中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040417

探索四面體

學校名稱：國立大里高級中學

作者：	指導老師：
高二 林彥伯	張峻國 游祥裕

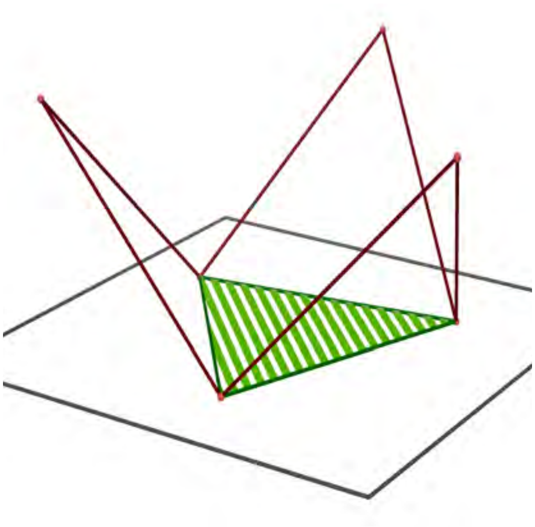
關鍵詞：稜長、體積、極值

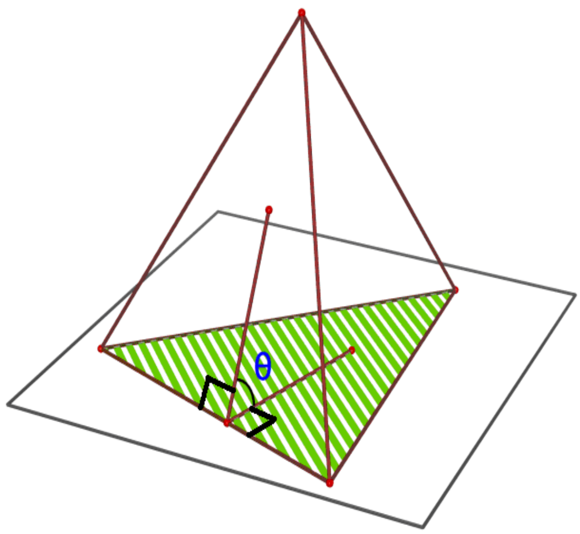
摘　要

本文主要是探討稜長與體積、表面積、外接球半徑、內切球半徑等的關係，首先我們先證明四面體存在時稜長的限制條件，發現此條件與體積有關。然後我們將體積、表面積…等先化簡成以稜長為變數的函數，討論兩種稜長、三種稜長的四面體；運用 Maple 軟體分析函數圖形的變化趨勢與極值，並且利用 Cabri 3D 繪圖軟體觀察發現當稜長變化時四面體的外心、重心的移動軌跡分別是一直線與半圓形，最後在討論內切球時，發現一個特別的等式。

壹、 研究動機

在專題課的數學軟體學習中；老師要我們做一個四面體，使其稜長可以任意調整？





在製作的過程中讓我們想到：『是否四個三角形即可組成一個四面體？』因此，我們利用課堂上所學的 Cabri 3D 立體繪圖軟體及 Maple 數學軟體，研究各種四面體稜長與體積、表面積等的關係。其中我們發現大多數的狀況與預期相同，但是有少部分卻是不同，於是開始了我們一連串的探討與證明。

在文獻探討研究的過程中，發現多數均是研究三角形到四面體的類比性質，我們則鎖定改變四面體的稜長去討論與體積、表面積等的關係，運用 Maple 軟體分析其中的變化，並且利用 Cabri 3D 繪圖軟體觀察當稜長變化時四面體的重心、外心、內心的軌跡。

貳、 研究目的

一、探討四面體稜長的限制條件。

二、探討各種稜長的四面體其體積、表面積、外接球、內切球半徑的的改變趨勢與極值。

三、探討改變稜長時，四面體重心、外心、內心的移動軌跡。

參、 研究工具

一、Cabri 3D:觀察立體圖形趨勢

二、Maple:分析函數變化與繪圖

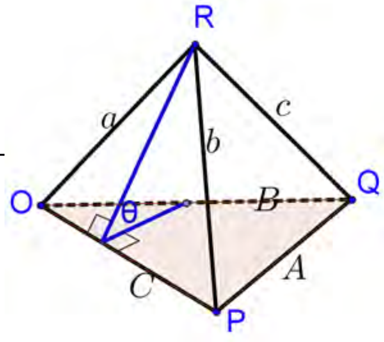
三、Geogebra:分析平面圖形

肆、 研究過程

因為是探討稜長與四面體的關係，所以我們先證明四面體存在時稜長的限制條件，然後將四面體的兩面夾角，體積、表面積、外接球半徑、內切球半徑、均以稜長的函數呈現，最後再加以分析。

符號說明：四面體 $OPQR$ 中， O,P,Q,R 為頂點，

$A,a,\quad B,b,\quad C,c$ 分別表示一組對邊的稜長，如圖(一)所示。



圖(一)

一、 稜長的限制條件

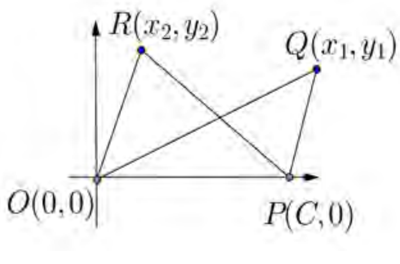
設 A,a,B,b,C,c 為六個正數,則這六個正數可構成四面體六條稜長的條件是

$$\boxed{\begin{aligned}F(A,a,B,b,C,c)&=A^2a^2(-A^2-a^2+B^2+b^2+C^2+c^2)+B^2b^2(A^2+a^2-B^2-b^2+C^2+c^2)\\&\quad+C^2c^2(A^2+a^2+B^2+b^2-C^2-c^2)-(A^2B^2C^2+A^2b^2c^2+a^2B^2c^2+a^2b^2C^2)>0\cdots(1)\end{aligned}}$$

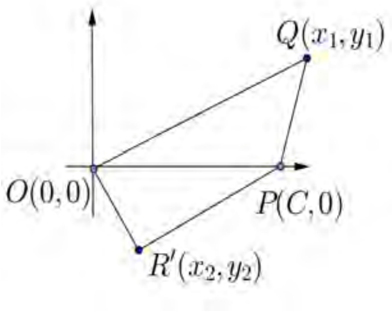
證明: ΔOPQ 和 ΔOPR 中，由海龍面積公式 $\Delta OPQ=\dfrac{1}{4}\sqrt{(A+B+C)(A+B-C)(A+C-B)(B+C-A)}$

$\Leftrightarrow$ 化簡可得 $2(A^2B^2+B^2C^2+A^2C^2)>A^4+B^4+C^4\cdots\cdots(2)$

同理由 ΔOPR 可得 $2(a^2b^2+b^2C^2+a^2C^2)>a^4+b^4+C^4\cdots(3)$



圖(二)



圖(三)

當兩平面 OPQ 與 OPR 的夾角 $\theta=0^\circ$ 或 $\theta=180^\circ$ 時,表示 $OPQR$ 四點共面

(1)當兩面 OPQ 與 OPR 的夾角 $\theta=0^\circ$ 時,建立如圖二所示的直角座標系,則有 $O(0,0)$, $P(C,0)$ ，假設 Q,R 兩點的座標分別為 $Q(x_1,y_1),R(x_2,y_2)$,那麼我們有

$(x_1-c)^2+y_1^2=A^2,x_1^2+y_1^2=B^2,(x_2-c)^2+y_2^2=b^2,x_2^2+y_2^2=a^2$.解方程組可得 Q,R 兩點的

座標分別為 $Q(\dfrac{B^2+C^2-A^2}{2C},\dfrac{\sqrt{g(A,B,C)}}{2C}),R(\dfrac{a^2+C^2-b^2}{2C},\dfrac{\sqrt{g(a,b,C)}}{2C})$

(其中 $g(A,B,C)=-A^4-B^4-C^4+2(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2)$,且由(2)(3)式可知, $g(A,B,C)>0,g(a,b,C)>0$)

(2)當二面 OPQ 與 OPR 的夾角 $\theta=180°$ 時,建立如圖三所示的直角座標系,同理可得 Q,R' 兩點的座標分別為 $Q(\frac{B^2+C^2-A^2}{2C},\frac{\sqrt{g(A,B,C)}}{2C})$, $R'(\frac{a^2+C^2-b^2}{2C},-\frac{\sqrt{g(a,b,C)}}{2C})$

由兩點間的距離公式可知:

$$\overline{QR}^2=\left[u(A,a,B,b,C)-\sqrt{g(A,B,C)\times g(a,b,C)}\right]/2C^2,$$

$$\overline{QR'}^2=\left[u(A,a,B,b,C)+\sqrt{g(A,B,C)\times g(a,b,C)}\right]/2C^2$$

(其中 $u(A,a,B,b,C)=-C^4+A^2C^2+B^2C^2+b^2C^2+a^2C^2-a^2B^2+b^2B^2+a^2A^2-A^2b^2$

因 $0°<\theta<180°$,從而有 $\overline{QR}<c<\overline{QR'}$ ， 將左式平方得,即 $\overline{QR}^2<c^2<\overline{QR'}^2$

$$\Leftrightarrow \frac{\left[u(A,a,B,b,C)-\sqrt{g(A,B,C)\times g(a,b,C)}\right]}{2C^2}<c^2<\frac{\left[u(A,a,B,b,C)+\sqrt{g(A,B,C)\times g(a,b,C)}\right]}{2C^2}$$

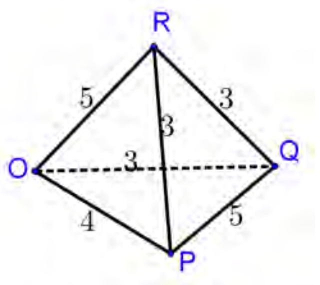
$\Leftrightarrow$ 整理可得 $\left|2C^2c^2-u(A,a,B,b,C)\right|<\sqrt{g(A,B,C)\times g(a,b,C)}$

$\Leftrightarrow$ 兩邊同時平方得 $\left[2C^2c^2-u(A,a,B,b,C)\right]^2<g(A,B,C)\times g(a,b,c)\cdots\cdots(4)$

$\Leftrightarrow$ 把 $u(A,a,B,b,C),g(A,B,C),g(a,b,C)$ 代入(4)式,化簡整理得

$$\begin{aligned}&A^2a^2(-A^2-a^2+B^2+b^2+C^2+c^2)+B^2b^2(A^2+a^2-B^2-b^2+C^2+c^2)+\\&C^2c^2(A^2+a^2+B^2+b^2-C^2-c^2)-(A^2B^2C^2+A^2b^2c^2+a^2B^2c^2+a^2b^2C^2)>0\cdots(1)\end{aligned}$$ 得證

對於構成四面體的條件,很容易誤認為：分別滿足構成三角形的條件就可以保證六個正數 A,a,B,b,C,c 可以構成四面體的六條稜長.其實不然,例如:

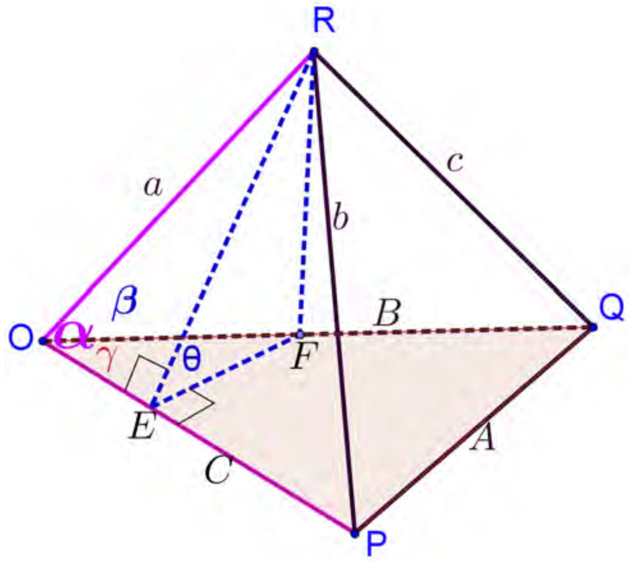


$\Delta OPQ,\Delta OPR,\Delta OQR,\Delta PQR$ 都存在，但是代入 $F(A,a,B,b,C,c)=-4816<0$

這樣的六個正數不能構成四面體(使用 Cabri 3D 作圖試驗一樣得知無法構成四面體)。

結論：六正數構成四面體三組對稜的條件是: $F(A,a,B,b,C,c)>0$

二、 由稜長求兩面夾角



探討稜長的改變與體積，面積..等的極值問題中，我們也想了解四面體大致的形狀，所以我們也推導了四面體的兩面角的簡易求法如下：

過 R 作 $\overline{RE}\perp\overline{OP}$ 於 E，過 E 作 $\overline{EF}\perp\overline{OP}$ 交 $\overline{OQ}$ 於 F ,設 $\angle ROP=\alpha,\angle ROQ=\beta,\angle QOP=\gamma,$

所以 $\overline{RE}=a\times\sin\angle ROP=a\times\sin\alpha$，　$\overline{EF}=\overline{OE}\times\tan\angle QOP=a\times\cos\alpha\times\tan\gamma$

且 $\overline{OF}=\dfrac{\overline{OE}}{\cos\gamma}=\dfrac{a\cos\alpha}{\cos\gamma}$　　ΔROF 中由餘弦定理 $\Rightarrow \overline{RF}^2=a^2+\overline{OF}^2-2\times a\times\overline{OF}\times\cos\beta$

所以 $\overline{RF}^2=a^2+\dfrac{a^2\times\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma}-2\times\dfrac{a^2\times\cos\alpha}{\cos\gamma}\times\cos\beta$

$$\cos\angle REF=\frac{\overline{RE}^2+\overline{EF}^2-\overline{RF}^2}{2\times\overline{RE}\times\overline{EF}}$$

$$=\frac{a^2\times\sin^2\alpha+a^2\times\cos^2\alpha\times\tan^2\gamma-(a^2+\dfrac{a^2\times\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma}-\dfrac{2a^2\times\cos\alpha\times\cos\beta}{\cos\gamma})}{2a\times\sin\alpha\times a\times\cos\alpha\times\tan\gamma}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\times\dfrac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma}-(1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma}-\dfrac{2\times\cos\alpha\times\cos\beta}{\cos\gamma})}{2\times\sin\alpha\times\cos\alpha\times\dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma}}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\times\cos^2\gamma+\cos^2\alpha\times\sin^2\gamma-\cos^2\gamma-\cos^2\alpha+2\times\cos\alpha\times\cos\beta\times\cos\gamma}{2\times\sin\alpha\times\cos\alpha\times\sin\gamma\times\cos\gamma}$$

