中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第二名

040415

孟氏定理與西瓦定理在多邊形中的推廣

學校名稱：國立鹿港高級中學

作者：	指導老師：
高二 許喬婷	鄭仕豐

關鍵詞：孟氏定理、西瓦定理、n點共線

摘要

本文主要在探討幾何中的兩個重要結果—三角形中的『孟氏定理』與『西瓦定理』推廣到平面上任意的『凸 ***n*** 邊形』與『凹 ***n*** 邊形』的相對應結果，甚至於我可以將『凸凹 ***n*** 邊形』換成『 ***n*** 條直線』，我發現亦可以得到類似的結果。在完成平面上的圖形推廣之後，我也試著思考其在立體空間中是否也有類似的推論，很幸運地也發現有類似平面多邊形的結果，目前已完成空間中任意『 ***n*** 個頂點多面體』的『孟氏共面定理』，此外，我也證明了空間中任意四面體的『西瓦共點定理』，同時以實例驗證空間中的『西瓦共點定理』在四角錐中的形式。

壹、 研究動機

在一次課餘的機會裡，因為課程上剛好談到平面向量，所以老師特別介紹了三角形中的『孟氏定理』與『西瓦定理』，當下的我，覺得其結果有一點神奇，但證明並不困難，經過幾天的沈浸消化之後，我開始去思考有沒有機會將這樣的結果推論到更多邊形的情形，於是我向老師表達我的想法，老師建議我可以嘗試看看。於是我從邊數較少的情形著手出發，四邊形、五邊形到 ***n*** 邊形，逐步完成，雖然過程有一點辛苦，但是每當完成一個小小的『猜測』，就覺得很有成就感。完成平面上的推論後，我亦試著將其推廣到『立體空間』，在分區科展後，我又陸續的完成空間中『孟氏共面定理』與『西瓦共點定理』的證明。

貳、 研究目的

一、孟氏定理在凸四邊形上的推論。
二、孟氏定理在凹四邊形上的推論。
三、孟氏定理在凸五邊形上的推論。
四、孟氏定理在凸 ***n*** 邊形上的推論。
五、將孟氏定理在凸 ***n*** 邊形上的推論轉變在 ***n*** 條直線上的推論。
六、西瓦定理在凸四邊形上的推論。
七、西瓦定理在凹四邊形上的推論。
八、西瓦定理在凸五邊形上的推論。
九、西瓦定理在凸 ***n*** 邊形上的推論。
十、將西瓦定理的共『點』擴大成『圓』。
十一、將西瓦定理的共『點』換成『正多邊形』。
十二、空間中的孟氏共面定理。
十三、空間中的西瓦共點定理。

參、 研究設備及器材

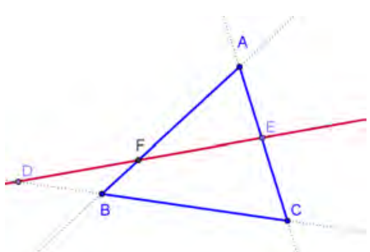
頭腦、紙、筆、電腦、電腦軟體（Microsoft Word, GSP4.0,Geogebra4.2,Maple 12,Cabri 3D）

肆、 研究過程與方法

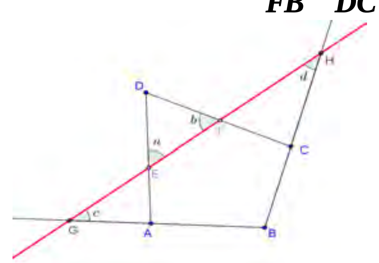
『孟氏定理』是眾所周知幾何上一個重要的結果，其結果如下。

引理一：(孟氏定理)

假設平面上有一三角形 ABC，又 D、E 與 F 分別為 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 上一點，滿足 D、E 與 F 三點共線，且 D、E 與 F 三點不與三角形 ABC 三頂點重合，如下圖(一)，則 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。



圖(一)



圖(二)

在一次課餘的機會，老師介紹了『孟氏定理』與『西瓦定理』，當時我在想說有沒有可能將其結果推廣到凸四邊形的情形，於是做了如下的嘗試，我們發現這樣的想法是可行的，下述結果爲孟氏定理在凸四邊形的情形。

問題一：

假設平面上有一凸四邊形 $\boldsymbol{ABCD}$，又 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 與 $\boldsymbol{H}$ 分別爲 $\overleftrightarrow{DA}$、$\overleftrightarrow{DC}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 上一點，滿足 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 與 $\boldsymbol{H}$ 四點共線，且 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 與 $\boldsymbol{H}$ 四點不得與四邊形 $\boldsymbol{ABCD}$ 之四頂點重合，如上頁圖(二)，則 $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EA}}\times\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=1$。

證明：如上頁圖(二)所示，

(i) 在 ΔDEF 中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{DE}}{\sin b}=\dfrac{\overline{DF}}{\sin a}\Rightarrow\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}}=\dfrac{\sin b}{\sin a}$ ……①

(ii) 在 ΔAEG 中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{AG}}{\sin a}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin c}\Rightarrow\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AE}}=\dfrac{\sin a}{\sin c}$ ……②

(iii) 在 ΔCHF 中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{CF}}{\sin d}=\dfrac{\overline{CH}}{\sin b}\Rightarrow\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CH}}=\dfrac{\sin d}{\sin b}$ ……③

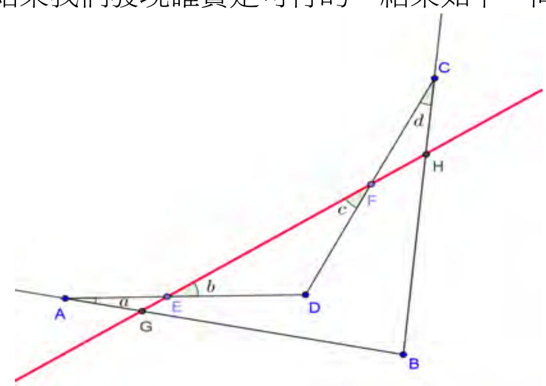
(iv) 在 ΔHBG 中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{BH}}{\sin c}=\dfrac{\overline{BG}}{\sin d}\Rightarrow\dfrac{\overline{BH}}{\overline{BG}}=\dfrac{\sin c}{\sin d}$ ……④

(v) 由①×②×③×④得，$\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}}\times\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AE}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CH}}\times\dfrac{\overline{BH}}{\overline{BG}}=\dfrac{\sin b}{\sin a}\times\dfrac{\sin a}{\sin c}\times\dfrac{\sin d}{\sin b}\times\dfrac{\sin c}{\sin d}=1$

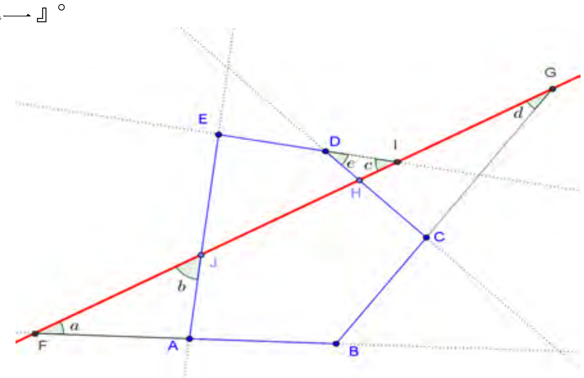
$$\Rightarrow\frac{\overline{DE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=1$$

Q.E.D.

完成了『問題一』的證明之後，我們試著考慮在凹四邊形時，是不是也可以有類似的推論，結果我們發現確實是可行的，結果如下『問題二』。



圖(三)



圖(四)

問題二：

假設平面上有一凹四邊形 $\boldsymbol{ABCD}$，又 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 與 $\boldsymbol{H}$ 分別爲 $\overleftrightarrow{DA}$、$\overleftrightarrow{DC}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 上一點，滿足 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 與 $\boldsymbol{H}$ 四點共線，且 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 與 $\boldsymbol{H}$ 四點不得與四邊形 $\boldsymbol{ABCD}$ 之四頂點重合，如上圖(三)，則 $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EA}}\times\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=1$。

證明：如上圖(三)所示，

(i) 在 ΔDEF 中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{DE}}{\sin c}=\dfrac{\overline{DF}}{\sin b}\Rightarrow\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}}=\dfrac{\sin c}{\sin b}$ ……①

(ii) 在 ΔAEG 中，由正弦定理知，

$$\frac{\overline{AG}}{\sin b}=\frac{\overline{AE}}{\sin(180^\circ-(a+b))}\Rightarrow\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}}=\frac{\sin b}{\sin(180^\circ-(a+b))}=\frac{\sin b}{\sin(a+b)}\quad\cdots\cdots②$$

(iii) 在ΔCHF中，由正弦定理知，

$$\frac{\overline{CF}}{\sin(180^\circ-(c+d))}=\frac{\overline{CH}}{\sin c}\Rightarrow\frac{\overline{CF}}{\overline{CH}}=\frac{\sin(180^\circ-(c+d))}{\sin c}=\frac{\sin(c+d)}{\sin c}\quad\cdots\cdots③$$

(iv) 在ΔHBG中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{BH}}{\sin(a+b)}=\dfrac{\overline{BG}}{\sin(c+d)}\Rightarrow\dfrac{\overline{BH}}{\overline{BG}}=\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(c+d)}\quad\cdots\cdots④$

(v) 由①×②×③×④得

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}\times\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{CH}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{BG}}=\frac{\sin c}{\sin b}\times\frac{\sin b}{\sin(a+b)}\times\frac{\sin(c+d)}{\sin c}\times\frac{\sin(a+b)}{\sin(c+d)}=1\Rightarrow\frac{\overline{DE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=1$$

Q.E.D.

完成了『問題二』的證明之後，我們試著考慮在五邊形時，是不是也可以有類似的推論，結果我們發現確實是可行的，結果如下。

問題三：

假設平面上有一五邊形$ABCDE$，又F、G、H、I與J分別爲$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DE}$與$\overleftrightarrow{EA}$上一點，滿足F、G、H、I與J五點共線，且F、G、H、I與J五點不得與五邊形$ABCDE$之五頂點重合，如上頁圖(四)，則$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\dfrac{\overline{CH}}{\overline{HD}}\times\dfrac{\overline{DI}}{\overline{IE}}\times\dfrac{\overline{EJ}}{\overline{JA}}=1$。

證明：如上頁圖(四)所示，

(i) 在ΔAFJ中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{AF}}{\sin b}=\dfrac{\overline{AJ}}{\sin a}\Rightarrow\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AJ}}=\dfrac{\sin b}{\sin a}\quad\cdots\cdots①$

(ii) 在ΔEIJ中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{EI}}{\sin b}=\dfrac{\overline{EJ}}{\sin c}\Rightarrow\dfrac{\overline{EJ}}{\overline{EI}}=\dfrac{\sin c}{\sin b}\quad\cdots\cdots②$

(iii) 在ΔDIH中，由正弦定理知，

$$\frac{\overline{DI}}{\sin(180^\circ(c+e))}=\frac{\overline{DH}}{\sin c}\Rightarrow\frac{\overline{DI}}{\overline{DH}}=\frac{\sin(180^\circ(c+e))}{\sin c}=\frac{\sin(c+e)}{\sin c}\quad\cdots\cdots③$$

(iv) 在ΔCGH中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{CG}}{\sin(c+e)}=\dfrac{\overline{CH}}{\sin d}\Rightarrow\dfrac{\overline{CH}}{\overline{CG}}=\dfrac{\sin d}{\sin(c+e)}\quad\cdots\cdots④$

(v) 在ΔBFG中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{BF}}{\sin d}=\dfrac{\overline{BG}}{\sin a}\Rightarrow\dfrac{\overline{BG}}{\overline{BF}}=\dfrac{\sin a}{\sin d}\quad\cdots\cdots⑤$

(vi) 由①×②×③×④×⑤得

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AJ}}\times\frac{\overline{EJ}}{\overline{EI}}\times\frac{\overline{DI}}{\overline{DH}}\times\frac{\overline{CH}}{\overline{CG}}\times\frac{\overline{BG}}{\overline{BF}}=\frac{\sin b}{\sin a}\times\frac{\sin c}{\sin b}\times\frac{\sin(c+e)}{\sin c}\times\frac{\sin d}{\sin(c+e)}\times\frac{\sin a}{\sin d}=1$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\frac{\overline{CH}}{\overline{HD}}\times\frac{\overline{DI}}{\overline{IE}}\times\frac{\overline{EJ}}{\overline{JA}}=1。$$

Q.E.D.

我們將上述的三個問題的結果綜合，並將其推廣到到『凸n邊形』，利用數學歸納法我們果真證明了這樣的『猜想』是正確的，於是有了下面這樣一個結果。

定理一：

假設直角坐標平面上有一個凸n邊形$A_1A_2\cdots A_n$，今依序分別在n個邊或其延長線上各取一點$P_1,P_2,\cdots,P_n$，使得這n個點在同一條直線L上，且直線L不可與凸n邊形$A_1A_2\cdots A_n$之邊所在直線

重合或平行，又對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，點 P_i 不可等於 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 之兩端點。

試證明：$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{n-2}P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_{n-1}}}\times\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\dfrac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=1$。

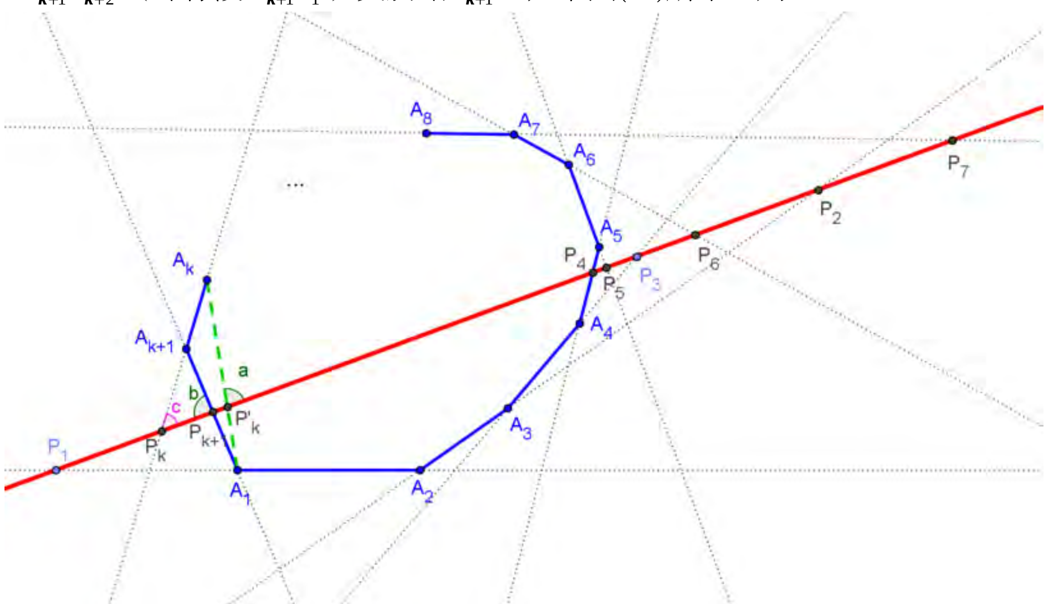
證明：

(i) 當 n＝3 時，$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\times\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=1$

(ii) 假設 n=k 時成立，亦即 $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\dfrac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\dfrac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_1}}=1$

