中華民國第53屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040416

峰迴路轉・喜相逢

學校名稱：花蓮縣私立海星高級中學

作者：	指導老師：
高二 黃泓凱 高二 郭遠川 高二 陳泓錡	呂正基

關鍵詞：相遇、卡塔蘭、隨機漫步

摘要

下課時，許多人會在走廊上行走。如果只是想往某間教室的同學，會有特定的行走方向；倘若純粹散步、突然想起有東西忘了拿或另有他事，則會有折返的情形。觀察之餘可發現，不同的走動方式會有不同的相遇方式和相遇機率。由於狹窄的走廊若忽略之間的幾間教室，可視作一條一維的直線通道，則兩人相遇的情形可以分為：1. 兩人皆不停走動　或　2. 一人停下綁鞋帶時另一人不停走動，即為只有一人走動而相遇的情形。本文在建立一個機率模型來討論兩人相遇的方法數。

於是假設數線上有相距 d 單位的 A,B 兩人，每次移動分別朝左右其中一個方向移動 n,m 單位，在文章中我們求出了**兩人恰在第 t 次移動時相遇的方法數**，因此也解決了一開始的機率問題。

壹、研究動機：

課堂上老師結合當時教的排列組合，提出關於日常發生在走廊上相遇的機率問題。受到好奇驅使，並藉由此次科展的機會，本組開始進行此項研究。

貳、研究目的：

建立一個機率模型，並由給定的模型解決：兩個學生在走廊上相遇的機率。

參、研究設備及器材：

筆、電腦、網路資料、Mathematica30 天試用版

肆、研究過程或方法：

由於現實生活中，人的移動方式具有連續性，每個時間點都可能隨機改變速度，處理起來會很複雜。因此在本文中我們假定兩人速率不變，在每次移動後才可能改變移動方向。這裡建立的是一個離散模型。且 A,B 兩人起始位置為數線上相距為 d 的兩點。

一、名詞定義：

定義一、若 A,B 每秒鐘分別朝左右其中一個方向移動 n,m 單位，（其中 $n,m\in N\cup\{0\}$，$n\geq m$ ）則定義符號

$$w^{(n,m)}(t,d)=\text{兩人恰在第}\,t\,\text{秒時相遇在整數點上的方法數}$$

為了討論方便，在不會混淆的語意下 $w^{(n,m)}(t,d)$ 也代表這些方法所形成的集合。

而更廣義的相遇定義如下：

定義二、若 A,B 每次移動分別朝左右其中一個方向移動 n,m 單位，（其中 $n,m\in N\cup\{0\}$，$n\geq m$ ）則定義符號

$$W^{(n,m)}(t,d)=\text{兩人恰在第}\,t\,\text{次移動時相遇的方法數}$$

如果兩人每秒(次)的移動都是獨立事件，且向左或向右的機率相同，則我們可以得到一個簡單的性質：

性質一： $p^{(n,m)}(t,d)=$兩人恰在第 t 秒時相遇在整數點上的機率 $=\begin{cases} w^{(n,m)}(t,d)\times\dfrac{1}{4^t}, nm\neq 0 \\ w^{(n,m)}(t,d)\times\dfrac{1}{2^t}, nm=0 \end{cases}$

$P^{(n,m)}(t,d)=$兩人恰在第 t 秒時相遇的機率 $=\begin{cases} W^{(n,m)}(t,d)\times\dfrac{1}{4^t}, nm\neq 0 \\ W^{(n,m)}(t,d)\times\dfrac{1}{2^t}, nm=0 \end{cases}$

於是如何求出移動方法數便成了接下來研究的重點。

二、由特殊情況開始——$w^{(1,1)}(t,d)$的公式

首先假定 A, B 兩人每秒移動一單位，然後一一畫出$1\le t\le 5,\quad 1\le d\le 10$的方法數來找尋規則。由於 A,B 兩人每次移動只可能為接近兩單位或離開兩單位，所以若要相遇在格子點，則一開始的距離必須為偶數。得到下表：

t ＼ d	2	4	6	8	10
1	1	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0
3	5	4	1	0	0
4	14	14	6	1	0
5	42	48	27	8	1

在計算過程中我們發現了

$$w^{(1,1)}(t,d)=w^{(1,1)}(t-1,d+2)+w^{(1,1)}(t-1,d-2)+2w^{(1,1)}(t-1,d)$$

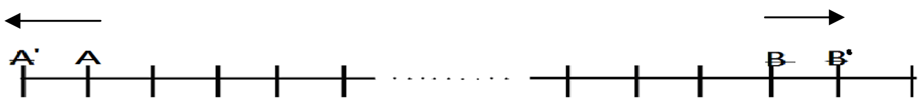
其中$w^{(1,1)}(t,0)$和$w^{(1,1)}(0,d)$定義為0。

這個性質可以由加法原理說明：

性質二：$w^{(1,1)}(t,d)=w^{(1,1)}(t-1,d+2)+w^{(1,1)}(t-1,d-2)+2w^{(1,1)}(t-1,d)$

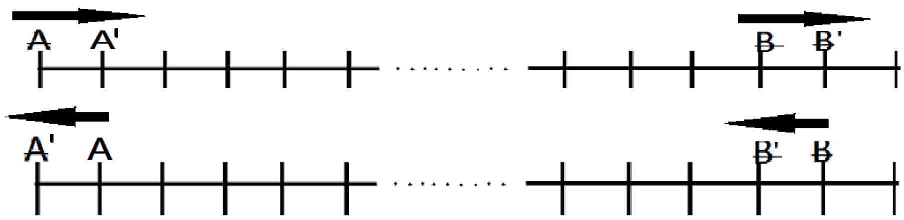
證明：求$w^{(1,1)}(t,d)$時，在一秒後的情形可以分為以下三種：

Case1. 同時往外，距離加二，於是恰在第$(t-1)$秒相遇的方法數為$w^{(1,1)}(t-1,d+2)$。



Case2. 同時往內，距離減二，於是恰在第$(t-1)$秒相遇的方法數為$w^{(1,1)}(t-1,d-2)$。

Case3. 同時向右或同時向左，距離不變，於是恰在第$(t-1)$秒相遇的方法數各為$w^{(1,1)}(t-1,d)$。



由加法原理知，

$$w^{(1,1)}(t,d)=w^{(1,1)}(t-1,d+2)+w^{(1,1)}(t-1,d-2)+2w^{(1,1)}(t-1,d)\text{。}\qquad\square$$

接下來要做的，就是找出 $w^{(1,1)}(t,d)$ 的一般式。

在求一般式的過程中，不過無論用何種方法去計算，得到的結果依然很複雜。於是便將目標轉向找出表格中每一行數列的其他性質。

而當將 $d=2$ 時在 excel 產生的數列輸入在 google 後，才發現數列的前幾項 1,2,5,14,42,… 竟然與有名的卡塔蘭數列相同！於是我們便研究了卡塔蘭數列的性質，並猜測 $w^{(1,1)}(t,d)$ 與卡塔蘭數列的關係，終於得到了以下性質：

性質三、 $w^{(1,1)}(t,2)=c_t=\dfrac{1}{t+1}C_t^{2t}$，$t\geq 1$，其中 $\{c_n\}_{n\geq 0}=1,1,2,5,14,\ldots$ 為卡塔蘭數列(Catalan Number)。

