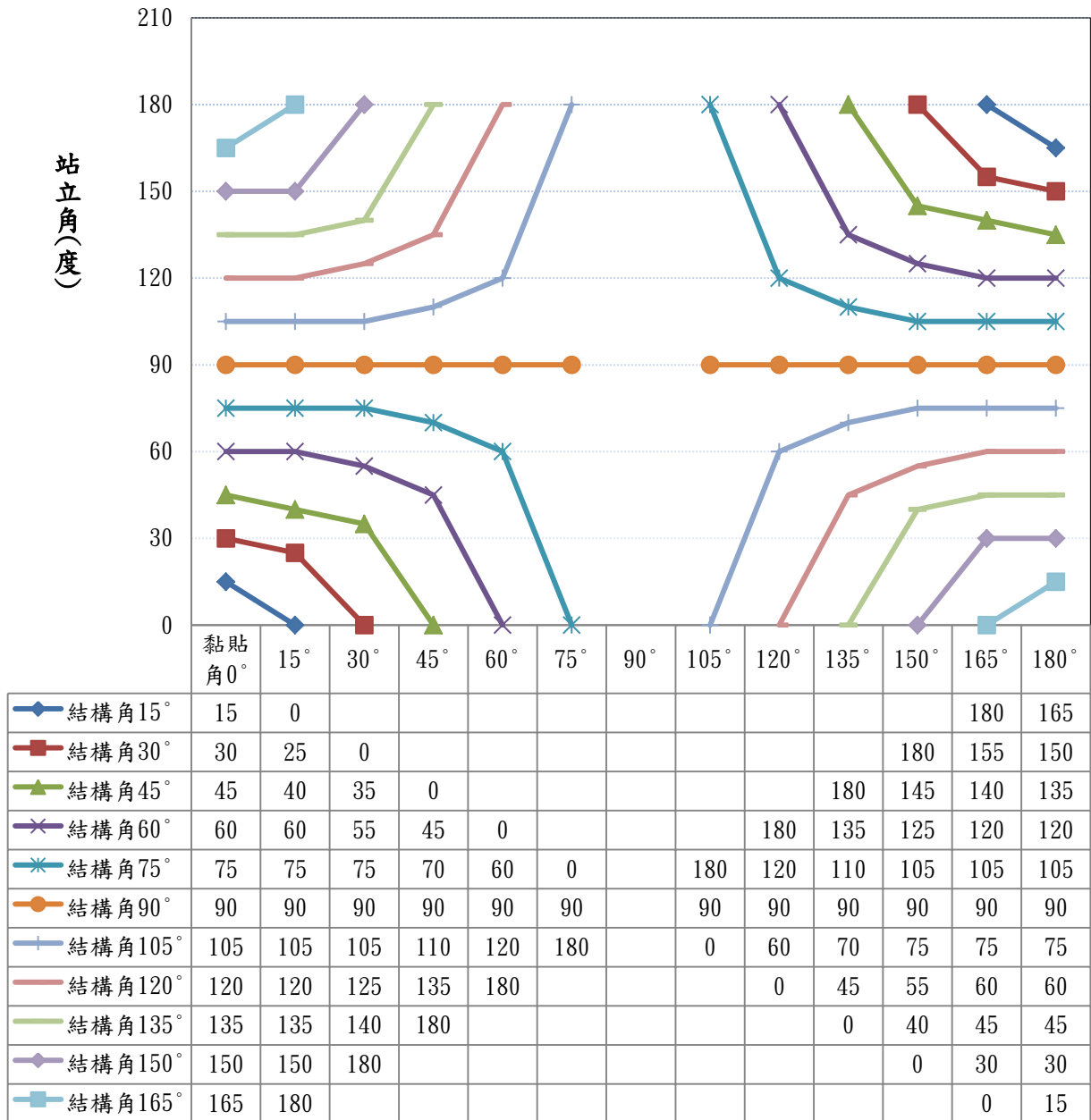


圖 5-2-16：量角器測量站立角的結果

註：空白區塊代表立基無法黏貼

(2)測量站立高度的結果：

因站立角的定義是由基背 \overline{OC} 和基盤中摺線 \overline{FR} 所形成的角度，不容易表達出站立的角度，因此改測量站立高度來表示站立的程度，我們將三角立基的基背長固定為 10cm，測量的結果如下圖 5-2-17。

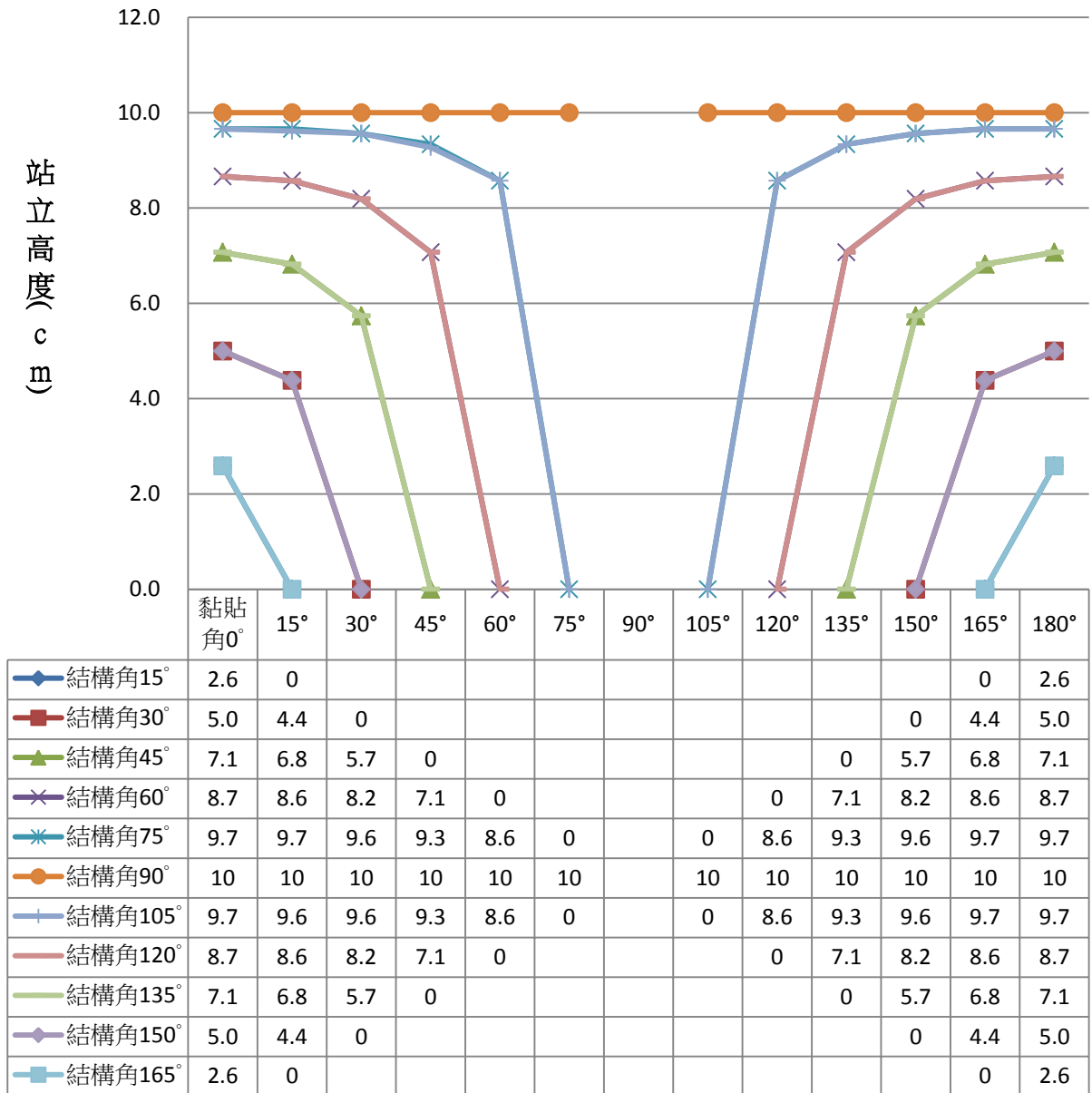


圖 5-2-17：結構角和黏貼角組合的站立高度圖表

(三)討論 1：結構角相同但黏貼角不同時，站立高度的變化。

1. 當結構角 $\neq 90^\circ$

(1)結構角相同時，黏貼角越趨近 90° ，則站立高度越低，例如：結構角 60° 時，由圖 5-2-4 及圖 5-2-17、圖 5-2-18 的折線可以看出黏貼角越近 90° ，站立高度越低。