(iii) 當 n=k+1 時，我們分兩類情形討論如下，

情形一：若存在一線段 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 使得直線 L 與該線段 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 交於一點（於此，我們視 $A_{n+j}=A_j$，$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$），在不失一般性之下，我們可以假設 $i=k+1$，且此時直線 L 與線段 $\overline{A_{k+1}A_{k+2}}$（即線段 $\overline{A_{k+1}A_1}$）交於點 P_{k+1}，如下圖(五)所示，則



圖(五)

先連接 $\overleftrightarrow{A_kA_1}$，因爲 $A_1A_2\cdots A_n$ 爲凸 n 邊形且直線 L 不可與凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 之邊所在直線重合或平行，所以直線 $\overleftrightarrow{A_kA_1}$ 必與直線 L 交於一點，設此交點爲 P_k'，如上圖五所示，因此可得

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP'_k}}{\overline{P'_kA_1}}\times\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\left(\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_1}}\right)\times\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=1\times\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}\text{ 。}$$

至此，只需再證明 $\dfrac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\dfrac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=1$ 即可，我們驗證如下：

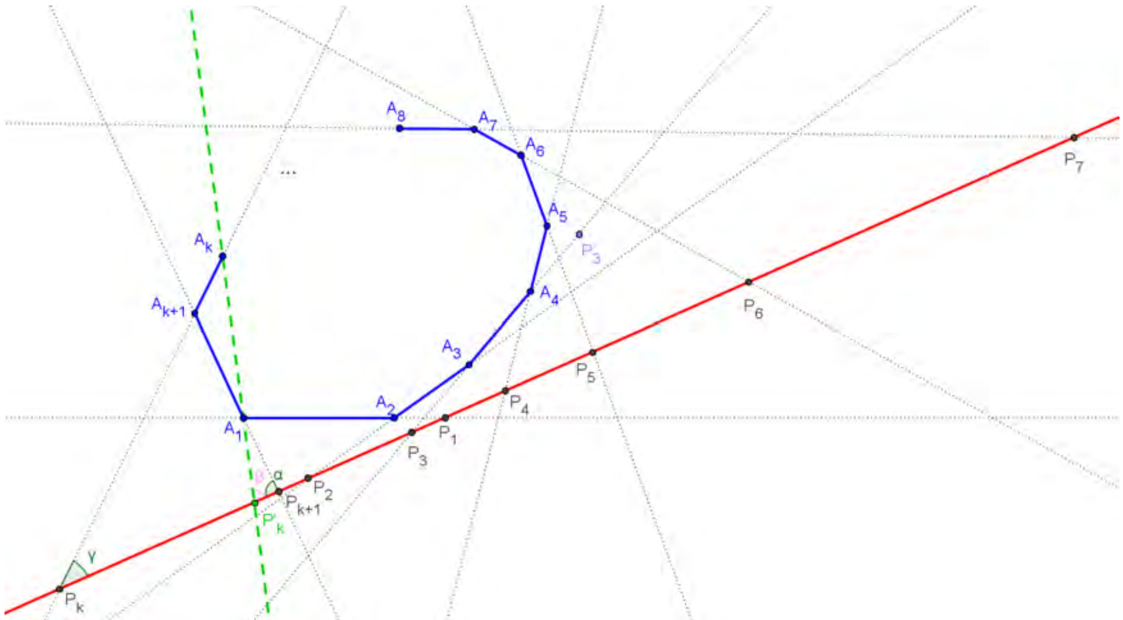
I. 在$\Delta P'_k A_1 P_{k+1}$中，$\dfrac{\overline{P'_k A_1}}{\sin \boldsymbol{b}} = \dfrac{\overline{P_{k+1} A_1}}{\sin \boldsymbol{a}} \Rightarrow \dfrac{\overline{P'_k A_1}}{\overline{P_{k+1} A_1}} = \dfrac{\sin \boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{a}}$……①

II. 在$\Delta P'_k A_k P_k$中，$\dfrac{\overline{A_k P_k}}{\sin(180^\circ - \boldsymbol{a})} = \dfrac{\overline{A_k P'_k}}{\sin \boldsymbol{c}} \Rightarrow \dfrac{\overline{A_k P_k}}{\overline{A_k P'_k}} = \dfrac{\sin(180^\circ - \boldsymbol{a})}{\sin \boldsymbol{c}} = \dfrac{\sin \boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{c}}$……②

III. 在$\Delta P_k A_{k+1} P_{k+1}$中，$\dfrac{\overline{P_k A_{k+1}}}{\sin \boldsymbol{b}} = \dfrac{\overline{A_{k+1} P_{k+1}}}{\sin \boldsymbol{c}} \Rightarrow \dfrac{\overline{A_{k+1} P_{k+1}}}{\overline{P_k A_{k+1}}} = \dfrac{\sin \boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{b}}$……③

IV. 由①×②×③得$\dfrac{\overline{P'_k A_1}}{\overline{A_k P'_k}} \times \dfrac{\overline{A_k P_k}}{\overline{P_k A_{k+1}}} \times \dfrac{\overline{A_{k+1} P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1} A_1}} = \dfrac{\sin \boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{c}} \times \dfrac{\sin \boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{b}} \times \dfrac{\sin \boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{a}} = 1$

情形二：若$\forall \boldsymbol{i} \in \{1, 2, \cdots, \boldsymbol{k}+1\}$，線段$\overline{A_i A_{i+1}}$與直線$\boldsymbol{L}$均無交點，則因爲$A_1 A_2 \cdots A_n$爲凸$\boldsymbol{n}$邊形，所以必存在一直線$\overleftrightarrow{A_m A_{m+2}}$不平行於$\boldsymbol{L}$，在不失一般性之下，可以假設$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{k}$，並設直線$\boldsymbol{L}$與直線$\overleftrightarrow{A_m A_{m+2}}$（即直線$\overleftrightarrow{A_k A_1}$）交於一點$P'_k$，如下圖(六)所示，則



圖(六)

我們有

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}} \times \frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}} \times \cdots \times \frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}} \times \frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}} \times \frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}} \times \frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$= \frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}} \times \frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}} \times \cdots \times \frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}} \times \frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}} \times \frac{\overline{A_kP'_k}}{\overline{P'_kA_1}} \times \frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}} \times \frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}} \times \frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$= \left(\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}} \times \frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}} \times \cdots \times \frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}} \times \frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}} \times \frac{\overline{A_kP'_k}}{\overline{P'_kA_1}} \right) \times \left(\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}} \times \frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}} \times \frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}} \right)$$

$$= 1 \times \left(\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}} \times \frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}} \times \frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}} \right)$$

至此，只需再證明$\dfrac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}} \times \dfrac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}} \times \dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}} = 1$即可，我們驗證如下：

I. 在$\Delta P'_k A_1 P_{k+1}$中，$\dfrac{\overline{P'_kA_1}}{\sin} = \dfrac{\overline{P_{k+1}A_1}}{\sin} \Rightarrow \dfrac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{P_{k+1}A_1}} = \dfrac{\sin}{\sin}$……④

II. 在$\Delta P'_k A_k P_k$中，$\dfrac{\overline{A_kP_k}}{\sin\left(180^\circ-\ \right)}=\dfrac{\overline{A_kP'_k}}{\sin\Gamma}\Rightarrow\dfrac{\overline{A_kP_k}}{\overline{A_kP'_k}}=\dfrac{\sin\left(180^\circ-\ \right)}{\sin\ \Gamma}=\dfrac{\sin\ }{\sin\ \Gamma}$……⑤

III. 在$\Delta P_k A_{k+1} P_{k+1}$中，$\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin\Gamma}=\dfrac{\overline{P_kA_{k+1}}}{\sin\ }\Rightarrow\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_kA_{k+1}}}=\dfrac{\sin\Gamma}{\sin\ }$……⑥

由④×⑤×⑥得$\dfrac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\dfrac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=\dfrac{\sin\ }{\sin\ }\times\dfrac{\sin\ }{\sin\Gamma}\times\dfrac{\sin\Gamma}{\sin\ }=1$，故此情形，原命題成立。

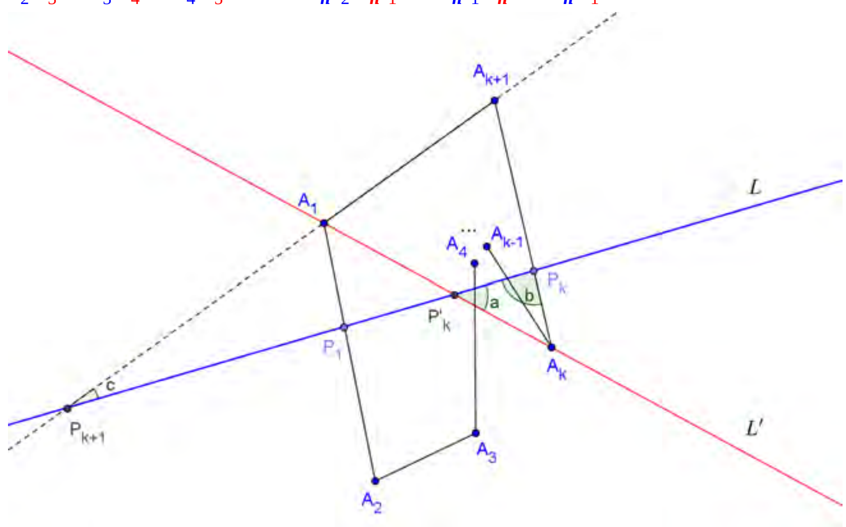
Q.E.D.

我們試著將定理一的結果中的『凸n邊形』以『n條直線』取代，得整理成如下的結果。

定理二：

假設直角坐標平面上有n條兩兩不平行的直線$L_1, L_2, \cdots, L_n$，又此n條直線均無『三線共點的情形』，且L_n與L_1相交於A_1，L_k與L_{k+1}相交於A_{k+1}，其中$k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，今有另一直線L，已知直線L分別直線$L_1, L_2, \cdots, L_n$各交於一點$P_1, P_2, \cdots, P_n$，其中對於每一個$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，點P_i不可等於$\overline{A_iA_{i+1}}$之兩端點。

試證明：$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{n-2}P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_{n-1}}}\times\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\dfrac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=1$。



圖(七)

證明：用數學歸納法證明如下，

(i) 當 n=3，$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\times\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=1$。

(ii) 假設 n=k 時成立，亦即$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\dfrac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\dfrac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_1}}=1$。

(iii) 當 n=k+1 時，我們分兩類情形討論之。

情形一：若存在一直線$\overline{A_iA_{i+2}}$不平行於L（於此，我們視$A_{n+j}=A_j, \forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$），則先連接直線$\overleftrightarrow{A_iA_{i+2}}$，且在不失一般性之下，我們可以假設$i=k$，亦即連接直線$\overleftrightarrow{A_kA_{k+2}}$（即連接直線$\overleftrightarrow{A_kA_1}$），此時因為$\overleftrightarrow{A_kA_1}$不平行於$L$，故$\overleftrightarrow{A_kA_1}$必與$L$交於一點，令此交點為$P'_k$，如上圖(七)所示，於是我們可以如下之推論，

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP'_k}}{\overline{P'_kA_1}}\times\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\left(\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP'_k}}{\overline{P'_kA_1}}\right)\times\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=1\times\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$ 。

至此，只需再證明 $\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=1$ 即可，我們驗證如下。如上圖(七)，

I. 在 $\Delta P_kP'_kA_k$ 中，

$$\frac{\overline{A_kP_k}}{\sin a}=\frac{\overline{A_kP'_k}}{\sin b}\Rightarrow\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{A_kP'_k}}=\frac{\sin a}{\sin b}\cdots\cdots①$$

II. 在 $\Delta A_{k+1}P_kP_{k+1}$ 中，$\frac{\overline{A_{k+1}P_k}}{\sin c}=\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin(180^\circ-b)}\Rightarrow\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_kA_{k+1}}}=\frac{\sin b}{\sin c}\cdots\cdots②$

III. 在 $\Delta A_1P_k'P_{k+1}$ 中，$\frac{\overline{A_1P'_k}}{\sin c}=\frac{\overline{A_1P_{k+1}}}{\sin a}\Rightarrow\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=\frac{\sin c}{\sin a}\cdots\cdots③$

IV. 由①×②×③得 $\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=\frac{\sin c}{\sin b}\times\frac{\sin a}{\sin c}\times\frac{\sin b}{\sin a}=1$

，故此情形，原命題成立。

情形二：若 $\forall i\in\{1,2,\cdots,k+1\}$，$\overline{A_iA_{i+2}}\,//\,L$，則試著連接 $\overline{A_{k-1}A_1}$，此時 $\overline{A_{k-1}A_1}$ 必不平行於 L，如下圖(八)所示，則我們有

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P'_{k-1}}}{\overline{P'_{k-1}A_1}}\times\frac{\overline{P'_{k-1}A_1}}{\overline{A_{k-1}P'_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

由上述(ii)知，$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P'_{k-1}}}{\overline{P'_{k-1}A_1}}=1$，所以上式會等於

$1\times\frac{\overline{P'_{k-1}A_1}}{\overline{A_{k-1}P'_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$，故只需再證明 $\frac{\overline{P'_{k-1}A_1}}{\overline{A_{k-1}P'_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=1$ 。

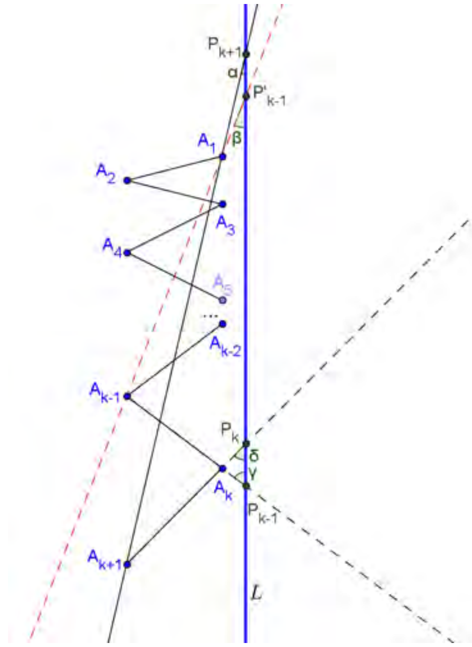
IV. 在 $\Delta P'_{k-1}A_1P_{k+1}$ 中，$\frac{\overline{P'_{k-1}A_1}}{\sin}=\frac{\overline{P_{k+1}A_1}}{\sin\left(180^\circ-\ \right)}\Rightarrow\frac{\overline{P'_{k-1}A_1}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=\frac{\sin}{\sin\left(180^\circ-\ \right)}=\frac{\sin}{\sin}\cdots\cdots④$

V. 在 $\Delta P'_{k-1}A_{k-1}P_{k-1}$ 中，$\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\sin}=\frac{\overline{A_{k-1}P'_{k-1}}}{\sin\Gamma}\Rightarrow\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{A_{k-1}P'_{k-1}}}=\frac{\sin}{\sin\ \Gamma}\cdots\cdots⑤$

VI. 在 $\Delta P_{k-1}A_kP_k$ 中，$\frac{\overline{A_kP_k}}{\sin\Gamma}=\frac{\overline{P_{k-1}A_k}}{\sin\ \Delta}\Rightarrow\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_{k-1}A_k}}=\frac{\sin\Gamma}{\sin\ \Delta}\cdots\cdots⑥$

VII. 在 $\Delta P_kA_{k+1}P_{k+1}$ 中，$\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin\left(180^\circ-\Delta\right)}=\frac{\overline{P_kA_{k+1}}}{\sin}\Rightarrow\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_kA_{k+1}}}=\frac{\sin\left(180^\circ-\Delta\right)}{\sin}=\frac{\sin\Delta}{\sin}\cdots\cdots⑦$

由④×⑤×⑥×⑦得 $\frac{\overline{P'_{k-1}A_1}}{\overline{A_{k-1}P'_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=\frac{\sin}{\sin}\times\frac{\sin}{\sin\Gamma}\times\frac{\sin\Gamma}{\sin\Delta}\times\frac{\sin\Delta}{\sin}$ ＝1，故此情形，原命題成立。

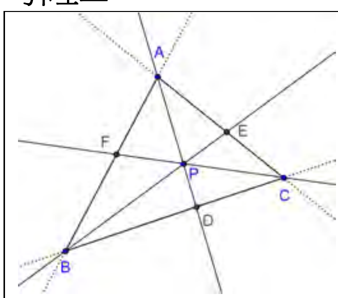


圖(八)

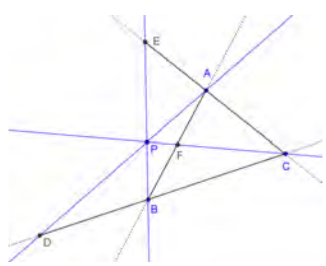
Q.E.D.