在接下來的文章中，$\{c_n\}_{n\geq 0}$ 都代表卡塔蘭數列。欲證明這個條件需要借助參考資料[2]中關於卡塔蘭數的模型：

卡塔蘭數 $c_n=$｛由 n 個1及 n 個 -1 所組成的數列，並滿足部份和皆大於等於 0 ｝的總數。

以 $n=3$ 為例，以下為 c_3 的情形：

$$
\begin{gathered}
1,1,1,-1,-1,-1\\
1,1,-1,1,-1,-1\\
1,1,-1,-1,1,-1\\
1,-1,1,1,-1,-1\\
1,-1,1,-1,1,-1
\end{gathered}
$$

由參考資料知道

$$c_n=\frac{1}{n+1}\times\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}\ 。$$

接下來說明對於每個 t，都可以找到一種將 $w^{(1,1)}(t,2)$ 與上述模型 1-1 對應的方法。

首先定義符號：

數線上的 A,B 每次移動時，以 p 代表兩人遠離, q 代表兩人接近, r 代表兩人皆向右移動, s 代表兩人皆向左移動, 則對 $w^{(1,1)}(3,2)$，全部的方法有

pqq , rsq , rrq , ssq , srq

五種。觀察後可以發現，因為要在第三秒相遇，所以倒數一步時必須恰好相距兩單位，然後最後一步必為 q, 於是這五種可再簡化為

pq , rs , rr , ss , sr

與資料的模型比較後，發現第一步必為 1 (否則部分和會小於 0), 最後一步必為 -1 (才

能剛好減到 0), 於是拿掉頭尾兩步後得到

$$\begin{array}{c} 1,1,-1,-1 \\ 1,-1,1,-1 \\ 1,-1,-1,1 \\ -1,1,1,-1 \\ -1,1,-1,1 \end{array}$$

將這四個步驟再分開成前兩步及後兩步, 即為

$$\begin{array}{cc} 1,1 & -1,-1 \\ 1,-1 & 1,-1 \\ 1,-1 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 \\ -1,1 & -1,1 \end{array}$$

如果將 (1,1) 換成 p , (-1,-1) 換成 q, (1,-1)換成 r, (-1,1)換成 s, 則上面五種方法就換成了

pq , rr , rs , ss, sr

恰為 $w^{(1,1)}(3,2)$ 的五種方法!

只要使用這樣的技巧，便能得到性質三的證明：

性質三的證明：

首先 c_t 為 t 個 1, t 個 -1 排成一列, 且部份和不小於 0 的所有數列總數，我們稱擁有這個性質的數列為--<u>條件 A 數列</u>。顯然此數列的第一項及最後一項必為 1 和 -1。接著將這個數列依序每兩項組成一個數對，則共有 $(t-1)$ 個數對，形式為

$$(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)\text{ 。}$$

再將以上的數對依討論時的定義方式換成 p,q,r,s，則每一個具有條件 A 的數列可化為 p,q,r,s 四個字母的 (t-1)-字串。(意即由 (t-1) 個 p,q,r,s 所組成的字串)

再來因為數對 $(1,-1)$ 和 $(-1,1)$ 的 $1,-1$ 個數相同, 所以若出現了 k 個 $(1,1)$ 數對, 則必定會出現 k 個 $(-1,-1)$ 數對，也就是在 (t-1)-字串中 p 和 q 出現的次數一樣多。

接著說明這樣的一個字串恰為 $w^{(1,1)}(t,2)$ 的一種方法。

因為<u>條件 A 數列</u>的部份和皆不為負, 且當出現數對 $(1,-1)$ 和 $(-1,1)$ 時部份和的值不會改變, 所以對於對應的 (t-1)-字串來說, 無論哪一部份 p 的數目一定不會少於 q 的數目。

此時所對應到的移動方式, 由於 r 跟 s 都不會改變距離, 所以只要每一個時刻 p 的數目不會少於 q 的數目, 在最後一步之前所增加的距離就不會小於減少的距離, 故 A,B 就不會提早相遇。從 p 和 q 的數目相同得知, 字串走完後恰回到了一開始的距離(起始距離為 1), 下一步為 -1 則立刻相遇。

因為每一個條件 A 數列恰對應到一個 $w^{(1,1)}(t,2)$ 的走法, 便得到

$$c_t \le w^{(1,1)}(t,2)\text{。}$$

同樣地, 將以上的討論倒述後可得每一個 $w^{(1,1)}(t,2)$ 對應到一組 p,q,r,s (t-1)-字串，又每組 p,q,r,s (t-1)-字串恰對應到一種條件 A 數列, 所以

$$w^{(1,1)}(t,2) \le c_t\text{。}$$

因此 $w^{(1,1)}(t,2) = c_t$。 □

知道 $w^{(1,1)}(t,2)$ 是卡塔蘭數後，就可以由性質一

$$w^{(1,1)}(t,d) = w^{(1,1)}(t-1,d+2) + w^{(1,1)}(t-1,d-2) + 2w^{(1,1)}(t-1,d)$$

和

$$w^{(1,1)}(t,0) = 0$$

得到

$$w^{(1,1)}(t,2) = w^{(1,1)}(t-1,4) + 2w^{(1,1)}(t-1,2),$$

將公式調整一下得

$$\begin{aligned} w^{(1,1)}(t,4) &= w^{(1,1)}(t+1,2) - 2w^{(1,1)}(t,2) \\ &= \frac{1}{t+2} \times \frac{(2t+2)!}{(t+1)!(t+1)!} - 2 \times \frac{1}{t+1} \times \frac{(2t)!}{t!t!} \\ &= 2 \times \frac{t-1}{t+2} \times c_t \text{。} \end{aligned}$$

再使用一次

$$w^{(1,1)}(t,d) = w^{(1,1)}(t-1,d+2) + w^{(1,1)}(t-1,d-2) + 2w^{(1,1)}(t-1,d),$$

和

$$c_{t+1} = \frac{1}{t+2} \times \frac{(2t+2)!}{(t+1)!(t+1)!} = \frac{4t+2}{t+2} c_t \quad ,$$

可以得到

$$\begin{aligned} w^{(1,1)}(t,6) &= w^{(1,1)}(t+1,4) - 2w^{(1,1)}(t,4) - w^{(1,1)}(t,2) \\ &= 3 \times \frac{(t-1)(t-2)}{(t+2)(t+3)} \times c_t \quad . \end{aligned}$$

從 $w^{(1,1)}(t,2)$, $w^{(1,1)}(t,4)$, $w^{(1,1)}(t,6)$ 的形式我們猜測：

$$w^{(1,1)}(t,2d') = d' \times \frac{(t-1)\times(t-2)\times\ldots\times(t-d'+1)}{(t+2)\times(t+3)\times\ldots\times(t+d')} \times c_t \quad ,$$

或

$$w^{(1,1)}(t,2d')=d'\times\frac{(t-1)\times(t-2)\times\ldots\times(t-d'+1)}{(t+2)\times(t+3)\times\ldots\times(t+d')}\times[\frac{1}{t+1}\times\frac{(2t)!}{t!t!}]$$
$$=d'\times\frac{(t-1)!}{(t+d')!}\times\frac{(t+1)!}{(t-d')!}\times\frac{(2t)!}{(t+1)!t!}$$
$$=\frac{d'}{t}\times\frac{(2t)!}{(t+d')!(t-d')!}\quad ,$$