(2)由圖 5-2-17 折線圖可看出，黏貼角愈接近結構角時，則站立高度的傾斜變化越大，最後立基平貼基盤，站立高度為 0cm 。

我們以結構角 60° 為例，黏貼角進一步以每隔 5° 細分，測量站立高度，得到圖 5-2-18，可以看到站立高度呈現一個圓弧線。

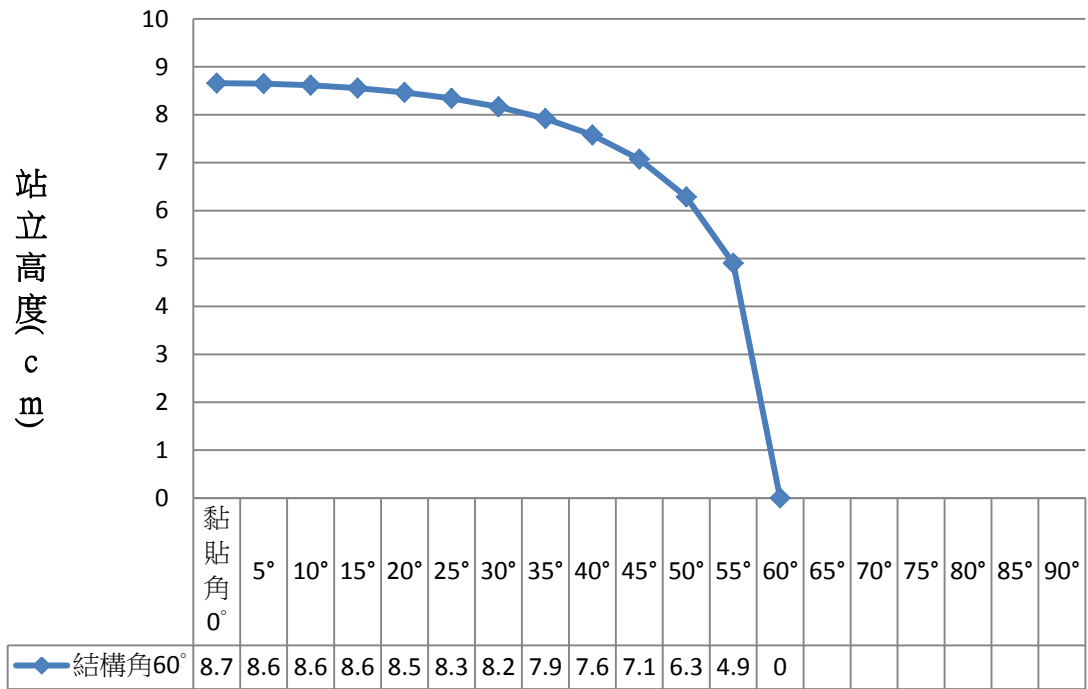


圖 5-2-18：結構角 60° ，黏貼角每隔 5° 時，立基站立高度的位置

(3) 黏貼角 = 結構角或結構角的補角時，立基已經貼平在基盤，站立高度為 0cm 。

(4)三角立基黏貼角無法黏貼的範圍：

當立基的黏貼角介於結構角及其補角之間的範圍時，立基無法黏貼。例如，結構角 = 45° ，黏貼角 = 45° 或 135° 時，此立基已經貼平在基盤上(圖 5-2-19)，無法再拉開黏貼角角度。

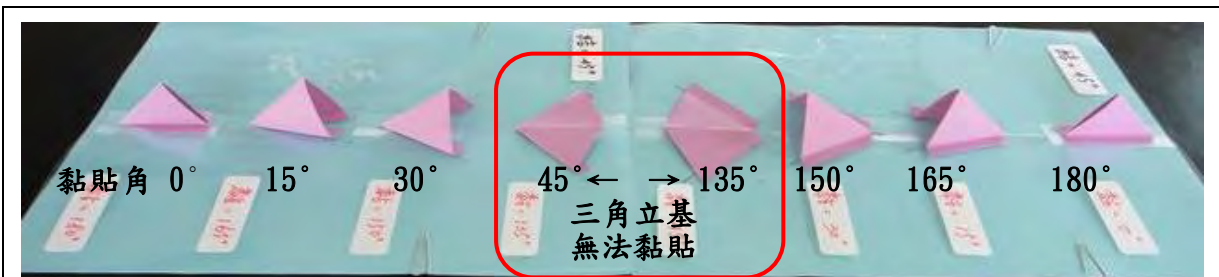
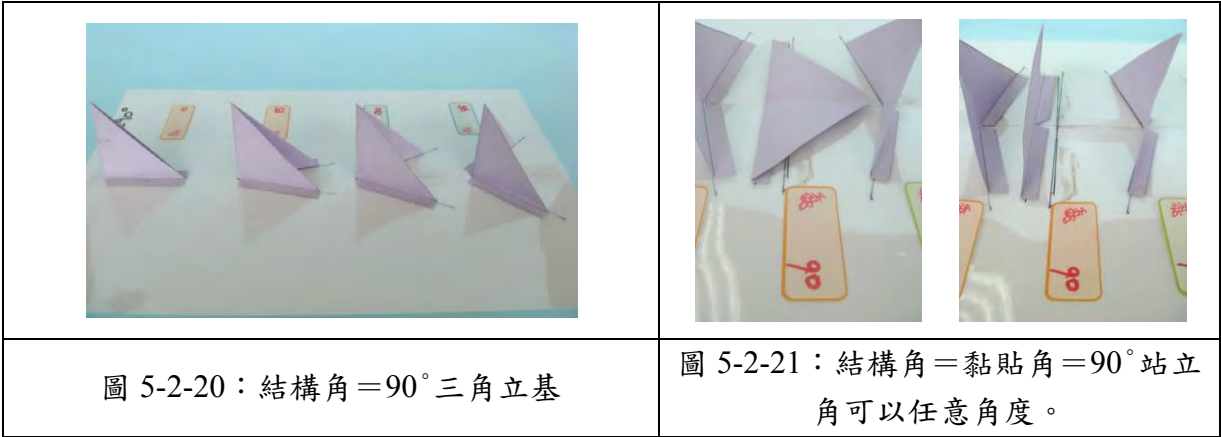


圖 5-2-19：結構角 = 45° ，黏貼角 = 45° 或 135° 時三角立基貼平在基盤， $45^\circ < \text{黏貼角} < 135^\circ$ ，三角立基無法黏貼。

2. 當結構角=90°

- (1)黏貼角 $\neq 90^\circ$ 時，站立角都是高度都是 90° ，也就是站立高度最高(圖 5-2-20)；
- (2)當結構角=黏貼角=90°時，立基在平面上黏貼成一直線，站立角可以是 $0^\circ\sim 180^\circ$ 間的任意角度(圖 5-2-21)。