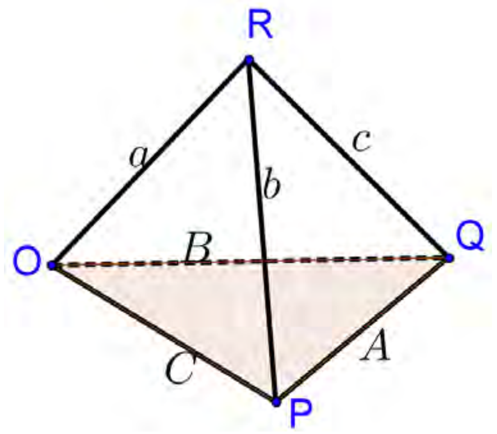
$$=\frac{-\cos^2\alpha\times\cos^2\gamma-\cos^2\alpha\times\cos^2\gamma+2\times\cos\alpha\times\cos\beta\times\cos\gamma}{2\times\sin\alpha\times\cos\alpha\times\sin\gamma\times\cos\gamma}$$

$$\boxed{=\frac{\cos\beta-\cos\alpha\times\cos\gamma}{\sin\alpha\times\sin\gamma}\cdots\cdots(5)}$$

結論：『兩平面夾角』可由通過此兩面共同頂點的三條稜線夾角得之。

【三條稜線夾角均可利用餘弦定理得知】

三、 四面體體積與稜長關係：



四面體 $O-PQR$ 中，設 $\overrightarrow{OP}=(a_1,b_1,c_1)$,

$\overrightarrow{OQ}=(a_2,b_2,c_2),\overrightarrow{OR}=(a_3,b_3,c_3)$ 由空間向量概念

可知四面體體積

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})\bullet\overrightarrow{OR}|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|\cdots\cdots\cdots(6)$$

將式(6)平方 $V^2=\frac{1}{36}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{36}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{36}\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 & a_3^2+b_3^2+c_3^2 \end{vmatrix}\cdots\cdots(7)$$

利用向量內積 $\Rightarrow V^2=\frac{1}{36}\begin{vmatrix} \overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OP} & \overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ} & \overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OR} \\ \overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ} & \overrightarrow{OQ}\bullet\overrightarrow{OQ} & \overrightarrow{OQ}\bullet\overrightarrow{OR} \\ \overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OR} & \overrightarrow{OQ}\bullet\overrightarrow{OR} & \overrightarrow{OR}\bullet\overrightarrow{OR} \end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots(8)$

又 $\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}=B\times C\times cos(\angle QOP)=B\times C\times\frac{B^2+C^2-A^2}{2\times B\times C}=\frac{B^2+C^2-A^2}{2}$

$\overrightarrow{OQ}\bullet\overrightarrow{OR}=\frac{a^2+B^2-c^2}{2}$, $\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OR}=\frac{a^2+C^2-b^2}{2}$ 代入式(8)

$$\boxed{36V^2=\begin{vmatrix} C^2 & \frac{B^2+C^2-A^2}{2} & \frac{a^2+C^2-b^2}{2} \\ \frac{B^2+C^2-A^2}{2} & B^2 & \frac{a^2+B^2-c^2}{2} \\ \frac{a^2+C^2-b^2}{2} & \frac{a^2+B^2-c^2}{2} & a^2 \end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots(9)}$$

與式(1)比較，我們發現 $\boxed{144V^2(A,a,B,b,C,c)=F(A,a,B,b,C,c)}$

所以式(9) >0 與式(1) >0 判斷六個稜長是否能構成四面體的答案必相同。

四、 四面體表面積與稜長關係

表面積 $Area = \Delta OPQ + \Delta OPR + \Delta OQR + \Delta PQR$【由海龍公式】

$$=\boxed{\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}\sqrt{(A+B+C)(A+B-C)(A+C-B)(B+C-A)}+\sqrt{(a+b+C)(a+b-C)(a+C-b)(b+C-a)} \\ +\sqrt{(a+B+c)(a+B-c)(a+c-B)(B+c-a)}+\sqrt{(A+b+c)(A+b-c)(A+c-b)(b+c-A)}\end{array}\right)\cdots(10)}$$

五、 四面體外接球半徑與稜長關係

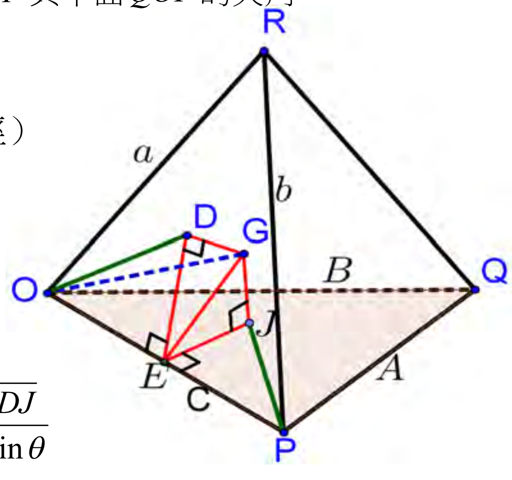
外接球半徑的求法：我們找尋資料中在『100 個初等數學問題』一書中有如下的結果，

$$36R^2V^2=\frac{(Aa+Bb+Cc)(Aa+Bb-Cc)(Aa-Bb+Cc)(-Aa+Bb+Cc)}{16}$$

$$\boxed{\Rightarrow R=\sqrt{\frac{(Aa+Bb+Cc)(Aa+Bb-Cc)(Aa-Bb+Cc)(-Aa+Bb+Cc)}{576V^2}}\cdots\cdots(11)}$$

但研究其證明過程繁瑣不易理解，我們改以高中數學立體幾何觀念利用下圖的方式求得，雖然步驟較多，但是運用 Maple 分析，一樣快速方便，結果亦相同，過程較簡單。

設四面體的外接球球心 G ，則外接球半徑 $R=\overline{GO}$ ，設 $\Delta OPR, \Delta OPQ$ 的外心分別為 D,J ，則 $\overline{GD},\overline{GJ}$ 分別垂直平面 OPR, 與平面 OPQ ，令 $\overline{OP}$ 中點 E ，由三垂線定理得知 $\overline{DE}\perp\overline{OP},\overline{JE}\perp\overline{OP}$ ，且 $\angle DEJ=\theta$ 即代表平面 ROP 與平面 QOP 的夾角。



求外接球半徑步驟如下:

(1). $\overline{DO}=\dfrac{abC}{4\Delta OPR},\overline{JP}=\dfrac{ABC}{4\Delta OPQ}$ （Δ外接圓半徑）

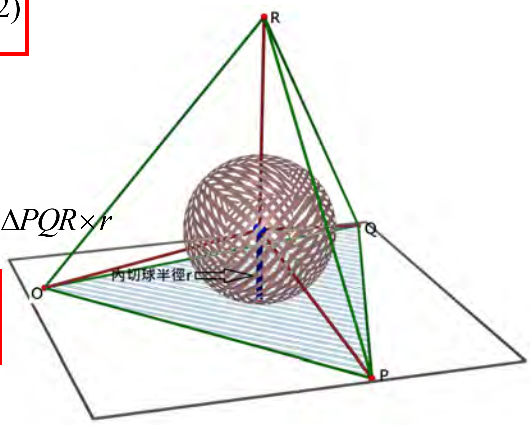
(2). $\overline{DE}^2=\overline{DO}^2-(\dfrac{C}{2})^2,\overline{JE}^2=\overline{JP}^2-(\dfrac{C}{2})^2$

(3). ΔDEJ 中 $\overline{DJ}^2=\overline{DE}^2+\overline{JE}^2-2\overline{DE}\times\overline{JE}\cos\theta$

(4).四邊形 $GDEJ$ 共圓， $\dfrac{\overline{GE}}{\sin 90^\circ}=\dfrac{\overline{DJ}}{\sin\theta}\Rightarrow\overline{GE}=\dfrac{\overline{DJ}}{\sin\theta}$

(5).外接球半徑 $\boxed{R=\overline{GO}=\sqrt{\overline{GE}^2+(\dfrac{C}{2})^2}\cdots\cdots\cdots(12)}$

六、 四面體內切球半徑與稜長關係



$$V=\frac{1}{3}\times\Delta OPQ\times r+\frac{1}{3}\times\Delta OPR\times r+\frac{1}{3}\times\Delta OQR\times r+\frac{1}{3}\times\Delta PQR\times r$$

$$\boxed{\Rightarrow r=\frac{3V}{\Delta OPQ+\Delta OPR+\Delta OQR+\Delta PQR}\cdots\cdots(13)}$$

七、 分類討論

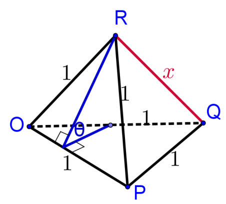
接下來的討論，我們以四面體『有幾種不同稜長』來討論，其中四面體稜長僅一種 a ，即為正四面體，相關性質已有相當多文章，不再贅述。

我們討論了下列的各種情形:

種　類	分　析　內　容	附表說明	頁碼
兩種稜長	體積	表(一)-(1)	**P10~11**
	表面積	表(一)-(2)	**P12~13**
	外接球半徑	表(一)-(3)	**P14~15**
	內切球半徑	表(一)-(4)	**P16~17**
三種稜長	體積	表(二)-(1)	**P20~21**
	表面積	表(二)-(2)	**P22~23**
	兩種稜長與三種稜長比較	表(二)-(3)	**P24**
已知五個稜長(可不相同) 第六稜長為變數 x 與兩種稜長 $(1,1,1,1,1,x)$ 比較	體積	表(三)-(1)	**P25**
	表面積		
	外接球半徑	表(三)-(2)	**P26**
	內切球半徑		

(一)兩種稜長：四面體的稜長僅有兩種 a,b ，為了方便討論且 不失一般性，每個稜長

均除以 a ，我們改成討論 $\frac{a}{a},\frac{b}{a}=x\Rightarrow 1,x$



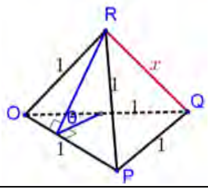
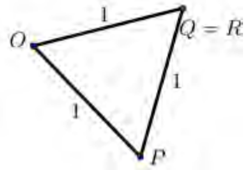
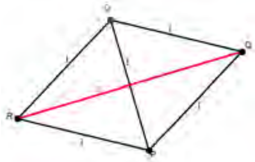
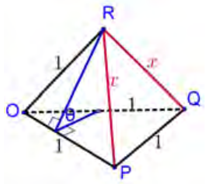
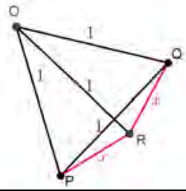
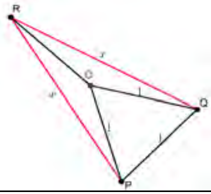
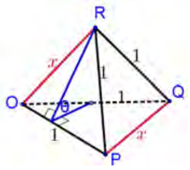
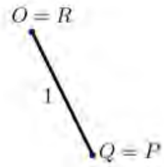
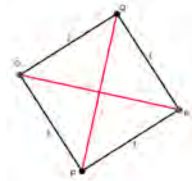
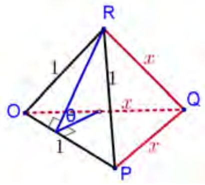
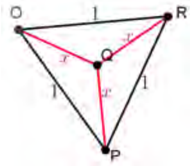
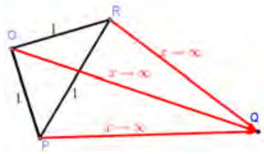
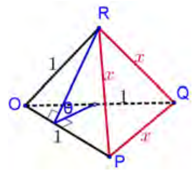
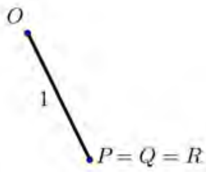
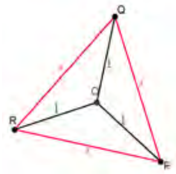
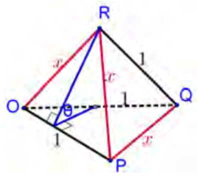
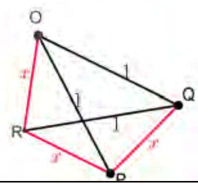
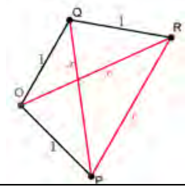
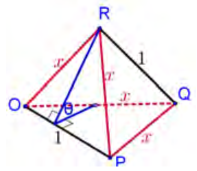
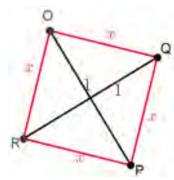
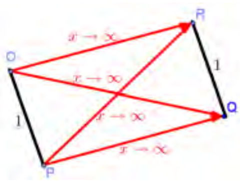
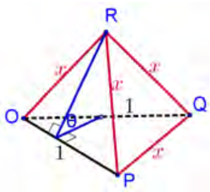
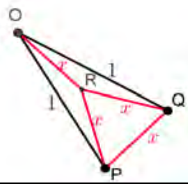
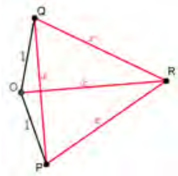
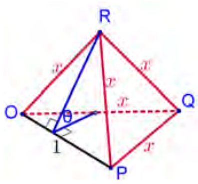
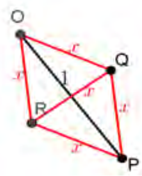
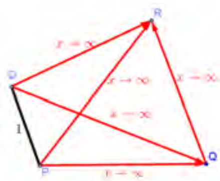
分析過程：以右圖為例，先代入式(1)求得 x 限制條件 $0<x<\sqrt{3}$