於是接著使用了數學歸納法 (將t視為常數, 對d'作歸納法) 便可以證明這個等式：

性質四、 $w^{(1,1)}(t,2d')=\dfrac{d'}{t}\times\dfrac{(2t)!}{(t+d')!(t-d')!}$

證明：

(1) 由之前證明知$d'=1,2,3$時等式成立。

(2) 假設$d'=1,2,\ldots,k$時原式成立。

所以現在只需檢查

$w^{(1,1)}(t,2(k+1))$是否等於$\dfrac{k+1}{t}\times\dfrac{(2t)!}{(t+k+1)!(t-k-1)!}$ 。

性質一可以寫成

$$w^{(1,1)}(t+1,2d')=w^{(1,1)}(t,2(d'+1))+w^{(1,1)}(t,2(d'-1))+2w^{(1,1)}(t,2d')\ ,$$

故

$$w^{(1,1)}(t,2(k+1))=w^{(1,1)}(t+1,2k)-w^{(1,1)}(t,2(k-1))-2w^{(1,1)}(t,2k)$$
$$=\frac{k}{t+1}\times\frac{(2t+2)!}{(t+1+k)!(t+1-k)!}-\frac{k-1}{t}\times\frac{(2t)!}{(t+k-1)!(t-k+1)!}$$
$$-2\times\frac{k}{t}\times\frac{(2t)!}{(t+k)!(t-k)!}\ ,$$

經由整理後得到

$$w^{(1,1)}(t,2(k+1))=\frac{k+1}{t}\times\frac{(2t)!}{(t+k+1)!(t-k-1)!}\quad 。$$

由數學歸納法知，原式成立。 □

直到現在我們終於解決了一開始的問題，

性質五、$w^{(1,1)}(t,d)=\begin{cases}\dfrac{d}{2t}\times\dfrac{(2t)!}{(t+\frac{d}{2})!(t-\frac{d}{2})!} & , \quad d\text{為正偶數}\\ 0 & , \quad \text{其他}\end{cases}$.

由性質一可得：

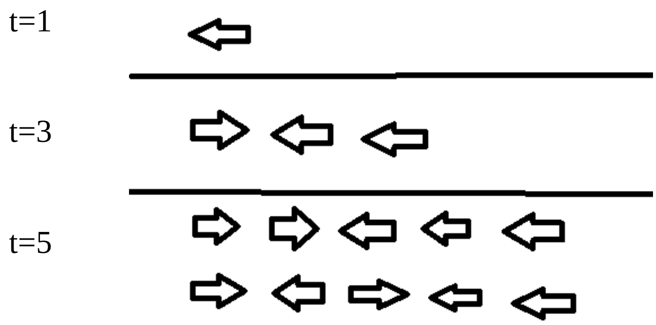
性質六、

$$p^{(1,1)}(t,2d')=[\frac{d'}{t}\times\frac{(2t)!}{(t+d')!(t-d')!}]\times\frac{1}{4^t} \quad .$$

三、$w^{(1,0)}(t,d)$的公式

有了以上的經驗，我們相信從卡塔蘭數列的模型應該可以得到不少靈感。類似地，先從 $d=1$來看看$w^{(1,0)}(t,1)$的數列有怎樣的規則。

不妨規定 A 的起始坐標為 1，B 則是一直待在原點，那麼$w^{(1,0)}(t,1)$就是 A 在第t時恰走到原點的方法數。從下列的圖可以看出，當時間為奇數時才可相遇，方法數依序為 1,1,2.



持續多畫幾組後得到$t=1,3,5,7,9$時的方法數為 1, 1, 2, 5, 14，很自然的就猜測：

$$w^{(1,0)}(2t+1,d)=c_t \quad , \quad t\geq 0$$

性質六、$w^{(1,0)}(2t+1,1)=c_t$ 。

證明：

因為恰在$2t+1$走到原點，所以在第$2t$秒時的坐標等於 **1**。於是前$2t$秒的移動方式為

(1) 起點坐標及終點坐標皆等於 **1**

(2) 不能移到原點

將向右走視為1，向左走視為-1，則所有移動方式滿足

(1) t個1和t個-1的直線排列

(2) 部份和不小於 **0**

因此所有的走法數為卡塔蘭數c_t，得證。 □

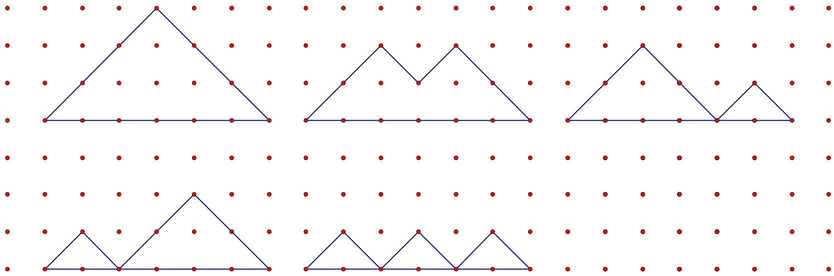
在上面的證明中，我們得到了兩種解決$w^{(1,0)}(t,d)$的想法：第一個是仿照$w^{(1,1)}(t,d)$的手法找出關於$w^{(1,0)}(t,d)$的遞迴式，然後算出$w^{(1,0)}(t,1)$，$w^{(1,0)}(t,2)$，$w^{(1,0)}(t,3)$，再來猜測式子的可能規律，然後使用數學歸納法證明。第二個想法，則是改進從模型找出卡塔蘭數列一般

項 $\dfrac{1}{n+1}C_n^{2n}$ 的方法，來直接求得 $w^{(1,0)}(t,d)$ 的公式。需要特別提醒的是，當 t,d 的奇偶性質不同時，$w^{(1,0)}(t,d)=0$，所以**在這裡皆假設 t,d 同奇偶**。

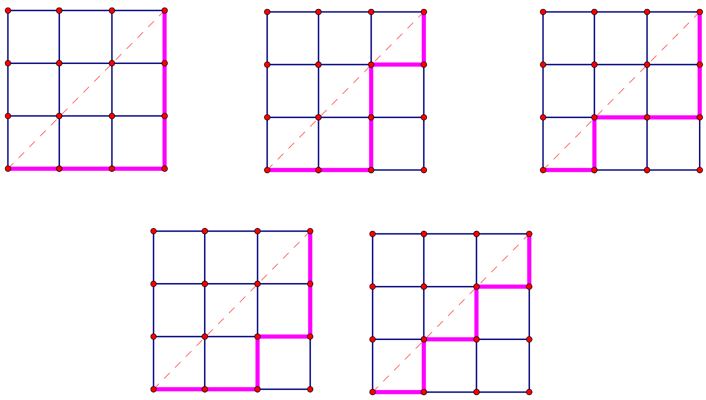
因為猜測式子的可能規律不是一個比較實際的方法（可能一直猜錯一般式形式），而且實際計算後發現式子過於複雜，所以我們決定參考卡塔蘭數列的模型，再從中求得 $w^{(1,0)}(t,d)$ 的模型。接著來探討 $w^{(1,0)}(t,2)$ 的一般式。