得證孟氏定理有『定理一』與『定理二』等相關的推論後，我們開始去思考西瓦定理是否也可以有類似的結果，所以首先讓我們重新檢視一下西瓦定理，再做可能的推論。

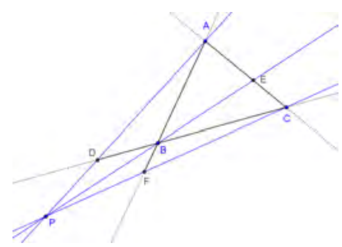
引理二：



圖(九)



圖(十)



圖(十一)

(1) 西瓦定理_形式一

已知平面上有一三角形 ABC，且 D、E 與 F 分別爲 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、與 $\overline{AB}$ 上一點，

滿足 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、與 $\overline{CF}$ 三線段共交點 P，如上圖(九)，則 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。

證明：

(i) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\Delta ACF}{\Delta BCF}=\frac{\Delta APF}{\Delta BPF}=\frac{\Delta ACF-\Delta APF}{\Delta BCF-\Delta BPF}=\frac{\Delta ACP}{\Delta BCP}$……①

(ii) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD}=\frac{\Delta BPD}{\Delta CPD}=\frac{\Delta ABD-\Delta BPD}{\Delta ACD-\Delta CPD}=\frac{\Delta ABP}{\Delta ACP}$……②

(iii) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\Delta BCE}{\Delta BAE}=\frac{\Delta CPE}{\Delta APE}=\frac{\Delta BCE-\Delta CPE}{\Delta BAE-\Delta APE}=\frac{\Delta BCP}{\Delta ABP}$……③

(iv) 由①×②×③得 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\dfrac{\Delta ACP}{\Delta BCP}\times\dfrac{\Delta ABP}{\Delta ACP}\times\dfrac{\Delta BCP}{\Delta ABP}=1$，得證。 **Q.E.D.**

我們試著將上述(1)式中的交點 ***P*** 移到三角形 ***ABC*** 的外部，如上頁圖(十)，驗證其正確性。

(2) 西瓦定理_形式二

已知平面上有一三角形 ***ABC***，且 ***D***、***E*** 與 ***F*** 分別為 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$、與 $\overleftrightarrow{AB}$ 上一點，

滿足 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、與 $\overleftrightarrow{CF}$ 三線段共交點 ***P***，如上頁圖(十)，則 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。

證明：

(i) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\dfrac{\Delta ACF}{\Delta BCF}=\dfrac{\Delta APF}{\Delta BPF}=\dfrac{\Delta ACF+\Delta APF}{\Delta BCF+\Delta BPF}=\dfrac{\Delta ACP}{\Delta BCP}$……①

(ii) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{\Delta ABD}{\Delta ACD}=\dfrac{\Delta BPD}{\Delta CPD}=\dfrac{\Delta ABD-\Delta BPD}{\Delta ACD-\Delta CPD}=\dfrac{\Delta ABP}{\Delta ACP}$……②

(iii) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\dfrac{\Delta BCE}{\Delta BAE}=\dfrac{\Delta CPE}{\Delta APE}=\dfrac{\Delta BCE-\Delta CPE}{\Delta BAE-\Delta APE}=\dfrac{\Delta BCP}{\Delta ABP}$……③

(iv) 由①×②×③得 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\dfrac{\Delta ACP}{\Delta BCP}\times\dfrac{\Delta ABP}{\Delta ACP}\times\dfrac{\Delta BCP}{\Delta ABP}=1$，得證。 **Q.E.D.**

我們試著再將上述(1)式中的交點 ***P*** 移到三角形 ***ABC*** 外部的另一處，如上頁圖(十一)，驗證其正確性。

(3) 西瓦定理_形式三

已知平面上有一三角形 ***ABC***，且 ***D***、***E*** 與 ***F*** 分別為 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$、與 $\overleftrightarrow{AB}$ 上一點，

滿足 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、與 $\overleftrightarrow{CF}$ 三線段共交點 ***P***，如上頁圖(十一)，則 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。

證明：

(i) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\dfrac{\Delta ACF}{\Delta BCF}=\dfrac{\Delta APF}{\Delta BPF}=\dfrac{\Delta ACF+\Delta APF}{\Delta BCF+\Delta BPF}=\dfrac{\Delta ACP}{\Delta BCP}$……①

(ii) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{\Delta ABD}{\Delta ACD}=\dfrac{\Delta BPD}{\Delta CPD}=\dfrac{\Delta ABD+\Delta BPD}{\Delta ACD+\Delta CPD}=\dfrac{\Delta ABP}{\Delta ACP}$……②

(iii) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\dfrac{\Delta BCE}{\Delta BAE}=\dfrac{\Delta CPE}{\Delta APE}=\dfrac{\Delta CPE-\Delta BCE}{\Delta APE-\Delta BAE}=\dfrac{\Delta BCP}{\Delta ABP}$……③

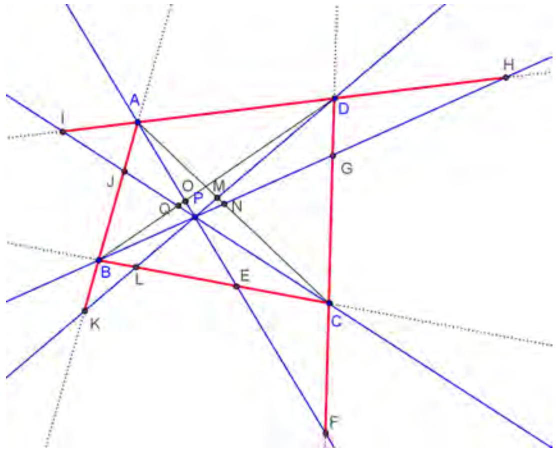
由①×②×③得 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\dfrac{\Delta ACP}{\Delta BCP}\times\dfrac{\Delta ABP}{\Delta ACP}\times\dfrac{\Delta BCP}{\Delta ABP}=1$，得證。 **Q.E.D.**

依據上述『引理一』的結果，我們發現三線共點的『點』並不一定要在三角形的內部，因此，我們在想是否可以將西瓦定理中的『三角形』換成『四邊形』，然後推廣得相對應的結果，於是我們有了下面的結果。

問題五：

假設平面上有一凸四邊形 ***ABCD***，又 ***P*** 點為平面上一定點，***P*** 點不落在四邊形 ***ABCD*** 四邊所在的直線上，亦不落在其兩對角線 $\overleftrightarrow{AC}$ 與 $\overleftrightarrow{BD}$ 上，且 $\overleftrightarrow{CP}$、$\overleftrightarrow{DP}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 分別交於 ***J*** 與 ***K***，$\overleftrightarrow{DP}$、$\overleftrightarrow{AP}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 分別交於 ***L*** 與 ***E***，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 分別交於 ***F*** 與 ***G***，$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 分別交於 ***H*** 與 ***I***，則

$\dfrac{\overline{AJ}}{\overline{JB}}\times\dfrac{\overline{AK}}{\overline{KB}}\times\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\times\dfrac{\overline{BL}}{\overline{LC}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FD}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}\times\dfrac{\overline{DI}}{\overline{IA}}=1$。



圖(十二)

證明：如上圖(十二)所示，

(i) 在$\Delta \boldsymbol{ABC}$中，$\because \overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BN}$、$\overleftrightarrow{CJ}$三線共點 $\therefore \frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}} \times \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \times \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = 1 \cdots\cdots$ ①

(ii) 在$\Delta \boldsymbol{ACD}$中，$\because \overleftrightarrow{AF}$、$\overleftrightarrow{CI}$、$\overleftrightarrow{DM}$三線共點 $\therefore \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{CF}}{\overline{FD}} \times \frac{\overline{DI}}{\overline{IA}} = 1 \cdots\cdots$ ②

(iii) 在$\Delta \boldsymbol{BCD}$中，$\because \overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CQ}$、$\overleftrightarrow{DL}$三線共點 $\therefore \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \times \frac{\overline{CG}}{\overline{GD}} \times \frac{\overline{DQ}}{\overline{QB}} = 1 \cdots\cdots$ ③

(iv) 在$\Delta \boldsymbol{ABD}$中，$\because \overleftrightarrow{AO}$、$\overleftrightarrow{BH}$、$\overleftrightarrow{DK}$三線共點 $\therefore \frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \times \frac{\overline{BO}}{\overline{OD}} \times \frac{\overline{DH}}{\overline{HA}} = 1 \cdots\cdots$ ④

(v) 由①×②×③×④得

$$\left(\frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}} \times \frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \times \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \times \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \times \frac{\overline{CF}}{\overline{FD}} \times \frac{\overline{CG}}{\overline{GD}} \times \frac{\overline{DH}}{\overline{HA}} \times \frac{\overline{DI}}{\overline{IA}}\right) \times \left(\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{DQ}}{\overline{QB}} \times \frac{\overline{BO}}{\overline{OD}}\right) = 1$$

所以只需要證明$\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{DQ}}{\overline{QB}} \times \frac{\overline{BO}}{\overline{OD}} = 1$ 就可得知$\frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}} \times \frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \times \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \times \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \times \frac{\overline{CF}}{\overline{FD}} \times \frac{\overline{CG}}{\overline{GD}} \times \frac{\overline{DH}}{\overline{HA}} \times \frac{\overline{DI}}{\overline{IA}} = 1$

I. 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = \frac{\Delta BCN}{\Delta ABN} = \frac{\Delta CPN}{\Delta APN} = \frac{\Delta BCN - \Delta CPN}{\Delta ABN - \Delta APN} = \frac{\Delta BCP}{\Delta ABP} \cdots\cdots$ ①

II. 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\Delta APM}{\Delta CPM} = \frac{\Delta ADM}{\Delta CDM} = \frac{\Delta APM + \Delta ADM}{\Delta CPM + \Delta CDM} = \frac{\Delta ADP}{\Delta CDP} \cdots\cdots$ ②

III. 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{DQ}}{\overline{QB}} = \frac{\Delta CDQ}{\Delta BCQ} = \frac{\Delta DQP}{\Delta BQP} = \frac{\Delta CQD - \Delta DQP}{\Delta BCQ - \Delta BQP} = \frac{\Delta CDP}{\Delta BCP} \cdots\cdots$ ③

IV. 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{BO}}{\overline{OD}} = \frac{\Delta BPO}{\Delta DPO} = \frac{\Delta ABO}{\Delta ADO} = \frac{\Delta BPO + \Delta ABO}{\Delta DPO + \Delta ADO} = \frac{\Delta ABP}{\Delta ADP} \cdots\cdots$ ④

V. 由①×②×③×④得$\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{DQ}}{\overline{QB}} \times \frac{\overline{BO}}{\overline{OD}} = \frac{\Delta BCP}{\Delta ABP} \times \frac{\Delta ADP}{\Delta CDP} \times \frac{\Delta CDP}{\Delta BCP} \times \frac{\Delta ABP}{\Delta ADP} = 1$

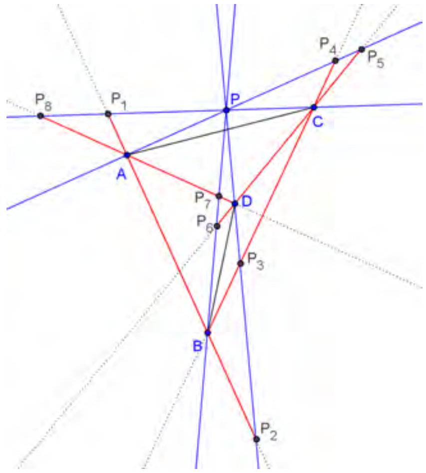
Q.E.D.

有了上述的結果，我們知道西瓦定理在凸四邊形可以有如上的推廣結果，我們試著考慮西瓦定理在凹四邊形是不是也有類似的推廣，於是我們獲得如下的結論。

問題六：

假設平面上有一凹四邊形$\boldsymbol{ABCD}$，又$\boldsymbol{P}$點爲平面上一定點，$\boldsymbol{P}$點不落在四邊形$\boldsymbol{ABCD}$四邊所在的直線上，亦不落在其兩對角線$\overleftrightarrow{AC}$與$\overleftrightarrow{BD}$上，且$\overleftrightarrow{CP}$、$\overleftrightarrow{DP}$與$\overleftrightarrow{AB}$分別交於P_1與P_2，$\overleftrightarrow{DP}$、$\overleftrightarrow{AP}$與$\overleftrightarrow{BC}$分別交於P_3與P_4，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$與$\overleftrightarrow{CD}$分別交於P_5與P_6，$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$與$\overleftrightarrow{DA}$分別交於P_7與P_8，

則$\dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\times\dfrac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}\times\dfrac{\overline{BP_3}}{\overline{P_3C}}\times\dfrac{\overline{BP_4}}{\overline{P_4C}}\times\dfrac{\overline{CP_5}}{\overline{P_5D}}\times\dfrac{\overline{CP_6}}{\overline{P_6D}}\times\dfrac{\overline{DP_7}}{\overline{P_7A}}\times\dfrac{\overline{DP_8}}{\overline{P_8A}}=1$。



圖(十三)

證明：如上圖(十三)所示，

(i) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}=\dfrac{\Delta APP_1}{\Delta BPP_1}=\dfrac{\Delta ACP_1}{\Delta BCP_1}=\dfrac{\Delta ACP_1-\Delta APP_1}{\Delta BCP_1-\Delta BPP_1}=\dfrac{\Delta ACP}{\Delta BCP}\cdots\cdots①$

(ii) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}=\dfrac{\Delta APP_2}{\Delta BPP_2}=\dfrac{\Delta ADP_2}{\Delta BDP_2}=\dfrac{\Delta APP_2-\Delta ADP_2}{\Delta BPP_2-\Delta BDP_2}=\dfrac{\Delta ADP}{\Delta BDP}\cdots\cdots②$

(iii) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{BP_3}}{\overline{P_3C}}=\dfrac{\Delta BPP_3}{\Delta CPP_3}=\dfrac{\Delta BDP_3}{\Delta CDP_3}=\dfrac{\Delta BPP_3-\Delta BDP_3}{\Delta CPP_3-\Delta CDP_3}=\dfrac{\Delta BDP}{\Delta CDP}\cdots\cdots③$