再分別代入式(9)(10)(12)(13)得到

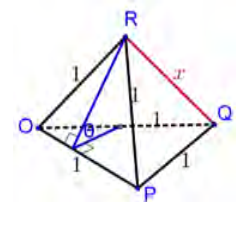
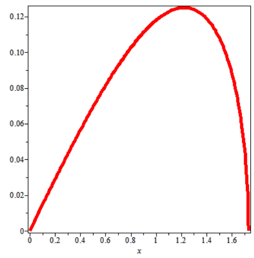
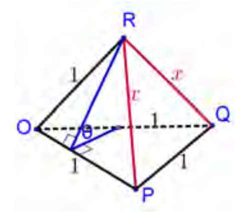
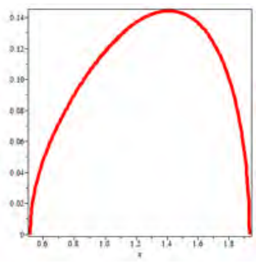
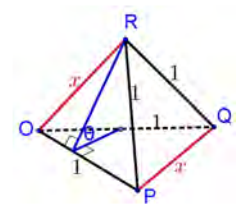
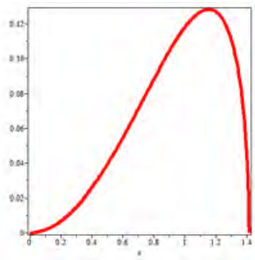
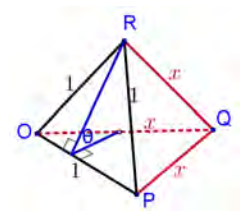
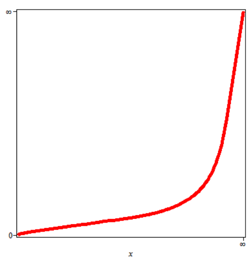
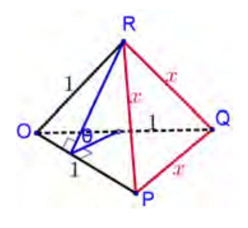
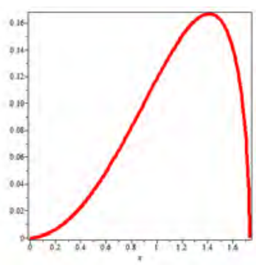
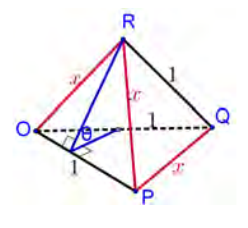
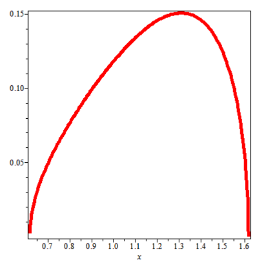
	函　　數	對 x 微分得到一階導數，令其為 $0\Rightarrow x=?$
體積	$V(x)=\frac{1}{12}\sqrt{-x^4+3x^2}$	$\frac{d}{dx}(V(x))=\frac{1}{24}\frac{-4x^3+6x}{\sqrt{-x^4+3x^2}}=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{6}}{2}$
表面積	$Area(x)=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{-x^4+4x^2}}{2}$	$\frac{d}{dx}(Area(x))=\frac{-4x^3+8x}{4\sqrt{-x^4+4x^2}}=0\Rightarrow x=\sqrt{2}$
外接球半徑	$R(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^4-4x^2}{x^4-3x^2}}$	$\frac{d}{dx}(R(x))=\frac{x^2}{(x^3-3x^2)^{\frac{3}{2}}(x^4-4x^2)^{\frac{1}{2}}}=0\Rightarrow x=0$ 不合
內切球半徑	$r(x)=\frac{\sqrt{-x^4+3x^2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{-x^4+4x^2}}$	$\frac{d}{dx}(r(x))=0\Rightarrow x\fallingdotseq 1.120$

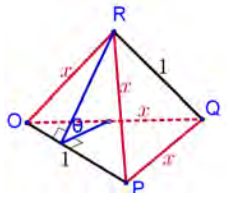
先判斷 x 是否在稜長範圍內，再代回，分別求出函數的極值。其它圖形依此類推

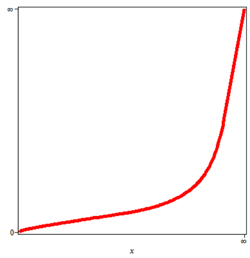
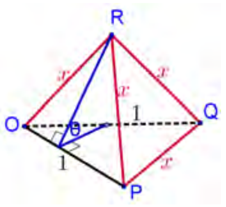
四面體稜長僅有兩類(1與 x)，我們討論了 9 種情形並先分別求出每一種的 x 範圍限制

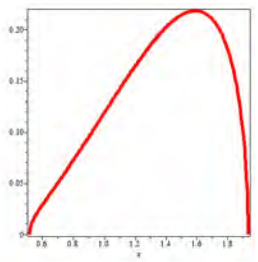
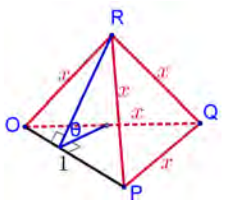
四面體圖形	x 的範圍限制	x 範圍的下界圖形	x 範圍的上界圖形
	(1)一個 x $0<x<\sqrt{3}$		
	(2)兩個 x 共頂點 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$		
	(3)兩個 x 不共頂點 $0<x<\sqrt{2}$		
	(4)三個 x 共頂點 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$		
	(5)三個 x 共平面 $0<x<\sqrt{3}$		
	(6)三個 x 不共點不共面 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$		
	(7)四個 x 不共點不共面 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$		
	(8)四個 x $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$		
	(9)五個 x $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$		

表(一)-(1) 兩種稜長$1, x$的討論：【體積與稜長變化】

	四面體種類	稜長 x 與體積 V 關係圖	說　明	體積函數 V(x) x範圍限制
只有一個x	 (1)		體積最大 $=\frac{1}{8}=\mathbf{0.125}$ 此時 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 此時 $\theta=90°$	$\frac{\sqrt{-x^4+3x^2}}{12}$ $0<x<\sqrt{3}$
有兩個x	 (2)共頂點		體積最大$=\frac{\sqrt{3}}{12}\approx\mathbf{0.144}$ 此時 $x=\sqrt{2}$ 此時 $\theta=90°$	$\frac{\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{12}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
	 (3)不共頂點		體積最大$=\frac{2\sqrt{3}}{27}\approx 0.128$ 此時 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 此時 $\theta=60°$	$\frac{\sqrt{-2x^6+4x^4}}{12}$ $0<x<\sqrt{2}$
有三個x	 (4)共頂點		體積隨 x 遞增 $\lim_{x\to\infty} V(x)\to\infty$	$\frac{\sqrt{3x^2-1}}{12}$ $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$
	 (5)共平面		體積最大 $=\frac{1}{6}\approx 0.167$ 此時 $x=\sqrt{2}$ 此時 $\theta=90°$	$\frac{\sqrt{-x^6+3x^4}}{12}$ $0<x<\sqrt{3}$
	 (6)不共頂點不共平面		體積最大≈ 0.151 此時 $x=\sqrt{\frac{2+\sqrt{10}}{3}}$ 此時 $\theta\approx 48.8°$	$\frac{\sqrt{-x^6+2x^4+2x^2-1}}{12}$ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

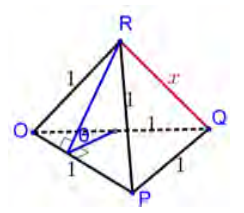
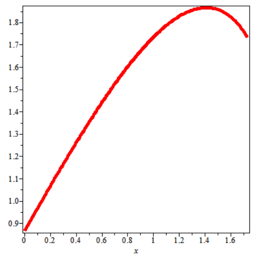
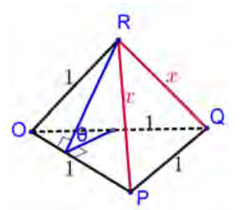
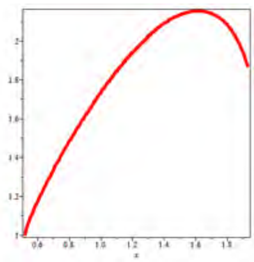
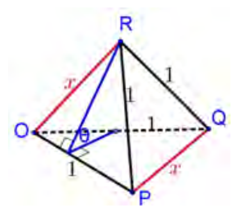
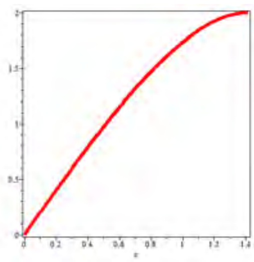
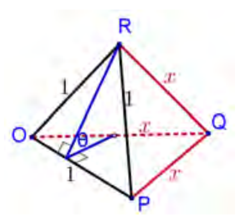
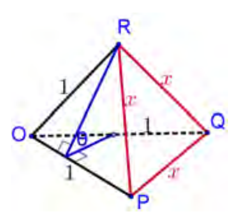
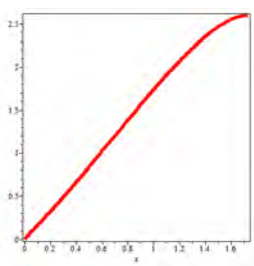
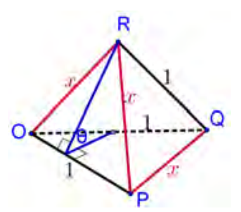
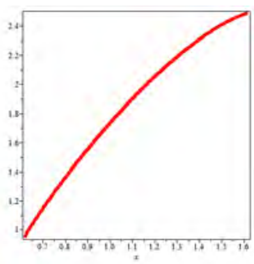
<table>
<tr><th></th><th>四面體種類</th><th>稜長 x 與體積 V 關係圖</th><th>說　明</th><th>體積 $V(x)$
x 範圍限制</th></tr>
<tr><td rowspan="2">有
4
個
x</td><td>

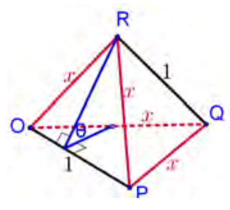
(7)不共頂點不共平面</td><td></td><td>體積隨 x 遞增
$\lim_{x\to\infty} V(x)\to\infty$</td><td>$\dfrac{\sqrt{4x^2-2}}{12}$
$x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$</td></tr>
<tr><td>

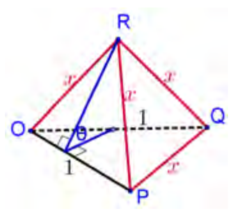
(8)</td><td></td><td>體積最大≈ 0.219
此時 $x=\sqrt{\dfrac{4+\sqrt{13}}{3}}$
此時 $\theta\approx 64.2°$</td><td>$\dfrac{\sqrt{-x^6+4x^4-x^2}}{12}$
$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$</td></tr>
<tr><td>有
5
個
x</td><td>

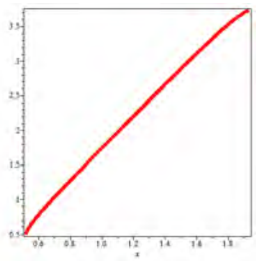
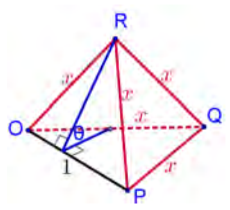
(9)</td><td></td><td>體積隨 x 遞增
$\lim_{x\to\infty} V(x)\to\infty$</td><td>$\dfrac{\sqrt{3x^4-x^2}}{12}$
$x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$</td></tr>
<tr><td>結
論</td><td colspan="4">1.若未知數 x 範圍有上下界時(種類(1)(2)(3)(5)(6)(8))，其體積存在極大值。
2.若未知數 x 範圍無上界時(種類(4)(7)(9))　，當稜長 $x\to\infty$ 時，體積 $V(x)\to\infty$。
3.若體積極值存在(種類(1)(2)(3)(5)(6)(8))，當未知數 x 個數越多時，
　則其體積的最大值越大。
4.若未知數 x 個數相同時，當未知數全部共頂點(種類(2)(4))時其體積的最大值
　比不共頂點時較大。</td></tr>
</table>

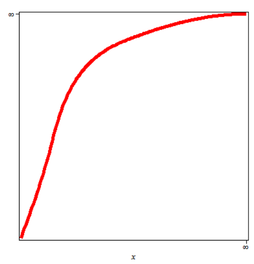
表(一)-(2) 兩種稜長 $1, x$ 的討論：【表面積與稜長變化】

	四面體種類	稜長 x 與表面積	說　明	表面積 $A(x)$ x 範圍限制
只有一個 x	 (1)		**表面積最大** $\frac{\sqrt{3}+2}{2}\approx 1.866$ 此時 $x=\sqrt{2}$ 此時 $\theta \approx 109.5°$	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{-x^4+4x^2}}{2}$ $0<x<\sqrt{3}$
有兩個 x	 (2)共頂點		**表面積最大** ≈ 2.154 此時 $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.698$ 此時 $\theta \approx 100.8°$	$\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{-x^4+4x^2}+\sqrt{4x^2-1}}{4}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
	 (3)不共頂點		表面積隨 x 遞增 有上界但較上圖(2)小	$\sqrt{-x^4+4x^2}$ $0<x<\sqrt{2}$
有三個 x	 (4)共頂點		表面積隨 x 遞增 $\lim_{x\to\infty} A(x)\to\infty$	$\frac{3\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{3}}{4}$ $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$
	 (5)共平面		表面積隨 x 遞增 有上界	$\frac{\sqrt{3}x^2+3\sqrt{-x^4+4x^2}}{4}$ $0<x<\sqrt{3}$
	 (6)不共頂點不共平面		表面積隨 x 遞增 有上界	$\frac{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{-x^4+4x^2}}{2}$ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

