中華民國第53屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080401

三生一死的費氏數列

學校名稱：新北市三峽區龍埔國民小學

作者：	指導老師：
小六 林映辰 小六 呂安培	龔凡凱

關鍵詞：兔子對生長問題、費氏數列、一般化

—摘要—

本作品主要在推廣費氏數列，得到新的遞迴數列。

費氏數列的來源之一是「兔子對生長問題」，該問題涉及 4 項條件：「成長期」、「懷孕期」、「下一代數量」、「壽命」。在歷屆科展中，我們是最先推廣原問題 4 項條件的研究小組，並得到更一般化的新數列。我們除了透過「整數數列線上大全」檢索、也在自己有限的能力下儘量搜尋各種文獻，還沒有我們發現的一般化數列。

雖然我們得到新的結果，不過卻只使用了簡單的方法：畫圖、計數、直觀觀察，而且還試著保證數列規律成立，使作品更嚴謹。

最後我們加入「狼」的條件，狼會吃掉兔子對。關於兔子對數量的規律得到一個猜想，可供人們繼續研究下去。

—壹、研究動機—

老師在上數學課本第一單元時，提到「費氏數列」，它是從下列問題產生：

問題 1(產生費氏數列的兔子對生長問題).

1. 第一個月初有一對剛誕生的兔子，
2. 第二個月之後(第三個月初)牠們可以生育，
3. 每月每對可生育的兔子會誕生下一對新兔子，
4. 兔子永不死去。

問 1 年後共有多少對兔子？

每個月的兔子對數量，就會形成「費氏數列」。

我們都曾碰到兔子養著養著便死去的經驗，一位成員四年前曾養了一隻兔子，牠半年後過世了；另一位成員則聽聞過學長姐養的兔子在學校身亡的消息。和問題 1 相比，我們覺得問題 1 的條件在現實生活中不可能發生，即「兔子永不死去」；加上在五年級下學期讀了自然課本第二單元，吸收了動物繁殖的知識，知道每種動物懷孕的週期不一樣，因而我們想改變問題 1 的 4 項條件，看看會得到何種數列。我們詢問老師後，老師表示費氏數列是個古老的數列，要研究它可能不會有新的結論，但我們改變兔子對的生長週期為 2 個月、懷孕週期為 3 個月，試算後得到某數列，老師建議上「整數數列線上大全」查詢，一查之下資料庫裡竟然沒有我們得到的數列(見附錄 A)！因此老師便和我們一同展開研究之旅，希望為古老的數列開創新

的結果。由於我們將研究兔子對的生長、生育、生出下一代的數量、壽命(死亡)，所以將本作品命名為《三生一死的費氏數列》。

—貳、本作品的特色—

一、新的結果

依據我們的能力所及盡量查詢資料，還沒有發現其他人做出一樣推廣費氏數列的一般化數列，請參考第參章的文獻探討。

二、方法簡單

本作品使用了簡單的方法：畫圖、觀察、歸納，最後試著說明我們發現的規律在一般化的情形都成立。

三、主要說明論述由學生完成

本作品的證明論述和式子推導都是由我們自己先寫出來，再給老師修改。

四、學生自行繪圖

本作品的插圖大部份是本小組成員用繪圖軟體 CorelDRAW 畫出來。

五、給出數學恆等式

除了保證我們找到的數學規律成立，我們還給出數學恆等式。

—參、文獻探討—

一、查詢的範圍

我們用下列資源來查詢：

(一)網路資源

1. 國立科教館網站歷屆優秀作品。
2. 科展群傑廳。
3. 維基百科。
4. the full wiki。
5. Yahoo 搜尋引擎。
6. Google 搜尋引擎。

(二)分類表和書籍

1. 《數學科展作品索引分類表 2008 年版》
2. 《斐波那契數列》

二、和本研究相關的資料

從上述資源，我們查到和本研究相關的資料，見表 1。

表 1. 和本研究相關的作品

參考資料	和本研究相似之處	資料來源
《這是什麼數列？1，1，3，5，11，21，43，……》	每次生 2 對幼兔，研究其數列規律，並建議研究成長期 2 個月的情形。	全國中小學科展第 42 屆國中組數學科
2010 年 2 月 2 日數學科展題!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!.	網友建議可做的科展題目： 費氏數列：可把問題中兔子的懷孕月數，及長成成兔的時間改變。	Yahoo 知識+
Fibonacci's question, recurance relationship, didi get it?	網友提問若費氏數列條件改成： 成長期 2 個月，懷孕期 1 個月，每次生 3 對幼兔，規律為何？有人提供解答：$S_k = S_{k-1} + 3\times S_{k-3}$。	http://www.physicsforums.com/showthread.php?t=144365

三、表 1 的資料和本研究比較

表 2. 和本研究相關的資料比較一覽

資料	研究費氏數列的條件	研究進度	是否給出對所有條件都一般化的費氏數列？
《這是什麼數列？1，1，3，5，11，21，43，……》	*下一代數量*	僅探討下一代數量為 2 的情形	沒有
2010 年 2 月 2 日數學科展題!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!	*成長期、孕期*	給出研究方向的建議，沒有結論。	沒有
Fibonacci's question, recurance relationship, did i get it?	*成長期、下一代數量*	探討成長期 2 個月，下一代數量為 3 的情形	沒有
本作品	*成長期、孕期、下一代數量、壽命*	探討了 4 項條件	有

—肆、研究目的—

一、改變問題 1 的兔子對生長條件：成長期、懷孕期、下一代數量，研究其得到的數列。

二、加入兔子對生命週期一事，研究其得到的數列。

—伍、研究工具—

一、計算紙、筆、筆記本、繪圖軟體 CorelDRAW

—陸、研究方法與過程—

一、方法、策略、符號

（一）方法

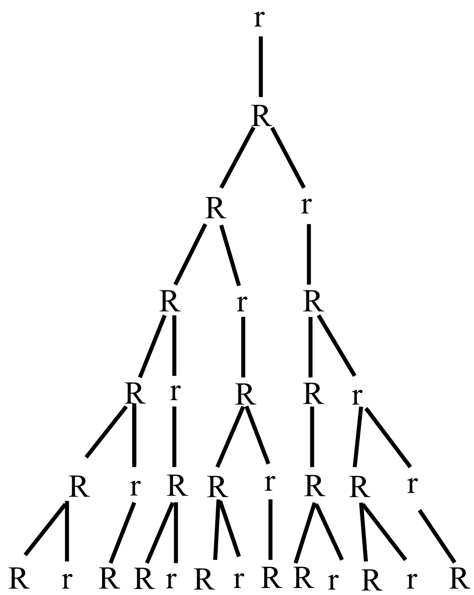


圖 1. 前 7 個月的兔子對生長圖

前人研究問題 1 是從兔子對生長圖(見圖 1)中計數出數列，再歸納出數列的規律，然後再詳細討論。例如從圖 1 可知數列的前 7 項為

1，1，2，3，5，8，13

接著觀察規律則有

1+1＝2

1+2＝3

2+3＝5

3+5＝8

5+8＝13

用 F_n 表示第 n 個月的兔子對數量，則歸納出

規律 2.（費氏數列的規律）

〔1〕
$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & n \geq 3, \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

本小組的研究方法如下(見圖 2)。

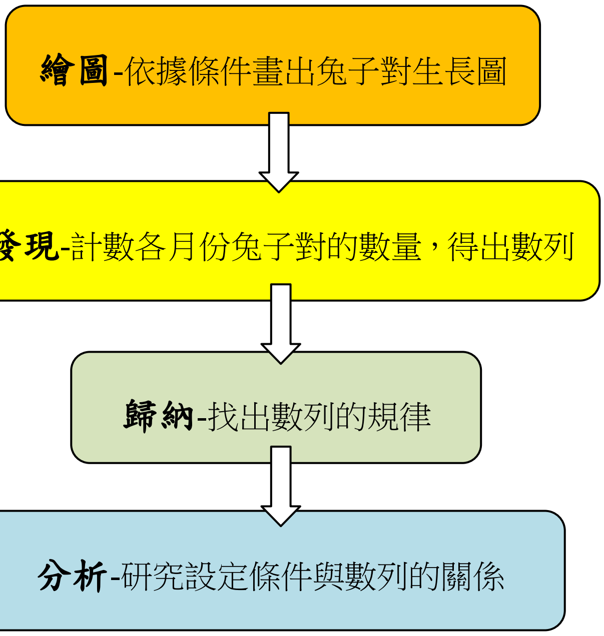


圖 2. 本作品的研究方法

(二)策略(運用自然課實驗的方法)