(iv) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{BP_4}}{\overline{P_4C}}=\dfrac{\Delta BPP_4}{\Delta CPP_4}=\dfrac{\Delta BAP_4}{\Delta CAP_4}=\dfrac{\Delta BAP_4-\Delta BPP_4}{\Delta CAP_4-\Delta CPP_4}=\dfrac{\Delta ABP}{\Delta ACP}\cdots\cdots④$

(v) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{CP_5}}{\overline{P_5D}}=\dfrac{\Delta CPP_5}{\Delta DPP_5}=\dfrac{\Delta CAP_5}{\Delta DAP_5}=\dfrac{\Delta CAP_5-\Delta CPP_5}{\Delta DAP_5-\Delta DPP_5}=\dfrac{\Delta ACP}{\Delta ADP}\cdots\cdots⑤$

(vi) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{CP_6}}{\overline{P_6D}}=\dfrac{\Delta CPP_6}{\Delta DPP_6}=\dfrac{\Delta CBP_6}{\Delta DBP_6}=\dfrac{\Delta CPP_6+\Delta CBP_6}{\Delta DPP_6+\Delta DBP_6}=\dfrac{\Delta BCP}{\Delta BDP}\cdots\cdots⑥$

(vii) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{DP_7}}{\overline{P_7A}}=\dfrac{\Delta DPP_7}{\Delta APP_7}=\dfrac{\Delta DBP_7}{\Delta ABP_7}=\dfrac{\Delta DPP_7+\Delta DBP_7}{\Delta APP_7+\Delta ABP_7}=\dfrac{\Delta BDP}{\Delta ABP}\cdots\cdots⑦$

(viii) 由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{DP_8}}{\overline{P_8A}}=\dfrac{\Delta DPP_8}{\Delta APP_8}=\dfrac{\Delta DCP_8}{\Delta ACP_8}=\dfrac{\Delta DCP_8-\Delta DPP_8}{\Delta ACP_8-\Delta APP_8}=\dfrac{\Delta CDP}{\Delta ACP}\cdots\cdots⑧$

(ix) 由①×②×③×④×⑤×⑥×⑦×⑧得$\dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\times\dfrac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}\times\dfrac{\overline{BP_3}}{\overline{P_3C}}\times\dfrac{\overline{BP_4}}{\overline{P_4C}}\times\dfrac{\overline{CP_5}}{\overline{P_5D}}\times\dfrac{\overline{CP_6}}{\overline{P_6D}}\times\dfrac{\overline{DP_7}}{\overline{P_7A}}\times\dfrac{\overline{DP_8}}{\overline{P_8A}}$

$$=\frac{\Delta ACP}{\Delta BCP}\times\frac{\Delta ADP}{\Delta BDP}\times\frac{\Delta BDP}{\Delta CDP}\times\frac{\Delta ABP}{\Delta ACP}\times\frac{\Delta ACP}{\Delta ADP}\times\frac{\Delta BCP}{\Delta BDP}\times\frac{\Delta BDP}{\Delta ABP}\times\frac{\Delta CDP}{\Delta ACP}=1。$$ **Q.E.D.**

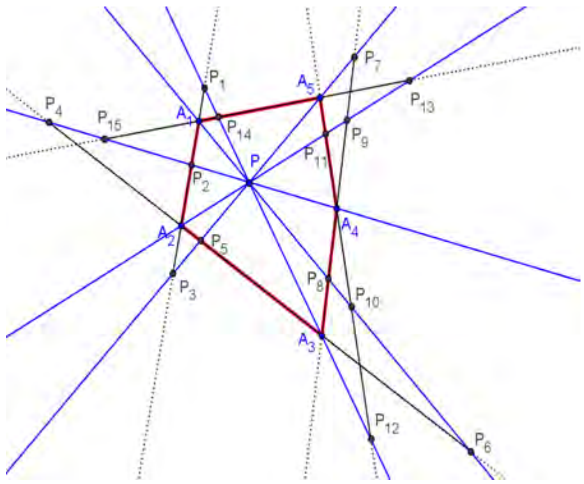
有了『問題六』的結果後，那麼將西瓦定理中的『三角形』換成『五邊形』，也應順理成章是正確的，以下是我們嘗試後獲得的結果。

問題七：

假設平面上有一凸五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$，又P點爲平面上一定點，P點不落在五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$五邊所在的直線上，亦不落在其對角線上，且$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$、$\overleftrightarrow{A_5P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$分別交於$P_1$、$P_2$與$P_3$，

$\overleftrightarrow{A_4P}$、$\overleftrightarrow{A_5P}$、$\overleftrightarrow{A_1P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$分別交於$P_4$、$P_5$與$P_6$，$\overleftrightarrow{A_5P}$、$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$與$\overleftrightarrow{A_3A_4}$分別交於$P_7$、$P_8$與$P_9$，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$與$\overleftrightarrow{A_4A_5}$分別交於$P_{10}$、$P_{11}$與$P_{12}$，$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$分別交於$P_{13}$、$P_{14}$與$P_{15}$，則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_5}}{\overline{P_5A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_6}}{\overline{P_6A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_7}}{\overline{P_7A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_8}}{\overline{P_8A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{10}}}{\overline{P_{10}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{11}}}{\overline{P_{11}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{12}}}{\overline{P_{12}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{13}}}{\overline{P_{13}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{14}}}{\overline{P_{14}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{15}}}{\overline{P_{15}A_1}}=1$$ 。



圖(十四)

證明：如上圖(十四)所示，

(i) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}=\frac{\Delta A_1PP_1}{\Delta A_2PP_1}=\frac{\Delta A_1A_3P_1}{\Delta A_2A_3P_1}=\frac{\Delta A_1A_3P_1-\Delta A_1PP_1}{\Delta A_2A_3P_1-\Delta A_2PP_1}=\frac{\Delta A_1A_3P}{\Delta A_2A_3P}$……①

(ii) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}=\frac{\Delta A_1PP_2}{\Delta A_2PP_2}=\frac{\Delta A_1A_4P_2}{\Delta A_1A_4P_2}=\frac{\Delta A_1A_4P_2-\Delta A_1PP_2}{\Delta A_1A_4P_2-\Delta A_2PP_2}=\frac{\Delta A_1A_4P}{\Delta A_2A_4P}$……②

(iii) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}=\frac{\Delta A_1PP_3}{\Delta A_2PP_3}=\frac{\Delta A_1A_5P_3}{\Delta A_2A_5P_3}=\frac{\Delta A_1A_5P_3-\Delta A_1PP_3}{\Delta A_2A_5P_3-\Delta A_2PP_3}=\frac{\Delta A_1A_5P}{\Delta A_2A_5P}$……③

(iv) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}=\frac{\Delta A_2PP_4}{\Delta A_3PP_4}=\frac{\Delta A_2A_4P_4}{\Delta A_3A_4P_4}=\frac{\Delta A_2A_4P_4-\Delta A_2PP_4}{\Delta A_3A_4P_4-\Delta A_3PP_4}=\frac{\Delta A_2A_4P}{\Delta A_3A_4P}$……④

(v) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{A_2P_5}}{\overline{P_5A_3}}=\frac{\Delta A_2PP_5}{\Delta A_3PP_5}=\frac{\Delta A_2A_5P_5}{\Delta A_3A_5P_5}=\frac{A_2A_5P_5-\Delta A_2PP_5}{\Delta A_3A_5P_5-\Delta A_3PP_5}=\frac{\Delta A_2A_5P}{\Delta A_3A_5P}$……⑤

(vi) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{A_2P_6}}{\overline{P_6A_3}}=\frac{\Delta A_2PP_6}{\Delta A_3PP_6}=\frac{\Delta A_2A_1P_6}{\Delta A_3A_1P_6}=\frac{\Delta A_2A_1P_6-\Delta A_2PP_6}{\Delta A_3A_1P_6-\Delta A_3PP_6}=\frac{\Delta A_1A_2P}{\Delta A_1A_3P}$……⑥

(vii) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{A_3P_7}}{\overline{P_7A_4}}=\frac{\Delta A_3PP_7}{\Delta A_4PP_7}=\frac{\Delta A_3A_5P_7}{\Delta A_4A_5P_7}=\frac{\Delta A_3A_5P_7-\Delta A_3PP_7}{\Delta A_4A_5P_7-\Delta A_4PP_7}=\frac{\Delta A_3A_5P}{\Delta A_4A_5P}$……⑦

(viii) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{A_3P_8}}{\overline{P_8A_4}}=\frac{\Delta A_3PP_8}{\Delta A_4PP_8}=\frac{\Delta A_3A_1P_8}{\Delta A_4A_1P_8}=\frac{\Delta A_3A_1P_8-\Delta A_3PP_8}{\Delta A_4A_1P_8-\Delta A_4PP_8}=\frac{\Delta A_1A_3P}{\Delta A_1A_4P}$……⑧

(ix) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_4}}=\frac{\Delta A_3PP_9}{\Delta A_4PP_9}=\frac{\Delta A_3A_2P_9}{\Delta A_4A_2P_9}=\frac{\Delta A_3A_2P_9-\Delta A_3PP_9}{\Delta A_4A_2P_9-\Delta A_4PP_9}=\frac{\Delta A_2A_3P}{\Delta A_2A_4P}$……⑨

(x) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{A_4P_{10}}}{\overline{P_{10}A_5}}=\frac{\Delta A_4PP_{10}}{\Delta A_5PP_{10}}=\frac{\Delta A_4A_1P_{10}}{\Delta A_5A_1P_{10}}=\frac{\Delta A_4A_1P_{10}-\Delta A_4PP_{10}}{\Delta A_5A_1P_{10}-\Delta A_5PP_{10}}=\frac{\Delta A_1A_4P}{\Delta A_1A_5P}$……⑩

(xi) 由三角形面積公式得知，$\frac{\overline{A_4P_{11}}}{\overline{P_{11}A_5}}=\frac{\Delta A_4PP_{11}}{\Delta A_5PP_{11}}=\frac{\Delta A_4A_2P_{11}}{\Delta A_5A_2P_{11}}=\frac{\Delta A_4A_2P_{11}-\Delta A_4PP_{11}}{\Delta A_5A_2P_{11}-\Delta A_5PP_{11}}=\frac{\Delta A_2A_4P}{\Delta A_2A_5P}$……⑪

(xii)　由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{A_4P_{12}}}{\overline{P_{12}A_5}}=\dfrac{\Delta A_4PP_{12}}{\Delta A_5PP_{12}}=\dfrac{\Delta A_4A_3P_{12}}{\Delta A_5A_3P_{12}}=\dfrac{\Delta A_4PP_{12}-\Delta A_4A_3P_{12}}{\Delta A_5PP_{12}-\Delta A_5A_3P_{12}}=\dfrac{\Delta A_3A_4P}{\Delta A_3A_5P}$……⑫

(xiii)　由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{A_5P_{13}}}{\overline{P_{13}A_1}}=\dfrac{\Delta A_5PP_{13}}{\Delta A_1PP_{13}}=\dfrac{\Delta A_5A_2P_{13}}{\Delta A_1A_2P_{13}}=\dfrac{\Delta A_5A_2P_{13}-\Delta A_5PP_{13}}{\Delta A_1A_2P_{13}-\Delta A_1PP_{13}}=\dfrac{\Delta A_2A_5P}{\Delta A_1A_2P}$……⑬

(xiv)　由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{A_5P_{14}}}{\overline{P_{14}A_1}}=\dfrac{\Delta A_5PP_{14}}{\Delta A_1PP_{14}}=\dfrac{\Delta A_5A_3P_{14}}{\Delta A_1A_3P_{14}}=\dfrac{\Delta A_5A_3P_{14}-\Delta A_5PP_{14}}{\Delta A_1A_3P_{14}-\Delta A_1PP_{14}}=\dfrac{\Delta A_3A_5P}{\Delta A_1A_3P}$……⑭

(xv)　由三角形面積公式得知，$\dfrac{\overline{A_5P_{15}}}{\overline{P_{15}A_1}}=\dfrac{\Delta A_5PP_{15}}{\Delta A_1PP_{15}}=\dfrac{\Delta A_5A_4P_{15}}{\Delta A_1A_4P_{15}}=\dfrac{\Delta A_5A_4P_{15}-\Delta A_5PP_{15}}{\Delta A_1A_4P_{15}-\Delta A_1PP_{15}}=\dfrac{\Delta A_4A_5P}{\Delta A_1A_4P}$……⑮

由①×②×③×④×⑤×⑥×⑦×⑧×⑨×⑩×⑪×⑫×⑬×⑭×⑮得

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_5}}{\overline{P_5A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_6}}{\overline{P_6A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_7}}{\overline{P_7A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_8}}{\overline{P_8A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{10}}}{\overline{P_{10}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{11}}}{\overline{P_{11}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{12}}}{\overline{P_{12}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{13}}}{\overline{P_{13}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{14}}}{\overline{P_{14}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{15}}}{\overline{P_{15}A_1}}$$

$$=\frac{\Delta A_1A_3P}{\Delta A_2A_3P}\times\frac{\Delta A_1A_4P}{\Delta A_2A_4P}\times\frac{\Delta A_1A_5P}{\Delta A_2A_5P}\times\frac{\Delta A_2A_4P}{\Delta A_3A_4P}\times\frac{\Delta A_2A_5P}{\Delta A_3A_5P}\times\frac{\Delta A_1A_2P}{\Delta A_1A_3P}\times\frac{\Delta A_3A_5P}{\Delta A_4A_5P}\times\frac{\Delta A_1A_3P}{\Delta A_1A_4P}\times\frac{\Delta A_2A_3P}{\Delta A_2A_4P}\times$$

$$\frac{\Delta A_1A_4P}{\Delta A_1A_5P}\times\frac{\Delta A_2A_4P}{\Delta A_2A_5P}\times\frac{\Delta A_3A_4P}{\Delta A_3A_5P}\times\frac{\Delta A_2A_5P}{\Delta A_1A_2P}\times\frac{\Delta A_3A_5P}{\Delta A_1A_3P}\times\frac{\Delta A_4A_5P}{\Delta A_1A_4P}=1\text{ 。}$$

Q.E.D.