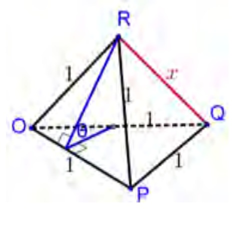
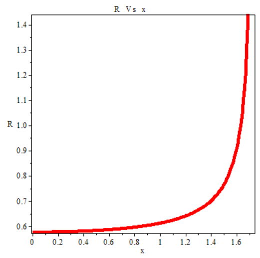
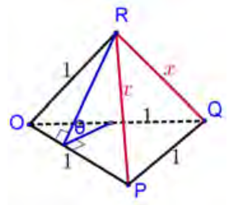
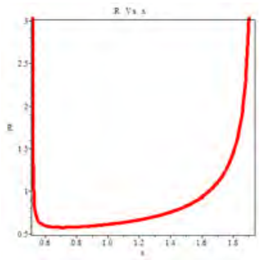
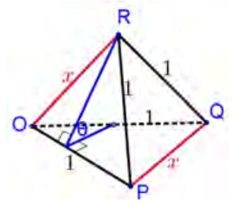
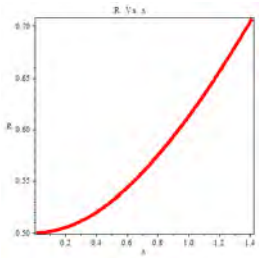
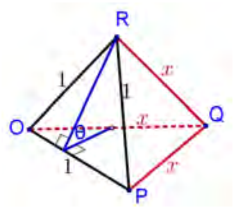
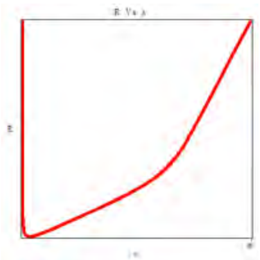
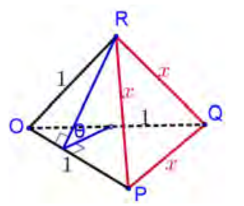
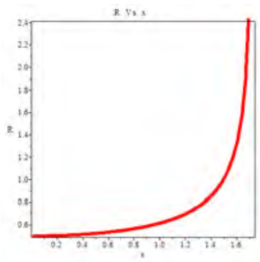
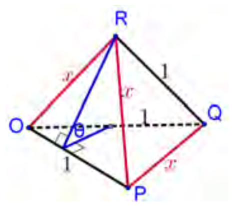
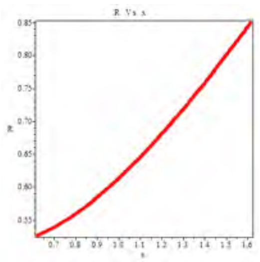
<table>
<tr><th></th><th>四面體種類</th><th>稜長 x 與表面積</th><th>說　明</th><th>表面積 $A(x)$
x 範圍限制</th></tr>
<tr><td rowspan="2">有
4
個
x</td><td>

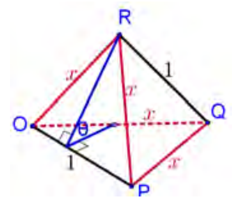
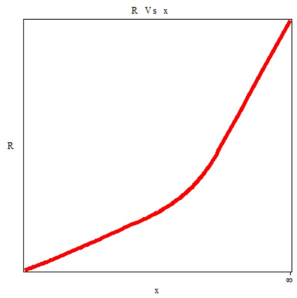
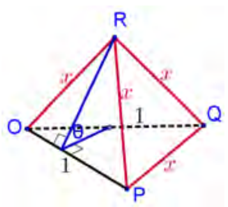
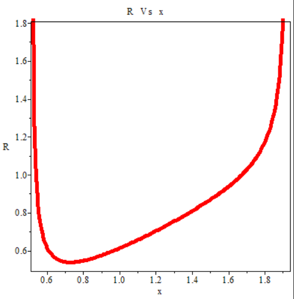
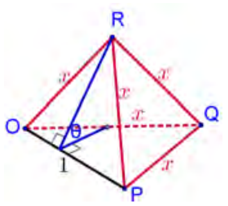
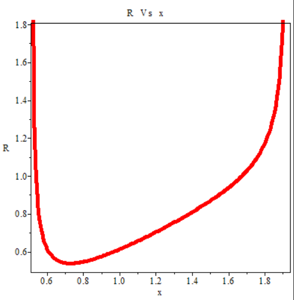
(7)不共頂點不共平面</td><td></td><td>表面積隨 x 遞增
$\lim_{x\to\infty} A(x)\to\infty$</td><td>$\sqrt{4x^2-1}$
$x>\frac{\sqrt{2}}{2}$</td></tr>
<tr><td>

(8)</td><td></td><td>表面積隨 x 遞增
有上界</td><td>$\frac{\sqrt{-x^4+4x^2+2\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{3}x^2}}{4}$
$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$</td></tr>
<tr><td>有
5
個
x</td><td>

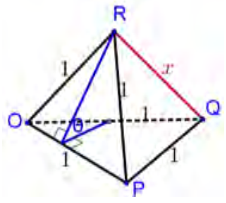
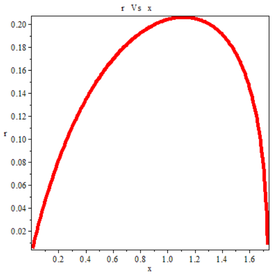
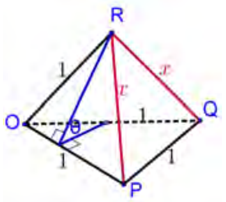
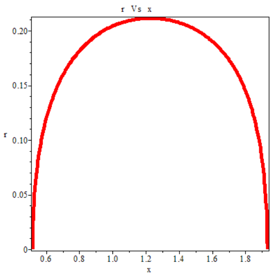
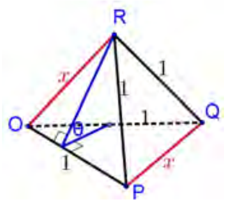
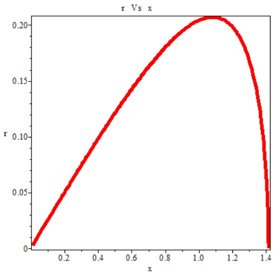
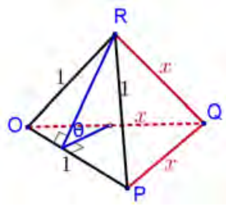
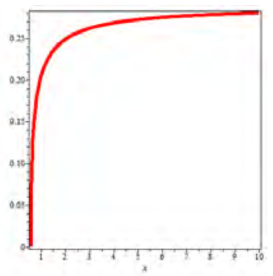
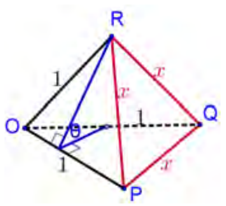
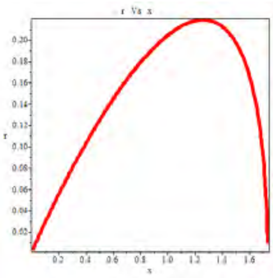
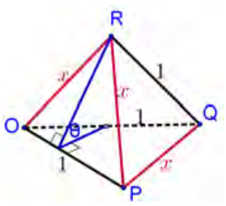
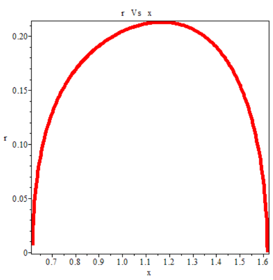
(9)</td><td></td><td>表面積隨 x 遞增
$\lim_{x\to\infty} A(x)\to\infty$</td><td>$\frac{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{3}x^2}{2}$
$x>\frac{\sqrt{3}}{3}$</td></tr>
<tr><td>結
論</td><td colspan="4">1.僅種類(1)(2) 表面積存在極大值，其餘均是嚴格遞增。
2.若未知數 x 範圍無上界時(種類(4)(7)(9)) ，當 $x\to\infty$ 時，表面積 $A(x)\to\infty$ 。
3.當未知數 x 個數越多時，若表面積有極值則其最大值越大。
4.當未知數 x 個數相同時，若未知數全部共頂點(種類(2)(4))時其表面積的最大值比不共頂點時較大。</td></tr>
</table>

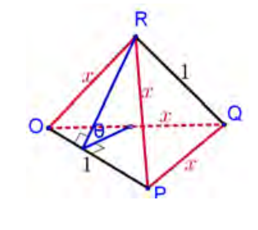
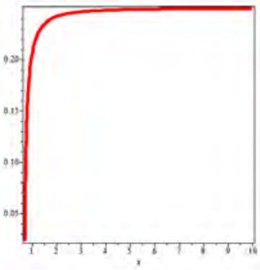
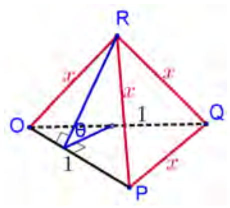
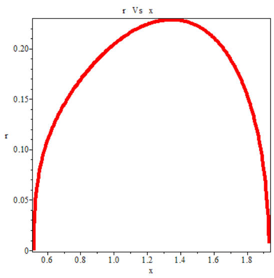
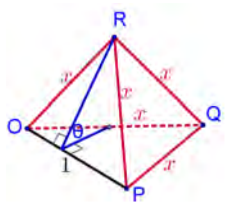
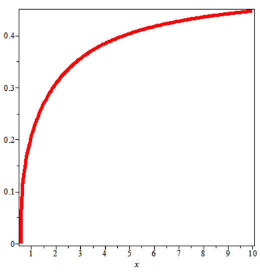
表(一)-(3)　兩種稜長$1, x$的討論：【外接球半徑與稜長變化】

	四面體種類	稜長 x 與外接球半徑	說　明	外接球半徑 $R(x)$ x範圍限制
只有一個x	 (1)		外接球半徑隨x遞增 有上、下界　但無極值	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^4-4x^2}{x^4-3x^2}}$ $0<x<\sqrt{3}$
有兩個x	 (2)共頂點		外接球半徑最小$\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.577$ 此時$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707$ 此時$\theta\approx 49.1°$ 但當$x\to\infty$時，$R\to\infty$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-4x^2+1}{x^4-4x^2+1}}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
	 (3)不共頂點		外接球半徑隨x遞增 有上、下界　但無極值	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^4-4}{2x^2-4}}$ $0<x<\sqrt{2}$
有三個x	 (4)共頂點		外接球半徑最小$\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.577$ 此時$x=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx 0.817$ 此時$\theta\approx 63.4°$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x^4}{3x^2-1}}$ $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$
	 (5)共平面		外接球半徑隨x遞增 有上、下界　但無極值	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{-x^2+3}}$ $0<x<\sqrt{3}$
	 (6)不共頂點不共平面		外接球半徑隨x遞增 有上、下界　但無極值	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^8-2x^6-x^4+2x^2+1}{x^6-2x^4-2x^2+1}}$ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

	四面體種類	稜長 x 與外接球半徑	說　明	外接球半徑 $R(x)$ x 範圍限制
有 4 個 x	 (7)不共頂點不共平面		外接球半徑隨 x 遞增 $\lim_{x\to\infty} R(x) \to \infty$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-4x^4+1}{-4x^2+2}}$ $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$
	 (8)		**外接球半徑最小 ≈ 0.539** 此時 $x\approx 0.7297$ 此時 $\theta \approx 68.4°$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^6-4x^4}{x^4-4x^2+1}}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
有 5 個 x	 (9)		外接球半徑最小 $=\frac{1}{2}$ 此時 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.7071$ 此時 $\theta = 90°$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-4x^4+x^2}{-3x^2+1}}$ $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$
結論	1.當未知數 x 個數越多時，若外接球半徑有極小值，則其外接球半徑的最小值越小。 2.當未知數 x 個數不大於 3，若未知數全部共頂點(種類(2)(4))時其外接球半徑存在極小值，其餘均呈現遞增。 3.種類(8)(9)，稜長未知數 x 雖未全部共頂點(因最多只能有三個)，但外接球半徑仍存在極小值。			

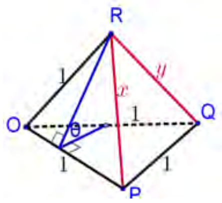
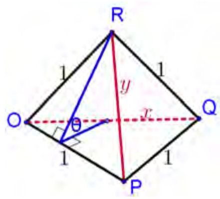
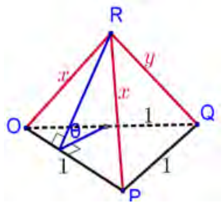
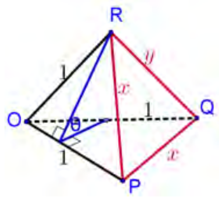
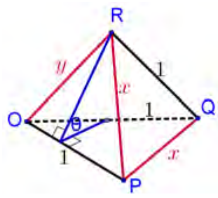
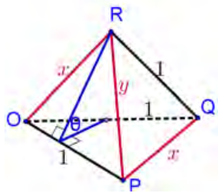
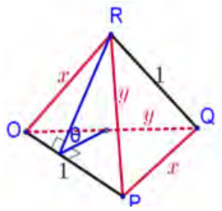
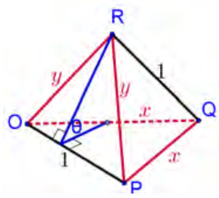
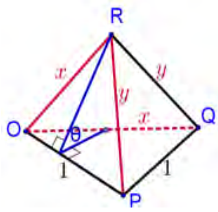
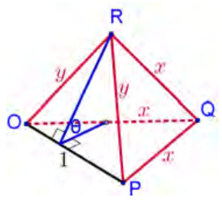
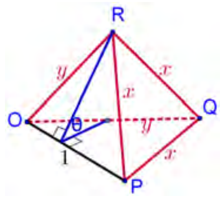
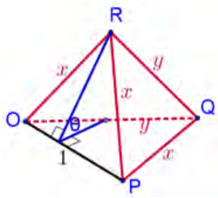
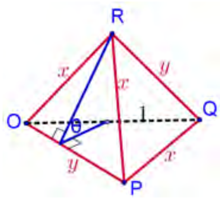
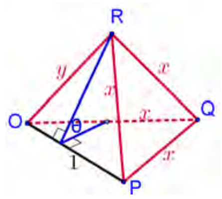
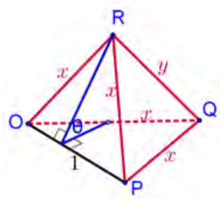
表(一)-(4)　兩種稜長的討論：【內切球半徑與稜長變化】