本研究探討的影響兔子對數量的因素有四項：**成長期、孕期、下一代數量、壽命**。我們先試算了「壽命無限」和「壽命有限」的情形，發覺得到的數列規律不大相同，所本作品先探討兔子對壽命無限的情形，即先探討前三項因素，之後再加入壽命有限的情形。

著手研究時，我們想起上**自然課**要研究影響河水堆積作用的因素時，會把因素分類成「操縱變因」和「控制變因」，所以本小組進行研究時，會先變動其中一項條件，就是操縱變因，固定其它三項條件，即控制變因。接著變動二項條件，固定其它二項條件；然後變動三項條件，固定其它一項條件，最後則一次更動四種條件，以找出數列的一般化規律，見表 3。

表 3. 仿自然科實驗擬定研究壽命無限兔子對生長問題的策略

操縱變因	**控制變因**
成長期	懷孕期、下一代數量
懷孕期	成長期、下一代數量
成長期、懷孕期	下一代數量

成長期、下一代數量	懷孕期
懷孕期、下一代數量	成長期
成長期、懷孕期、下一代數量	

補充說明 3. 由於參考資料【8】已研究了下一代數量超過 1 對的情形，所以我們就省略了操縱下一代數量的因素而控制其它因素的研究過程。

(三)符號

F_n：第 n 個月的兔子對數量。

m：*mature*，從一出生到成長至可以懷孕的月數，就是「成長期」。

g：*gestation*，懷孕至生產所需的月數，即「孕期」。

a：*amount*，下一個月兔子對的數量。

l：*life*，兔子對存活的月數，即兔子對的「壽命」。

例 4. $(m, g, a) = (3, 2, 3)$是指兔子對需經過 3 個月才會成長至可懷孕的狀態，懷孕經 2 個月才會生出下一代，每次生下 **3** 對兔子對，且永不死去。

例 5. $(m, g, a, l) = (2, 3, 4, 10)$是指兔子對需經過 2 個月才會成長至可懷孕的狀態，懷孕經 3 個月才會生出下一代，每次生下 **4** 對兔子對，每對兔子對從出生後經過 10 個月就會死亡。

二、壽命無限的兔子對生長問題(成長、懷孕、下一代數量，永不死亡)

首先我們要探討下列問題產生的數列規律。

問題 6(兔子對壽命無限).

1. 第一個月初有一對剛誕生的兔子，
2. 第 m 個月之後(第 $m+1$ 個月初)牠們可以懷孕，
3. 承 2，每對兔子要經過 g 個月才會生出下一代，
4. 每月每對可生育的兔子會誕生下 a 對新兔子，
5. 兔子永不死去。

問第 n 個月共有多少對兔子？

(一)繪圖、發現、歸納、分析

以下按照表 3 擬定的順序，分別改變**成長期** m、**孕期** g、**下一代數量** a 來進行探討。

1. 變動成長期 m ，$g=a=1$

以 $(m,g,a)=(2,1,1)$ 舉例

(1)繪圖

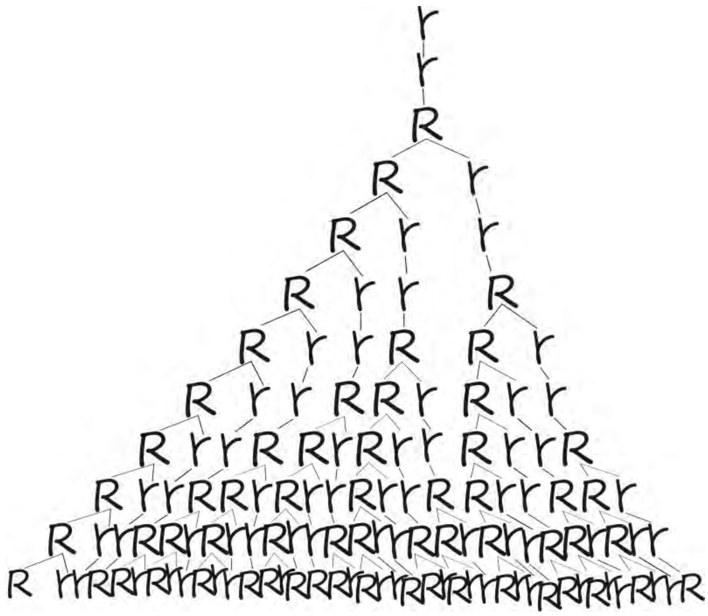


圖 3. $(m,g,a)=(2,1,1)$ 前 12 個月的兔子對生長圖

(2)發現

表 4. $(m,g,a)=(2,1,1)$ 前 12 個月的每月兔子對數量

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41

$$F_1=F_2=F_3=1$$

$$F_4=F_3+F_1$$

$$F_5=F_4+F_2$$

$$F_6=F_5+F_3$$

$$\vdots$$

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-3}$$

(3)歸納$1 \le m \le 4$的$(m,1,1)$數列規律

我們對$1 \le m \le 4$去繪圖及發現規律，歸納如表 5。

補充說明 7. 礙於篇幅限制，我們就不把$m = 3,4$的兔子對生長圖列在說明書中，請評審參閱實驗日誌。

補充說明 8. 我們畫了許多兔子對生長圖來觀察，但受限於總頁數得≦30 頁的規定，不能一一列出在說明書中，之後僅將舉例的數據之兔子對生長圖列出來，其它未列出的圖請評審參閱實驗日誌。

表 5. $1 \le m \le 4$的$(m,1,1)$數列規律

$(m,1,1)$	**數列的規律**	**初始值**
$m=1$	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$	$F_1 = F_2 = 1$
$m=2$	$F_n = F_{n-1} + F_{n-3}$	$F_1 = F_2 = F_3 = 1$
$m=3$	$F_n = F_{n-1} + F_{n-4}$	$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 1$
$m=4$	$F_n = F_{n-1} + F_{n-5}$	$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 1$

(4)分析

分析 9. m每加 1，則等號右邊的加號右項的足碼便減 1。

分析 10. 變動m值時，則有初始值$F_1 = F_2 = \cdots = F_{m+1} = 1$。

2. 變動孕期g，$m = a = 1$

以$(m, g, a) = (1,3,1)$舉例

(1)繪圖

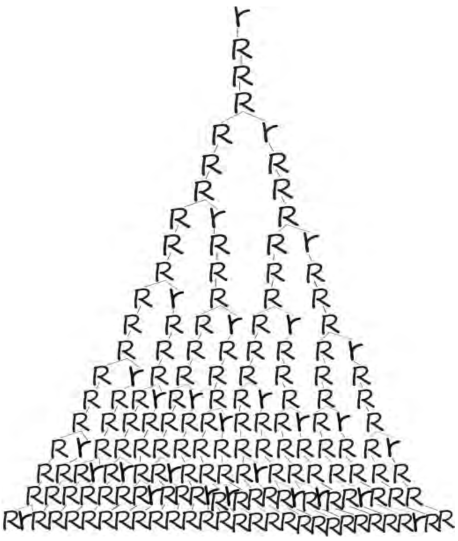


圖 4. $(m, g, a) = (1,3,1)$前 20 個月的兔子對生長圖

(2)發現

表 6. $(m, g, a) = (1, 3, 1)$ 前 20 個月的每月兔子對數量

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F_n	1	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5	7	8	9	12	15	17	21	27	29