從參考資料知道卡塔蘭數列還有以下兩種模型：

I. c_n =每次移動 $(1,1)$ 或是 $(1,-1)$，移動 n 個 $(1,1)$ 及 n 個 $(1,-1)$ 且保持位置都不會低於起點的方式。以 $n=3$ 為例，以下為 C_3 的情形：

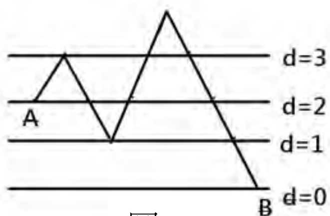


II. c_n =在直角坐標平面上，從 $(0,0)$ 走到 (n,n)，但都不會超過 $x=y$ 這條直線的捷徑走法。以 $n=3$ 為例，以下為 C_3 的情形：



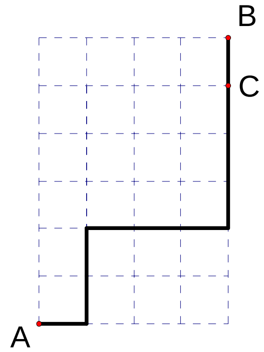
由於 $w^{(1,0)}(t,d)$ 的移動很類似 I 的移動規定，而且在高一時的排列組合學過捷徑走法，所以我們就著手研究這兩個模型與 $w^{(1,0)}(t,d)$ 的關聯性。

首先，很容易的可以將原本 $w^{(1,0)}(10,2)$ 的左右走法想像成這下圖為的一種走法，起始位置在 $d=2$ 的高度，接著每秒鐘向上或向下一單位，然後走了十次後恰走到高度 $d=0$ 的位置。



圖一

這種走法很像模型 I，在參考了資料中證明 I、II 等價的方法後，我們便仿照相同的方法，將上圖轉換成長方格中的形式。也就是將向上一單位畫成向右一單位，向下一單位畫成向下一單位，因此上圖可轉換如下：



圖二

看似是一種長方格的捷徑走法。

在嘗試將所有圖一模型換成圖二模型時，我們發現了兩個規律。

為了接下來的敘述方便，將長方格引入坐標軸的概念：令起始點 A 為原點，A 點向右為 x 軸的正向，A 點向上為 y 軸的正向。長方格的一單位即為坐標軸的單位長。

找到的兩個規律為：

(1) 在走到最後一步前的每一個時間點，向上走的次數≤向右走的次數$+1$

(2) 最後一步必為$(4,5)\to(4,6)$

性質(1)是因為在<圖一>中，如果走到最後一步之前向下的次數＞向上的次數$+1$，那麼就會提早回到$d=0$，則與恰在第10秒相遇矛盾。轉換成<圖二>的說法就是

向上走的次數≤向右走的次數$+1$。

接著證明終點一定在$(4,6)$。

假設終點為(x,y)，則由

a. 共移動了十次

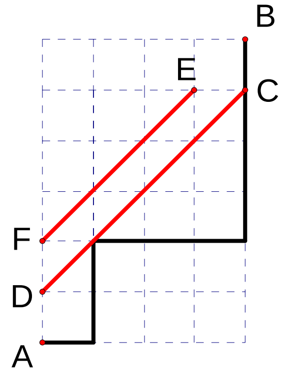
b. 從<圖一>知　向下次數＝向上次數$+2$，

可列出聯立方程式

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y=x+2 \end{cases},$$

得$x=4$，$y=6$，故終點為$(4,6)$。然後<圖一>的最後一步，是從$d=1$下降到$d=0$，因此在<圖二>$(4,6)$的前一步一定是在$(4,5)$。

於是 $w^{(1,0)}(10,2)$ 可以視為下圖中，由 $A \to C$ 且不超過直線 $\overline{CD}$ 的所有捷徑走法，此外"不超過直線 $\overline{CD}$"等同於"不碰到直線 $\overline{EF}$"。



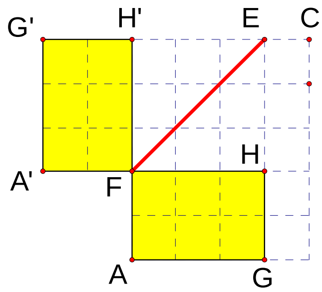
圖三

因為 $\overleftrightarrow{EF}$ 直線的方程式為 $y = x + 2$，所以我們得到

$$w^{(1,0)}(10,2) = |\{\text{ 從 } A \to C \text{ 且經過坐標}(x,y)\text{滿足 } y < x + 2 \text{ 的捷徑走法 }\}|,$$
$$= \frac{9!}{4!5!} - |\{ A \to C \text{ 且經過直線 } y = x + 2 \text{ 的捷徑走法 }\}|$$

現在只需解決 $|\{ A \to C$ 且經過直線 $y = x + 2$ 的捷徑走法 $\}|$ 為多少就行了！

將<圖三>作以下的變化：以 $\overline{EF}$ 當對稱軸將長方形 $AGHF$ 對稱為 $A'G'H'F$

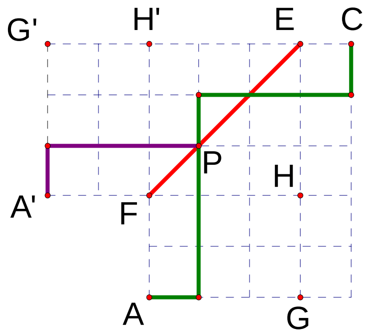


可以證得以下性質：

性質七、$|\{ A \to C$ 且經過直線 $y = x + 2$ 的捷徑走法$\}| = |\{ A' \to C$ 的捷徑走法$\}|$

證明：

若 α 為一種 $A \to C$ 且經過直線 $y = x + 2$ 的捷徑走法，則令 α 與 $\overline{EF}$ 第一次的交點為 P，於是 α 可分成 $A \to P$ 及 $P \to C$ 兩個部份。接著將 $A \to P$ 的部份對 $\overline{EF}$ 作對稱後，可以得到一條 $A' \to P$ 的捷徑，於是 $A' \to P \to C$ 即為一種 $A' \to C$ 的捷徑走法。(下圖為示意圖)



顯然這是一種$1-1$對應。反過來，每一條$A' \to C$的捷徑，必可找到一條$A \to C$的捷徑用以上的對稱法來對應。因此兩個集合的個數一樣多，即

$$|\{A \to C\text{ 且經過直線 } y = x+2 \text{ 的捷徑走法}\}| = |\{A' \to C \text{ 的捷徑走法}\}|,$$

得證。 □

綜合以上討論，便可以求得

$$w^{(1,0)}(10,2) = \frac{9!}{4!5!} - \frac{9!}{3!6!}.$$

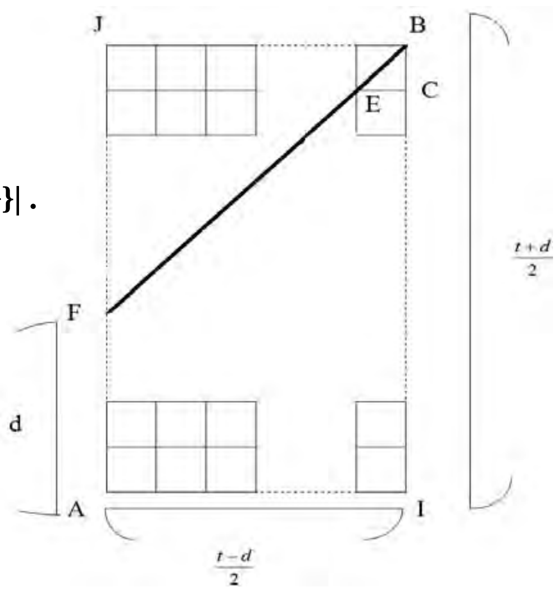
更重要的是，歸納以上作法可知$w^{(1,0)}(t,d)$的走法可對應到在類似圖三中某區塊的走法，而且也可以快速求得不符合條件的走法數。