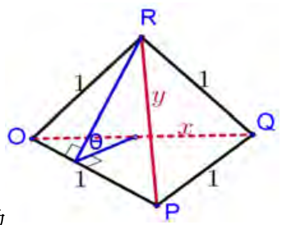
	四面體種類	稜長 x 與內切球半徑	說　明	內切球半徑 $r(x)$ x 範圍限制
只有一個 x	 (1)		內切球半徑最大 ≈ 0.206 此時 $x \approx 1.120$ 此時 $\theta \approx 80.6°$	$\dfrac{\sqrt{-x^4+3x^2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{-x^4+4x^2}}$ $0<x<\sqrt{3}$
有兩個 x	 (2)共頂點		內切球半徑最大 ≈ 0.212 此時 $x \approx 1.228$ 此時 $\theta \approx 81.6°$	$\dfrac{\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{\sqrt{3}+2\sqrt{-x^4+4x^2}+\sqrt{4x^2-1}}$ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
	 (3)不共頂點		內切球半徑最大 ≈ 0.207 此時 $x \approx 1.082$ 此時 $\theta \approx 65.5°$	$\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{-2x^4+4x^2}{-x^2+4}}$ $0<x<\sqrt{2}$
有三個 x	 (4)共頂點		內切球半徑隨 x 遞增 但 $\lim\limits_{x\to\infty} r(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{\sqrt{3x^2-1}}{3\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{3}}$ $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
	 (5)共平面		內切球半徑最大 ≈ 0.219 此時 $x \approx 1.262$ 此時 $\theta \approx 80.2°$	$\dfrac{\sqrt{-x^6+3x^4}}{3\sqrt{-x^4+4x^2}+\sqrt{3x^2}}$ $0<x<\sqrt{3}$
	 (6)不共頂點不共平面		內切球半徑最大 ≈ 0.213 此時 $x \approx 1.169$ 此時 $\theta \approx 58.4°$	$\dfrac{\sqrt{-x^6+2x^4+2x^2-1}}{2\sqrt{-x^4+4x^2}+2\sqrt{4x^2-1}}$ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

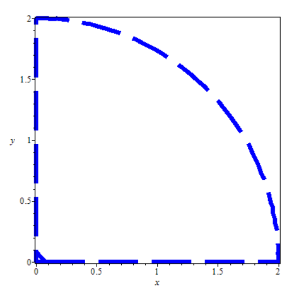
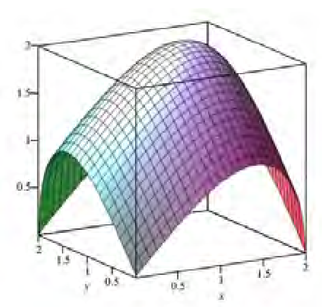
	四面體種類	稜長 x 與內切球半徑	說　明	內切球半徑 $r(x)$ x 範圍限制
有4個 x	 (7)不共頂點不共平面		內切球半徑隨 x 遞增 但 $\lim_{x\to\infty} r(x)=\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{4x^2-2}}{4\sqrt{4x^2-1}}$ $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$
	 (8)		內切球半徑最大 ≈ 0.229 此時 $x\approx 1.3475$ 此時 $\theta\approx 68.6°$	$\frac{\sqrt{-x^6+4x^4-x^2}}{\sqrt{-x^4+4x^2}+2\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{3}x^2}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
有5個 x	 (9)		內切球半徑隨 x 遞增 但 $\lim_{x\to\infty} r(x)=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3x^4-x^2}}{2\sqrt{4x^2-1}+2\sqrt{3}x^2}$ $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$
結論	1.當未知數 x 範圍有上下界時(種類(1)(2)(3)(5)(6)(8))，其內切球半徑存在極大值。 2.若未知數 x 範圍無上界時(種類(4)(7)(9))　，雖然稜長 $x\to\infty$，但內切球半徑 $r\to$ 定值 3.若內切球半徑極值存在(種類(1)(2)(3)(5)(6)(8))，當未知數 x 個數越多時，,則其內切球半徑的最大值越大。 4.當未知數 x 個數相同時，若未知數全部共頂點(種類(2)(4))時其內切球半徑的最大值比不共頂點時較大。			

(二)三種稜長：四面體的稜長僅有三種a,b,c，一樣為了方便討論且不失一般性，每個稜長均除以a，我們改成討論$\frac{a}{a},\frac{b}{a}=x,\frac{c}{a}=y\Rightarrow 1,x,y$

我們分析了 15 種情形

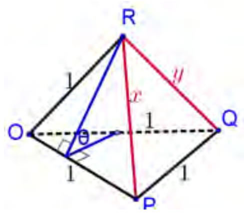
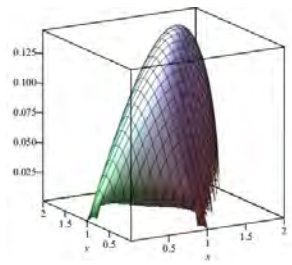
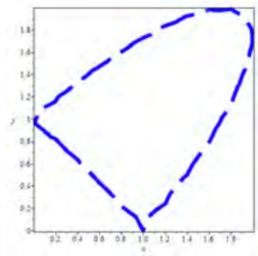
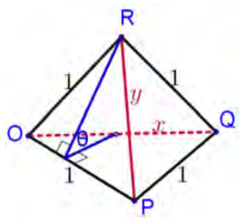
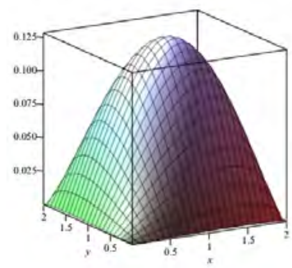
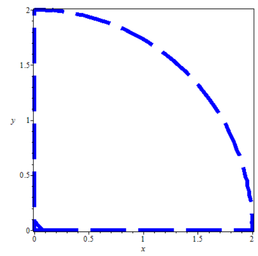
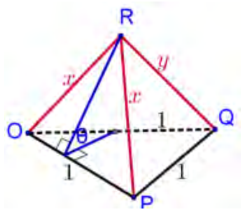
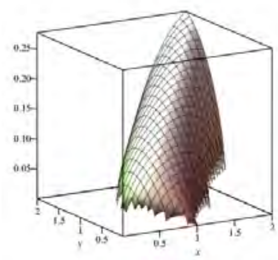
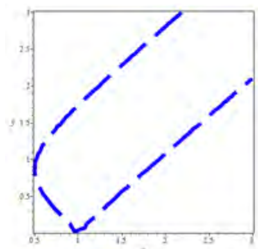
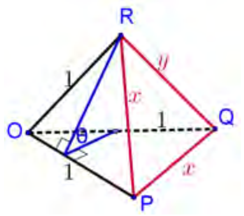
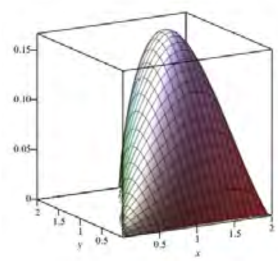
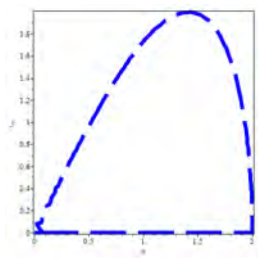
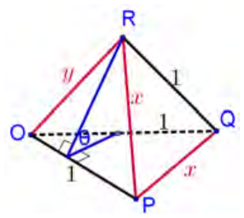
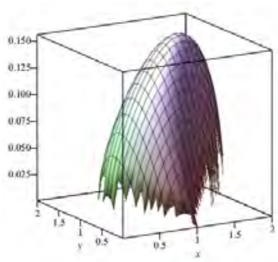
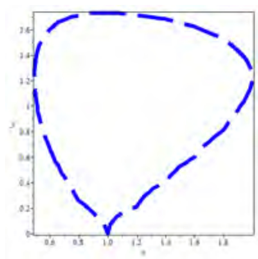
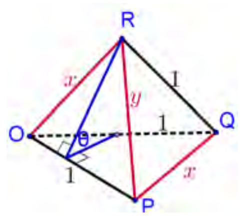
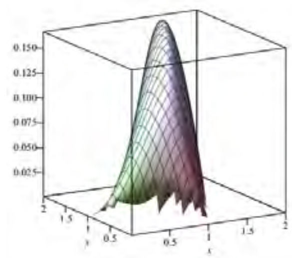
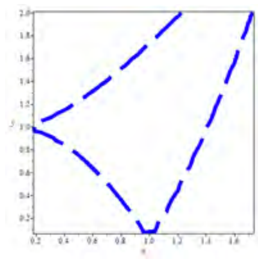
四個 1 一個 x 一個 y	 共頂點共平面	 不共頂點不共平面		
三個 1 兩個 x 一個 y	 共頂點	 共平面	 x,x 共平面	 x,x 不共平面
兩個 1 兩個 x 兩個 y	 三組均異面	 一組異面	 三組各自共面	
一個 1 三個 x 兩個 y	 x,x,x 共頂點	 x,x,x 共平面	 x,x,x 不共平面	 x,x,x 不共平面
一個 1 四個 x 一個 y				

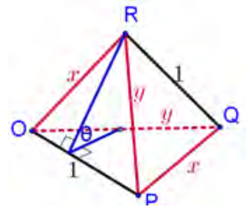
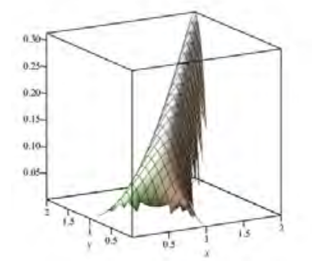
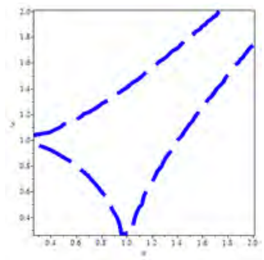
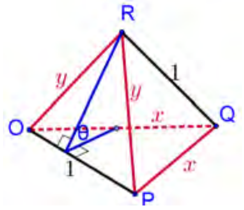
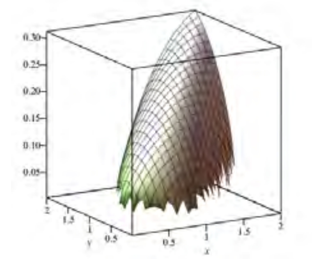
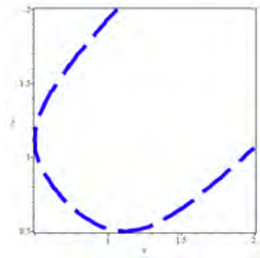
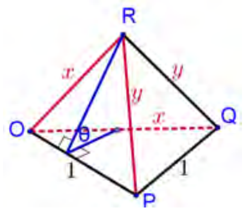
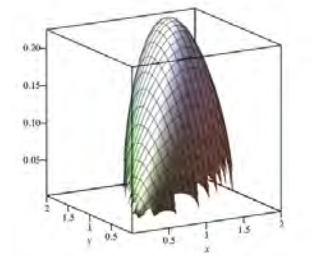
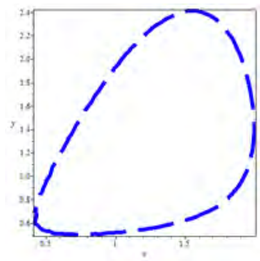
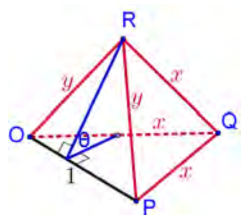
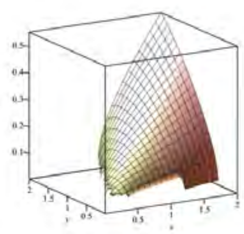
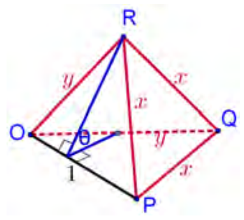
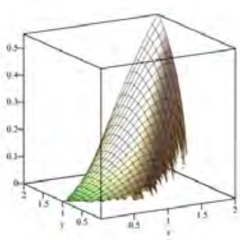
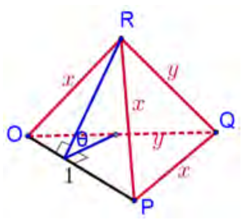
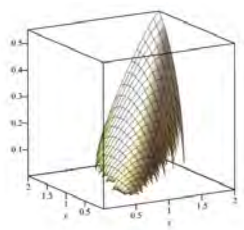
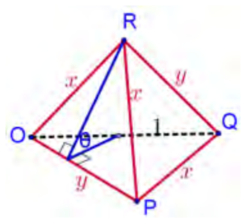
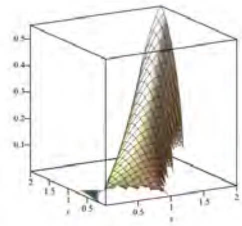
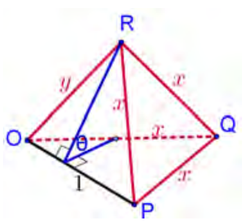
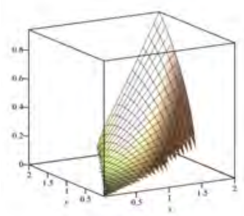
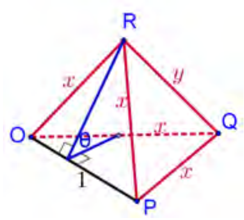
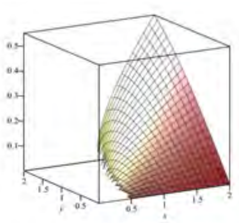
分析過程：以稜長為  為例

先求 x,y 的範圍限制	我們是採用式(9) $V^2=\frac{1}{144}(4x^2y^2-x^4y^2-x^2y^4)>0\cdots\cdots(14)$， 求出 x,y 的範圍，以二維圖形呈現。
體積函數	體積函數 $V^2(x,y)=\frac{1}{144}(4x^2y^2-x^4y^2-x^2y^4)$ 為求 $V^2(x,y)$ 最大值，分別將 $V^2(x,y)$ 對 x,y 作偏微分，並令其導數為 0, $\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}(V^2(x,y))=\frac{1}{144}(8xy^2-4x^3y^2-2xy^4)=\frac{xy}{72}(4y-2x^2y-y^3)=0\\ \frac{\partial}{\partial y}(V^2(x,y))=\frac{1}{144}(8x^2y-2x^4y-4x^2y^3)=\frac{xy}{72}(4x-x^3-2xy^2)=0\end{cases}$ $\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{3}}{3},y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 代入式(14)合
表面積函數	代入式(10)中可得面積函數 $A(x,y)=\frac{\sqrt{4x^2-x^4}+\sqrt{4y^2-y^4}}{2}$ 為求 $A(x,y)$ 最大值，分別將 $A(x,y)$ 對 x,y 作偏微分，並令其導數為 0, $\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}(A(x,y))=0\Rightarrow\frac{2x-x^3}{\sqrt{4x^2-x^4}}=0\\ \frac{\partial}{\partial y}(A(x,y))=0\Rightarrow\frac{2y-y^3}{\sqrt{4y^2-y^4}}=0\end{cases}\Rightarrow x=\sqrt{2},y=\sqrt{2}$ 代入式(14)$\Rightarrow V^2(\sqrt{2},\sqrt{2})=0$ 不合 $\Rightarrow$ **極值不存在**   x,y 的範圍限制　　表面積與 x,y 關係圖