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 1$$

$$F_5 = F_2 + F_1$$

$$F_6 = F_3 + F_2$$

$$F_7 = F_4 + F_3$$

$$\vdots$$

$$F_n = F_{n-3} + F_{n-4}$$

(3)歸納 $1 \le g \le 4$ 的 $(1, g, 1)$ 數列規律

表 7. $1 \le g \le 4$ 的 $(1, g, 1)$ 數列規律

$(1, g, 1)$	**數列的規律**	**初始值**
$g = 1$	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$	$F_1 = F_2 = 1$
$g = 2$	$F_n = F_{n-2} + F_{n-3}$	$F_1 = F_2 = F_3 = 1$
$g = 3$	$F_n = F_{n-3} + F_{n-4}$	$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 1$
$g = 4$	$F_n = F_{n-4} + F_{n-5}$	$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 1$

(4)分析

分析 11. g 每加 1，則等號右邊的加號左右項的足碼同時減 1。

分析 12. 變動 g 值時，則有初始值 $F_1 = F_2 = \cdots = F_{g+1} = 1$。

3. 變動成長期 m 和孕期 g，$a=1$

以 $(m,g,a)=(2,3,1)$ 舉例

(1)繪圖

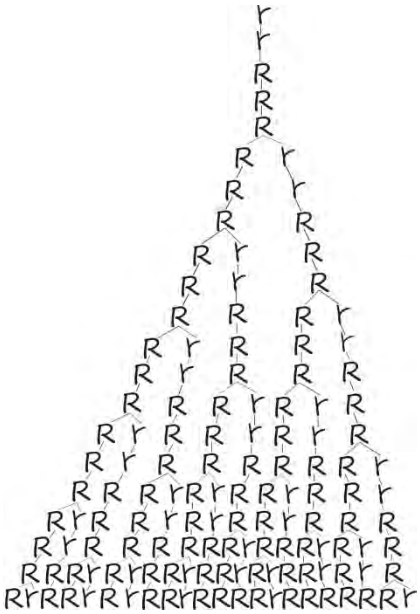


圖 5. $(m,g,a)=(2,3,1)$ 前 21 個月的兔子對生長圖

(2)發現.

表 8. $(m,g,a)=(2,3,1)$ 前 21 個月的每月兔子對數量

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
F_n	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	5	5	7	8	9	12	13	16	20	22

$$F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=1$$

$$F_6=F_3+F_1$$

$$F_7=F_4+F_2$$

$$F_8=F_5+F_3$$

$$\vdots$$

$$F_n=F_{n-3}+F_{n-5}$$

(3)歸納 $m=2,3$，$g=2,3,4$ 的 $(m,g,1)$ 數列規律

表 9. $m=2,3$，$g=2,3,4$ 的 $(m,g,1)$ 數列規律

$(m,g,1)$	**數列的規律**	**初始值**
$m=2, g=2$	$F_n=F_{n-2}+F_{n-4}$	$F_1=F_2=F_3=F_4=1$
$m=2, g=3$	$F_n=F_{n-3}+F_{n-5}$	$F_1=F_2=\cdots=F_5=1$
$m=2, g=4$	$F_n=F_{n-4}+F_{n-6}$	$F_1=F_2=\cdots=F_6=1$
$m=3, g=2$	$F_n=F_{n-2}+F_{n-5}$	$F_1=F_2=\cdots=F_5=1$
$m=3, g=3$	$F_n=F_{n-3}+F_{n-6}$	$F_1=F_2=\cdots=F_6=1$
$m=3, g=4$	$F_n=F_{n-4}+F_{n-7}$	$F_1=F_2=\cdots=F_7=1$

(4)分析

分析 13. m 的變化影響等號右邊的右項足碼；g 的變化同時影響等號右邊左右項的足碼。

分析 14. 變動 m 值和 g 值時，則有初始值 $F_1=F_2=\cdots=F_{m+g}=1$。

4. 變動孕期 g 和下一代數量 a，$m=1$

以 $(m,g,a)=(1,3,2)$ 舉例

(1)繪圖

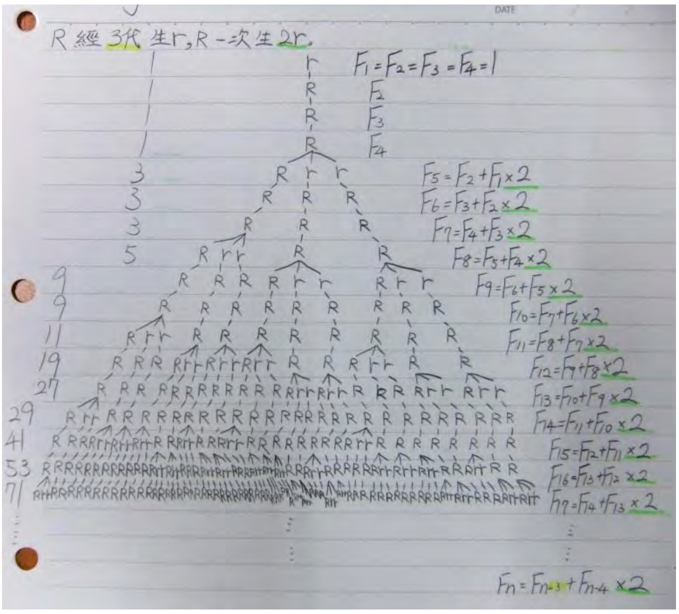


圖 6. $(m,g,a)=(1,3,2)$ 前 17 個月的兔子對生長圖

(2)發現

表 10. $(m, g, a) = (1,3,2)$ 前 17 個月的每月兔子對數量

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
F_n	1	1	1	1	3	3	3	5	9	9	11	19	27	29	41	53	71

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 1$$

$$F_5 = F_2 + 2 \times F_1$$

$$F_6 = F_3 + 2 \times F_2$$

$$F_7 = F_4 + 2 \times F_3$$

$$\vdots$$

$$F_n = F_{n-3} + 2 \times F_{n-4}$$

(3)歸納 $g = 2, 3, 4$ ，$a = 2, 3$ 的 $(1, g, a)$ 數列規律

表 11. $g = 2, 3, 4$ ，$a = 2, 3$ 的 $(1, g, a)$ 數列規律

$(1, g, a)$	**數列的規律**	**初始值**
$g = 2, a = 2$	$F_n = F_{n-2} + 2 \times F_{n-3}$	$F_1 = F_2 = F_3 = 1$
$g = 3, a = 2$	$F_n = F_{n-3} + 2 \times F_{n-4}$	$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 1$
$g = 4, a = 2$	$F_n = F_{n-4} + 2 \times F_{n-5}$	$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 1$
$g = 2, a = 3$	$F_n = F_{n-2} + 3 \times F_{n-3}$	$F_1 = F_2 = F_3 = 1$
$g = 3, a = 3$	$F_n = F_{n-3} + 3 \times F_{n-4}$	$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 1$
$g = 4, a = 3$	$F_n = F_{n-4} + 3 \times F_{n-5}$	$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 1$