由於『三點共線』的『孟氏定理』與『三線共點』的『西瓦定理』互為『對偶命題』，意思是說將『點』換成『線』，且將『線』換成『點』，我們就可以由其中之一變成另一個，很幸運的是這組『對偶命題』均成立。

針對『孟氏定理』，從問題一、二、三、四至定理一與二的結果，我們發現其結果可以類推到『n邊形』與『n條直線』的情形，於是我們開始去思考，其對偶命題『西瓦定理』是否也可以做類似或他種向度的推廣呢？我們試著將邊數增加，先得到『問題五』、『問題六』與『問題七』的結果，接下來我們嘗試將其推廣到『n邊形』，而有了如下的『定理三』。

定理三：

假設平面上有一凸n邊形$A_1A_2\cdots A_n$，又P點為平面上一定點，P點不落在凸n邊形$A_1A_2\cdots A_n$ n邊所在的直線上，亦不落在其對角線上，且$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$、…、$\overleftrightarrow{A_nP}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$分別交於$P_1$、$P_2$、…、$P_{n-2}$，$\overleftrightarrow{A_4P}$、$\overleftrightarrow{A_5P}$、…、$\overleftrightarrow{A_nP}$、$\overleftrightarrow{A_1P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$分別交於$P_{(n-2)+1}$、$P_{(n-2)+2}$、…、$P_{2(n-2)}$，・・・，$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$、…、$\overleftrightarrow{A_nP}$、$\overleftrightarrow{A_{n-1}P}$與$\overleftrightarrow{A_nA_1}$分別交於$P_{(n-1)(n-2)+1}$、$P_{(n-1)(n-2)+2}$、…、$P_{n(n-2)}$，則

$$\left(\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_1P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_2}}\right)\times\left(\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-2)+1}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-2)+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_2P_{2(n-2)}}}{\overline{P_{2(n-2)}A_3}}\right)\times\cdots\times\left(\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_nP_{n(n-2)}}}{\overline{P_{n(n-2)}A_1}}\right)=1$$

，其中對於$0\le k\le n-1$，$1\le j\le n-2$，滿足$P_{k(n-2)+j}\in\overleftrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$，亦即直線$\overleftrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$上有$(n-2)$個點$P_{k(n-2)+1},P_{k(n-2)+2},P_{k(n-2)+3},\cdots P_{k(n-2)+(n-2)},$ 。

證明：

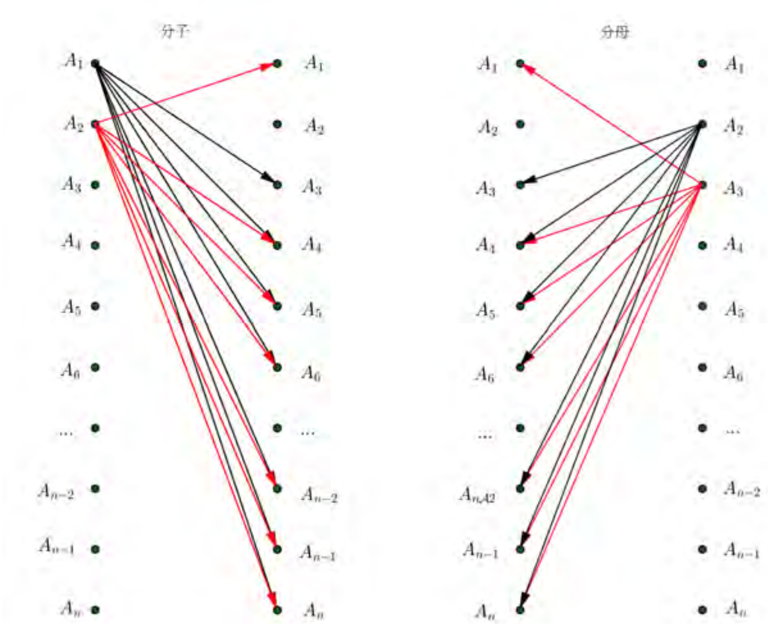
(i)　在以下的論證過程中，我們視$A_{n+j}=A_j$，$\forall j\in\{1,2,\cdots,n-2\}$ 。

(ii)　從上述問題七中，我們觀察發現得如下之結果：

$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}=\dfrac{\Delta A_1A_3P}{\Delta A_2A_3P}$ ……(1)， $\dfrac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}=\dfrac{\Delta A_1A_4P}{\Delta A_2A_4P}$ ……(2)，	$\dfrac{\overline{A_2P_{(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-2)+1}A_3}}=\dfrac{\Delta A_2A_4P}{\Delta A_3A_4P}$ ……$((n-2)+1)$， $\dfrac{\overline{A_2P_{(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-2)+2}A_3}}=\dfrac{\Delta A_2A_5P}{\Delta A_3A_5P}$ ……$((n-2)+2)$，

…, $\frac{\overline{A_1P_j}}{\overline{P_jA_2}}=\frac{\Delta A_1A_{2+j}P}{\Delta A_2A_{2+j}P}$ ……(j)， …, $\frac{\overline{A_1P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_2}}=\frac{\Delta A_1A_nP}{\Delta A_2A_nP}$ ……$(n-2)$；	…, $\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+j}}}{\overline{P_{(n-2)+j}A_3}}=\frac{\Delta A_2A_{3+j}P}{\Delta A_3A_{3+j}P}$ ……$((n-2)+j)$， …, $\frac{\overline{A_2P_{2(n-2)}}}{\overline{P_{2(n-2)}A_3}}=\frac{\Delta A_2A_{n+1}P}{\Delta A_3A_{n+1}P}$ ……$(2(n-2))$；
$\frac{\overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+1}}}{\overline{P_{k(n-2)+1}A_{k+2}}}=\frac{\Delta A_{k+1}A_{k+3}P}{\Delta A_{k+2}A_{k+3}P}$ ……$(k(n-2)+1)$， $\frac{\overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+2}}}{\overline{P_{k(n-2)+2}A_{k+2}}}=\frac{\Delta A_{k+1}A_{k+4}P}{\Delta A_{k+2}A_{k+4}P}$ ……$(k(n-2)+2)$， …, $\frac{\overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+j}}}{\overline{P_{k(n-2)+j}A_{k+2}}}=\frac{\Delta A_{k+1}A_{(k+2)+j}P}{\Delta A_{k+2}A_{(k+2)+j}P}$ …$(k(n-2)+j)$， …, $\frac{\overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+(n-2)}}}{\overline{P_{k(n-2)+(n-2)}A_{k+2}}}=\frac{\Delta A_{k+1}A_{(k+2)+(n-2)}P}{\Delta A_{k+2}A_{(k+2)+(n-2)}P}$ …$(k(n-2)+(n-2))$；	$\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}=\frac{\Delta A_nA_2P}{\Delta A_1A_2P}$ …$((n-1)(n-2)+1)$， $\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}=\frac{\Delta A_nA_3P}{\Delta A_1A_3P}$ …$((n-1)(n-2)+2)$， …, $\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+j}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+j}A_1}}=\frac{\Delta A_nA_{j+1}P}{\Delta A_1A_{j+1}P}$ …$((n-1)(n-2)+j)$， …, $\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+(n-2)}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+(n-2)}A_1}}=\frac{\Delta A_nA_{n-1}P}{\Delta A_1A_{n-1}P}$ …$((n-1)(n-2)+(n-2))$；

觀察上述 $n(n-2)$ 個式子，我們發現各個比值的分子與分母的三角形具有如下規則，



(表一)

將上述 $n(n-2)$ 個式子全部相乘，我們將證明

$$\left(\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_1P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_2}}\right)\times\left(\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-2)+1}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-2)+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_2P_{2(n-2)}}}{\overline{P_{2(n-2)}A_3}}\right)\times\cdots\times\left(\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_nP_{n(n-2)}}}{\overline{P_{n(n-2)}A_1}}\right)=1$$

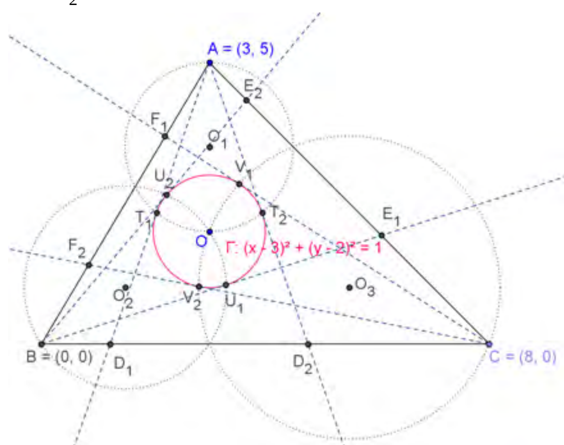
理由如下：

我們希望證明在線段比值換成如上兩頁的三角形面積比值後，$n(n-2)$ 個式子的分子與分母剛好可以兩兩相消。在上列表一中，首先觀察分子，分子左側頂點的 A_2 會對到 $A_4, A_5, A_6, \cdots, A_n, A_1$，再觀察分母，分母右側頂點的 A_2 會對到 $A_3, A_4, A_5, \cdots, A_{n-1}, A_n$，相消之後，分子還剩下 A_2A_1，分母還剩下 A_2A_3，其中分子剩下的 A_2A_1 可再與分母的 A_1A_2 相消，分母剩下的 A_2A_3 可再與分子的 A_3A_2 相消，仿此規律，我們發現分子與分母剛好可以兩兩相消，所以上式乘積爲 1，故得證。 **Q.E.D.**

在證明上述『定理三』的同時，我們也嘗試西瓦定理另一向度的推測，我們先舉一個例子來測試一下，如下例 1 所示。

例 1.

已知平面上一三角形 $\boldsymbol{ABC}$ ，其中 $\boldsymbol{A}(3,5),\boldsymbol{B}(0,0),\boldsymbol{C}(8,0)$ ，且一圓 $\Gamma:(\boldsymbol{x}-3)^2+(\boldsymbol{y}-2)^2=1$ 位於 $\Delta\boldsymbol{ABC}$ 內部，其圓心為 $\boldsymbol{O}$ ，今過 $\boldsymbol{A}$ 點作圓 Γ 的兩切線 $\overleftrightarrow{AT_1},\overleftrightarrow{AT_2}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 $\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2$ ，過 $\boldsymbol{B}$ 點作圓 Γ 的兩切線 $\overleftrightarrow{BU_1},\overleftrightarrow{BU_2}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2$ ，過 $\boldsymbol{C}$ 點作圓 Γ 的兩切線 $\overleftrightarrow{CV_1},\overleftrightarrow{CV_2}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ ，試求 $\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}$ 之值。



圖(十五)

解：如上圖(十五)所示，

Step1.先求 $\overline{BD_1}^2$ 、$\overline{BD_2}^2$ 、$\overline{D_1C}^2$ 與 $\overline{D_2C}^2$ 。

設 $\overleftrightarrow{AD_1}:\boldsymbol{y}-5=\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}-3) \Rightarrow \overleftrightarrow{AD_1}:\boldsymbol{mx}-\boldsymbol{y}-3\boldsymbol{m}+5=0$ ，

因為 $\overleftrightarrow{AD_1}$ 與 圓 Γ 相切 ，所以 $\boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{O},\overleftrightarrow{AD_1}\right)=1 \Rightarrow \dfrac{|\boldsymbol{m}\times3-2-3\boldsymbol{m}+5|}{\sqrt{\boldsymbol{m}^2+(-1)^2}}=1 \Rightarrow \boldsymbol{m}=\pm2\sqrt{2}$ 。

(1) 先求 $\boldsymbol{D}_1$ 點座標。

$$\begin{cases}\overleftrightarrow{AD_1}:\boldsymbol{y}-5=2\sqrt{2}(\boldsymbol{x}-3)\Rightarrow\overleftrightarrow{AD_1}:2\sqrt{2}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-6\sqrt{2}+5=0\\ \overleftrightarrow{BC}:\boldsymbol{y}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{AD_1}\text{ 與 }\overleftrightarrow{BC}\text{ 的交點座標為 }\boldsymbol{D}_1\left(\frac{6\sqrt{2}-5}{2\sqrt{2}},0\right)\Rightarrow\begin{cases}\overline{BD_1}^2=(\dfrac{6\sqrt{2}-5}{2\sqrt{2}}-0)^2+(0-0)^2=\dfrac{97-60\sqrt{2}}{8}\\ \overline{D_1C}^2=(\dfrac{6\sqrt{2}-5}{2\sqrt{2}}-8)^2+(0-0)^2=\dfrac{225+100\sqrt{2}}{8}\end{cases}\text{。}$$

(2) 次求 $\boldsymbol{D}_2$ 點座標。

$$\begin{cases}\overleftrightarrow{AD_2}:\boldsymbol{y}-5=(-2\sqrt{2})(\boldsymbol{x}-3)\Rightarrow\overleftrightarrow{AD_2}:2\sqrt{2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-6\sqrt{2}-5=0\\ \overleftrightarrow{BC}:\boldsymbol{y}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{AD_2}\text{ 與 }\overleftrightarrow{BC}\text{ 的交點座標為 }\boldsymbol{D}_2\left(\frac{6\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}},0\right)\Rightarrow\begin{cases}\overline{BD_2}^2=(\dfrac{6\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}}-0)^2+(0-0)^2=\dfrac{97+60\sqrt{2}}{8}\\ \overline{D_2C}^2=(\dfrac{6\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}}-8)^2+(0-0)^2=\dfrac{225-100\sqrt{2}}{8}\end{cases}\text{。}$$

Step2.同上述 Step1 之方式，我們可以求得

$$\begin{cases}\overline{CE_1}^2=\dfrac{1536-768\sqrt{3}}{52-14\sqrt{3}}\\[2mm]\overline{E_1A}^2=\dfrac{296+132\sqrt{3}}{52-14\sqrt{3}}\end{cases};\quad\begin{cases}\overline{CE_2}^2=\dfrac{1536+768\sqrt{3}}{52+14\sqrt{3}}\\[2mm]\overline{E_2A}^2=\dfrac{296-132\sqrt{3}}{52+14\sqrt{3}}\end{cases};\quad\begin{cases}\overline{AF_1}^2=\dfrac{47600-11900\sqrt{7}}{5688+450\sqrt{7}}\\[2mm]\overline{F_1B}^2=\dfrac{69632+21760\sqrt{7}}{5688+450\sqrt{7}}\end{cases};\quad\begin{cases}\overline{AF_2}^2=\dfrac{47600+11900\sqrt{7}}{5688-450\sqrt{7}}\\[2mm]\overline{F_2B}^2=\dfrac{69632-21760\sqrt{7}}{5688-450\sqrt{7}}\end{cases}。$$

Step3.所以$\left(\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\right)^2$

$$=\frac{\left(\dfrac{47600-11900\sqrt{7}}{5688+450\sqrt{7}}\right)}{\left(\dfrac{69632+21760\sqrt{7}}{5688+450\sqrt{7}}\right)}\times\frac{\dfrac{97-60\sqrt{2}}{8}}{\dfrac{225+100\sqrt{2}}{8}}\times\frac{\left(\dfrac{1536-768\sqrt{3}}{52-14\sqrt{3}}\right)}{\left(\dfrac{296+132\sqrt{3}}{52-14\sqrt{3}}\right)}\times\frac{\left(\dfrac{47600+11900\sqrt{7}}{5688-450\sqrt{7}}\right)}{\left(\dfrac{69632-21760\sqrt{7}}{5688-450\sqrt{7}}\right)}\times\frac{\left(\dfrac{97+60\sqrt{2}}{8}\right)}{\left(\dfrac{225-100\sqrt{2}}{8}\right)}\times\frac{\left(\dfrac{1536+768\sqrt{3}}{52+14\sqrt{3}}\right)}{\left(\dfrac{296-132\sqrt{3}}{52+14\sqrt{3}}\right)}$$

$$=\frac{\left(11900\left(4-\sqrt{7}\right)\right)}{\left(4352\left(16+5\sqrt{7}\right)\right)}\times\frac{\left(97-60\sqrt{2}\right)}{\left(25\left(9+4\sqrt{2}\right)\right)}\times\frac{\left(768\left(2-\sqrt{3}\right)\right)}{\left(4\left(74+33\sqrt{3}\right)\right)}\times\frac{\left(11900\left(4+\sqrt{7}\right)\right)}{\left(4352\left(16-5\sqrt{7}\right)\right)}\times\frac{\left(97+60\sqrt{2}\right)}{\left(25\left(9-4\sqrt{2}\right)\right)}\times\frac{\left(768\left(2+\sqrt{3}\right)\right)}{\left(4\left(74-33\sqrt{3}\right)\right)}$$

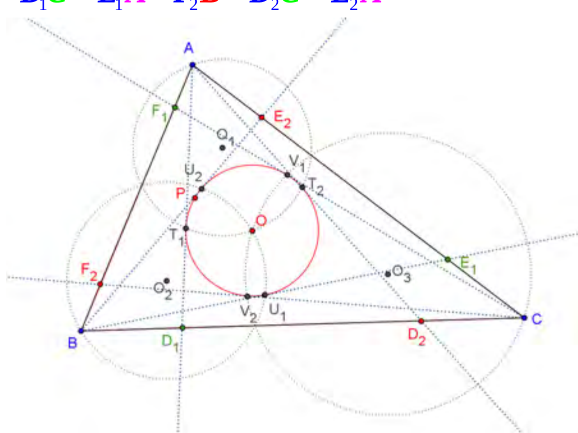
$$=\frac{11900\times11900\times768\times768\times9\times2209\times1}{4352\times4352\times25\times25\times4\times4\times81\times49\times2209}=1，故得\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1。$$