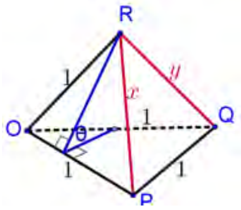
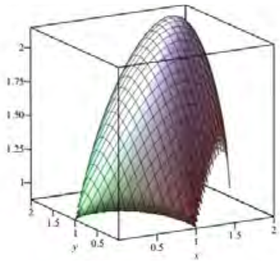
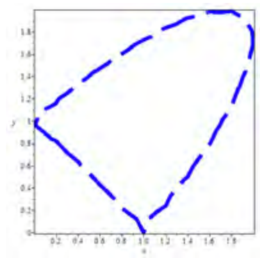
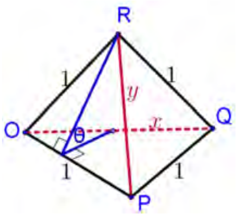
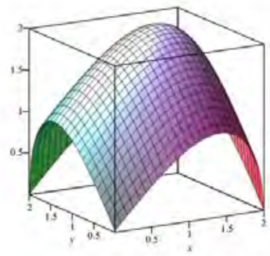
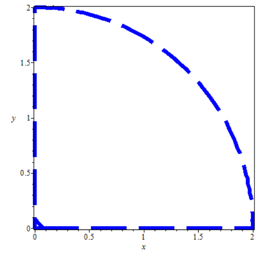
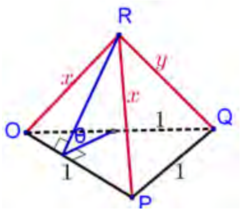
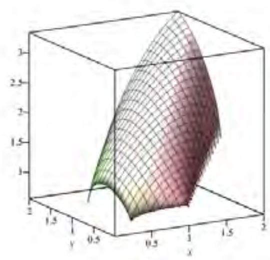
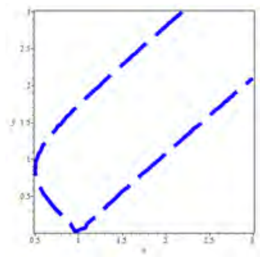
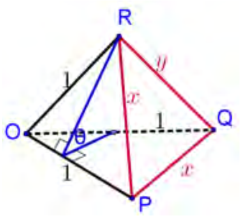
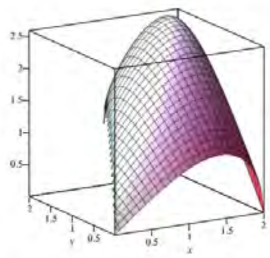
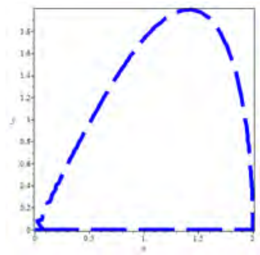
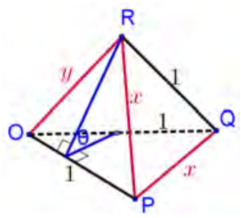
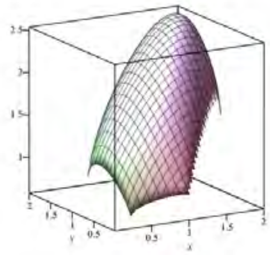
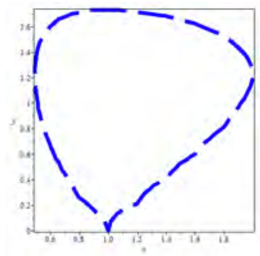
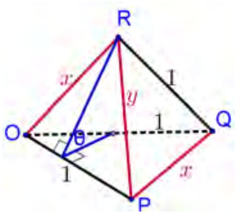
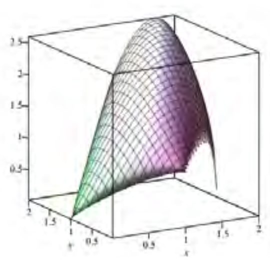
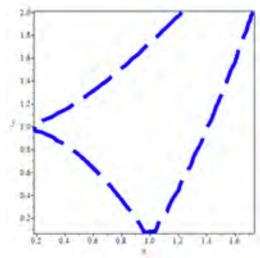
其他各類圖形，依此類推。

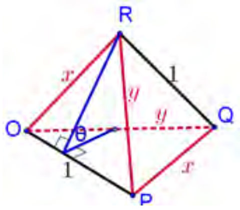
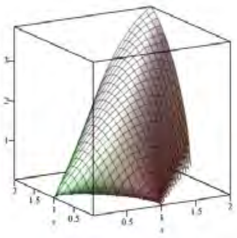
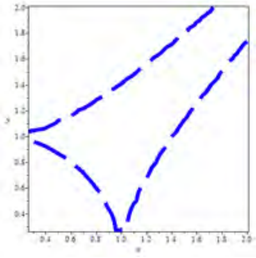
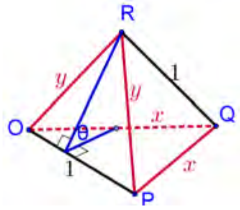
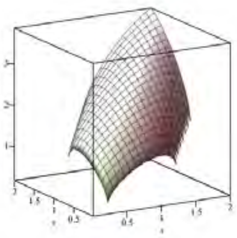
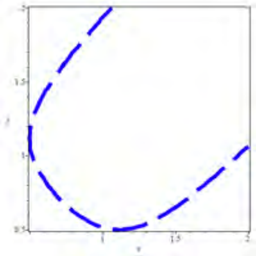
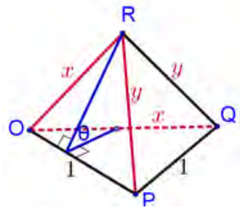
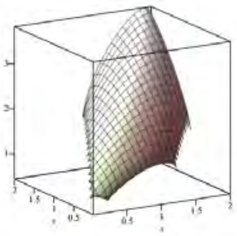
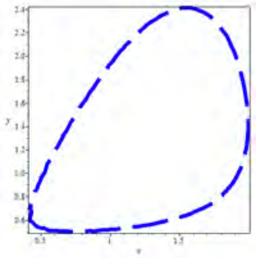
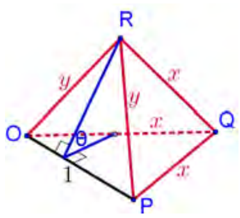
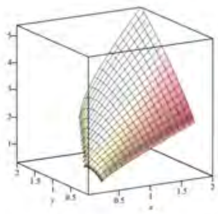
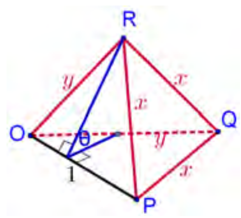
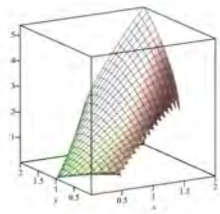
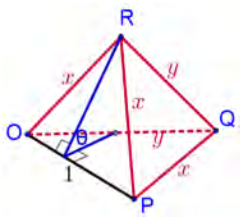
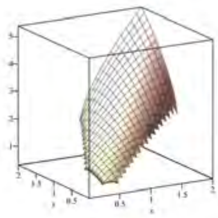
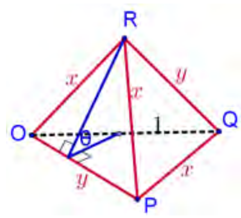
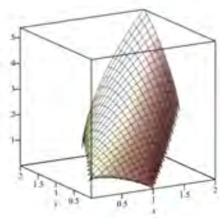
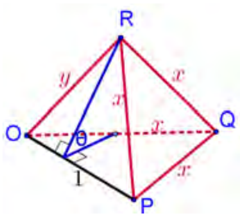
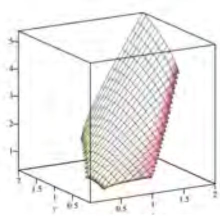
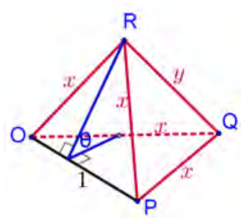
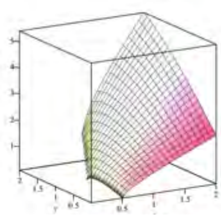
表(二)-(1)三種稜長的討論：【體積與稜長變化】

	四面體種類	稜長 x,y 與 體積	利用式(9)求 x,y 範圍	說　明
狀況1 一個 x 一個 y	 共頂點共平面			體積最大值 $\frac{\sqrt{3}}{12}\approx 0.144$ 此時 $x=\sqrt{2},y=\sqrt{2}$ 此時 $\theta=90°$
	 不共頂點不共平面			體積最大值 ≈ 0.128 此時 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3},y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 此時 $\theta=60°$
狀況2 兩個 x 一個 y	 共頂點			$x\to\infty,y\to\infty$ 體積遞增 $\to\infty$
	 共平面			體積最大值 $\frac{1}{6}\approx 0.167$ 此時 $x=\sqrt{2},y=\sqrt{2}$ 此時 $\theta=90°$
	 x,x 共平面			體積最大值 ≈ 0.156 此時 $x=\frac{\sqrt{34}}{4},y=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 此時 $\theta\approx 50.9°$
	 x,x 不共平面			體積最大值 ≈ 0.167 此時 $x=\sqrt{2},y=\sqrt{3}$ 此時 $\theta=45°$

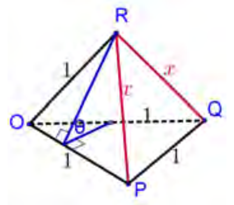
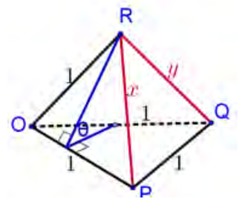
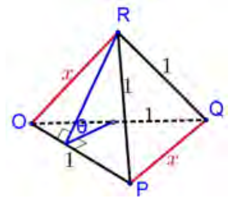
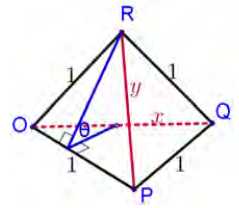
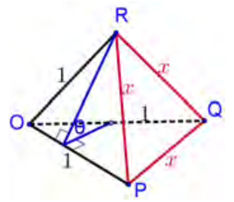
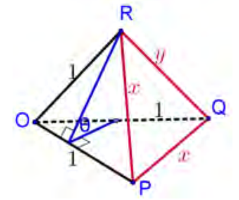
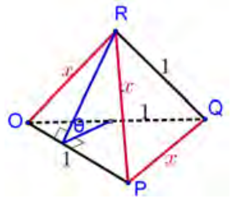
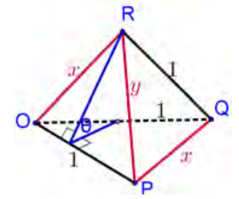
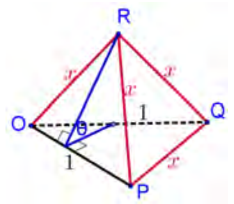
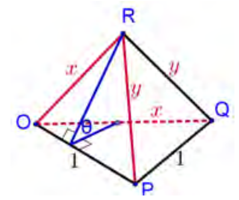
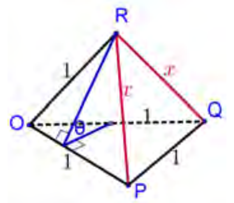
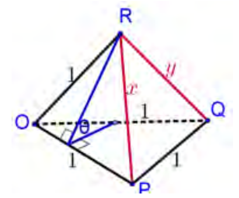
	四面體種類	稜長x,y與 體積	利用式(9)求x,y範圍	說　明
狀況3 兩個x兩個y	 三組均異面			$x\to\infty, y\to\infty$ 體積遞增$\to\infty$
	 一組異面			$x\to\infty, y\to\infty$ 體積遞增$\to\infty$
	 三組各自共面			x,y有範圍限制 體積最大值≈ 0.226 $x\approx 1.53, y\approx 1.76$ 此時$\theta\approx 64.4°$
3個x2個y				
				
4個x一個y				
結論	1.若體積的極限值存在，當未知數x,y越多時，則其最大值越大。 2.當未知數x,y個數相同時,若未知數**全部共頂點**時其體積的最大值比**不共頂點**時大。 3.三個x兩個y　和　四個x一個y　均為$x\to\infty, y\to\infty$　體積遞增$\to\infty$　。			

表(二)-(2)三種稜長的討論：【表面積與稜長變化】

	四面體種類	稜長 x,y 與表面積	利用式(9)求 x,y 範圍	說　明
狀況1 一個x一個y	 共頂點共平面			表面積最大值 ≈ 2.154 $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}, y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 此時 $\theta \approx 100.8°$
	 不共頂點不共平面			x,y 有範圍限制 表面積遞增 有上界 < 2.154
狀況2 兩個x一個y	 共頂點			$x \to \infty, y \to \infty$ 表面積遞增 $\to \infty$
	 共平面			x,y 有範圍限制 表面積遞增有上界
	 x,x 共平面			x,y 有範圍限制 表面積遞增有上界
	 x,x 不共平面			x,y 有範圍限制 表面積遞增有上界