(四)討論 2：黏貼角相同但結構角不同時，站立高度的變化。

- 1.當黏貼角相同，結構角越趨近 90° 時，則站立高度越高。
- 2.結構角越趨近 90° ，則黏貼角可以黏貼的範圍就較大(由圖 5-2-17)，例如：

結構角 45° 時，黏貼角可以黏貼的範圍為 $0^\circ\sim 45^\circ$ 及 $135^\circ\sim 180^\circ$ 。

結構角 90° 時，黏貼角可以黏貼的範圍為 $0^\circ\sim 180^\circ$ 但不可以 90° 。

由此得知，建議立體書中的立基圖案如果希望站立高度較高，則結構角可趨近 90° ，而同時黏貼角度也有較多的可黏貼範圍。

三、研究三：三角立基移動角度及移動高度的探討

本研究將三角立基的「移動角度」定義為：當基盤開合時，立基的頂點 C 在空中移動的角度，例如：當基盤合起時，立基的頂點 C 在 C_1 位置；當基盤展開時，頂點 C 移到 C_2 位置，移動角度 = $\angle C_2OF - \angle C_1OF = \angle C_1OC_2$ 。(如圖 5-3-1)。

測量方法是將一個三角立基，沿著頂點 C 到底點 O 的基背，從中間切開來。當基盤合起時，量角器放進切開基背的立基之中可測量到 $\angle C_1OF$ ；當基盤展開使立基站立時，可測量 $\angle C_2OF$ ，如此可測量頂點 C 在量角器上的移動角度。

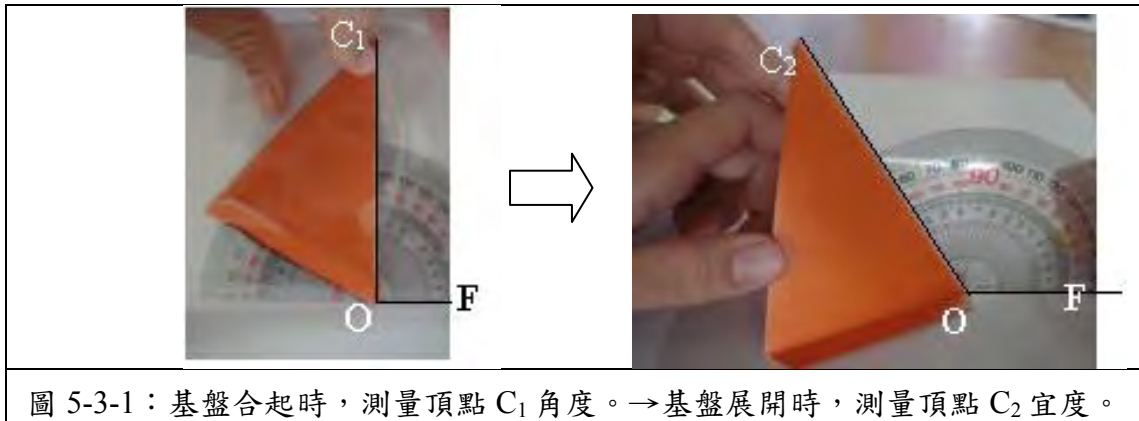


圖 5-3-1：基盤合起時，測量頂點 C_1 角度。→ 基盤展開時，測量頂點 C_2 宜度。

(一)公式

以數學計算方法移動角度也可以用公式來計算，我們發現以「結構角 + 黏貼角之和」小於、等於或大於 180° 分成三種進行討論，其中結構角 + 黏貼角 = 180° 時，以黏貼角大於或小於 90° 區分二種公式。

1. 結構角 + 黏貼角 $< 180^\circ$

公式：移動角度 $\angle C_1OC_2 = \angle C_2OF - \angle C_1OF = \text{站立角} - (\text{結構角} + \text{黏貼角})$ (圖 5-3-2)

例如：結構角 60° 、黏貼角 45° 時，由圖 5-2-16 得知，站立角為 45° ，代入公式：

$$\begin{aligned} \text{移動角度 } \angle C_1OC_2 &= \text{站立角} - (\text{結構角} + \text{黏貼角}) \\ &= 45^\circ - (60^\circ + 45^\circ) \\ &= -60^\circ \quad (\text{「負數」代表書本打開時由後方往前方移動}) \end{aligned}$$