Q.E.D

有了上述『例 1』之結果後，我們將之一般化，並證明得如下『定理四』之結果。

定理四：

給定一三角形ΔABC，且一圓Γ位於ΔABC內部，過A點作圓Γ的兩切線$\overleftrightarrow{AT_1},\overleftrightarrow{AT_2}$分別交$\overleftrightarrow{BC}$於$D_1,D_2$，過$B$點作圓$\Gamma$的兩切線$\overleftrightarrow{BU_1},\overleftrightarrow{BU_2}$分別交$\overleftrightarrow{CA}$於$E_1,E_2$，過$C$點作圓$\Gamma$的兩切線$\overleftrightarrow{CV_1},\overleftrightarrow{CV_2}$分別交$\overleftrightarrow{AB}$於$F_1,F_2$，則$\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$。



圖(十六)

證明：如上圖(十六)所示，

(i)在不失一般性之下，我們可以假設ΔABC三頂點座標為$A(s,t),B(0,0),C(c,0)$，且圓Γ方程式為$\Gamma:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，其中圓心為$O(h,k)$，半徑為$r$，則先考慮切線不是鉛直線的情形，利用點斜式求直線方程式，及圓心到切線距離等於半徑之性質，再利用距離公式計算得

$$(1)\quad \overline{BD_1}^2=\left(\frac{s(h-s)(k-t)+s\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}-t\left((h-s)^2-r^2\right)}{(h-s)(k-t)+\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}}\right)^2$$

$$(2)\quad \overline{D_1C}^2=\left(\frac{(c-s)(h-s)(k-t)+(c-s)\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}+t\left((h-s)^2-r^2\right)}{(h-s)(k-t)+\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}}\right)^2$$

$$(3)\quad \overline{BD_2}^2=\left(\frac{s(h-s)(k-t)-s\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}-t\left((h-s)^2-r^2\right)}{(h-s)(k-t)-\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}}\right)^2$$

$$(4)\quad \overline{D_2C}^2=\left(\frac{(c-s)(h-s)(k-t)-(c-s)\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}+t\left((h-s)^2-r^2\right)}{(h-s)(k-t)-\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}}\right)^2$$

$$(5)\quad \overline{CE_1}^2=\frac{\left(c^2(c-s)^2+c^2t^2\right)\left(hk+\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left(\left(h^2-r^2\right)t+(c-s)hk+(c-s)\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}$$

$$(6)\quad \overline{E_1A}^2=\frac{\left((c-s)^2+t^2\right)\left(\left(h^2-r^2\right)t-shk-s\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left(\left(h^2-r^2\right)t+(c-s)hk+(c-s)\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}$$

$$(7)\quad \overline{CE_2}^2=\frac{\left(c^2(c-s)^2+c^2t^2\right)\left(hk-\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left(\left(h^2-r^2\right)t+(c-s)hk-(c-s)\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}$$

$$(8)\quad \overline{E_2A}^2=\frac{\left((c-s)^2+t^2\right)\left(\left(h^2-r^2\right)t-shk+s\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left(\left(h^2-r^2\right)t+(c-s)hk-(c-s)\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}$$

$$(9)\quad \overline{AF_1}^2=\frac{\left(s^2+t^2\right)\left((h-c)sk+s\sqrt{(h-c)^2r^2+r^2k^2-r^4}-\left((h-c)^2-r^2\right)t-c(h-c)k-c\sqrt{(h-c)^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left((h-c)sk+s\sqrt{(h-c)^2r^2+r^2k^2-r^4}-\left((h-c)^2-r^2\right)t\right)^2}$$

$$(10)\quad \overline{F_1B}^2=\frac{\left(c^2s^2+c^2t^2\right)\left((h-c)k+\sqrt{(h-c)^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left((h-c)sk+s\sqrt{(h-c)^2r^2+r^2k^2-r^4}-\left((h-c)^2-r^2\right)t\right)^2}$$

$$(11)\quad \overline{AF_2}^2=\frac{\left(s^2+t^2\right)\left((h-c)sk-s\sqrt{(h-c)^2r^2+r^2k^2-r^4}-\left((h-c)^2-r^2\right)t-c(h-c)k+c\sqrt{(h-c)^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left((h-c)sk-s\sqrt{(h-c)^2r^2+r^2k^2-r^4}-\left((h-c)^2-r^2\right)t\right)^2}$$

$$(12)\quad \overline{F_2B}^2=\frac{\left(c^2s^2+c^2t^2\right)\left((h-c)k-\sqrt{(h-c)^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left((h-c)sk-s\sqrt{(h-c)^2r^2+r^2k^2-r^4}-\left((h-c)^2-r^2\right)t\right)^2}$$

所以$\left(\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\right)^2$

$$\xrightarrow{\text{經化簡得}}=\left(\frac{\left((s-c)^2\left(k^2-r^2\right)-2(s-c)(h-c)kt+\left((h-c)^2-r^2\right)t^2\right)^2}{\left(\left(h^2-r^2\right)t^2-2tshk+s^2\left(k^2-r^2\right)\right)^2}\right)\times$$

$$\left(\frac{\left(\left(s(h-s)(k-t)-t\left((h-s)^2-r^2\right)\right)^2-s^2\left((h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4\right)\right)^2}{\left(\left((c-s)(h-s)(k-t)+t\left((h-s)^2-r^2\right)\right)^2-(c-s)^2\left((h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4\right)\right)^2}\right)\cdots(Eq1)$$

(ii)爲了方便，我們將上述(i)中最後一個式子以 Eq1 表示之，展開得 $\sqrt{\boldsymbol{Eq}1}$ 的分子等於

$$
\begin{aligned}
&(s^2 k^2 - s^2 r^2 - 2 s c k^2 + 2 s c r^2 + c^2 k^2 - c^2 r^2 - 2 k t s h \\
&\quad + 2 k t s c + 2 k t c h - 2 k t c^2 + t^2 h^2 - 2 t^2 c h + t^2 c^2 \\
&\quad - t^2 r^2) (s^4 k^2 + t^2 h^4 + t^2 r^4 + 4 s^2 h^2 k t - 2 s h^3 k t \\
&\quad - 2 s^3 h t k + 2 s h t^2 r^2 + 2 s h k t r^2 + s^2 h^2 t^2 - 2 t^2 h^2 r^2 \\
&\quad - 2 s h^3 t^2 + s^2 h^2 k^2 - 2 s^3 h k^2 - s^2 r^2 h^2 + 2 s^3 r^2 h - s^4 r^2 \\
&\quad - s^2 r^2 k^2 - s^2 t^2 r^2 + s^2 r^4)
\end{aligned}
$$

再乘開得

$$
\begin{aligned}
&{}^2 t - 4 s^5 k^3 h t + 2 t^2 c^2 s^3 r^2 h + 6 s^2 k^2 t^2 h^4 \\
&- 2 s^4 r^2 h^2 t^2 - 2 s^4 k^2 t^2 r^2 + 4 s^5 k^2 r^2 h - 2 s^4 k^2 r^2 h^2 \\
&+ 2 s^2 k^2 t^2 r^4 + 2 s c r^6 t^2 - 4 s^3 c k^2 r^4 + 2 s^3 c k^4 r^2 \\
&+ 4 s^5 c k^2 r^2 + 4 s^4 c k^4 h - 2 s^3 c k^4 h^2 - 2 s^2 r^2 t^2 h^4 \\
&- 4 s^3 r^4 h t^2 + 4 s^2 r^4 t^2 h^2 + 4 s^3 r^2 h^3 t^2 + 4 s^4 c r^4 h \\
&- 2 s^3 c r^4 h^2 + 3 t^4 h^2 r^4 + 4 s^3 k^2 h t^2 r^2 - 2 c^2 k^4 s^3 h \\
&+ c^2 k^4 s^2 h^2 - 2 s^3 c r^4 t^2 - 8 s^4 r^2 h^2 k t - c^2 k^4 s^2 r^2 \\
&- 2 c^2 k^2 s^4 r^2 + c^2 k^2 t^2 r^4 + t^4 r^4 s^2 + c^2 k^2 t^2 h^4 \\
&- 8 s^2 k^2 t^2 h^2 r^2 + 4 s^3 k^3 h t r^2 - c^2 r^2 t^2 h^4 + 2 c^2 r^4 t^2 h^2 \\
&+ 2 c^2 k^2 s^2 r^4 - 4 s^3 r^4 h k t + 6 s^3 c k^2 h^2 t^2 + 4 s^3 r^2 h^3 k t \\
&+ 4 s^5 r^2 h t k + 6 s^2 c k^3 h^3 t + 2 s^4 c k^3 h t + 8 s c k^2 t^2 h^2 r^2 \\
&+ 6 s^2 c k^2 h^3 t^2 - 10 s^3 c k^3 h^2 t - 4 t^4 c h^2 s r^2 \\
&- 6 s^2 c k^3 h t r^2 - 6 s c k^2 t^2 h^4 - 2 s c k^2 t^2 r^4 - 2 c^2 r^4 s^3 h \\
&+ c^2 r^4 s^2 h^2 + 2 s^2 c k^2 h t^2 r^2 + 8 k t^3 s^2 h^4 - 4 k t^3 s^3 h^3 \\
&+ 4 s^3 c k^2 r^2 h^2 - 8 s^4 c k^2 r^2 h + 2 c^2 r^4 s^2 t^2 - 2 k t^3 c^2 r^4 \\
&- 2 k t^3 c^2 h^4 - 2 k^3 t c^2 s^4 + 2 k t^3 c h^5 + 2 k^3 t s^5 c \\
&- 4 k t^3 s h^5 + 2 s^3 c k^2 t^2 r^2 - 2 s^3 c r^2 h^2 t^2 - 2 s^2 c r^2 h^3 t^2 \\
&- 4 s c r^4 t^2 h^2 + 4 t^4 h^3 s r^2 + 4 t^4 c h^4 s - 2 t^4 c h^3 s^2 \\
&- 2 t^4 h^2 s^2 r^2 - 2 c^2 k^2 s h t^2 r^2 - 2 c^2 k^3 s h^3 t + 2 c^2 k^3 s^3 h \\
&- 2 c^2 k^2 t^2 h^2 r^2 + 2 c^2 k^3 s^2 h^2 t + t^2 c^2 s^4 k^2 - 2 t^4 c^2 h^2 r^2 \\
&- 6 c^2 k^2 s^2 h^2 t^2 + 2 c^2 k^2 s h^3 t^2 + 6 s^2 c r^4 h k t \\
&+ 2 s^2 c r^4 h t^2 + 2 s c r^2 t^2 h^4 - 2 t^4 c^2 s h^3 + t^4 c^2 s^2 h^2 \\
&- 2 t^4 c h r^4 - 2 s^4 c r^2 h t k - 6 s^2 c r^2 h^3 k t \\
&+ 10 s^3 c r^2 h^2 k t + 4 t^4 c h^3 r^2 + 2 c^2 k^3 s h t r^2 \\
&+ 2 t^2 c h s^4 r^2 - 2 c^2 r^2 s^3 h t k + 2 c^2 r^2 s h^3 k t \\
&- 2 c^2 r^2 s^2 h^2 k t + 2 c^2 r^2 s h^3 t^2 - 2 c^2 r^4 s h t^2 \\
&- 2 c^2 k^2 s^2 t^2 r^2 - 2 c^2 r^2 s^2 h^2 t^2 - 2 c^2 k^2 s^2 r^2 h^2 \\
&+ 4 c^2 k^2 s^3 r^2 h - 4 k t^3 s h r^4 + 8 k t^3 s h^3 r^2 - 8 k t^3 s^2 h^2 r^2 \\
&- 2 c^2 r^4 s h k t - 10 k t^3 s^2 c h^3 + 6 k t^3 s^3 c h^2 + 2 t^4 c h s^2 r^2 \\
&+ 4 k t^3 s^3 h r^2 - 4 k t^3 s c h^2 r^2 + 2 k t^3 s^2 c h r^2 \\
&- 6 k^2 t^2 s^4 c h + 2 k t^3 s c h^4 + 2 k t^3 s c r^4 - 2 k t s^5 c r^2 \\
&- 2 k^3 t s^3 c r^2 - 2 k t^3 s^3 c r^2 + 2 k t s^3 c r^4 - 4 k t^3 c h^3 r^2 \\
&+ t^4 h^6 + 2 k t^3 c h r^4 + 2 k t^3 c^2 s^2 h^2 - t^4 r^6 - 2 t^4 r^4 s h \\
&+ 2 k^2 t^2 c^2 s^3 h + 2 k t c^2 s^4 r^2 + 2 k t^3 c^2 s h^3 + 4 k t^3 c^2 h^2 r^2 \\
&- s^4 r^6 - 2 t^3 c^2 s^3 h k - 2 k t^3 c^2 s h r^2 + 2 t^4 c^2 s h r^2 \\
&- t^4 c^2 s^2 r^2 + s^6 r^4 - t^2 c^2 s^4 r^2 + 2 k^3 t c^2 s^2 r^2 \\
&+ 2 k t^3 c^2 s^2 r^2 - 2 k t c^2 s^2 r^4
\end{aligned}
$$

再用 Maple 12 將之因式分解得

$$
\begin{aligned}
&(-r + h - s)(r + h - s)(t^2 h^2 - t^2 r^2 - 2 k t s h + s^2 k^2 \\
&\quad - s^2 r^2)(s^2 k^2 - s^2 r^2 - 2 s c k^2 + 2 s c r^2 + c^2 k^2 - c^2 r^2 \\
&\quad - 2 k t s h + 2 k t s c + 2 k t c h - 2 k t c^2 + t^2 h^2 - 2 t^2 c h \\
&\quad + t^2 c^2 - t^2 r^2)
\end{aligned}
$$

(iii) 以同樣的方式我們發現 $\sqrt{\boldsymbol{Eq}1}$ 的分母乘開後因式分解後亦等於

$$
\begin{aligned}
&(-r + h - s)(r + h - s)(t^2 h^2 - t^2 r^2 - 2 k t s h + s^2 k^2 \\
&\quad - s^2 r^2)(s^2 k^2 - s^2 r^2 - 2 s c k^2 + 2 s c r^2 + c^2 k^2 - c^2 r^2 \\
&\quad - 2 k t s h + 2 k t s c + 2 k t c h - 2 k t c^2 + t^2 h^2 - 2 t^2 c h \\
&\quad + t^2 c^2 - t^2 r^2)
\end{aligned}
$$

由此得 $\left(\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\right)^2=1$，

故得證 $\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$。

(iv)至於切線是鉛垂直線的其他情形，則類似於如上(i)、(ii)與(iii)的證明過程，故得證原命題。

Q.E.D.