(4)分析

分析 15. g 的變化同時影響等號右邊的左右項足碼；a 的變化影響等號右邊的右項之係數。

分析 16. 變動 g 值和 a 值時，則有初始值 $F_1 = F_2 = \cdots = F_{g+1} = 1$ 。

5. 變動成長期 m 和下一代數量 a ， $g=1$

以 $(m,g,a)=(3,1,2)$ 舉例

(1)繪圖

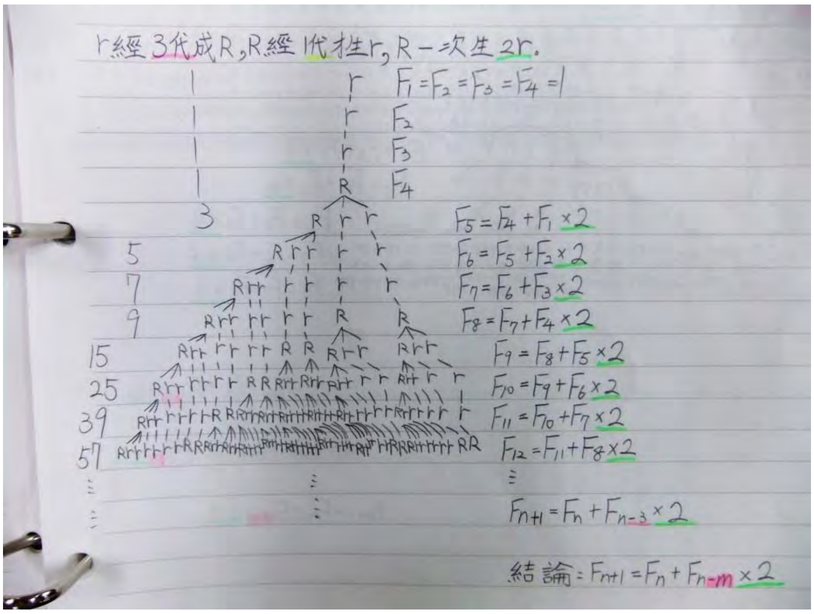


圖 7. $(m,g,a)=(3,1,2)$ 前 12 個月的兔子對生長圖

(2)發現

表 12. $(m,g,a)=(3,1,2)$ 前 12 個月的每月兔子對數量

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	1	1	3	5	7	9	15	25	39	57

$$F_1=F_2=F_3=F_4=1$$

$$F_5=F_4+2\times F_1$$

$$F_6=F_5+2\times F_2$$

$$F_7=F_6+2\times F_3$$

$$\vdots$$

$$F_n=F_{n-1}+2\times F_{n-4}$$

(3)歸納 $m=2,3,4$ ， $a=2,3,4$ 的 $(m,1,a)$ 數列規律

表 13. $m=2,3,4$ ， $a=2,3,4$ 的 $(m,1,a)$ 數列規律

$(m,1,a)$	**數列的規律**	**初始值**
$m=2, a=2$	$F_n=F_{n-1}+2\times F_{n-3}$	$F_1=F_2=F_3=1$
$m=3, a=2$	$F_n=F_{n-1}+2\times F_{n-4}$	$F_1=F_2=F_3=F_4=1$
$m=4, a=2$	$F_n=F_{n-1}+2\times F_{n-5}$	$F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=1$
$m=2, a=3$	$F_n=F_{n-1}+3\times F_{n-3}$	$F_1=F_2=F_3=1$
$m=2, a=4$	$F_n=F_{n-1}+4\times F_{n-3}$	$F_1=F_2=F_3=1$

(4)分析

分析 17. m 的變化影響等號右邊的右項足碼；a 的變化影響等號右邊的右項之係數。

分析 18. 變動 m 值和 a 值時，則有初始值 $F_1=F_2=\cdots=F_{m+1}=1$ 。

6. 變動成長期 m 、孕期 g 和下一代數量 a

以 $(m,g,a)=(3,4,2)$ 舉例

(1)繪圖

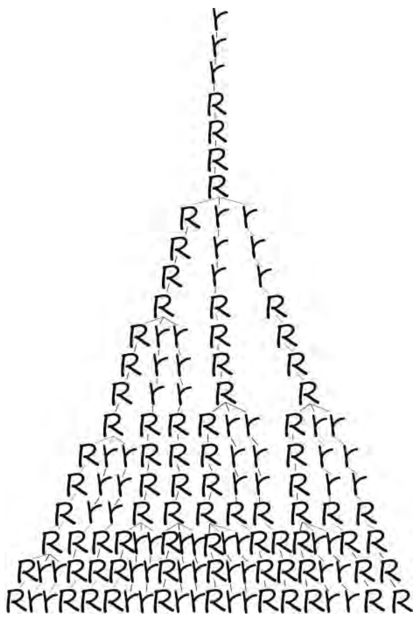


圖 8. $(m,g,a)=(3,4,2)$ 前 21 個月的兔子對生長圖

(2)發現

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
F_n	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	5	5	5	9	11	11	11	19	21	21

表 14. $(m, g, a) = (3,4,2)$ 前 21 個月的每月兔子對數量

$$F_1 = F_2 = \cdots = F_7 = 1$$

$$F_8 = F_4 + 2 \times F_1$$

$$F_9 = F_5 + 2 \times F_2$$

$$F_{10} = F_6 + 2 \times F_3$$

$$\vdots$$

$$F_n = F_{n-4} + 2 \times F_{n-7}$$

(3)歸納 $(m, g, a) = (3,4,2), (2,3,2), (4,2,3)$ 數列規律

表 15. $(m, g, a) = (3,4,2), (2,3,2), (4,2,3)$ 兔子對生長數列數列規律

(m, g, a)	**數列的規律**	**初始值**
$m = 3, g = 4, a = 2$	$F_n = F_{n-4} + 2 \times F_{n-7}$	$F_1 = F_2 = \cdots = F_7 = 1$
$m = 2, g = 3, a = 2$	$F_n = F_{n-3} + 2 \times F_{n-5}$	$F_1 = F_2 = \cdots = F_5 = 1$
$m = 4, g = 2, a = 3$	$F_n = F_{n-2} + 3 \times F_{n-6}$	$F_1 = F_2 = \cdots = F_6 = 1$

(4)分析

分析 19. m 的變化影響等號右邊的右項足碼;g 的變化同時影響等號右邊的左右項足碼;a 的變化影響等號右邊的右項之係數。

分析 20. 變動 m 值、g 值和 a 值時，則有初始值 $F_1 = F_2 = \cdots = F_{m+g} = 1$。

7. 統整分析 9～分析 20

數列規律：

(1) m 的變化影響等號右邊的右項足碼；g 的變化同時影響等號右邊的左右項足碼；a 的變化影響等號右邊的右項之係數，即 $F_n = F_{n-g} + a \times F_{n-m-g}$。

(2)初始值有多少項為 1，取決於 m 值和 g 值，$F_1 = F_2 = \cdots = F_{m+g} = 1$。

根據上述統整，我們就得到結論 21。

8. 證明壽命無限的兔子對成長規律對任意(m, g, a)皆成立

結論 21. 設兔子對經過 m 個月長大，再經過 g 個月懷孕才生出下一代，一次生 a 對幼兔，永不死亡，則其遞迴式子為：

$$\text{〔2〕}\begin{cases} F_n = F_{n-g} + a \times F_{n-m-g}, & n \ge m+g+1 \\ F_1 = F_2 = F_3 = \cdots = F_{m+g} = 1 \end{cases}$$

<說明>

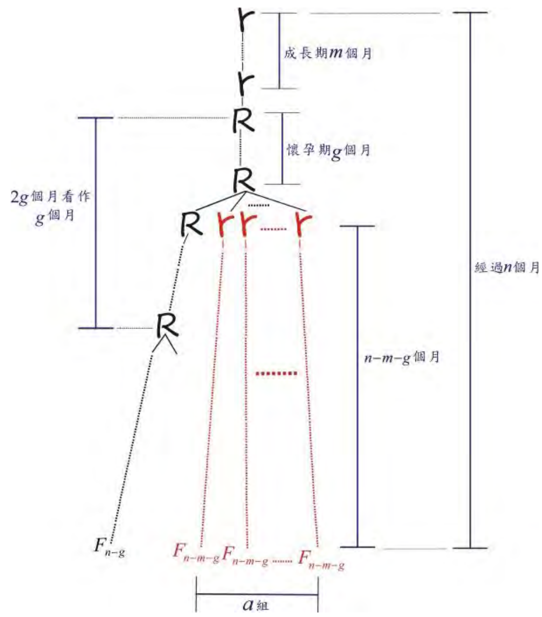


圖 9. 結論 21 證明的兔子對生長圖

(1)先說明初始值。因為原始的幼兔對要經過 m 個月長大，再過 g 個月才能生出下一代，這段期間都是原本自己這一對，所以有：

$$F_1 = F_2 = F_3 = \cdots = F_{m+g} = 1$$

(2)觀察圖 9 可知，第 n 個月的兔子對有兩種來源：先看紅色部份，第一種來源可看作第 $m+g+1$ 個月的 a 對新生兔，經過 $n-m-g$ 個月成長和新生而成的兔子對；再看黑色部份，第二種來源是原始兔子對在經過 m 個月成長、g 個月懷孕後生了 a 對兔子，而那 a 對兔子是另一家族的源頭，暫且不看，之後便會發現第 $m+1$ 個月到第 $m+g$ 個月是沒生幼兔對的，因此第 $m+1$ 個月到第 $m+2g$ 個月雖經過了 $2g$ 個月，也可看作懷孕一次的孕期，即懷了 g 個月，也就是原始兔子對經 $n-g$ 個月成長和新生而成的成員。

補充說明 22. 當初本小組很快就找到結論 21，但要證明它卻一直沒有進展，後來我們轉而去研究壽命有限的兔子對生長問題(結論 30)，思索出對其規律的證明，再拿來應用在證明結論 21 上。

三、「壽命有限」的兔子對生長問題

這裡我們要處理「壽命有限」的兔子對生長問題，題目如下

問題 23(壽命有限的兔子對生長問題).