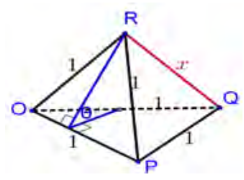
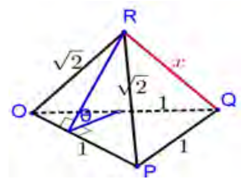
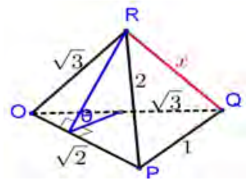
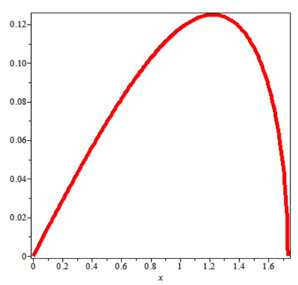
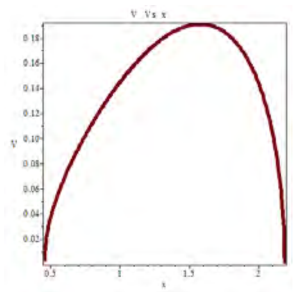
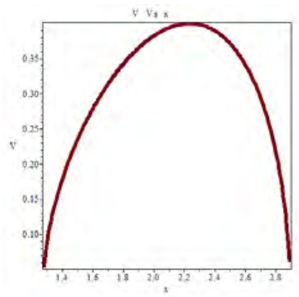
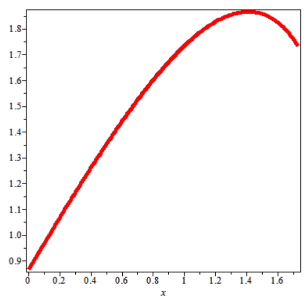
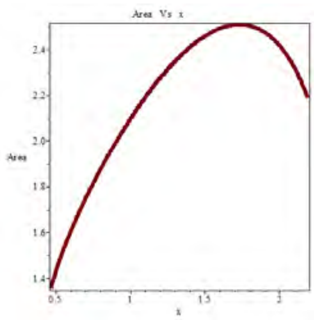
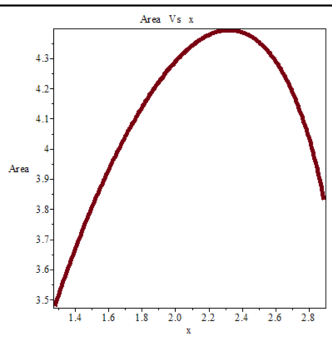
	四面體種類	稜長 x,y 與表面積	利用式(9)求 x,y 範圍	說　明
狀況3 兩個 x 兩個 y	 三組均異面			$x\to\infty, y\to\infty$ 表面積遞增 $\to\infty$
	 一組異面			$x\to\infty, y\to\infty$ 表面積遞增 $\to\infty$
	 三組各自共面			x,y 有範圍限制 表面積遞增有上界
3個 x 2個 y				
				
4個 x 一個 y				
結論	1.當未知數 x,y 個數相同時，若未知數全部共頂點時其表面積最大值比不共頂點時大。 2.三個 x 兩個 y　和　四個 x 一個 y　均為 $x\to\infty, y\to\infty$　表面積遞增 $\to\infty$			

表(二)-(3)兩種稜長與三種稜長比較【當體積與表面積的極值存在時】

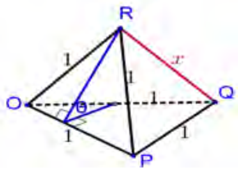
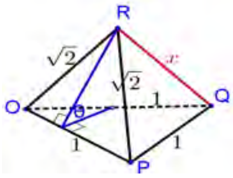
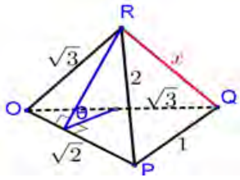
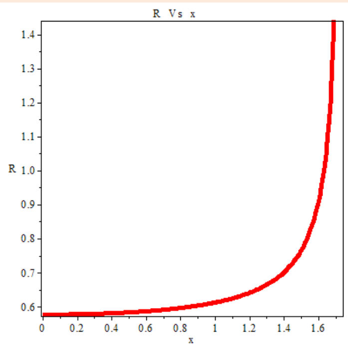
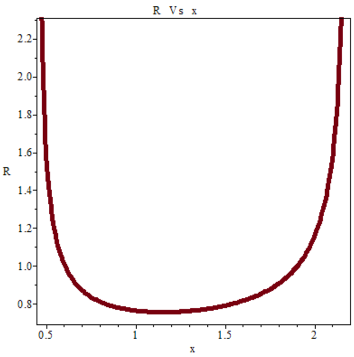
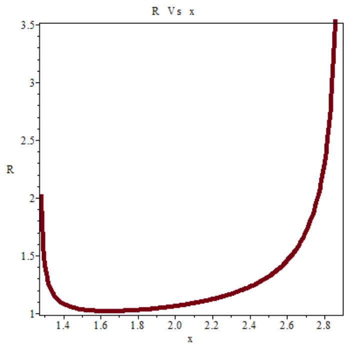
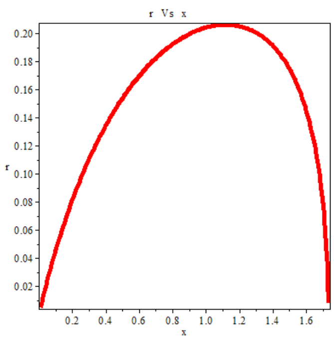
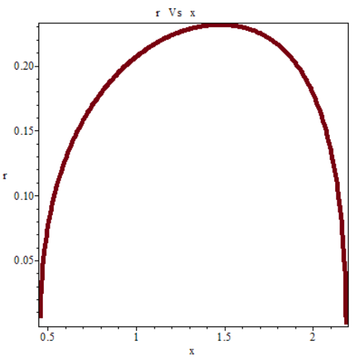
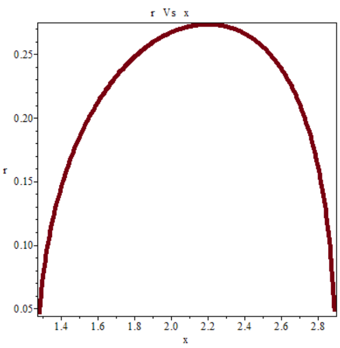
	兩種稜長四面體	說　明	三種稜長四面體	說　明
(1) 兩個共面		體積最大=$\frac{\sqrt{3}}{12}$ 此時 $x=\sqrt{2}$　$\theta=90°$		體積最大值$\frac{\sqrt{3}}{12}$ $x=\sqrt{2},y=\sqrt{2}$　$\theta=90°$
(2) 兩個不共面		體積最大=$\frac{2\sqrt{3}}{27}$ 此時 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$　$\theta=60°$		體積最大值$\frac{2\sqrt{3}}{27}$ $x=\frac{2\sqrt{3}}{3},y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$　$\theta=60°$
(3) 三個共面		體積最大=$\frac{1}{6}$ 此時 $x=\sqrt{2}$　$\theta=90°$		體積最大值=$\frac{1}{6}$ $x=\sqrt{2},y=\sqrt{2}$　$\theta=90°$
(4) 三個不共面		體積最大≈0.151 此時 $x=\sqrt{\frac{2+\sqrt{10}}{3}}$ 此時$\theta\approx48.8°$		體積最大值≈0.167 此時$x=\sqrt{2},y=\sqrt{3}$ 此時$\theta=45°$
(5) 四個未知數		體積最大≈0.219 此時 $x=\sqrt{\frac{4+\sqrt{13}}{3}}$ 此時$\theta\approx64.2°$		體積最大值≈0.226 $x\approx1.53,y\approx1.76$ 此時$\theta\approx64.4°$
(6) 兩個共面		表面積最大≈2.154 此時$x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 此時$\theta\approx100.8°$		表面積最大≈2.154 $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2},y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 此時$\theta\approx100.8°$
結論	1.只有兩個未知數，不管共面與不共面，兩種稜長與三種稜長的體積(圖(1)(2))與表面積(圖(6))的極大值均相同。 2.三個未知數時，共面時(圖(3))，兩種稜長與三種稜長的體積極大值相同，不共面(圖(4))時兩者不同；三種稜長的體積極大值較大。 3.四個未知數時，不可能全部共面(圖(5))，三種稜長的體積極大值較大。			

(三)四面體的五個稜長a,b,c,d,e為已知(可不相同)，第六個稜長為變數x

表(三)-(1)【體積、表面積與稜長x的變化】【與兩種稜長$(1,1,1,1,1,x)$比較】

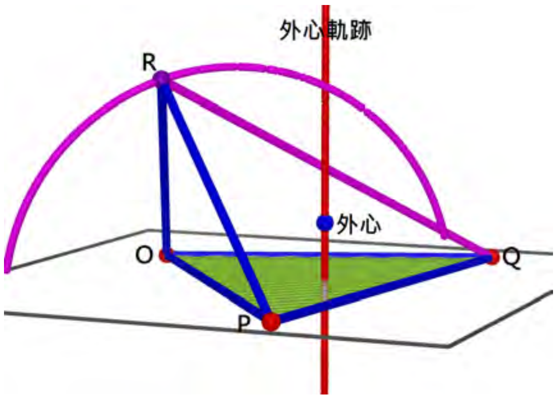
			
x範圍	$0<x<\sqrt{3}$	$0.47<x<2.19$	$1.28<x<2.89$
體積函數	$\dfrac{\sqrt{-x^4+3x^2}}{12}$	$\dfrac{1}{12}\sqrt{-x^4+5x^2-1}$	$\dfrac{1}{12}\sqrt{-2x^4+20x^2-27}$
體積最大	$\dfrac{1}{8}=$**0.125**	$\dfrac{\sqrt{27}}{24}\approx 0.191$	$\dfrac{\sqrt{23}}{12}\approx 0.399$
(x,θ)	$x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $\theta=90°$	$x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ $\theta=90°$	$x=\sqrt{5}$ $\theta=90°$
體積與稜長			
表面積最大	$\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}\approx 1.866$	$\approx$ 2.509	$\approx$ 4.394
(x,θ)	$x=\sqrt{2}$ $\theta\approx 109.5°$	$x=\sqrt{3}$ $\theta\approx 102.6°$	$x=\dfrac{3\sqrt{15}}{5}$ $\theta\approx 96.8°$
表面積與稜長			
結論	稜長為(a,b,c,d,e,x)的體積、表面積與僅有兩種稜長$(1,1,1,1,1,x)$的趨勢相同		

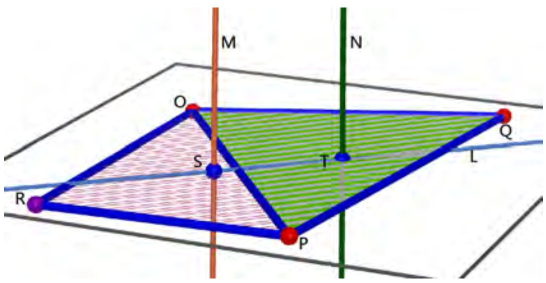
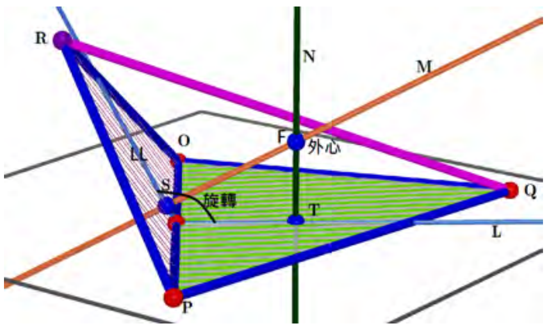
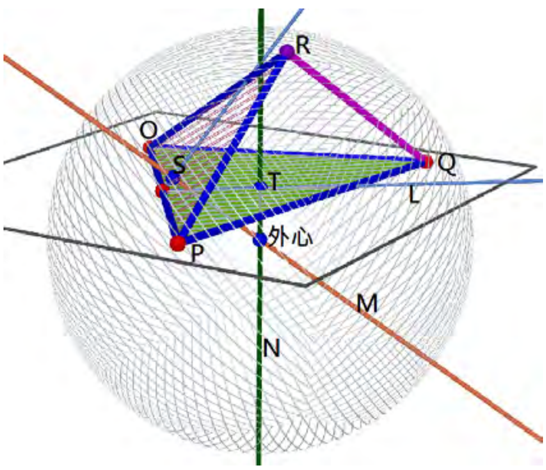
表(三)-(2)【外接球半徑、內切球半徑與稜長 x 的變化】【與兩種稜長 $(1,1,1,1,1,x)$ 比較】

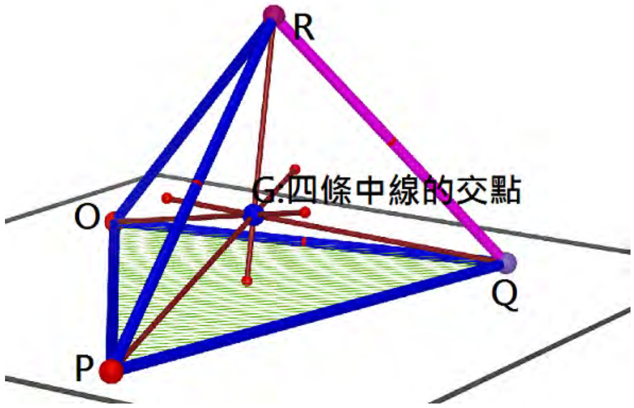
			
x 範圍	$0<x<\sqrt{3}$	$0.47<x<2.19$	$1.28<x<2.89$
外接球半徑 R 函數	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^4-4x^2}{x^4-3x^2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^4-8x^2}{x^4-5x^2+1}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x^4-60x^2+81}{2x^4-20x^2+27}}$
R 最小	外接球半徑隨 x 遞增 有上、下界　但無極值	$R=\frac{2}{7}\approx 0.756$	$R=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{23}}\approx 1.022$
(x,θ)		$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\approx 1.15$　$\theta\approx 59.4^\circ$	$x=\frac{3\sqrt{30}}{10}\approx 1.64$　$\theta\approx 47.3^\circ$
R			
內切球半徑 r 最大	$r\approx 0.206$	$r\approx 0.232$	$r\approx 0.274$
(x,θ)	$x\approx 1.120$　$\theta\approx 80.6^\circ$	$x\approx 1.48$　$\theta\approx 82.0^\circ$	$x\approx 2.20$　$\theta\approx 87.4^\circ$
r			
結論	**(1)**外接球半徑與僅有兩種稜長$(1,1,1,1,1,x)$的趨勢不相同， 此時外接球半徑有極小值 **(2)**稜長為(a,b,c,d,e,x)的內切球半徑與僅有兩種稜長$(1,1,1,1,1,x)$的趨勢相同		