Remark 1:

(1) 上述的式子 Eq1，果如我們的期待等於 1，因爲將分子與分母分別用數學運算軟體 **Maple 12** 展開後，發現分子與分母的展開式全然相同，所以很自然地將分子分母直接相消獲得定值 1。

(2) 在定理四的論證過程中，我們發現三角形內部的圓 Γ 似乎並不一定要在三角形內部，圓 Γ 似乎只要在三角形的外接圓內即可，論證的過程不受影響。我們也用了數學軟體 Geogebra 做了一些實驗來支持 我們的論證。

(3) 定座標做運算本來就不是一開始的想法，在這一個問題裡，定座標後整個計算過程變得非常複雜，費了許多力氣後，結果雖如預期，因此我們還是希望未來可以找到用『純幾何』的方法來思考解決該問題，因爲這樣會簡潔有力一點。

(4) 之所以最後考慮用坐標幾何的方式來解決該問題，主要是因爲在例 1 中的計算過程中，我們發現 $\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}$ 這個式子分子與分母的各項大部分的情形並不能獨立相消，所以將其單純的轉換成面積比再作相消似乎不再可行了，故方如此爲之。

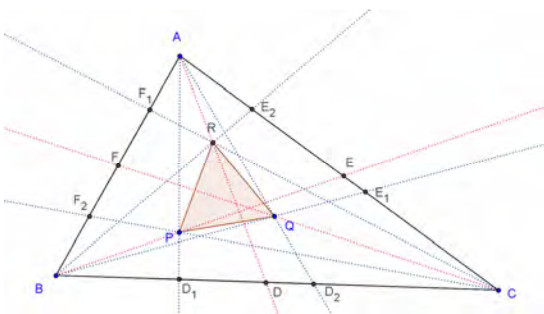
上述定理四的結果已完整的給出證明，所以我們試著再將三角形 ABC 內部的『圓』換成一個『正三角形』與一個『正方形』測試看看，於是有了如下的結果。

問題八：

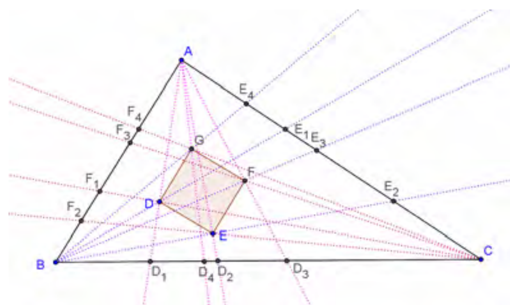
(1) 給定一個三角形 ABC，接著我們試著將『定理四』中三角形 ABC 內部的『圓』換成一個正三角形 PQR，並自 A 點出發作出三射線 $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AR},\overrightarrow{AQ}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D_1,D,D_2，自 B 點出發作出三射線 $\overrightarrow{BQ},\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BR}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 E_1,E,E_2，自 C 點出發作出三射線 $\overrightarrow{CR},\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 F_1,F,F_2，如下圖(十七)所示，試證：$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$。

(2) 給定一個三角形 ABC，接著我們試著將『定理四』中三角形 ABC 內部的『圓』換成一個正方形 $DEFG$，並自 A 點出發作出四射線 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D_1,D_2,D_3,D_4，自 B 點出發作出四射線 $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BG}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 E_1,E_2,E_3,E_4，自 B 點出發作出四射線 $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CG}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 F_1,F_2,F_3,F_4，如下圖(十八)所示，試證：

$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\times\frac{\overline{AF_3}}{\overline{F_3B}}\times\frac{\overline{BD_3}}{\overline{D_3C}}\times\frac{\overline{CE_3}}{\overline{E_3A}}\times\frac{\overline{AF_4}}{\overline{F_4B}}\times\frac{\overline{BD_4}}{\overline{D_4C}}\times\frac{\overline{CE_4}}{\overline{E_4A}}=1。$$



圖(十七)



圖(十八)

證明：(1)

(i) 因爲 $\overleftrightarrow{AD_2}$、$\overleftrightarrow{BE_1}$ 與 $\overleftrightarrow{CF}$ 三線共點，所以由引理二得知，$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}=1$。

(ii) 因爲 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE_2}$ 與 $\overleftrightarrow{CF_1}$ 三線共點，所以由引理二得知，$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$。

(iii) 因爲 $\overleftrightarrow{AD_1}$、$\overleftrightarrow{BE}$ 與 $\overleftrightarrow{CF_2}$ 三線共點，所以由引理二得知，$\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。

(iv) 將上述三式相乘即得 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$。

(2) 對於每一個 $i\in\{1,2,3,4\}$，因爲 $\overleftrightarrow{AD_i}$、$\overleftrightarrow{BE_i}$ 與 $\overleftrightarrow{CF_i}$ 三線共點，所以由引理二得知，

$\frac{\overline{AF_i}}{\overline{F_iB}}\times\frac{\overline{BD_i}}{\overline{D_iC}}\times\frac{\overline{CE_i}}{\overline{E_iA}}=1$，相乘即得

$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\times\frac{\overline{AF_3}}{\overline{F_3B}}\times\frac{\overline{BD_3}}{\overline{D_3C}}\times\frac{\overline{CE_3}}{\overline{E_3A}}\times\frac{\overline{AF_4}}{\overline{F_4B}}\times\frac{\overline{BD_4}}{\overline{D_4C}}\times\frac{\overline{CE_4}}{\overline{E_4A}}=1。$$ **Q.E.D.**

伍、　空間中的『孟氏共面定理』與『西瓦共點定理』

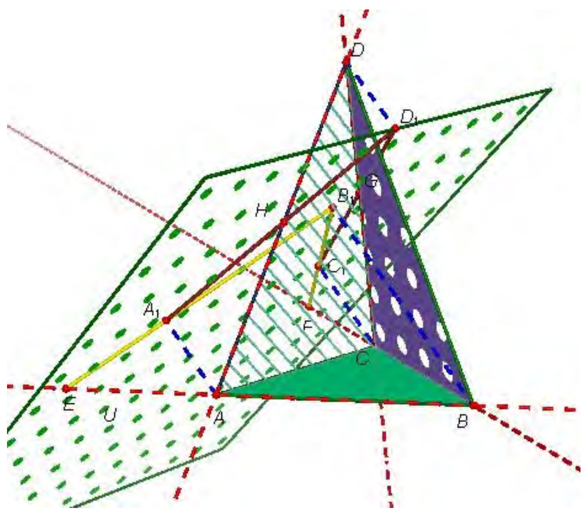
　　完成『孟氏定理』與『西瓦定理』在平面上多邊形中的推論之後，我試著將觸角延伸到立體空間中。

　　我首先考慮空間中的『孟氏共面定理』，在參考資料[1]中，曾經提到四面體裡的『孟氏共面定理』，我發現其『**充分必要**』條件的描述是錯誤的，故將其些微修正而有如下的『引理三』，並補足其證明。

引理三：（空間中的『孟氏共面定理』）

已知 E 、F 、G 與 H 依次為四面體 $D-ABC$ 四稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，且 E 、F 、G 與 H 四點不與四面體 $D-ABC$ 四頂點重合，又 E 、F 、G 與 H 四點同時落在平面 U 上，如下圖(十九)所示，則 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$。

證明：



圖(十九)

設 A_1、B_1、C_1 與 D_1 分別是 A 、B 、C 與 D 在平面 U 上的垂足，則

(i) $\because \Delta AA_1E\sim\Delta BB_1E(AA\text{相似})\ \therefore\ \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}\cdots①$；　(ii) $\because \Delta BB_1F\sim\Delta CC_1F(AA\text{相似})\ \therefore\ \dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\dfrac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}}\cdots②$；

(iii) $\because \Delta CC_1G\sim\Delta DD_1G(AA\text{相似})\ \therefore\ \dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{DD_1}}\cdots③$；　(iv) $\because \Delta DD_1H\sim\Delta AA_1H(AA\text{相似})\ \therefore\ \dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\dfrac{\overline{DD_1}}{\overline{AA_1}}\cdots④$；

由①×②×③×④得，$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}\times\dfrac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}}\times\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{DD_1}}\times\dfrac{\overline{DD_1}}{\overline{AA_1}}=1$。　**Q.E.D.**

Remark 2:

　　在參考資料[1]中，提到『已知 E 、F 、G 與 H 依次為四面體 $D-ABC$ 四稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，則 E 、F 、G 與 H 四點共平面 $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$。』，這樣的結論顯然有誤，因為當 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ 時，E 、F 、G 與 H 四點不必然會共平面，舉例如下：假設四面體 $D-ABC$ 之四頂點坐標分別為 $A(0,0,0)$ 、$B(1,0,0)$ 、$C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ 與 $D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，又取 $E\left(\frac{3}{2},0,0\right)$ 、$F\left(\frac{7}{8},\frac{\sqrt{3}}{8},0\right)$ 、$G\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 與 $H\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$

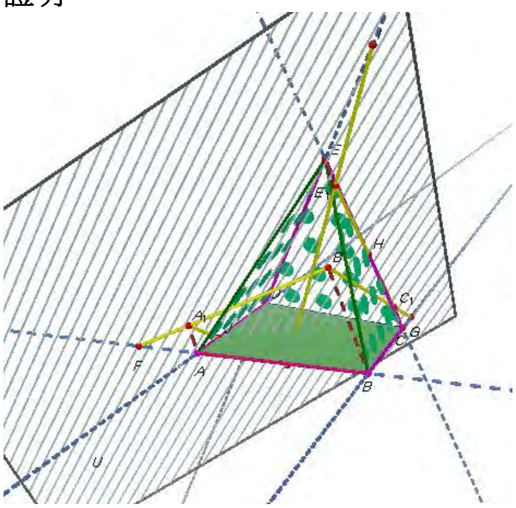
、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，滿足 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{3}{1}$、$\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\dfrac{1}{1}$ 與 $\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\dfrac{1}{1}$，則 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ 成立，且通過 E、F 與 G 三點之平面方程式爲 ${}_{EFG}:\sqrt{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)+5\left(y-0\right)-2\sqrt{2}\left(z-0\right)=0$，顯然 $H\notin{}_{EFG}$，故 E、F、G 與 H 四點不共平面。

接著我們推廣『引理三』的結果到『四角錐』的情形，於是有了如下之『定理五』。

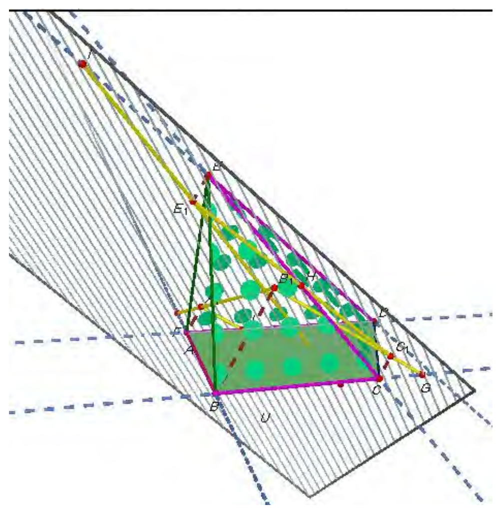
定理五：

已知 F、G、H、I 與 J 依次爲四角錐 $E-ABCD$ 五稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{ED}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上五點，且 F、G、H、I 與 J 五點不與四角錐 $E-ABCD$ 五頂點重合，又 F、G、H、I 與 J 五點同時落在平面 U 上，如下圖(二十)與(二十一)，則 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\dfrac{\overline{CH}}{\overline{HE}}\times\dfrac{\overline{EI}}{\overline{ID}}\times\dfrac{\overline{DJ}}{\overline{JA}}=1$。

證明：



圖(二十)



圖(二十一)

設 A_1、B_1、C_1、D_1 與 E_1 分別是 A、B、C、D 與 E 在平面 U 上的垂足，則

(i) $\because \Delta AA_1F\sim\Delta BB_1F(AA\text{相似})$ $\therefore \dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}\cdots$①；

(ii) $\because \Delta BB_1G\sim\Delta CC_1G(AA\text{相似})$ $\therefore \dfrac{\overline{BG}}{\overline{GC}}=\dfrac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}}\cdots$②；

(iii) $\because \Delta CC_1H\sim\Delta EE_1H(AA\text{相似})$ $\therefore \dfrac{\overline{CH}}{\overline{HE}}=\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{EE_1}}\cdots$③；

(iv) $\because \Delta EE_1I\sim\Delta DD_1I(AA\text{相似})$ $\therefore \dfrac{\overline{EI}}{\overline{ID}}=\dfrac{\overline{EE_1}}{\overline{DD_1}}\cdots$④；

(v) $\because \Delta DD_1J\sim\Delta AA_1J(AA\text{相似})$ $\therefore \dfrac{\overline{DJ}}{\overline{JA}}=\dfrac{\overline{DD_1}}{\overline{AA_1}}\cdots\cdots$⑤；

由①×②×③×④×⑤得，$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\dfrac{\overline{CH}}{\overline{HE}}\times\dfrac{\overline{EI}}{\overline{ID}}\times\dfrac{\overline{DJ}}{\overline{JA}}=\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}\times\dfrac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}}\times\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{EE_1}}\times\dfrac{\overline{EE_1}}{\overline{DD_1}}\times\dfrac{\overline{DD_1}}{\overline{AA_1}}=1$，得證原命題。 **Q.E.D.**

接著我們推廣『引理三』的結果到『五角錐』的情形，於是有了如下之『定理六』。

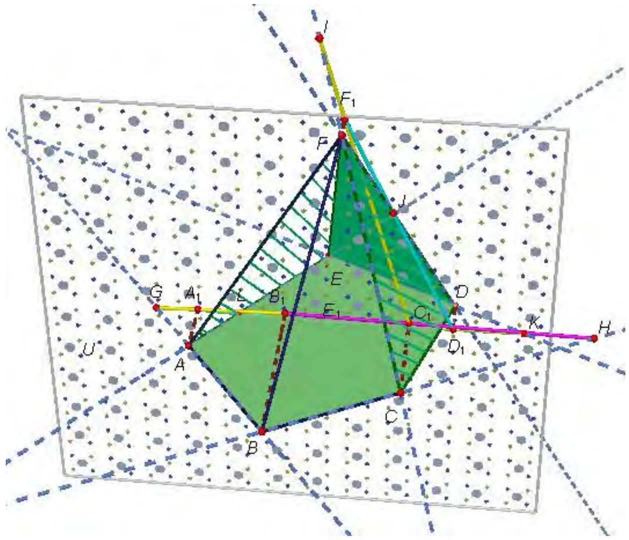
定理六：

已知 G、H、I、J、K 與 L 依次爲五角錐 $F-ABCDE$ 六稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CF}$

、$\overleftrightarrow{FD}$、$\overleftrightarrow{DE}$ 與 $\overleftrightarrow{EA}$ 上六點，且 G、H、I、J、K 與 L 六點不與五角錐 $F-ABCDE$ 六頂點重合，又 G、H、I、J、K 與 L 六點同時落在平面 U 上，如下圖(二十二)，則

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\frac{\overline{CI}}{\overline{IF}}\times\frac{\overline{FJ}}{\overline{JD}}\times\frac{\overline{DK}}{\overline{KE}}\times\frac{\overline{EL}}{\overline{LA}}=1$$ 。

證明：



圖(二十二)

設 A_1、B_1、C_1、D_1、E_1 與 F_1 分別是 A、B、C、D、E 與 F 在平面 U 上的垂足

(i) $\because \Delta AA_1G \sim \Delta BB_1G$ (AA相似) $\therefore \dfrac{\overline{AG}}{\overline{GB}}=\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}\cdots$ ①；

(ii) $\because \Delta BB_1H \sim \Delta CC_1H$ (AA相似) $\therefore \dfrac{\overline{BH}}{\overline{HC}}=\dfrac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}}\cdots$ ②；

(iii) $\because \Delta CC_1I \sim \Delta FF_1I$ (AA相似) $\therefore \dfrac{\overline{CI}}{\overline{IF}}=\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{FF_1}}\cdots$ ③；

(iv) $\because \Delta FF_1J \sim \Delta DD_1J$ (AA相似) $\therefore \dfrac{\overline{FJ}}{\overline{JD}}=\dfrac{\overline{FF_1}}{\overline{DD_1}}\cdots$ ④；

(v) $\because \Delta DD_1K \sim \Delta EE_1K$ (AA相似) $\therefore \dfrac{\overline{DK}}{\overline{KE}}=\dfrac{\overline{DD_1}}{\overline{EE_1}}\cdots$ ⑤；

(vi) $\because \Delta EE_1L \sim \Delta AA_1L$ (AA相似) $\therefore \dfrac{\overline{EL}}{\overline{LA}}=\dfrac{\overline{EE_1}}{\overline{AA_1}}\cdots$ ⑥；

由①×②×③×④　⑤×⑥得，

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\frac{\overline{CI}}{\overline{IF}}\times\frac{\overline{FJ}}{\overline{JD}}\times\frac{\overline{DK}}{\overline{KE}}\times\frac{\overline{EL}}{\overline{LA}}=\frac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}\times\frac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}}\times\frac{\overline{CC_1}}{\overline{FF_1}}\times\frac{\overline{FF_1}}{\overline{DD_1}}\times\frac{\overline{DD_1}}{\overline{EE_1}}\times\frac{\overline{EE_1}}{\overline{AA_1}}=1$$ ，故得證原命題。

Q.E.D.