1. 第一個月初有一對剛誕生的兔子，
2. 第 m 個月之後(第 $m+1$ 個月初)牠們可以懷孕，
3. 承 2，每對兔子要經過 g 個月才會生出下一代，
4. 每月每對可生育的兔子會誕生下 a 對新兔子，
5. 兔子經過 l 個月後會死亡。

問第 n 個月共有多少對兔子？

(一) 探討 $m=2, g=3, a=1, 6\le l\le 17$ 的兔子對生長規律

補充說明 24. 我們有了探討壽命無限的兔子對生長問題的經驗，到研究壽命有限的情形時，我們從幾組數據就能大略推測出規律，就不用再依「控制變因」和「操縱變因」來一步步摸索了。

1. 繪圖

以 $(m, g, a, l)=(2, 3, 1, 12)$ 舉例

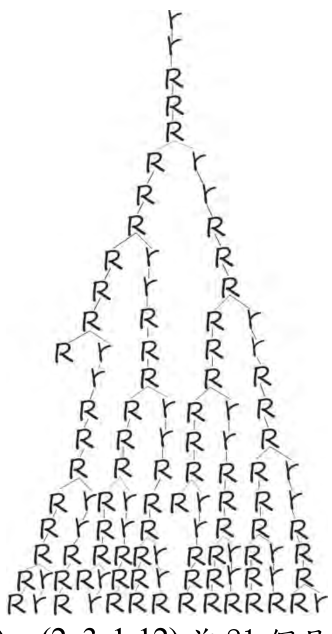


圖 10. $(m, g, a, l)=(2, 3, 1, 12)$ 前 21 個月的兔子對生長圖

2. 發現

表 16. $(m,g,a,l)=(2,3,1,12)$ 前 21 個月的每月兔子對數量

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
F_n	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	5	4	6	6	7	10	9	12	14	14

$$F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=1$$

$$F_6=F_3+F_1$$

$$F_7=F_4+F_2$$

$$\vdots$$

$$F_{12}=F_9+F_7$$

$$F_{13}=F_8+F_5+F_2$$

$$F_{14}=F_9+F_6+F_3$$

$$\vdots$$

$$F_n=F_{n-5}+F_{n-8}+F_{n-11}$$

3. 歸納 $m=2,\ g=3,\ a=1,\ 6\le l\le 17$ 的兔子對生長數列規律

表 17. $m=2,\ g=3,\ a=1,\ 6\le l\le 17$ 的兔子對生長數列規律

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">(m,g,a,l)</th><th colspan="2">數列的規律</th><th rowspan="2">初始值</th></tr>
<tr><th>$n\le l$</th><th>$n\ge l+1$</th></tr>
<tr><td rowspan="10">$m=2,$
$g=3,$
$a=1$</td><td>$l=6$</td><td rowspan="10">$F_n=F_{n-3}+F_{n-5}$</td><td rowspan="3">$F_n=F_{n-5}$</td><td rowspan="10">$F_1=F_2=F_3=$
$=F_4=F_5=1$</td></tr>
<tr><td>$l=7$</td></tr>
<tr><td>$l=8$</td></tr>
<tr><td>$l=9$</td><td rowspan="3">$F_n=F_{n-5}+F_{n-8}$</td></tr>
<tr><td>$l=10$</td></tr>
<tr><td>$l=11$</td></tr>
<tr><td>$l=12$</td><td rowspan="3">$F_n=F_{n-5}+F_{n-8}+F_{n-11}$</td></tr>
<tr><td>$l=13$</td></tr>
<tr><td>$l=14$</td></tr>
<tr><td>$l=15$</td><td>$F_n=F_{n-5}+F_{n-8}+F_{n-11}+F_{n-14}$</td></tr>
</table>

$l=16$		
$l=17$		
$l=18$		$F_n=F_{n-5}+F_{n-8}+F_{n-11}+F_{n-14}+F_{n-17}$
$l=19$		
$l=20$		
$l=21$		$F_n=F_{n-5}+F_{n-8}+F_{n-11}+F_{n-14}+F_{n-17}++F_{n-20}$
$l=22$		

4. 分析

分析 25. 當 $n\le l$，數列規律皆是 $F_n=F_{n-3}+F_{n-5}$，和壽命無限時的規律相同。

分析 26. 當 $n\ge l+1$，依壽命不同，等號右邊有 2、3、4、5 項，第 1 項的足碼皆和等號左邊的足碼差 5；等號右邊的每項之足碼以 3 遞減。

分析 27. 承上，等號右邊的項數，和兔子對從出生到死亡之前生了多少次下一代有關，例如當 $12\le l\le 14$，一對兔子從出生到死亡共可生 3 次下一代，而其數列規律 $F_n=F_{n-5}+F_{n-8}+F_{n-11}$ 等號右邊也是 3 項。

分析 28. 初始值都是 $F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=1$。

(二)探討 $m=2, g=3, a=2, l=10, 12, 15$ 的兔子對生長規律

1. 繪圖，以 $(m, g, a, l)=(2, 3, 2, 12)$ 舉例

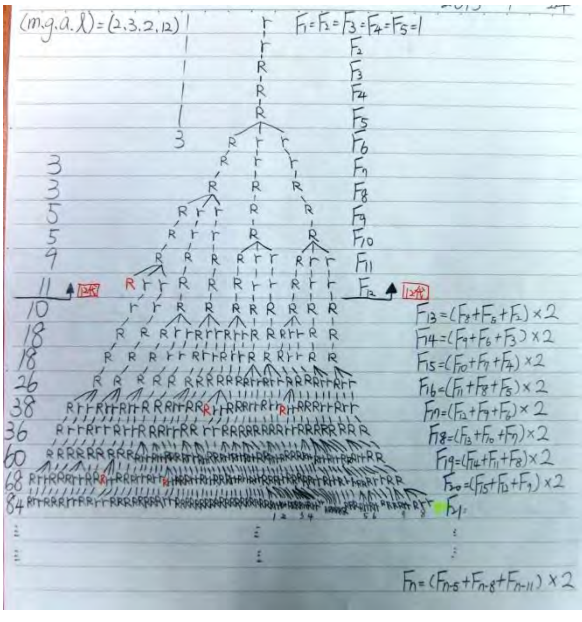


圖 11. $(m, g, a, l)=(2,3,2,12)$ 前 21 個月的兔子對生長圖

2. 發現

表 18. $(m, g, a, l) = (2, 3, 2, 12)$ 前 21 個月的每月兔子對數量

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
F_n	1	1	1	1	1	3	3	3	5	5	9	11	10	18	18	26	38	36	60	68	84