現在開始計算$w^{(1,0)}(t,d)$：

引理一、如右圖，$I(\frac{t-d}{2},0)$，$B(\frac{t-d}{2},\frac{t+d}{2})$，

$C(\frac{t-d}{2},\frac{t+d}{2}-1)$，$F(0,d)$，則

$$\begin{aligned} w^{(1,0)}(t,d) &= |\{A \to C \text{ 且不碰到 } \overline{BF} \text{ 的捷徑走法}\}| \\ &= |\{A \to C \text{ 的捷徑走法}\}| - \\ &\quad |\{A \to C \text{ 且碰到 } \overline{BF} \text{ 的捷徑走法}\}| \end{aligned}$$



圖四

證明：

$w^{(1,0)}(t,d)$的定義可視為—

"位於數線上坐標為d的 A，每秒向左或向右移動一單位，則在第t秒恰移動到原點的移動方法數。"

現在將數線上的移動作如下對應：

數線上向右移動一單位$\leftrightarrow$長方格向右移動一單位

數線上向左移動一單位$\leftrightarrow$長方格向上移動一單位

轉換到長方格後，假設終點坐標為(x,y)，則x代表數線上向右移動的次數，y代表向左移動的次數。因為最後要從坐標d移動到坐標原點，故x,y滿足以下聯立方程組：

$$\begin{cases} x+y=t \\ y=x+d \end{cases},$$

解得 $x=\dfrac{t-d}{2}$， $y=\dfrac{t+d}{2}$，即終點為 B 點。

接著，因為在數線上最後一步必為坐標 $1\to 0$，這對應到長方格的 $C\to B$。

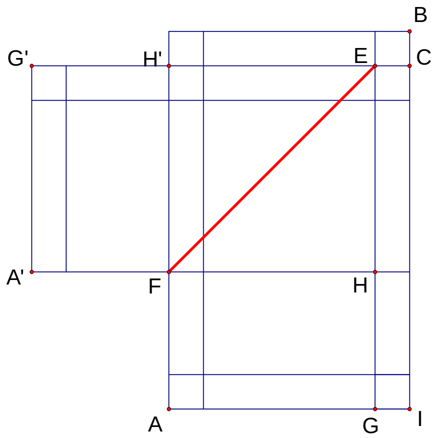
最後，因為在第 t 步前都不能回到原點，所以 向左的次數 $<$ 向右的次數 $+d$，在長方格中相當於路徑經過的點 (x_0,y_0) 必須滿足 $y_0<x_0+d$ 。

綜合以上討論及 $\overline{BF}$ 的方程式為 $y=x+d$ ，故

$$w^{(1,0)}(t,d)=|\{A\to C \text{ 且不碰到 } \overline{BF} \text{ 的捷徑走法}\}|.$$

由集合論知 $w^{(1,0)}(t,d)=|\{A\to C \text{ 的捷徑走法}\}|-|\{A\to C \text{ 且碰到 } \overline{BF} \text{ 的捷徑走法}\}|$ □

接下來計算 $|\{A\to C$ 且碰到 $\overline{BF}$ 的捷徑走法$\}|$. 將<圖四>中的部份長方格以 $\overline{EF}$ 為對稱軸後到得下<圖五>，



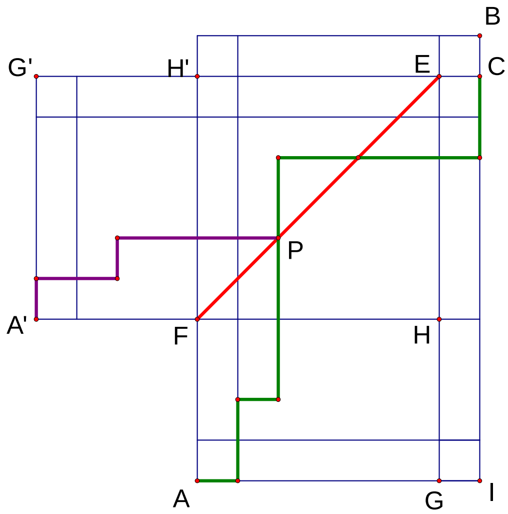
圖五

其中需要特別解釋的就是 H’的坐標。因為 H 的 x 坐標為 $(\dfrac{t-d}{2}-1)$，

所以 $\overline{FH}=\dfrac{t-d}{2}-1$，又 F 的 y 坐標為 d，得 H’的 y 坐標為 $\dfrac{t-d}{2}-1+d=\dfrac{t+d}{2}-1$，因此 H’在 J 點下方一單位的地方。然後可以得到以下引理：

引理二、$|\{A\to C$ 且碰到 $\overline{BF}$ 的捷徑走法$\}|=|\{A'\to C$ 的捷徑走法$\}$

證明原理同性質七，將路徑 $A\to P\to C$ 與 $A'\to P\to C$ 作 $1-1$ 且映成的對應，右圖為示意圖。



結合引理一、引理二，得到

性質八、當t,d的奇偶性相同時，$w^{(1,0)}(t,d)=\frac{d}{t}\times\frac{t!}{(\frac{t+d}{2})!(\frac{t-d}{2})!}$

證明：$w^{(1,0)}(t,d)=|\{A\to C$且不碰到$\overline{BF}$的捷徑走法$\}|$

$$
\begin{aligned}
&=|\{A\to C\text{的捷徑走法}\}|-|\{A\to C\text{且碰到}\overline{BF}\text{的捷徑走法}\}|\\
&=|\{A\to C\text{的捷徑走法}\}|-|\{A'\to C\text{捷徑走法}\}|\\
&=|\{(0,0)\to(\frac{t-d}{2},\frac{t+d}{2}-1)\text{的捷徑走法}\}|-\\
&\qquad|\{(-d,d)\to(\frac{t-d}{2},\frac{t+d}{2}-1)\text{的捷徑走法}\}|\\
&=\frac{(t-1)!}{(\frac{t-d}{2})!(\frac{t+d}{2}-1)!}-\frac{(t-1)!}{(\frac{t+d}{2})!(\frac{t-d}{2}-1)!}\\
&=(\frac{1}{\frac{t-d}{2}}-\frac{1}{\frac{t+d}{2}})\times\frac{(t-1)!}{(\frac{t+d}{2}-1)!(\frac{t-d}{2}-1)!}\\
&=\frac{d}{t}\times\frac{t!}{(\frac{t+d}{2})!(\frac{t-d}{2})!}.
\end{aligned}
$$

□

由性質一，得

性質九、當t,d的奇偶性相同時，$p^{(1,0)}(t,d)=\frac{d}{t}\times\frac{t!}{(\frac{t+d}{2})!(\frac{t-d}{2})!}\times\frac{1}{2^t}$.