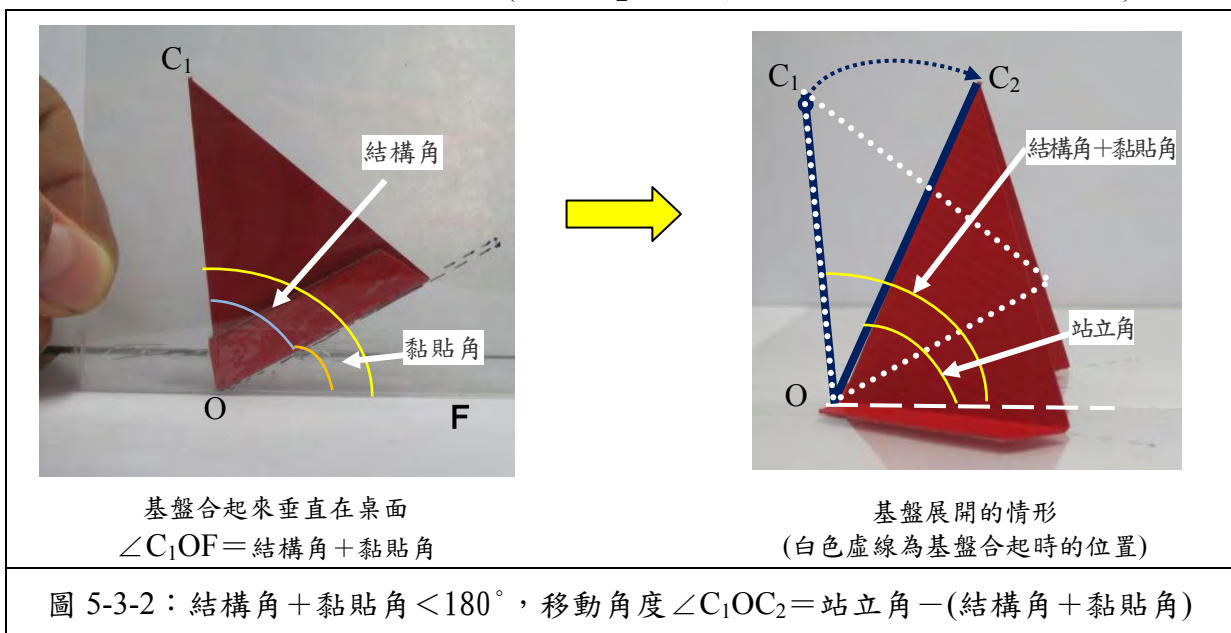


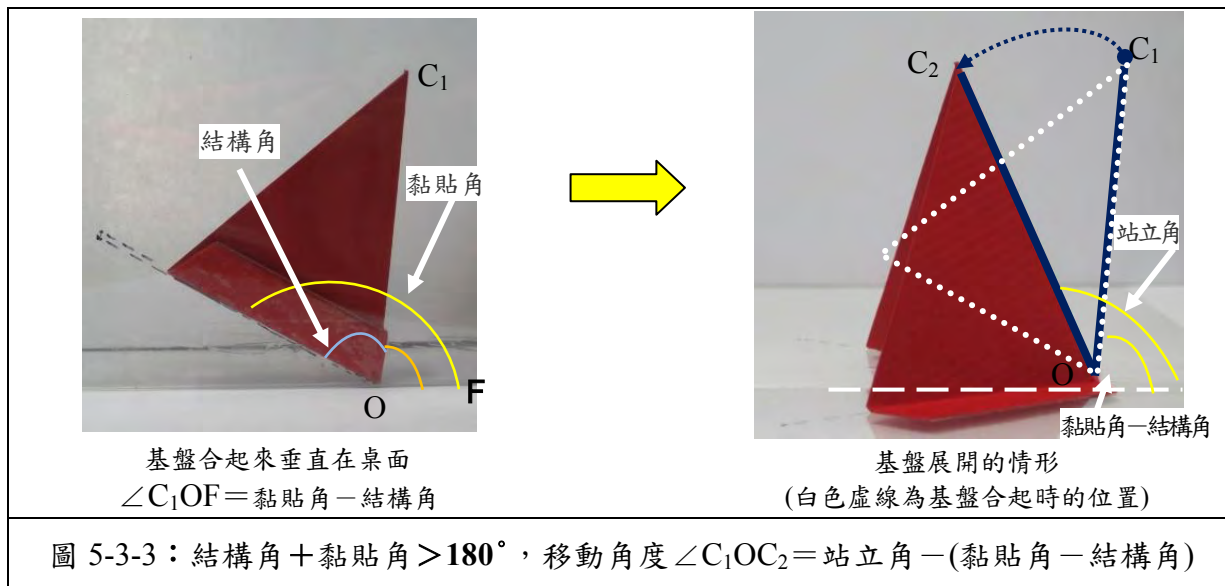
圖 5-3-2：結構角 + 黏貼角 $< 180^\circ$ ，移動角度 $\angle C_1OC_2 = \text{站立角} - (\text{結構角} + \text{黏貼角})$

2. 結構角 + 黏貼角 > 180°

公式：移動角度 $\angle C_1OC_2 = \angle C_2OF - \angle C_1OF = \text{站立角} - (\text{黏貼角} - \text{結構角})$ (圖 5-3-3)

例如：結構角 60° 、黏貼角 150° 時，由圖 5-2-16 得知，站立角為 125° ，代入公式：

$$\begin{aligned} \text{移動角度 } \angle C_1OC_2 &= \text{站立角} - (\text{黏貼角} - \text{結構角}) \\ &= 125^\circ - (150^\circ - 60^\circ) \\ &= 35^\circ \quad (\text{「正數」代表書本打開時由前方往後方移動}) \end{aligned}$$



3. 結構角 + 黏貼角 = 180°

(1) 黏貼角 < 90°

移動角度 $\angle C_1OC_2 = \text{站立角} - (\text{結構角} + \text{黏貼角})$

例如：結構角 120° 、黏貼角 60° 時，由圖 5-2-16 得知，站立角為 180° ，代入公式：

$$\begin{aligned} \text{移動角度 } \angle C_1OC_2 &= \text{站立角} - (\text{結構角} + \text{黏貼角}) \\ &= 180^\circ - (120^\circ + 60^\circ) \\ &= 0^\circ \end{aligned}$$

(2) 黏貼角 > 90°

移動角度 $\angle C_1OC_2 = \text{站立角} - (\text{黏貼角} - \text{結構角})$

例如：結構角 60° 、黏貼角 120° 時，由圖 5-2-16 得知，站立角為 180° ，代入公式：

$$\begin{aligned} \text{移動角度 } \angle C_1OC_2 &= \text{站立角} - (\text{黏貼角} - \text{結構角}) \\ &= 180^\circ - (120^\circ - 60^\circ) \\ &= 120^\circ \end{aligned}$$

(二) 移動角度結果與討論

根據以上公式套用後，調整結構角及黏貼角的變化後，移動角度整理在圖 5-3-4。

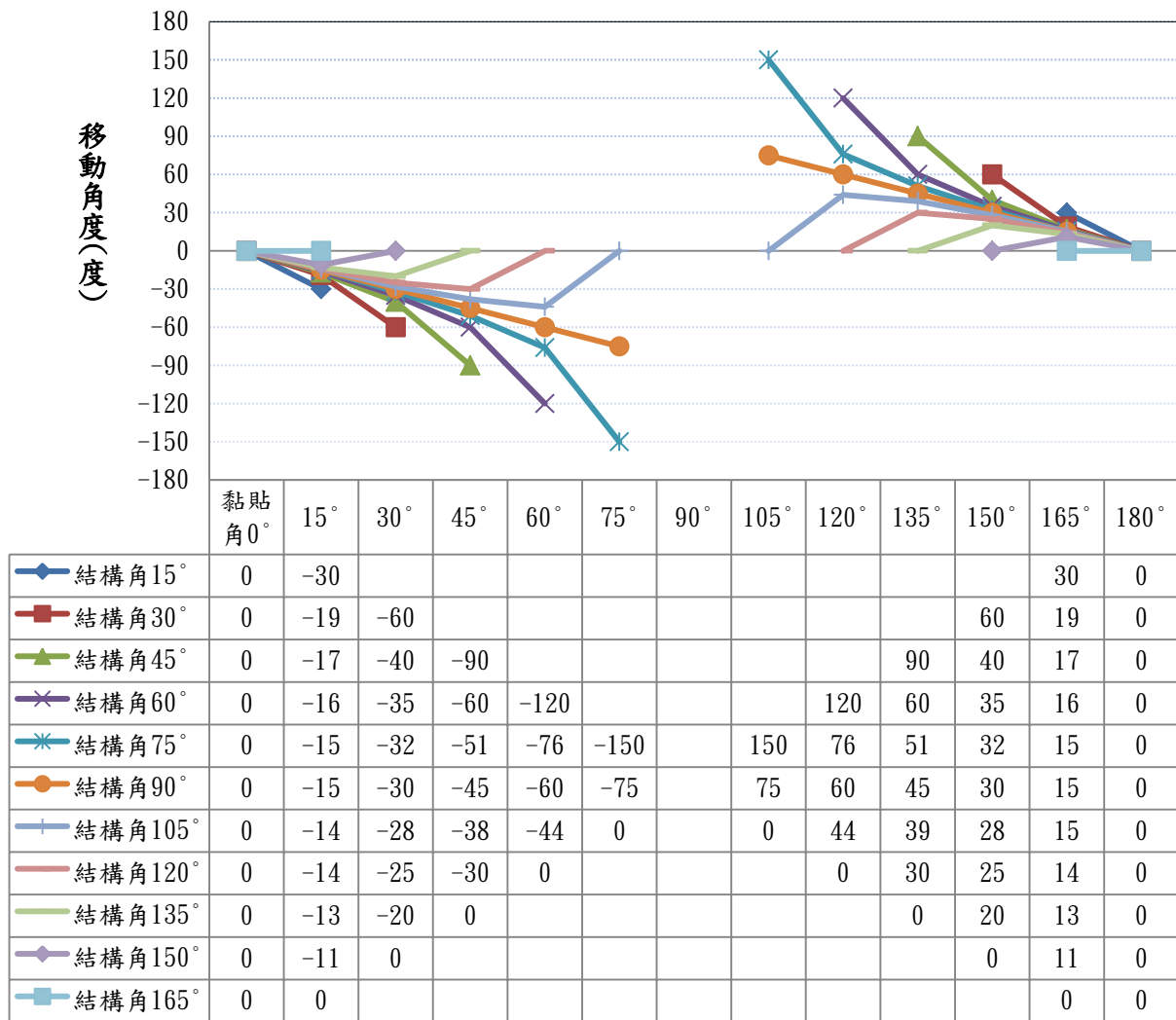


圖 5-3-4：移動角度計算的結果圖表

註：「正數」代表書本打開時由前方往後方移動，因為 $\angle C_2OF$ 數字較大， $\angle C_1OF$ 數字較小，相減得正數。

「負數」代表書本打開時三角立基由後方往前方移動，因為 $\angle C_2OF$ 數字較小， $\angle C_1OF$ 數字較大，相減得負數

1. 相同結構角，黏貼角不同時，移動角度的變化：

結構角相同時，黏貼角越接近 90° ，則三角立基的移動角度越大：如果黏貼角 $< 90^\circ$ ，由後方往前方移動；如果黏貼角 $> 90^\circ$ 由前方往後方移動。