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 1$$

$$F_6 = F_3 + 2 \times F_1$$

$$F_7 = F_4 + 2 \times F_2$$

$$\vdots$$

$$F_{12} = F_9 + 2 \times F_7$$

$$F_{13} = 2 \times (F_8 + F_5 + F_2)$$

$$F_{14} = 2 \times (F_9 + F_6 + F_3)$$

$$\vdots$$

$$F_n = 2 \times (F_{n-5} + F_{n-8} + F_{n-11})$$

3. 歸納 $m = 2, g = 3, a = 2, 6 \le l \le 12$ 的兔子對生長數列規律

表 19. $m = 2, g = 3, a = 2, 6 \le l \le 12$ 數列規律

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">(m, g, a, l)</th><th colspan="2">數列的規律</th><th rowspan="2">初始值</th></tr>
<tr><th>$n \le l$</th><th>$n \ge l + 1$</th></tr>
<tr><td rowspan="7">$m = 2$,
$g = 3$,
$a = 2$</td><td>$l = 6$</td><td rowspan="7">$F_n = F_{n-3} + 2 \times F_{n-5}$</td><td rowspan="3">$F_n = 2 \times F_{n-5}$</td><td rowspan="7">$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 1$</td></tr>
<tr><td>$l = 7$</td></tr>
<tr><td>$l = 8$</td></tr>
<tr><td>$l = 9$</td><td rowspan="3">$F_n = 2 \times (F_{n-5} + F_{n-8})$</td></tr>
<tr><td>$l = 10$</td></tr>
<tr><td>$l = 11$</td></tr>
<tr><td>$l = 12$</td><td>$F_n = 2 \times (F_{n-5} + F_{n-8} + F_{n-11})$</td></tr>
</table>

4. 分析

分析 29. 和分析 25-28 有明顯不同的是，當 $n \geq l+1$ 時，等號右邊皆有乘以 2，應可推測和下一代生 2 對有關。

(三)證明壽命有限的兔子對成長規律對任意 (m, g, a, l) 皆成立

綜合分析 25-29 可得下列結論：

結論 30. 設兔子對經過 m 個月長大，再經過 g 個月懷孕才生出下一代，一次生 a 對幼兔，經 l 個月死亡，期間生了 k 次下一代，則其遞迴式為：

$$〔3〕\begin{cases} F_n = a \times (F_{n-m-g} + F_{n-m-2g} + F_{n-m-3g} + \cdots + F_{n-m-kg}) & \text{如果} \quad n \geq l+1, \\ F_n = F_{n-g} + a \times F_{n-m-g} & \text{如果} \quad m+g+1 \leq n \leq l, \\ F_1 = F_2 = F_3 = \cdots = F_{m+g} = 1 \end{cases}$$

$$\text{其中 } k = \left[\frac{l-m-1}{g} \right]$$

<說明>

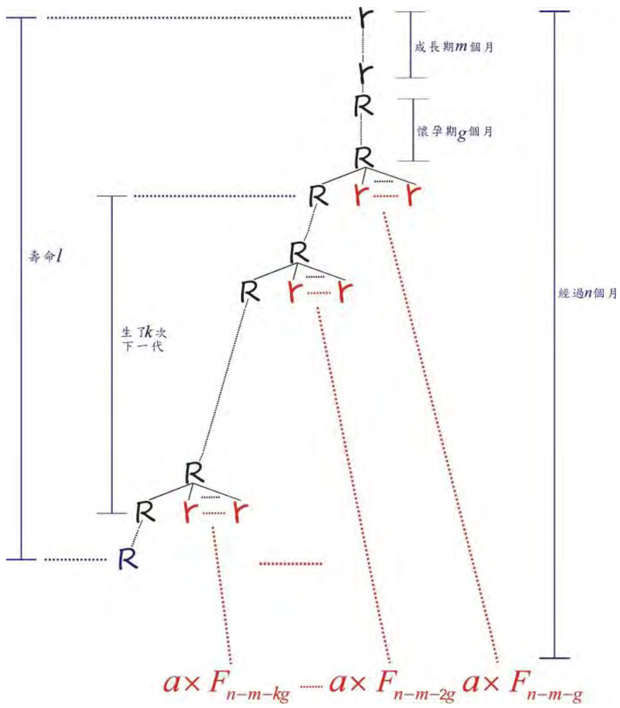


圖 12. 結論 30 證明的兔子對生長圖

補充說明 31. 我們還考慮了「壽命長度」和「成長期+孕期」的大小關係，故以下分成 $l \geq m+g+1$ 和 $1 \leq l \leq m+g$ 來討論。

Ⅰ. $l \geq m+g+1$

1. $n > l$

設壽命l的兔子對共生下一代k次，注意到第n月的成員必然是原始兔子對第1次生、或第2次生、…、或第k次生的幼兔對之後代子孫。

第一次生的下一代(親代)，是經過m月長大和g月懷孕的結果，所以第一次所生的親代一直活到第n月時，已經過了$n-m-g$月，表示第n月的組成中有和第$n-m-g$月相同的成員。

第二次生的幼兔對又是經g月懷孕才生出來，所以該幼兔對活到第n月時，已經過了$n-m-2g$月，表示第n月的組成中有和第$n-m-2g$月相同的成員，且和前述的第$n-m-g$月成員不重複。

第三次生的幼兔對又是經g月懷孕才生出來，所以該幼兔對活到第n月時，已經過了$n-m-3g$月，表示第n月的組成中有和第$n-m-3g$月相同的成員，且和前述的第$n-m-g$月、第$n-m-2g$月成員不重複。

$$\vdots$$

第k次生的幼兔對又是經g月懷孕才生出來，所以該幼兔對活到第n月時，已經過了$n-m-kg$月，表示第n月的組成中有和第$n-m-kg$月相同的成員，且和前述的第$n-m-g$月、第$n-m-2g$月、第$n-m-3g$月…、第$n-m-(k-1)\times g$月成員不重複。

2. $1\le n\le l$

當$n\le l$時,還沒有成兔對死亡,因此可看作壽命無限時的情形,故套用結論21的規律。

3. 初始值

這裡的說明和結論21的初始值說明相同，就不贅述。

4. 如何計算k值(生了多少次下一代)

k為一對幼兔從出生到死亡之前生下一代的次數，而幼兔對一生之中，成長會經過m個月，生k次表示懷孕期間共經過了$k\times g$個月，生完後在1~g個月內死亡，表示兔子對壽命l的範圍為

$$m+kg+1\le l\le m+kg+g$$

運用六年級上學期教的減法等量公理，同減m和1即得

$$kg\le l-m-1\le kg+g-1$$

運用除法等量公理，因$g\neq 0$，同除以g，可得

$$k\le \frac{l-m-1}{g}\le k+\frac{g-1}{g}<k+1$$

最後就可用高斯符號表示：

$$k=\left[\frac{l-m-1}{g}\right]$$

Ⅱ. $1\le l\le m+g$

若壽命不大於成長期和孕期，則兔子對還沒有生出下一代便死去(即 $k=a=0$)，如此一來每個月的兔子對的數量如下

$$\begin{cases}F_n=0 & n\ge l+1,\\ F_1=F_2=F_3=\cdots=F_l=1\end{cases}$$

我們將說明下列式子

$$F_n=a\times(F_{n-m-g}+F_{n-m-2g}+F_{n-m-3g}+\cdots+F_{n-m-kg}),\qquad n\ge l+1$$

也可推導出當 $n\ge l+1$ ， $F_n=0$ 。

由於 $k=a=0$ ，所以當 $n\ge l+1$ ，

$$\begin{aligned}F_n&=a\times F_{n-m-0\times g}\\&=0\times F_{n-m}\\&=0\end{aligned}$$

補充說明 32. 高斯符號的定義：$[x]$表示 x 的整數部份。

補充說明 33. 在補充說明 22 已提過，我們先得出證明結論 30 的想法，才回過頭去證明結論 21，不過我們也不是一下子就得到結論 30 的證明想法，而是一步一步歷經失敗輾轉而得到成功的論述，詳細過程請參見附錄 B。

—柒、狼來了—

我們很幸運地獲選參加全國科展後，評審建議我們加入「狼」這個條件；狼的特性是會吃掉兔子對，如果按我們之前找到的規律，兔子對的數量只會無止境地增加，若加入「狼」之後，看看新的數列兔子對和狼的數量會不會達到「平衡」，也就是整體的數量會穩定下來。

為了方便研究，我們規定

規定 34(關於加入狼的條件).