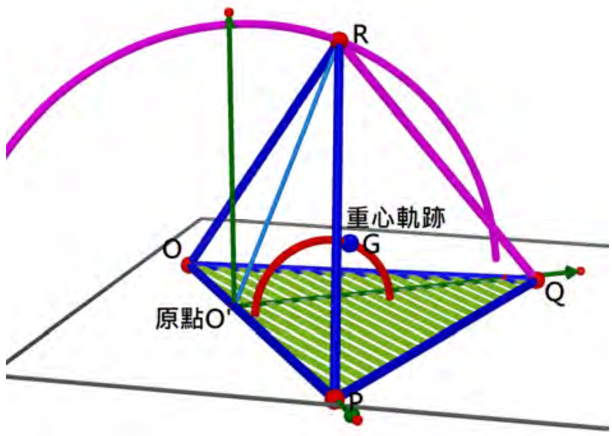
八、 軌跡：四面體稜長$a,b,c,d,e,$為已知（可不相同），第六個稜長為變數x，

改變x時，重心、外心、內心的軌跡

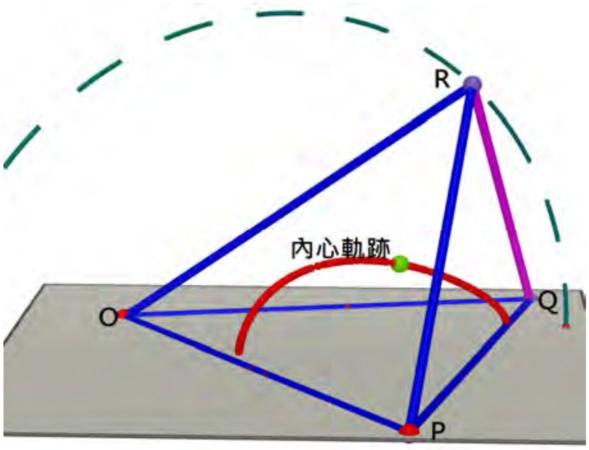
<table>
<tr><th>(一)外心軌跡</th><th>外接球的球心</th></tr>
<tr><td>
</td><td>改變第六個稜長$\overline{QR}=x$時，其

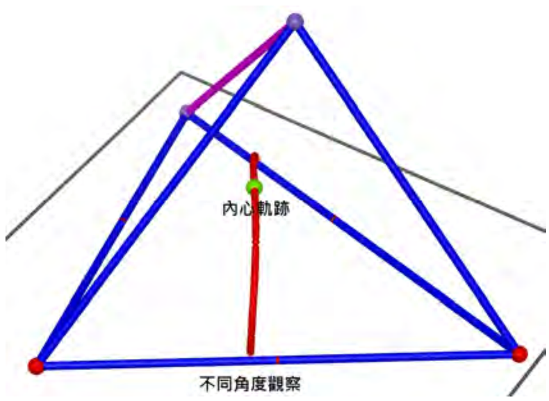
外心移動的<u>軌跡為一直線</u></td></tr>
<tr><td>
</td><td>【證明】
(1)當$\Delta OPR,\Delta OPQ$共平面時，作$\Delta OPR,\Delta OPQ$的外心分別為S,T，L為過S,T的直線，分別過S,T做垂直$\Delta OPR,\Delta OPQ$的直線M,N，此時$M // N$，且直線L,M,N共平面</td></tr>
<tr><td>
</td><td>(2)以$\overline{OP}$為軸，旋轉$\Delta OPR,$，此時四條直線LL,L,M,N依然共平面，$\because M,N$不平行，$\therefore$直線M,N必有交點，令此交點為F，因$\overline{FO}=\overline{FP}=\overline{FR}$，且$\overline{FO}=\overline{FP}=\overline{FQ}$，所以$F$為四面體外心，得證四面體的外接球球心必存在</td></tr>
<tr><td>
</td><td>(3)以$\overline{OP}$為軸，旋轉$\Delta OPR,$的過程中，
直線N均不變，外心又是直線M,N的交點，所以外心軌跡在直線N</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>(二)重心軌跡</td><td>定義：頂點至對面三角形重心的連線為中線，四條中線交於一點$G=\dfrac{O+P+Q+R}{4}$</td></tr>
<tr><td>




</td><td>改變第六個稜長$\overline{QR}=x$時，其重心移動的軌跡為一半圓形

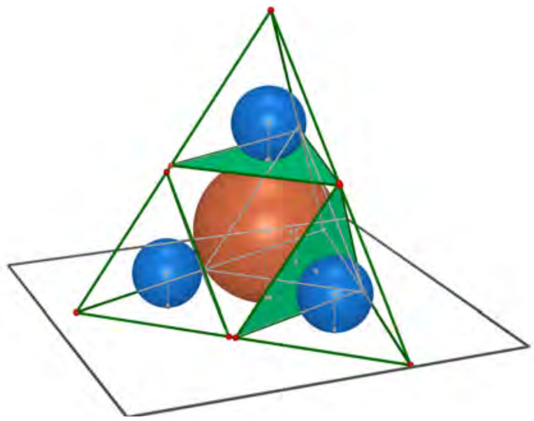
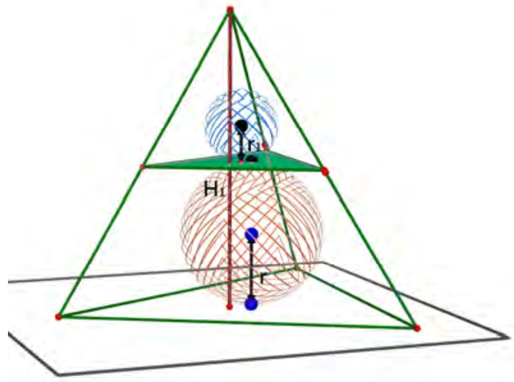
【證明】過R作$\overline{RO'}\perp\overline{OP}$，以$OPQ$為$xy$平面，以$\overline{OP}$為$x$軸，依右手定則定出空間座標，令$O'$為原點，$\overline{O'R}=h$，設$O(-t,0,0),P(u,0,0),Q(v,w,0),$
$R(0,h\cos\theta,h\sin\theta)$，則重心
$G:\begin{cases} x=\dfrac{-t+u+v+0}{4}=\text{固定值} \\ y=\dfrac{0+0+w+h\cos\theta}{4} \\ z=\dfrac{0+0+0+h\sin\theta}{4} \end{cases}$
$\Rightarrow\begin{cases} x=\text{固定值} \\ (y-\dfrac{w}{4})^2+z^2=\dfrac{h^2}{16} \end{cases}$，所以圖形為半圓</td></tr>
<tr><td>(三)內心軌跡</td><td>內切球的球心</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


不同的角度觀察，可清楚看出內心軌跡不在同一平面上，有待進一步探討。</td></tr>
</table>

九、 特別的等式

在討論內切球的過程中，我們另外發現一個小而美的等式，簡單討論如下：

<table>
<tr>
<td>(一)</td>
<td>



r 是四面體的內切球半徑，分別作平行底面且與球相切的平面，可得四個均與原四面體相似成比例的小四面體，又分別作此四個小四面體的內切球，此四顆小球半徑分別是 r_1, r_2, r_3, r_4，可證明 $\boxed{\dfrac{r_1}{r}+\dfrac{r_2}{r}+\dfrac{r_3}{r}+\dfrac{r_4}{r}=2 \Rightarrow r_1+r_2+r_3+r_4=2r \cdots\cdots(15)}$
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
【證明】因小四面體與原四面體相似成比例

所以 $\dfrac{r_1}{r}=\dfrac{H_1-2r}{H_1}=1-\dfrac{2r}{H_1}$　　H_1，A_1 分別表示 r_1 所對平面上的高與三角形面積

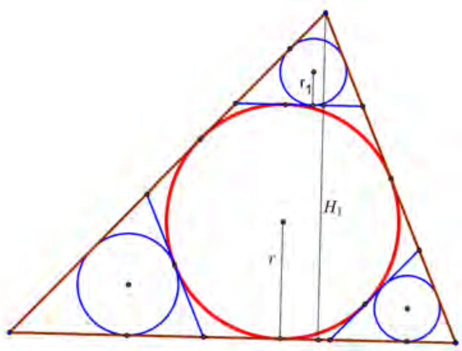
$$\frac{r_1}{r}+\frac{r_2}{r}+\frac{r_3}{r}+\frac{r_4}{r}=(1-\frac{2r}{H_1})+(1-\frac{2r}{H_2})+(1-\frac{2r}{H_3})+(1-\frac{2r}{H_4})$$

$$=4-2r(\frac{1}{H_1}+\frac{1}{H_2}+\frac{1}{H_3}+\frac{1}{H_4})=4-2r(\frac{A_1}{3V}+\frac{A_2}{3V}+\frac{A_3}{3V}+\frac{A_4}{3V})$$

$$=4-\frac{2}{3V}[3(\frac{rA_1}{3}+\frac{rA_2}{3}+\frac{rA_3}{3}+\frac{rA_4}{3})]=4-\frac{2}{3V}(3V)\quad=2$$

$$\Rightarrow r_1+r_2+r_3+r_4=2r$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>(二)</td>
<td>
三角形亦有類似的性質：r 是三角形的內切圓半徑，過圓與三角形的切點分別作平行底邊的直線，可得四個均與原三角形相似成比例的小三角形，又分別作此三個小三角形的內切圓，此三個小內切圓半徑分別是 r_1, r_2, r_3，可證明

$\boxed{\dfrac{r_1}{r}+\dfrac{r_2}{r}+\dfrac{r_3}{r}=1 \Rightarrow r_1+r_2+r_3=r}$


</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
【證明】因小三角形與原三角形相似成比例　所以 $\dfrac{r_1}{r}=\dfrac{H_1-2r}{H_1}=1-\dfrac{2r}{H_1}$

$$\frac{r_1}{r}+\frac{r_2}{r}+\frac{r_3}{r}=(1-\frac{2r}{H_1})+(1-\frac{2r}{H_2})+(1-\frac{2r}{H_3})=3-2r(\frac{1}{H_1}+\frac{1}{H_2}+\frac{1}{H_3})$$

$$=3-2r(\frac{a}{2A}+\frac{b}{2A}+\frac{c}{2A})=3-\frac{2}{A}[\frac{1}{2}(ra+rb+rc)]=3-\frac{2}{A}(A)=1$$
</td>
</tr>
</table>

伍、 研究結果與結論

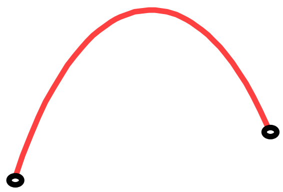
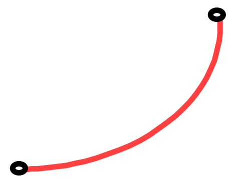
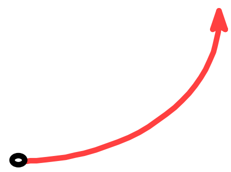
(1)構成四面體稜長的限制條件可用體積函數 $V(A,a,B,b,C,c)>0$ (式(9))或函數 $F(A,a,B,b,C,c)>0$ (式(1))得之。

(2)當四面體稜長未知數個數相同時，在所有未知數均共頂點時，其體積,表面積,內切球半徑的最大值比不共頂點時大；外接球半徑的最小值則比較小。

(3)兩種稜長的四面體，在至少有一稜長為定值的情況下，雖然其他稜長 $\boxed{x\to\infty}$，內切球半徑的最大值仍然會趨近於一定值，r 不會 $\to\infty$。

(4)只有兩個未知數，不管未知數是否共面或不共面，兩種稜長與三種稜長的四面體體積與表面積的極大值相同。當有三個未知數，未知數共面時，兩種稜長與三種稜長的四面體體積極大值相同，不共面時兩者不同；三種稜長的四面體體積極大值較大。

(5)因稜長限制條件為為一開區間($p<x<q$)，體積,表面積,內切球半徑等函數隨稜長變數 x (或 x,y)的變化有下列情形

(1)	(2)	(3)
		
有產生極值的點 有極值	無產生極值的點 嚴格遞增,有界 但 無極值	無產生極值的點 嚴格遞增,無上界 無極值

(6)四面體稜長為 a,b,c,d,e,x，當改變 x 時，其外心軌跡為一直線，重心軌跡為半圓。

(7)四面體內切球半徑存在特殊的等式(式 15) $\boxed{r_1+r_2+r_3+r_4=2r}$。

陸、 心得與展望

在這次的研究過程中，我們獲益最多的應該是發現問題時如何尋找方法及運用工具解決問題，另外在討論數學問題的一些趨勢及結論是很有趣也很值得令人思考的。而借由軟體工具的輔助並配合分析證明，解決問題真的較易完成，完成此次的科展真的讓我們受益良多！

未來我們希望可以進一步分析四面體的內心軌跡圖形，以及其它多面體的相關研究。

柒、 參考資料及其他

一、GeoGebra, Maple, Cabri3D 使用手冊。

二、林志成、郭文杰、鍾思齊、李宗燁 (2006)。『三角形到四面體的完全類比』。第四十六屆中小學全國科展作品。

三、林天心、盧立穎 (2008)。『多面體之外接球』。第四十八屆中小學全國科展作品。

四、【德】 *Heinrich Dorrie*，『100 個著名初等數學問題歷史和解答』，凡異出版社。

五、左銓如、季素月著，『初等幾何研究』，九章出版社。

【評語】040417

1. 整篇作品的字數雖多,也充滿數學符號,然而卻缺乏中心思想。優良的科展作品應該帶來驚喜而不是愁眉苦臉。

2. 四面體是具體的幾何物件，而代數式子當中具有視覺意味的卻十分稀少。本作品對於兩者的搭配缺乏協調。

3. 科展報告的步調十分緊湊，研究標題不宜取得太廣泛，否則會令人誤解這是一項需要花一輩子來進行的未完成工程。