取其中結構角 = 75° 的移動角度折線圖，可看出以 90° 為分界分為二條曲線，越接近 90° 移動角度越大。黏貼角在 75° 、 105° 時，分別有 -150° (由後往前) 及 $+150^\circ$ (由前往後) 的最大移動角度，不過，基盤打開時，立基卻倒下貼平在基盤上。

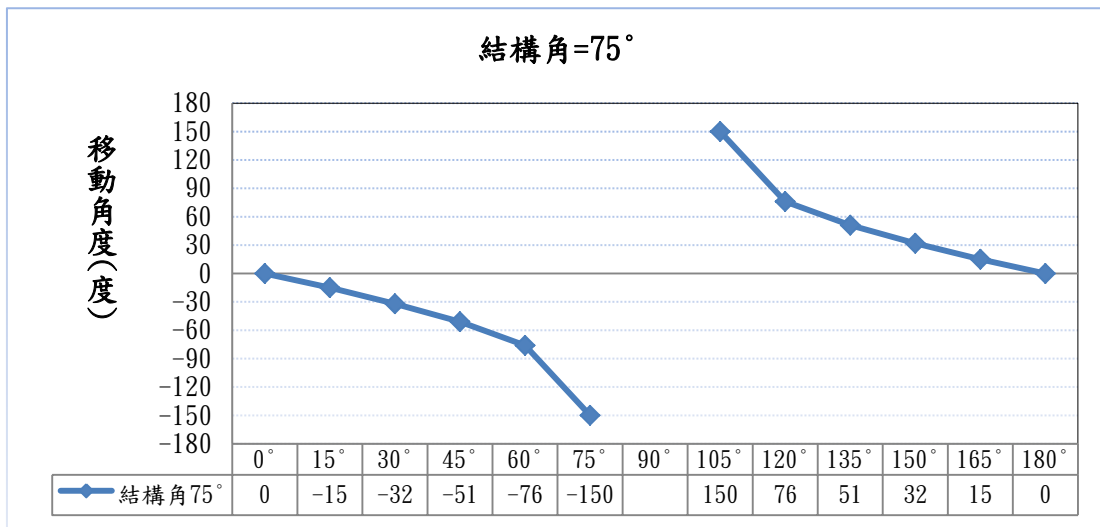
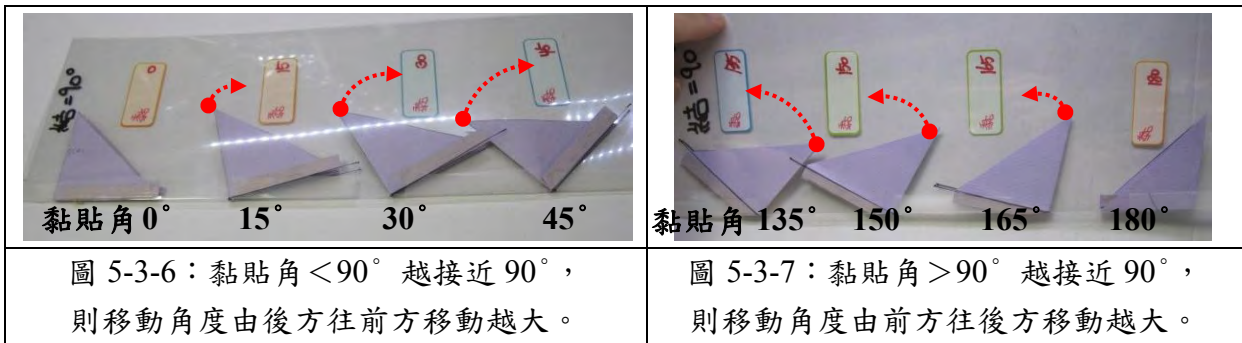


圖 5-3-5：結構角=75°的移動角度折線圖

例如：由圖 5-3-6 中，黏貼角 45° 的移動角度比黏貼角 15° 大，而且是由後方往前方移動。由圖 5-3-7 中，黏貼角 135° 的移動角度比黏貼角 165° 大，而且是由前方往後方移動。



2. 黏貼角相同，結構角不同時，移動角度的變化：

由圖 5-3-8 中可以看出，相同黏貼角時，結構角越小，移動角度變化越大。所以建議立體書中如果希望立基移動角度變化大一點，則使用結構角小的立基。

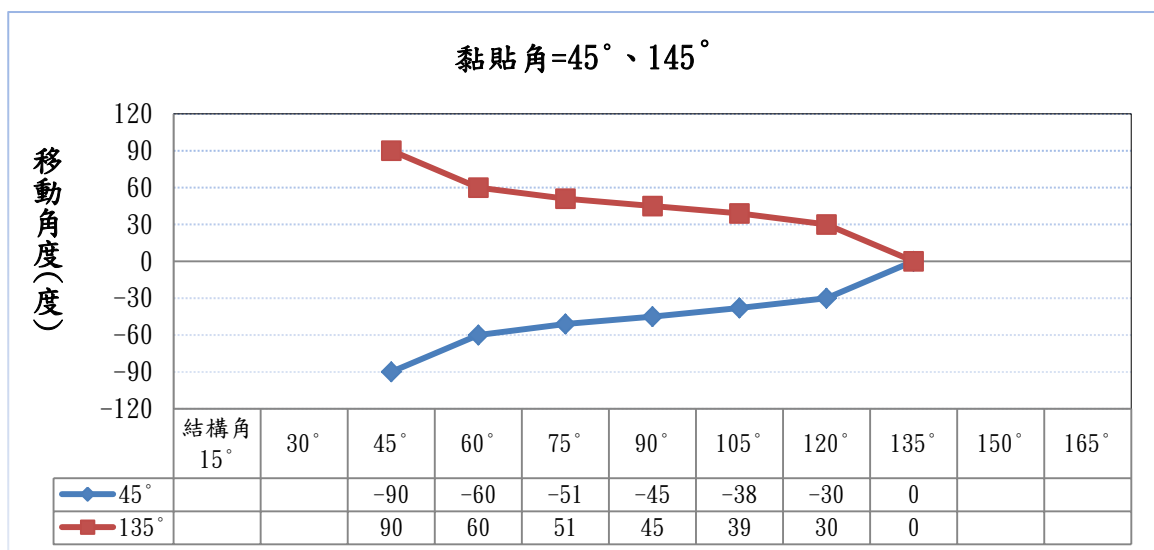


圖 5-3-8：黏貼角相同，不同結構角時，移動角度折線圖

(三) 移動高度結果與討論

本研究將三角立基的「移動高度」定義為：當基盤開合時，立基的頂點與平面的垂直距離高度的變化，例如：當基盤合起來時，立基的頂點 C_1 與平面垂直距離為 $\overline{C_1H_1}$ ；當基盤展開時，立基的頂點 C_1 與平面垂直距離為 $\overline{C_2H_2}$ ，移動高度 = $\overline{C_2H_2} - \overline{C_1H_1}$ 。

進一步測量移動高度的變化整理在圖 5-3-9。由圖可以看出，移動高度有正值及負值，正值代表書本打開時立基的高度由低往高，也就是具有往上跳的感覺；負值代表書本打開時，立基是往下降的，一般立體書較少做往下降的設計。所以直接看移動高度為正值的數據。