1. 狼永不死亡。
2. 狼的數量用 w 表示(這裡狼皆是一匹一匹算，不像兔子要用成對去算)
3. 狼一次吃 b 對兔子。

4. 狼在第 v 個月才出現。

5. 將分兩種情形來探討：狼吃的對象只吃 r ；或只吃 R

（1）狼吃 R 是從生長圖的最左邊往右吃(如果狼一次不只吃 1 對兔子的話)，

（2）狼吃 r 是從生長圖的最右邊往左吃。

我們先研究 $(m,g,a,w,b,v)=(1,1,1,w,b,v)$ 的情形，同樣地觀察生長圖、列出數據和找規律，先從 $(m,g,a,w,b,v)=(1,1,1,1,1,5)$ 著手。

（一）探討 $(m,g,a,w,b,v)=(1,1,1,1,1,5)$ 的兔子對生長規律

狼只吃 R

1. 繪圖

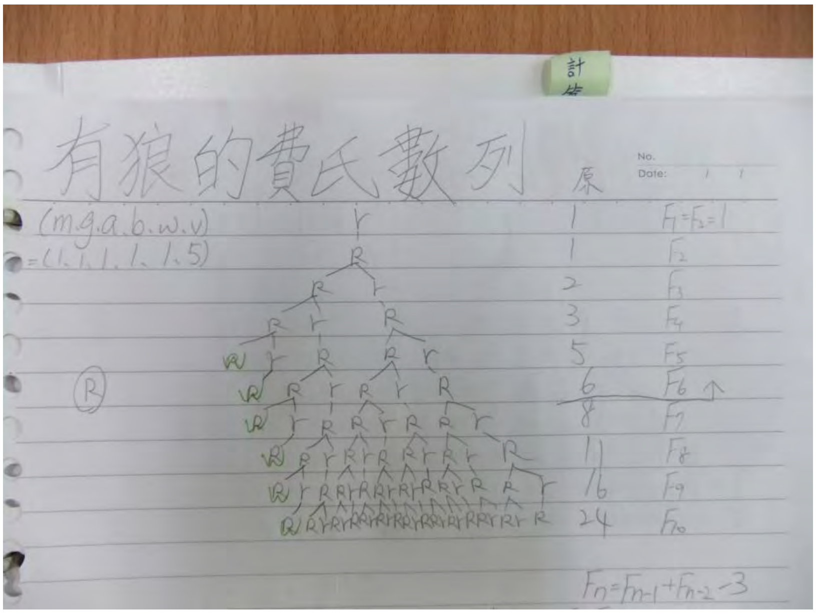


圖 13. 狼只吃 R ，$(m,g,a,w,b,v)=(1,1,1,1,1,5)$ 的兔子對生長圖

2. 數據

表 20. 狼只吃 R ，$(m,g,a,w,b,v)=(1,1,1,1,1,5)$ 的前 10 個月兔子對數量

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	6	8	11	16	24

3 規律.

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + \times F_{n-2} - 3$$

狼只吃 r

1. 繪圖

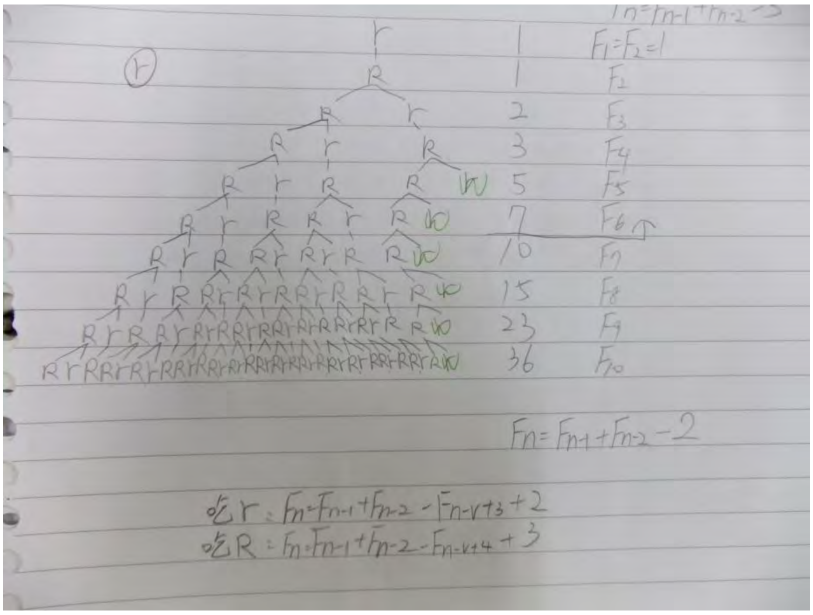


圖 14. 狼只吃 r ，$(m,g,a,w,b,v)=(1,1,1,1,1,5)$ 的兔子對生長圖

2. 數據

表 21. 狼只吃 r ，$(m,g,a,w,b,v)=(1,1,1,1,1,5)$ 的兔子對生長圖

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	7	10	15	23	36

3 規律.

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + \times F_{n-2} - 2$$

(二)猜測狼分別只吃 R 或 r 的 $(m,g,a,w,b,v)=(1,1,1,1,1,5)$ 的兔子對生長規律

我們還做了一些數據檢視，但礙於篇幅，無法列在說明書裡，請參閱實驗日誌。加上我們著手研究加入「狼」這個條件是在市展與國展之間，時間也很有限，因此我們只能得到初步的猜想，希望在國展時能更確定規律。

猜想 35. 條件為$(1,1,a,w,b,v)$，狼分別只吃R或r的的兔子對生長規律

狼只吃R

$$〔4〕\begin{cases} F_n = F_{n-1} + a\times F_{n-2} - (2ab+1)w & 如果\quad n > v+1, \\ F_{v+1} = F_v + a\times F_{v-1} - 2abw & 如果\quad n = v+1 \\ F_v = F_{v-1} + a\times F_{v-2} - (2ab-1)w & 如果\quad n = v \\ F_n = F_{n-1} + a\times F_{n-2} & 如果\quad 3\le n < v+1 \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

狼只吃 r

$$〔5〕\begin{cases} F_n = F_{n-1} + a\times F_{n-2} - (ab+1)w & 如果\quad n > v+1, \\ F_{v+1} = F_v + a\times F_{v-1} - abw & 如果\quad n = v+1 \\ F_v = F_{v-1} + a\times F_{v-2} - (ab-1)w & 如果\quad n = v \\ F_n = F_{n-1} + a\times F_{n-2} & 如果\quad 3\le n < v+1 \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

—捌、研究結論—

一、壽命無限的兔子對成長規律

設兔子對經過m個月長大，再經過g個月懷孕才生出下一代，一次生a對幼兔，永不死亡，則其遞迴式子為：

$$\begin{cases} F_n = F_{n-g} + a\times F_{n-m-g} & n\ge m+g+1 \\ F_1 = F_2 = F_3 = \cdots = F_{m+g} = 1 \end{cases}$$

二、壽命有限的兔子對成長規律

設兔子對經過m個月長大，再經過g個月懷孕才生出下一代，一次生a對幼兔，經l個月死亡，則其遞迴式子為：

(一)若$l\ge m+g+1$

$$\begin{cases} F_n = a\times (F_{n-m-g} + F_{n-m-2g} + F_{n-m-3g} + \cdots + F_{n-m-kg}) & 如果\quad n\ge l+1, \\ F_n = F_{n-g} + a\times F_{n-m-g} & 如果\quad m+g+1\le n\le l, \\ F_1 = F_2 = F_3 = \cdots = F_{m+g} = 1 \end{cases}$$

$$其中\ k = \left[\frac{l-m-1}{g}\right]$$

(二)若 $l \le m+g$

$$\begin{cases} F_n = 0 & n \ge l+1, \\ F_1 = F_2 = F_3 = \cdots = F_l = 1 \end{cases}$$