四、$w^{(n,n)}(t,d)$和$w^{(n,0)}(t,d)$

接著我們討論速率加倍時，相遇在整數點的方法數：

首先是$w^{(n,n)}(t,d)$。

當兩人速率皆為n時，每次移動相向時距離減$2n$，相離時距離加$2n$，所以若在移動多次後在整數點相遇，則一開始的距離必須為$2n$的倍數。所以只需討論$w^{(n,n)}(t,2nd')$。而此時的移動方式相當於$w^{(1,1)}(t,2d')$的移動尺寸放大n倍，因此方法數等於

$$w^{(1,1)}(t,2d')=\frac{d'}{t}\times\frac{(2t)!}{(t+d')!(t-d')!},$$

得到以下性質：

性質十、$w^{(n,n)}(t,d)=\begin{cases}\dfrac{d}{2nt}\times\dfrac{(2t)!}{(t+\dfrac{d}{2n})!(t-\dfrac{d}{2n})!} & , \quad 2n\mid d\\ 0 & , \quad 其他\end{cases}$.

類似地，我們有

性質十一、$w^{(n,0)}(t,d)=\begin{cases}\dfrac{d}{nt}\times\dfrac{t!}{(\dfrac{t}{2}+\dfrac{d}{2n})!(\dfrac{t}{2}-\dfrac{d}{2n})!} & , \quad n\mid d\\ 0 & , \quad 其他\end{cases}$.

五、一般情形 $W^{(1,1)}(t,d)$ 的公式

現在可以著手定義一個模型，來計算“數線上距離 d 的兩人任意移動相遇的機率”，我們的模型如下：

定義二：假定數線上有相距為 d 的兩人 A,B，且每次移動分別朝左右其中一個方向移動 n,m 單位，（其中 $n,m\in N\cup\{0\}$，$n\geq m$）則定義符號

$$W^{(n,m)}(t,d)=\text{兩人恰在第}\,t\,\text{次移動時相遇的方法數}$$

當 $n=m=1$ 且 d 為偶數時，由定義知 $W^{(1,1)}(t,d)=w^{(1,1)}(t,d)$。所以 $w^{(1,1)}(t,d)$ 就成了 $W^{(1,1)}(t,d)$ 的一種特例，於是 $W^{(n,m)}(t,d)$ 比起 $w^{(n,m)}(t,d)$ 更能代表“相遇”的意義。

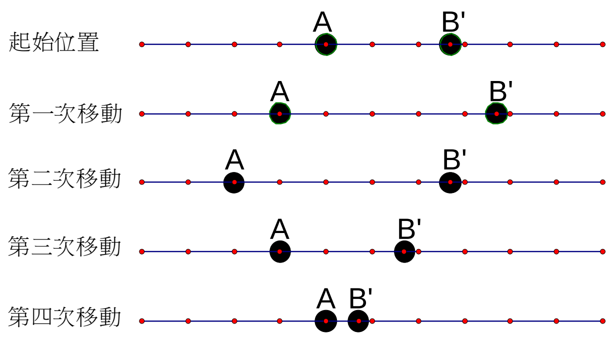
而將定義改成第 t 次的好處在於，由兩人速率和起始距離 d 即決定相遇的時間，某些情況相遇時間未必為整數，會使得計算變複雜。所以定義 t 為次數會比較容易討論。

更進一步地，如果每次移動向左或向右的機率都相同，那麼

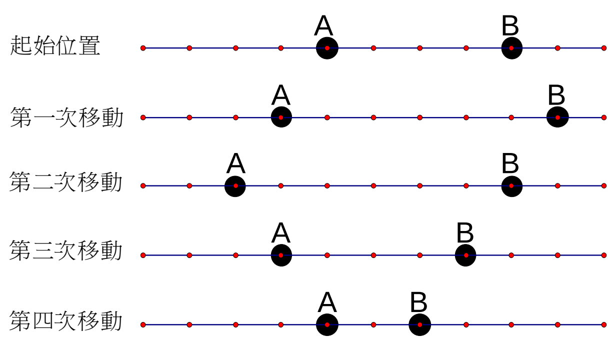
“恰在第 t 次移動時相遇的機率” $=P^{(1,1)}(t,d)=W^{(1,1)}(t,d)\times\dfrac{1}{4^t}$。

接著我們說明如何得到 $W^{(1,1)}(t,d)$ 的表示式。

在畫了 $W^{(1,1)}(5,2.7)$ 的所有情況時，我們發現這與 $w^{(1,1)}(5,4)$ 有一些關聯，如下：

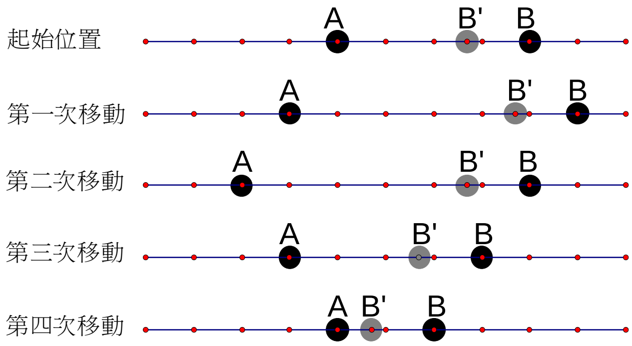


$w^{(1,1)}(5,2.7)$的其中一種移動法



$w^{(1,1)}(5,4)$的其中一種移動法

畫在同一個圖表後變成



不難看出 B' 的位置都在 B 左方 1.3 單位的地方（ B' 就像 B 的影子）。由於 A,B 在最後一步相遇前最近的距離僅可能為 2 單位，所以 B' 也不會與 A 有交點！而當 A,B 相遇後，被夾在中間的 B' 自然也與 A 相遇。因此，我們可以構造一個 1-1 對應方式，來證明 $W^{(1,1)}(5,2.7)=w^{(1,1)}(5,4)$，從這裡得到了一般性質的公式及證明想法：

定義三：（Ceiling 函數）$\lceil x \rceil$ = 大於等於 x 的最小整數。

引理：大於等於 d 的最小偶數 $=2\times\left\lceil \dfrac{d}{2}\right\rceil$。

證明：(1) $d=2k$，k 為整數時，$\lceil d\rceil = d$，且 $2\times\left\lceil \dfrac{d}{2}\right\rceil = 2\times\lceil k\rceil = 2k = d$。

(2) $2k-2<d<2k$，k 為整數時，$\lceil d\rceil = 2k$；又 $k-1<\dfrac{d}{2}<k$，

所以 $\left\lceil \dfrac{d}{2}\right\rceil = k$，故 $2\times\left\lceil \dfrac{d}{2}\right\rceil = 2k$。 □

性質十二： $W^{(1,1)}(t,d)=w^{(1,1)}(t,2\left\lceil \dfrac{d}{2}\right\rceil)$

證明：(1) 當 d 為偶數時，由引理知上式成立。

(2) 當 $2k-2<d<2k$ 時，即 $d=2k-d'$，且 $0<d'<2$。

我們接著證明 $w^{(1,1)}(t,2k)$ 的方法可以與 $W^{(1,1)}(t,d)$ 的方法一一對應。

對應方法如下：

若 P_1 為 $w^{(1,1)}(t,2k)$ 的一個方法，則將 P_1 中兩人的起始距離減去 d' 可以得到一個新方法 P_1'。因為 P_1 中除了最後一步之外，A,B 兩人的最近距離為 2，所以如果起始距離減去 d' 再移動，則此方法除了最後一步外，兩人的距離最小值為 $2-d'>0$。因為 P_1 的倒數第二步距離為 2，所以 P_1' 走完倒數第二步後的距離為 $2-d'<2$，故最後一步必相遇，因此 P_1' 為 $W^{(1,1)}(t,d)$ 的一個走法。