在所有正值數據中，以結構角 90° ，黏貼角越趨近 90° 時，有較大的移動高度。而結構角 $>90^\circ$ 時雖然移動高度都是正值，但是由研究一得知立體書中圖案立基甚少設計結構角 $>90^\circ$ ，所以仔細看結構角 $\leq 90^\circ$ 中的正值數據大多出現在結構角趨近 90° ，尤其是 90° 角度。因此建議立體書中要有「POP-UP」跳出的效果，使用結構角 90° ，黏貼角也趨近 90° 但 $\neq 90^\circ$ 。

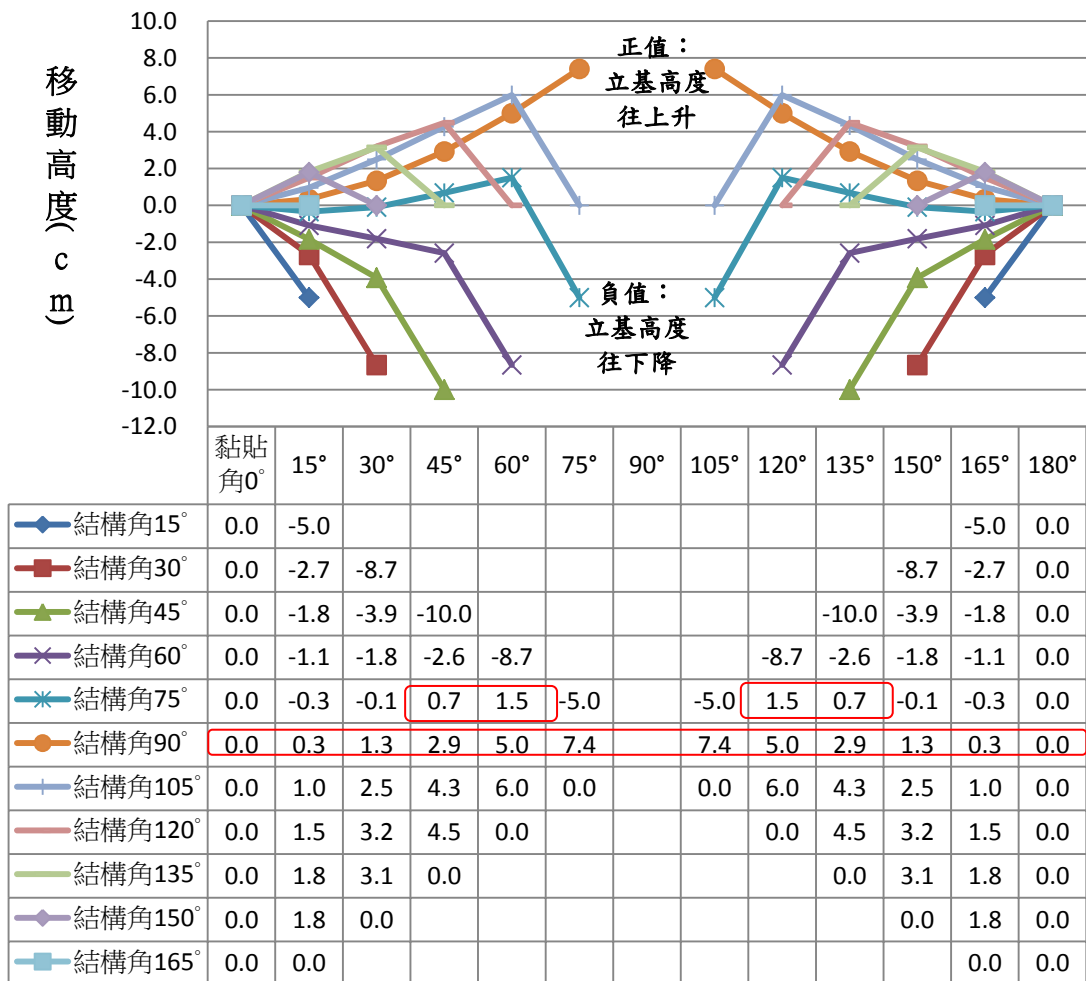


圖 5-3-9：移動高度的結果圖表

四、研究四：三角立基基背容許長度

當書本合起來時，三角立基頂點 C_1 與平面垂直距離為 $\overline{C_1H_1} < \text{書本寬度 } X$ 時，基背長度就不會突出於書本之外。當書本合起來，基背會垂直於中摺線時是基背的頂點高度。