三、加入「狼」這個條件之後，得到一個關於兔子對生長規律數量的猜想。

—玖、未來展望—

雖然我們留下了一個猜想，表面上看似未完成研究，其實是發掘了另一個問題，老師引用安德魯・懷爾斯的說法鼓勵我們，表示做數學研究是要看它能否引發更多問題去探討，而不是終結一個方向。在送件之前，**我們還將關於本研究幾個整數數列線上大全沒有的數列，上傳去該資料庫**，目前仍校稿中，希望在參加國展之時，該資料庫會接受我們上傳的數據，成為裡面供大家參考的數列之一。

—拾、參考資料—

【1】南一書局國小數學教科書編撰委員會(民 99)。等量公理。國民小學數學課本第十一冊。臺南市。南一文教事業股份有限公司。

【2】南一書局國小數學教科書編撰委員會(民 100)。怎樣解題(一)(二)。國民小學數學課本第十二冊。臺南市。南一文教事業股份有限公司。

【3】科展群傑廳(2012)。國立科學教育館。2012 年 9 月 11 日取自 http://science.ntsec.edu.tw/Science.aspx?cat=21&a=6821

【4】費氏數列(2012)。2012 年 9 月 12 日取自 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%96%90%E6%B3%A2%E9%82%A3%E5%A5%91%E6%95%B0%E5%88%97

【5】Fibonacci number: Wikis。2012 年 9 月 7 日取自 http://www.thefullwiki.org/Fibonacci_number

【6】陳鑫達(2010)。數學科展作品索引分類表 2008 年版。2012 年 9 月 7 日取自 http://cse.ncue.edu.tw/sec/popNews.php?id=187

【7】吳振奎(2000)。斐波那契數列。台北市。九章出版社。

【8】曾勝賢、邱筠惠、莊茹嫃、蔡宜玲(2002)。這是什麼數列？ 1，1，3，5，11，21，43，……。載於國立科學教育館。全國中小學科學展覽第 42 屆國中組數學科。

【9】Yahoo 知識+(2007)。2010 年 2 月 2 日數學科展題目!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!.。2012 年 9 月 10 日取自 http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1510012803934

【10】mr coffee(2006)。Fibonacci's question, recurance relationship, did i get it?。2012 年 9 月 11 日取自 http://www.physicsforums.com/showthread.php?t=144365

附錄 A

-查無此數列-

兔子對需經 2 個月長大、經 3 個月懷孕、一次生下 1 對兔子，每個月兔子對數量形成的數列前 18 項，在「整數數列線上大全」資料庫查詢，得到數列不在數據庫裡，見圖 14。

login

This site is supported by donations to The OEIS Foundation.

1,1,1,1,1,2,2,2,3,3,4,5,5,7,8,9,12,13 搜索 提示

(你好， 歡迎到 整數數列線上大全)

搜索: seq:1,1,1,1,1,2,2,2,3,3,4,5,5,7,8,9,12,13

對不起，你的系列不在數據庫裡

如果你的數列有一般的興趣，請用所 提供的表 送給我， 我可能會這個數據中

Search completed in 2.376 seconds

Lookup | Welcome | Wiki | Register | Music | Plot 2 | Demos | Index | Browse | More | WebCam
Contribute new seq. or comment | Format | Transforms | Puzzles | Hot | Classics
Recent Additions | More pages | Superseeker | Maintained by The OEIS Foundation Inc.

Content is available under The OEIS End-User License Agreement .

Last modified January 30 06:33 EST 2013. Contains 220892 sequences.

圖 14. 在整數數列線上大全輸入$(m, g, a) = (2, 3, 1)$產生的數列前 18 項，數列不在數據庫。

附錄 B

-得到結論 30 證明的思索過程-

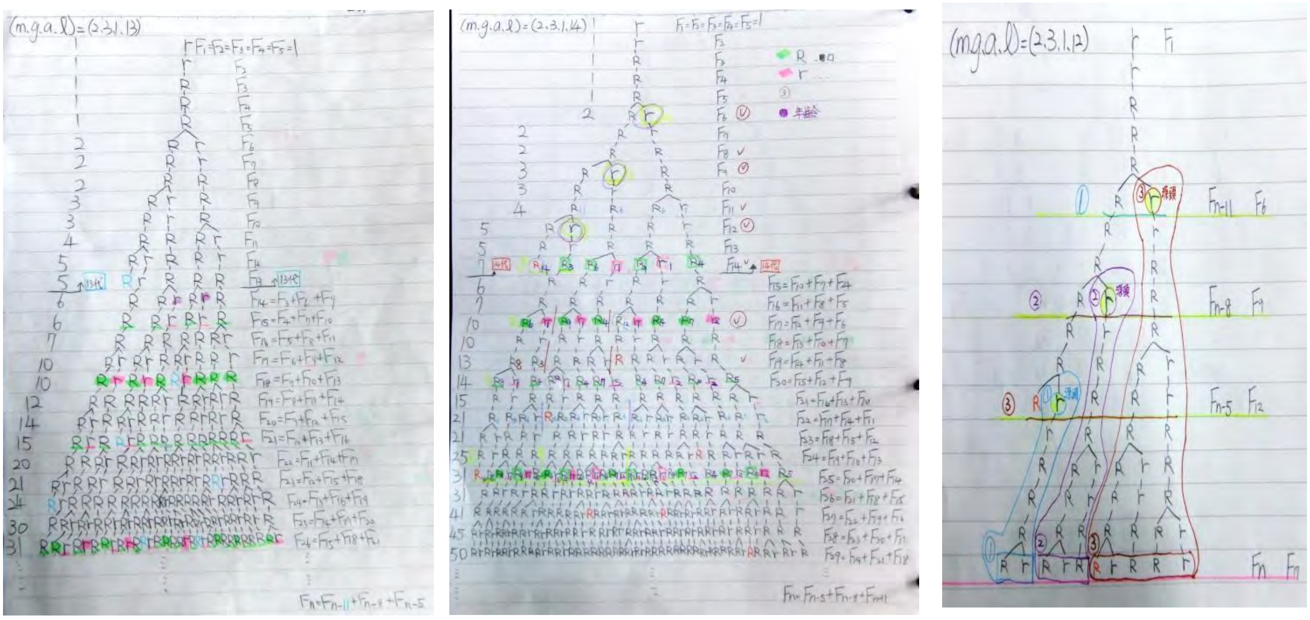
以 $(m, g, a, l) = (2, 3, 1, 14)$ 為例，其規律為當 $n \geq l+1$，

$$F_n = F_{n-5} + F_{n-8} + F_{n-11}$$

一開始我們打算讓第 n 個月的每位成員都能唯一地對到第 $n-5$ 個月，或第 $n-8$ 個月，或第 $n-11$ 個月某個成員，如此就能證明規律成立，我們擬出一個規則：

規則 B.1. 第 n 個月的成員往上對應，只能對自己父代的成員，而且是 r 對 r 、 R 對 R 。

但我們對應完後，卻發現無法一個對好一個，見圖 15-甲。



甲、只能對應自己父代的成員　　乙、對每位成員標記活了多少個月　　丙、證明結論 30 的概念之來源

圖 15

後來我們標上每對兔子活了多少個月，稱之為「年齡」，見圖 15-乙，

我們發覺第 n 個月的每對成員年齡都能對應到第 $n-5$ 個月，或第 $n-8$ 個月，或第 $n-11$ 個月某個成員，但確切規律不是很清楚。

然而在思索「年齡對應」的過程中，卻又發覺第 n 代的成員恰好包含第 $n-5$ 個月，第 $n-8$ 個月及第 $n-11$ 個月的成員，因而得到結論 30 的證明概念來源(見圖 15-丙)。

【評語】080401

1. 組織結構完整，logic 推演也相當有條理。
2. 主題從費氏數列切入，進而將問題複雜化，多元化使得問題的探討更有趣味。
3. 對所得的數列，可再進一步深入探討，使理論更完整。