同理，將 $W^{(1,1)}(t,d)$ 中的走法 P_2' 的起始距離加上 d'，就可以得到屬於 $w^{(1,1)}(t,2k)$ 的方法 P_2，故 $W^{(1,1)}(t,d)=w^{(1,1)}(t,2k)=w^{(1,1)}(t,2\times\left\lceil \dfrac{d}{2}\right\rceil)$。 □

於是，我們得到：

性質十三：$W^{(1,1)}(t,d)=\dfrac{\lceil d/2 \rceil}{t}\times\dfrac{(2t)!}{(t+\lceil \frac{d}{2} \rceil)!(t-\lceil \frac{d}{2} \rceil)!}$

仿照以上方法討論$W^{(1,0)}(t,d)$時，可以得到：

性質十四：若 (1) d 為整數，且t,d奇偶性相同時，

或 (2) d 不為整數，且$t,([d]+1)$奇偶性相同時,

$$W^{(1,0)}(t,d)=w^{(1,0)}(t,\lceil d \rceil)=\frac{\lceil d \rceil}{t}\times\frac{(2t)!}{(\frac{t+\lceil d \rceil}{2})!(\frac{t-\lceil d \rceil}{2})!},$$

其餘情形$W^{(1,0)}(t,d)$皆等於 0.

事實上，由起始距離、兩人速率，和相遇的移動數，假若每次移動所花的時間為1秒鐘，也可以算出從第1次移動到第t次移動後相遇所花的時間，公式如下：

性質十五：每一個$W^{(1,1)}(t,d)$，相遇所花的時間為$t+\dfrac{d}{2}-\left\lceil \dfrac{d}{2} \right\rceil$。

性質十六： (1) d 為整數，且t,d奇偶性相同時，

或 (2) d 不為整數，且$t,([d]+1)$奇偶性相同時,

每一個$W^{(1,0)}(t,d)$，相遇所花的時間為$t+d-\lceil d \rceil$。

伍、 研究結果

1. A,B為數線上相距d的兩人，且兩人每秒每次各有50%的機率選擇向左一單位或向右一單位，則恰在第t次移動相遇的機率為

$$P^{(1,1)}(t,d)=W^{(1,1)}(t,d)\times\frac{1}{4^t}==\frac{\left| d/2 \right|}{t}\times\frac{(2t)!}{(t+\lceil \frac{d}{2} \rceil)!(t-\lceil \frac{d}{2} \rceil)!}\times\frac{1}{4^t},$$

且相遇時間為$t+\dfrac{d}{2}-\left\lceil \dfrac{d}{2} \right\rceil$。

2. t,d為滿足以下兩條件的數：

(1) d 為整數，且t,d奇偶性相同，

或 (2) d 不為整數，且$t,([d]+1)$奇偶性相同,

則我們有以下性質：

A,B為數線上相距d的兩人，且A每秒每次各有50%的機率選擇向左一單位或向右一單位，B從頭到尾都在原位不移動，則恰在第t次移動相遇的機率為

$$P^{(1,0)}(t,d)=W^{(1,0)}(t,d)\times\frac{1}{2^t}==\frac{\lceil d\rceil}{t}\times\frac{(2t)!}{(t+\lceil d\rceil)!(t-\lceil d\rceil)!}\times\frac{1}{2^t}\ ,$$

且相遇時間為 $t+d-\lceil d\rceil$。

陸、延伸與未來展望：

我們持續研究的目標有：

1. 一般情形 $w^{(n,m)}(t,d)$ 的探索

到目前為止對 $w^{(n,m)}(t,d)$ 已知有兩個性質：

性質十七、 $w^{(n,m)}(t,d)=w^{(n,m)}(t-1,d+(n+m))+w^{(n,m)}(t-1,d-(n+m))$
$+w^{(n,m)}(t-1,d+(n-m))\ \ +w^{(n,m)}(t-1,d-(n-m))$ ，

其中當 $d'\le 0$ 時 $w^{(n,m)}(t,d')$ 定義為 0.

證明：同性質二，可分成四種移動情形討論。 □

利用性質十二，我們重新思考了“兩人移動”的意義：從相對運動來看，其實這相當於

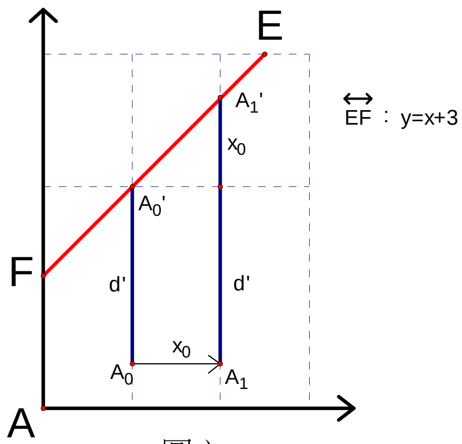
“A 以速度 $\pm(n+m)$, $\pm(n-m)$ 朝距離為 d 且靜止不動的 B 移動”

因此，若將 B 在原點，A 在某一時刻的坐標為 d_0 ，則下一刻 A 的坐標只可能為 $d\pm(n+m)$ 、$d\pm(n-m)$ ，現在只需研究如何用 t 步使 A 恰好回到原點。如果將 x 坐標想成“每次離開所增加的距離”, y 坐標想成“每次靠近所減少的距離” ，A 從平面坐標的原點為起點，那麼目標就是走到

$$y=x+d$$

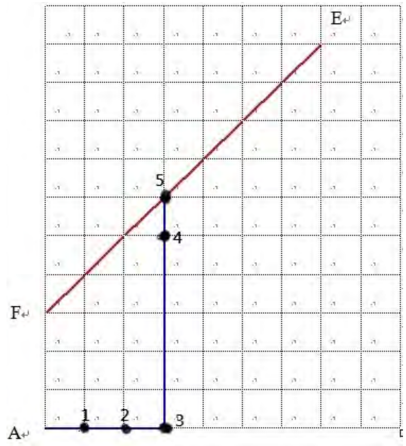
這條直線上。所以我們構造了一個類似<圖二>的模型，以 $w^{(3,2)}(5,3)$ 為例：

當在數線上移動時，如果是遠離(原點) x_0 單位，則對應到平面的動作就是向右 x_0 單位；如果是接近(原點) y_0 單位，則對應到平面的動作就是向上 y_0 單位。因為 $y=x+3$ 是一條斜率等於 1 的直線，故每一點垂直向上與直線 $y=x+3$ 的距離恰剛好對應到了數線上與原點的距離。

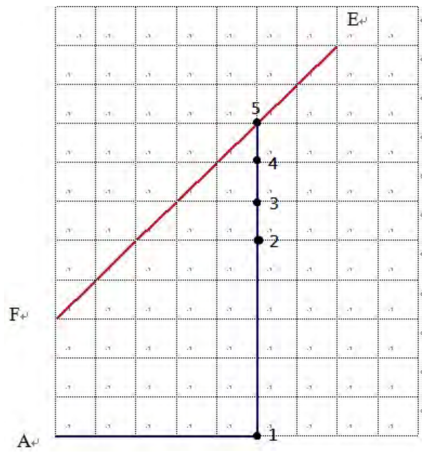


圖六

圖七-(1)和圖七-(2)對應到了 $w^{(3,2)}(5,3)$ 的一種方法。



圖七-(1)



圖七-(2)

性質十八、 $w^{(n,m)}(t,d)=$ **“從** $(0,0)$ **以** $\vec{p}=(n+m,0)$, $\vec{q}=(0,n+m)$,

$\vec{r}=(n-m,0)$, $\vec{s}=(0,n-m)$,

四種移動方式, 以 t **個步驟恰移動到直線** $y=x+d$ **”**

的所有方法數.