書本的寬度是固定的，當頂點高度越低時，則立基的基背容許的長度就能越長，直到頂點高度超過書本寬度。

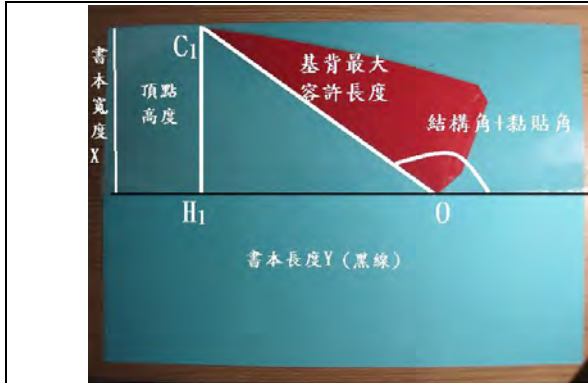


圖 5-4-1：頂點高度

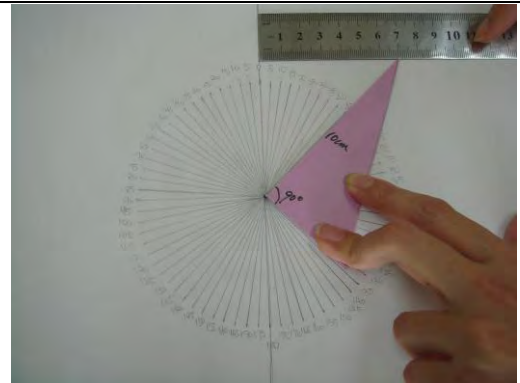


圖 5-4-2：測量頂點高度的方法

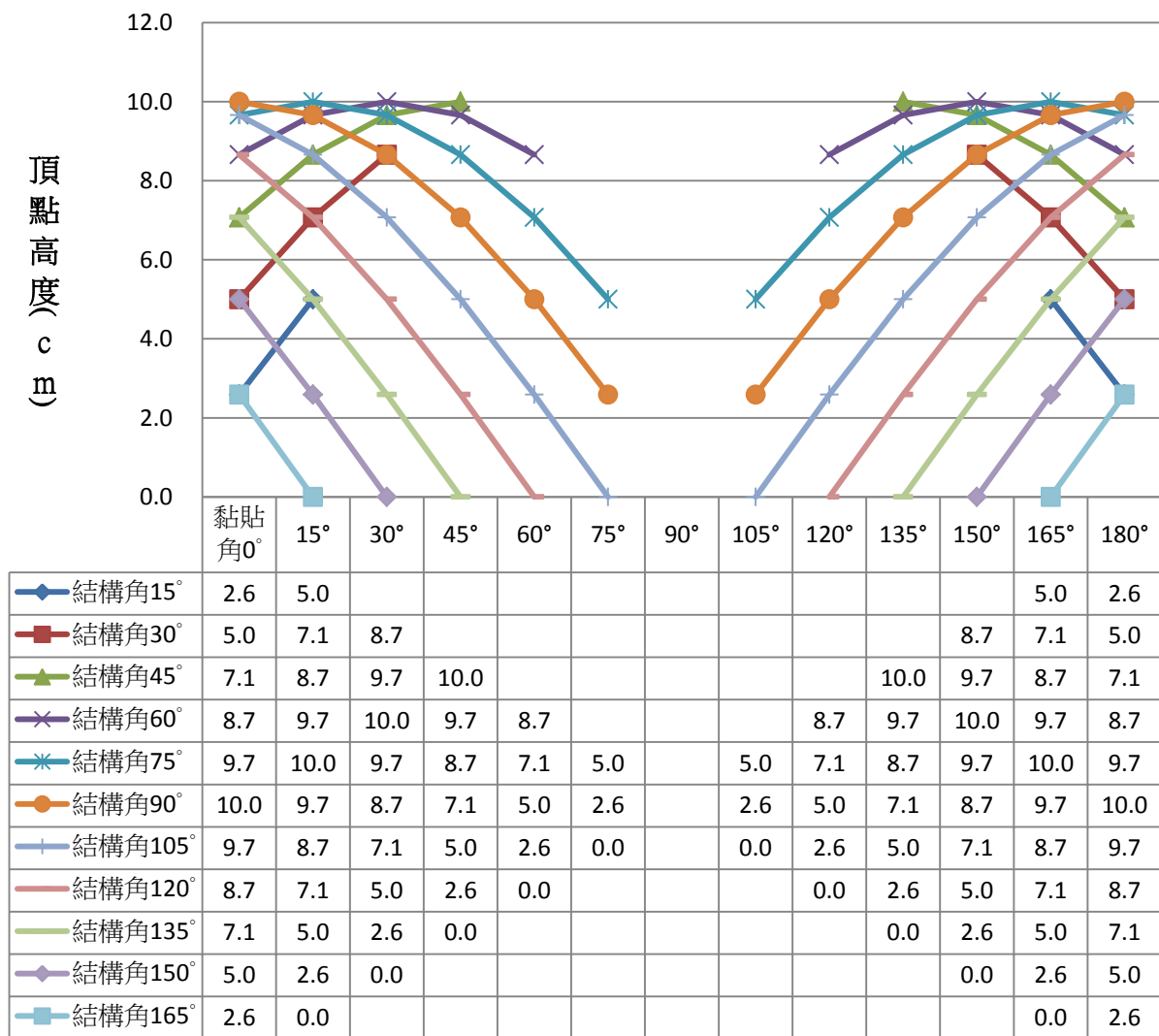


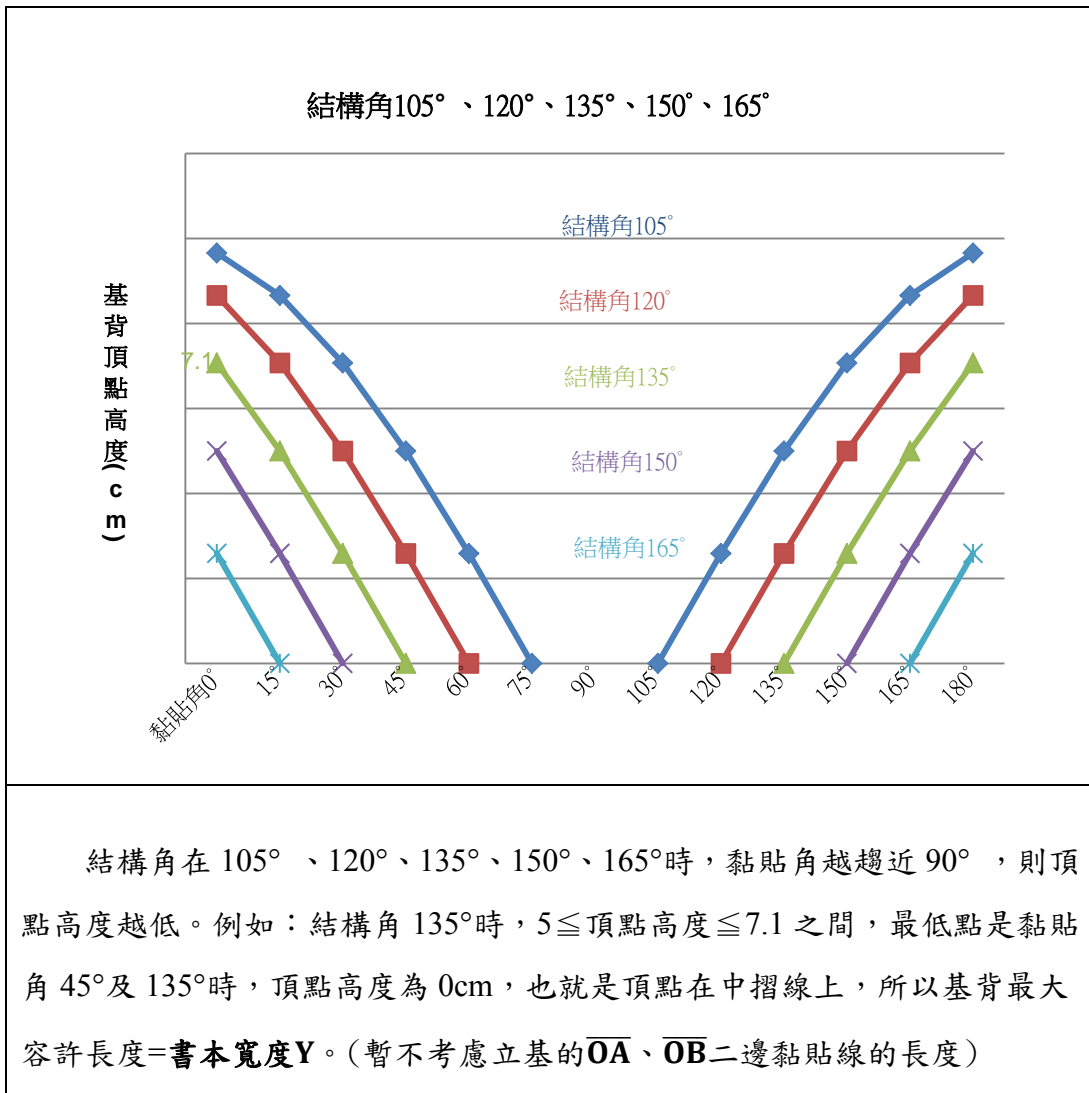
圖 5-4-3：各種角度組合頂點高度總表

因為圖 5-4-3 線條太多，所以再細分在下列表 5-4-1 中說明：

設定立基基背長度固定為 10cm 時，書本寬度 X，書本長度 Y，測量頂點高度的距離。

表 5-4-1：各種結構角時基背容許最大長度說明表

結構角 15°、30°、45°	
	<p>結構角在 15°、30°、45° 時，黏貼角越趨離 90°，則頂點高度越低。例如：結構角 45° 時，$7.1 \leq \text{頂點高度} \leq 10$ 之間，最低點是黏貼角 0° 時，頂點高度為 7.1cm，利用 $\frac{\text{基背最大容許長度}}{\text{書本寬度}X} = \frac{10}{7.1}$，基背最大容許長度 = $\frac{10}{7.1} \times (\text{書本寬度}X)$。</p>
結構角 60°、75°、90°	
	<p>結構角在 60°、75°、90° 時，黏貼角越趨近 90°，則頂點高度越低。例如：結構角 75° 時，$5 \leq \text{頂點高度} \leq 10$ 之間，最低點是黏貼角 75° 及 105° 時，頂點高度為 5cm，利用 $\frac{\text{基背最大容許長度}}{\text{書本寬度}X} = \frac{10}{5}$，基背最大容許長度 = $\frac{10}{5} \times (\text{書本寬度}X)$。</p>