可以看到的是由於 A 可以用兩種不同的速率行走，所以位於 $y=x+d$ 上的終點可能是不同的點，我們目前還在探討這些終點的性質及模型的計算方式。

其中當 $n=m=1$ 時，我們建立另一個類似的模型重新討論 $w^{(1,1)}(t,d)$ ：

將 $\vec{r}$ 、$\vec{s}$ 視為 $(1,0)+(0,1)$ 和 $(0,1)+(1,0)$ 兩種不同的走法，這移動方式並不會改變垂直向上到 $y=x+d$ 的距離，所以也保持 A,B 之間原本的距離。如果原位置為 (x_0,y_0)，則下一個位置為

$$(x_0+2,y_0)\text{、}(x_0,y_0+2)\text{或}(x_0+1,y_0+1),$$

所以每移動一次後 x,y 坐標的總和會多 2。又終點落在 $y=x+d$ 上，故 $w^{(1,1)}(t,d)$ 的終點 (x,y) 滿足方程式

$$\begin{cases} x+y=2t \\ y=x+d \end{cases},$$

解得 $x=t-\dfrac{d}{2}$ ， $y=t+\dfrac{d}{2}$ 。

結合性質四可以得到：

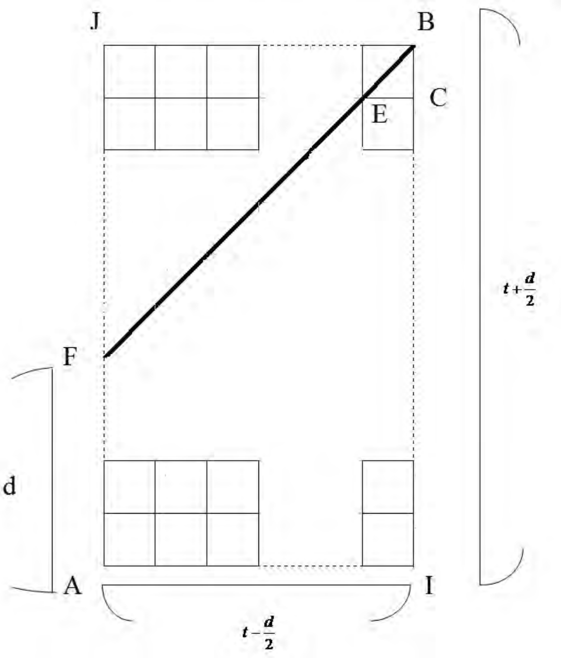
性質十九、如<圖八>, 用$(2,0)$、$(0,2)$、↱ 和 ⬏

由 **A** 移動到 **B** 且不經過 $\overline{EF}$ 的全部方法數

$$= w^{(1,1)}(t,d)$$

$$= \frac{d}{2t} \times \frac{(2t)!}{(t+\frac{d}{2})!(t-\frac{d}{2})!},$$

$$= \frac{d}{2t} \times |\{\, A \to B \text{的捷徑走法} \}|.$$



圖八

2. 從性質十八的模型算出 $w^{(n,m)}(t,d)$ 一般式的方法.

3. 移動方式增加“不移動”的選項後, 要如何求出移動方法數.

4. “兩人可以成功相遇的條件”, 即 $w^{(n,m)}(t,d) \neq 0$ 時, n,m,t,d 滿足的充要條件為何？

而進一步就能討論兩人在平面及空間格子點相遇的方法數，對於隨機漫步問題相信也能有更深入的探討，慢慢的來建立更接近現實的模型。

5. 使用公式可以解決某個時間區間內相遇的機率，比方以下兩個問題：

（1）醉漢相遇問題

“有 A、B 兩人位在相距 10 公尺的道路上，每十秒各自向左右移動 1 公尺，則十分鐘內相遇的機率為何？”

解：十分鐘移動 $6 \times 10 = 60$ 次，所求即為 $P = \sum_{t=5}^{60} p^{(1,1)}(t,10)$，

使用 Mathematica 得到 $P \doteqdot 0.363 = 36.3\%$

(2) “小星和媽媽參觀燈會, 因為人潮擁擠母子被拆散。媽媽每秒移動 1 公尺，30 秒後才發現小星不見（也不知道方向）。已知小星一開始就發現媽媽不見, 經過 30 秒後也開始到處亂找，每秒速度 1 公尺。每經過一秒就決定是否改變方向，請問：在接下來的五分鐘內，媽媽到處亂找會比較有機會碰到小星，還是留在原地等待會比較有機會？”

解：起始距離 30 公尺，令 P_1 為兩人同時移動的機率，P_2 為母親不移動的機率，則所求即為比較 $P_1 = \sum_{t=15}^{300} w^{(1,1)}(t,30)$ 與 $P_2 = \sum_{t=30}^{300} w^{(1,0)}(t,30)$ 大小。

使用 Mathematica 得 $P_1 \doteqdot 0.221 = 22.1\%$，$P_2 \doteqdot 0.166 = 16.6\%$。

6. $w^{(1,1)}$與$w^{(1,0)}$的關係

假設A,B的起始坐標為$d,-d$，則若第t秒恰相遇在坐標為d'的地方，則移動方法數為$w^{(1,0)}(t,|d-d'|)\times w^{(1,0)}(t,|d+d'|)$，因此由對稱性可知

$$w^{(1,1)}(t,2d)=2\sum_{d'=2}^{\infty}w^{(1,0)}(t,|d-d'|)\times w^{(1,0)}(t,|d+d'|)+(w^{(1,0)}(t,d))^2,$$

我們希望能從這個遞迴式及$w^{(1,0)}(t,d")$得到算出$w^{(1,1)}(t,2d)$公式的另一種方法。

柒、參考文獻與其他：

[1] **普通高級中學數學第二冊**。龍騰文化(2012)，新北市。

[2] 許志農。**卡特藍數列研究**。取自 math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/study/catlan.doc。

[3] **卡塔蘭數**。維基百科，自由的百科全書。取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/卡塔蘭數。

[4] 林晉宏(2011)。**一般 Catalan 數的組合意義及其應用**。*數學傳播*，35 卷 1 期 36-50。

[5] 屈婉玲(2004)。**離散數學教程**，北京，北京大學出版社。

[6] 劉炯朗(1982)。**組合數學**（林福來，譯）。台北市，中央圖書出版社。

[7] **生成函數解法**。取自 http://ppt.cc/7srz。

[8] 夏宗匯(65)。**組合數學中的生成函數**。*數學傳播*，1 卷 3 期 51-58。

[9] 隨機漫步理論。MBA 智庫百科。取自 http://wiki.mbalib.com/zh-tw/隨機漫步理論。

【評語】040416

1. 作品嘗試作清楚的交待，但內容過多且複雜的符號與性質，反而無法有效的呈現作品主軸與結論。

2. 因內容過程過於繁瑣，作者群無法作有效的講解與論述，失去科學展覽的基本內涵呈現。

3. 參考文獻無法與研究內容作連結；部份文獻無法由所附網址取得。

4. 整體而言，作品有完善的架構；但就學術性、表達能力、科學方法等仍有許多改善的空間。