綜合以上，本研究發現，

在製作立體書中的三角立基時，如果已決定結構角與黏貼角時，可以對照圖 5-4-2 找到書本合起來時的頂點高度，

$$\text{再利用 } \frac{\text{基背最大容許長度}}{\text{書本寬度 } X} = \frac{10}{\text{頂點高度}}$$

就能計算出， $\text{基背最大容許長度} = \frac{10}{\text{頂點高度}} \times (\text{書本寬度 } X)$ 。

由於圖 5-4-3 中並沒有所有角度，若要計算出所有結果，需要應用到三角函數，有待日後我們增長知識再來處理。

五、研究五：應用三角立基的原理製作立體卡片

(一)小翁製作的立體書



圖 5-5-1：結構角是 45° ，黏貼角由左到右依序為 150° 、 165° 、 30° 、 15° 。

(二)小翔製作的立體書



圖 5-5-2：外星人的結構角是 60° ，黏貼角由左到右依序為 165° 、 135° 、 60° 、 45° 、 15° 。

(三)小琳製作的立體書



圖 5-5-3 房子的結構角是 90° ，黏貼角由左到右依序為 150° 、 120° 、 75° 、 60° 、 30° 。

(四)小穎製作的立體書



圖 5-5-4：結構角是 105° ，黏貼角由左到右依序為 30° 、 30° 、 45° 、 60° 、 75°

(五)小珣製作的立體書

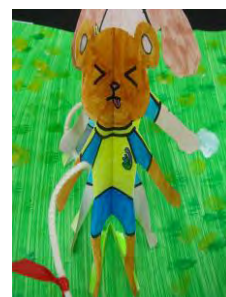
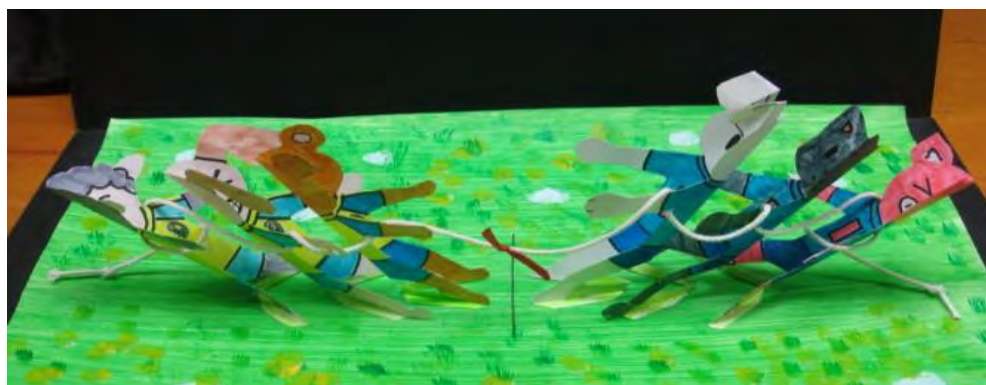


圖 5-5-5：結構角為 120° ，黏貼角由左到右依序為 45° 、 30° 、 15° 、 165° 、 150° 、 135° 。

陸、結論

一、研究一：立體書三角立基設計探討

分析立體書中的三角立基，大部分立基是「結構角 $\leq 90^\circ$ 」，而且「結構角 $\leq 90^\circ$ 及黏貼角 $> 90^\circ$ 」是最常見的設計；其次，則是「結構角 $\leq 90^\circ$ 及黏貼角 $< 90^\circ$ 」的設計。而兩個立基相對黏貼，或多個立基複合黏貼，都可使立體書更具變化性；較少結構角 $> 90^\circ$ 的設計。

二、研究二：三角立基結構角、黏貼角與站立角、站立高度的探討

1. 當黏貼角是 0° 時，站立角 = 結構角；黏貼角 = 180° 時，站立角 = 結構角的補角。此時站立高度為最高。
2. 當黏貼角 = 結構角和它的補角時，站立角 = 0° 或 180° 。這時，立基都是平貼在書頁上的臥基，此時站立高度為 0。
3. 當立基的黏貼角介於結構角及其補角之間的範圍時，立基無法黏貼。以結構角 15° 和結構角 165° 的立基為例，當黏貼角介於 $15^\circ \sim 165^\circ$ 之間，立基都無法黏貼。
4. 在立基可黏貼的範圍之內，黏貼角越趨近 90° ，則站立高度越低。
5. 結構角 = 90° 的立基，站立角都是 90° ，也就是站立高度最高，但當結構角 = 黏貼角 = 90° 時，立基在平面上黏貼成一直線，站立角可以是任意角度。

三、研究三：三角立基移動角度及移動高度的探討

1. 結構角+黏貼角 $<180^\circ$ ，移動角度=站立角-(結構角+黏貼角)。----公式 1
2. 結構角+黏貼角 $>180^\circ$ ，移動角度=站立角-(黏貼角-結構角)。----公式 2
3. 結構角+黏貼角 $=180^\circ$ ，黏貼角 $<90^\circ$ ，移動角度同公式 1；黏貼角 $>90^\circ$ ，移動角度同公式 2。
4. 結構角相同時，黏貼角越接近 90° ，則三角立基的移動角度越大，但黏貼角 $<90^\circ$ ，由後方往前方移動；如果黏貼角 $>90^\circ$ 由前方往後方移動。
5. 計算移動高度的數據得知，書本打開時立基的高度由低往高，才具有往上「POP-UP」感覺，由研究一得知三角立基結構角要 $\leq 90^\circ$ ，建議使用結構角 90° ，黏貼角也趨近 90° (但 $\neq 90^\circ$)時具有最大的跳高效果。

四、研究四：三角立基最大容許長度

在製作立體書中的三角立基時，如果已決定結構角與黏貼角時，可以對照圖 5-4-2 找到書本合起來時的頂點高度，就能計算出，**基背最大容許長度** $=\frac{10}{\text{頂點高度}}\times(\text{書本寬度}X)$ 。

由於圖 5-4-3 中並沒有所有角度，若要計算出所有結果，需要應用到三角函數，有待日後我們增長知識再來處理。

五、研究五：應用三角立基的設計原理製作立體卡片

1. 結構角、黏貼角二者影響了站立角及站立高度在是立體書設計的關鍵因素。其中兩項條件確定後，其他項就可以計算出來。例如希望立基垂直站立於基盤上時(站立角 $=90^\circ$)，結構角可以設計為 90° ，黏貼角 $\neq 90^\circ$ 均可；本研究建議結構角越趨近 90° ，黏貼角也趨近 90° 但 $\neq 90^\circ$ 時具有最大「POP-UP」的跳高效果。又，希望書本打開，立基站立時會向前傾，黏貼角就必須 $<90^\circ$ ；希望立基站立會向後仰時，黏貼角 $>90^\circ$ 。
2. 不同結構角和黏貼角的組合，決定了書本合起來時基背的位置，由圖 5-4-3 找到基背頂點高度，代入公式：**基背最大容許長度** $=\frac{10}{\text{頂點高度}}\times(\text{書本寬度}X)$ ，就能得到基背最大容許長度。

柒、參考資料

- 林心智、張宜玲(2006)。活動圖卡中三角基的移動方式。《幼兒保育學刊》，4期，197~212頁。
- 林心智、張宜玲(不詳)。活動圖卡中「立基」的移動原理。2013年3月28日，取自<http://wenku.baidu.com/view/ba508643a8956bec0975e3ae.html>
- 胡詠寧(2012)。由三維動物模型產生V型摺疊立體卡片之研究。國立交通大學多媒體工程研究所碩士論文。
- 楊清貴(2008)。立體書小百科：立體書簡史。2013年3月28日，取自**立體書王國**：http://www.popupkingdom.com/2008/01/blog-post_10.html
- 葉青華(1997)。看遊戲書樂趣多—立體書特輯。台北：精湛。
- 魏鴻麟(2006)。立體書在視覺傳達設計上之創作研究—以台灣原住民的神話與傳說為例。國立台灣師範大學設計研究所碩士論文。

【評語】 080403

1. 主題非常有趣味，並且討論也相當有深度及完整性。
2. 整體來說，是一件非常好的國小科展作品。
3. 所得的結果具有高度參考性，對想做立體書的同學來說，是非常值得閱讀的作品。