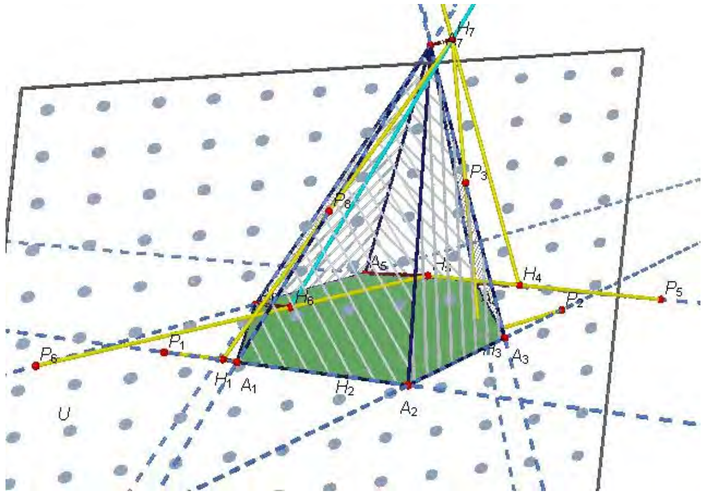
接著我們推廣『引理三』的結果到『六角錐』的情形，於是有了如下之『定理七』。

定理七：

已知 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7 與 P_8 依次為六角錐 $A_7-A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 八稜所在直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_7}$、$\overleftrightarrow{A_7A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 與 $\overleftrightarrow{A_7A_1}$ 上八點，且 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7 與 P_8 八點不與六角錐 $A_7-A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 七頂點重合，又 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7 與 P_8 八點同時落在平面 U 上，如下頁圖(二十三)，則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_7}}\times\frac{\overline{A_7P_4}}{\overline{P_4A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_5}}{\overline{P_5A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_6}}{\overline{P_6A_6}}\times\frac{\overline{A_6P_7}}{\overline{P_7A_7}}\times\frac{\overline{A_7P_8}}{\overline{P_8A_1}}=1$$ 。

證明：對於每一個 $i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$，令 H_i 為 A_i 在平面 U 上的垂足，則由相似三角形性質得知，



圖(二十三)

$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}=\dfrac{\overline{A_1H_1}}{\overline{A_2H_2}},\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}=\dfrac{\overline{A_2H_2}}{\overline{A_3H_3}},\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_7}}=\dfrac{\overline{A_3H_3}}{\overline{A_7H_7}},\dfrac{\overline{A_7P_4}}{\overline{P_4A_4}}=\dfrac{\overline{A_7H_7}}{\overline{A_4H_4}},\dfrac{\overline{A_4P_5}}{\overline{P_5A_5}}=\dfrac{\overline{A_4H_4}}{\overline{A_5H_5}},\dfrac{\overline{A_5P_6}}{\overline{P_6A_6}}=\dfrac{\overline{A_5H_5}}{\overline{A_6H_6}},\dfrac{\overline{A_6P_7}}{\overline{P_7A_7}}=\dfrac{\overline{A_6H_6}}{\overline{A_7H_7}},\dfrac{\overline{A_7P_8}}{\overline{P_8A_1}}=\dfrac{\overline{A_7H_7}}{\overline{A_1H_1}}$，故

$$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_7}}\times\dfrac{\overline{A_7P_4}}{\overline{P_4A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_5}}{\overline{P_5A_5}}\times\dfrac{\overline{A_5P_6}}{\overline{P_6A_6}}\times\dfrac{\overline{A_6P_7}}{\overline{P_7A_7}}\times\dfrac{\overline{A_7P_8}}{\overline{P_8A_1}}$$

$=\dfrac{\overline{A_1H_1}}{\overline{A_2H_2}}\times\dfrac{\overline{A_2H_2}}{\overline{A_3H_3}}\times\dfrac{\overline{A_3H_3}}{\overline{A_7H_7}}\times\dfrac{\overline{A_7H_7}}{\overline{A_4H_4}}\times\dfrac{\overline{A_4H_4}}{\overline{A_5H_5}}\times\dfrac{\overline{A_5H_5}}{\overline{A_6H_6}}\times\dfrac{\overline{A_6H_6}}{\overline{A_7H_7}}\times\dfrac{\overline{A_7H_7}}{\overline{A_1H_1}}=1$，得證原命題。 **Q.E.D.**

由引理三、定理五、定理六與定理七之結果，我很快的可以有如下『定理八』的推論。

定理八：

假設空間中一多面體$\Gamma: A_1A_2A_3\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$，從$n$個頂點中任取$m$個點$A_{k_1},A_{k_2},A_{k_3},\cdots,A_{k_{m-1}},A_{k_m}$（可以重複選取），使得$\forall i\in\{1,2,3,\cdots,m-1,m\}$，$\overline{A_{k_i}A_{k_{i+1}}}$均是$\Gamma$的稜(此處視$A_{k_{m+1}}=A_{k_1}$)，又$\forall j\in\{1,2,3,\cdots,m-1,m\}$，$P_j$爲直線$\overleftrightarrow{A_{k_j}A_{k_{j+1}}}$上異於$A_{k_j}$與$A_{k_{j+1}}$的點，且此$m$個點$P_1,P_2,\cdots,P_m$共平面$U$，其中平面$U$僅與直線$\overleftrightarrow{A_{k_j}A_{k_{j+1}}}$交於一點$P_j$，則$\dfrac{\overline{A_{k_1}P_1}}{\overline{P_1A_{k_2}}}\times\dfrac{\overline{A_{k_2}P_2}}{\overline{P_2A_{k_3}}}\times\dfrac{\overline{A_{k_3}P_3}}{\overline{P_3A_{k_4}}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{k_{m-1}}P_{m-1}}}{\overline{P_{m-1}A_{k_m}}}\times\dfrac{\overline{A_{k_m}P_m}}{\overline{P_mA_{k_1}}}=1$。

證明：

對於每一個$i\in\{1,2,3,\cdots,m-1,m\}$，令$H_i$爲$A_{k_i}$在平面$U$上的垂足，則$\because \Delta P_iA_{k_i}H_i\sim\Delta P_iA_{k_{i+1}}H_{i+1}$ (AA相似)，$\therefore \dfrac{\overline{A_{k_i}P_i}}{\overline{P_iA_{k_{i+1}}}}=\dfrac{\overline{A_{k_i}H_i}}{\overline{A_{k_{i+1}}H_{i+1}}}$，所以

$$\dfrac{\overline{A_{k_1}P_1}}{\overline{P_1A_{k_2}}}\times\dfrac{\overline{A_{k_2}P_2}}{\overline{P_2A_{k_3}}}\times\dfrac{\overline{A_{k_3}P_3}}{\overline{P_3A_{k_4}}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{k_{m-1}}P_{m-1}}}{\overline{P_{m-1}A_{k_m}}}\times\dfrac{\overline{A_{k_m}P_m}}{\overline{P_mA_{k_1}}}=\dfrac{\overline{A_{k_1}H_1}}{\overline{A_{k_2}H_2}}\times\dfrac{\overline{A_{k_2}H_2}}{\overline{A_{k_3}H_3}}\times\dfrac{\overline{A_{k_3}H_3}}{\overline{A_{k_4}H_4}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{k_{m-1}}H_{m-1}}}{\overline{A_{k_m}H_m}}\times\dfrac{\overline{A_{k_m}H_m}}{\overline{A_{k_1}H_1}}=1$$

，得證原命題。 **Q.E.D.**

以另外一個觀點，『定理八』其實可以看成如下『定理九』的形式。

定理九：

假設空間中有n個點$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{n-2},A_{n-1},A_n$，且$\forall j\in\{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$，$P_j$爲直線$\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$上異於$A_j$與$A_{j+1}$的點(此處視$A_{n+1}=A_1$)，又此$n$個點$P_1,P_2,\cdots,P_n$共平面$U$，則

$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=1$。

證明： 對於每一個 $i\in\{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$，令 H_i 為 A_i 在平面 U 上的垂足，則 $\because \Delta P_iA_iH_i \sim \Delta P_iA_{i+1}H_{i+1}$ (AA相似)，$\therefore \frac{\overline{A_iP_i}}{\overline{P_iA_{i+1}}}=\frac{\overline{A_iH_i}}{\overline{A_{i+1}H_{i+1}}}$，所以

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=\frac{\overline{A_1H_1}}{\overline{A_2H_2}}\times\frac{\overline{A_2H_2}}{\overline{A_3H_3}}\times\frac{\overline{A_3H_3}}{\overline{A_4H_4}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-1}H_{n-1}}}{\overline{A_nH_n}}\times\frac{\overline{A_nH_n}}{\overline{A_1H_1}}=1$$

，得證原命題。

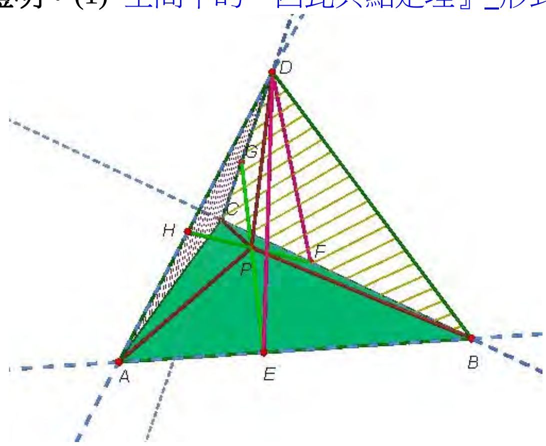
Q.E.D.

我接著考慮空間中的『西瓦共點定理』，在參考資料[1]中，曾經提到四面體裡的『西瓦共點定理』，我發現其『**充分必要**』條件的描述是錯誤的，故將其些微修正而有如下的『引理四』，並補足其證明。

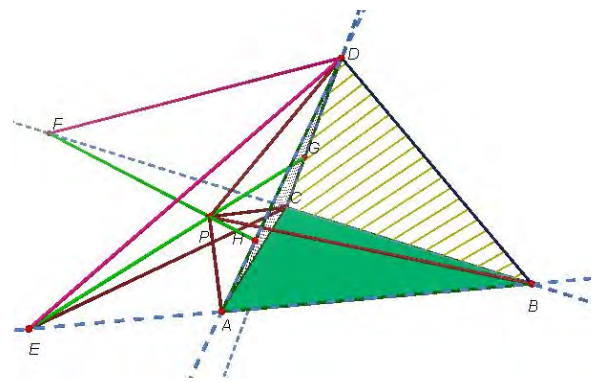
引理四：(空間中的『西瓦共點定理』)

已知 E 、F 、G 與 H 依次為四面體 $D-ABC$ 四稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，且 E 、F 、G 與 H 四點不與四面體 $D-ABC$ 四頂點重合，又四平面 CDE 、ADF 、ABG 與 BCH 共點，則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$。

證明：(1) 空間中的『西瓦共點定理』_形式一



圖(二十四)



圖(二十五)

(i) 如上圖(二十四)所示，

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\text{三角錐}D-ACE}{\text{三角錐}D-BCE}=\frac{\text{三角錐}P-ACE}{\text{三角錐}P-BCE}=\frac{\text{三角錐}P-ADE}{\text{三角錐}P-BDE}$$

$$=\frac{(\text{三角錐}D-ACE)-(\text{三角錐}P-ACE)-(\text{三角錐}P-ADE)}{(\text{三角錐}D-BCE)-(\text{三角錐}P-BCE)-(\text{三角錐}P-BDE)}=\frac{\text{三角錐P}-ACD}{\text{三角錐P}-BCD}\cdots\cdots ①$$

(ii) $$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\frac{\text{三角錐}D-ABF}{\text{三角錐}D-ACF}=\frac{\text{三角錐}P-ABF}{\text{三角錐}P-ACF}=\frac{\text{三角錐}P-BDF}{\text{三角錐}P-CDF}$$

$$=\frac{(\text{三角錐}D-ABF)-(\text{三角錐}P-ABF)-(\text{三角錐}P-BDF)}{(\text{三角錐}D-ACF)-(\text{三角錐}P-ACF)-(\text{三角錐}P-CDF)}=\frac{\text{三角錐P}-ABD}{\text{三角錐P}-ACD}\cdots\cdots ②$$

(iii) $$\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\frac{\text{三角錐A}-BCG}{\text{三角錐A}-BDG}=\frac{\text{三角錐}P-BCG}{\text{三角錐}P-BDG}=\frac{\text{三角錐}P-ACG}{\text{三角錐}P-ADG}$$

$$=\frac{(\text{三角錐A}-BCG)-(\text{三角錐}P-BCG)-(\text{三角錐}P-ACG)}{(\text{三角錐A}-BDG)-(\text{三角錐}P-BDG)-(\text{三角錐}P-ADG)}=\frac{\text{三角錐P}-ABC}{\text{三角錐P}-ABD}\cdots\cdots ③$$

(iv) $$\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{\text{三角錐}B-CDH}{\text{三角錐}B-ACH}=\frac{\text{三角錐}P-CDH}{\text{三角錐}P-ACH}=\frac{\text{三角錐}P-BDH}{\text{三角錐}P-ABH}$$
$$=\frac{(\text{三角錐}B-CDH)-(\text{三角錐}P-CDH)-(\text{三角錐}P-BDH)}{(\text{三角錐}B-ACH)-(\text{三角錐}P-ACH)-(\text{三角錐}P-ABH)}=\frac{\text{三角錐}P-BCD}{\text{三角錐}P-ABC}\cdots\cdots④$$

(v) 由①×②×③×④得，

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{\text{三角錐}P-ACD}{\text{三角錐}P-BCD}\times\frac{\text{三角錐}P-ABD}{\text{三角錐}P-ACD}\times\frac{\text{三角錐}P-ABC}{\text{三角錐}P-ABD}\times\frac{\text{三角錐}P-BCD}{\text{三角錐}P-ABC}=1$$
，故在此情況之下，原命題成立。

(2) 空間中的『西瓦共點定理』_形式二

我們試著將上述(1)式中的交點 P 移到四面體 $D-ABC$ 的外部，如上頁圖(二十五)，驗證其正確性。

(vi) $$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\text{三角錐}D-ACE}{\text{三角錐}D-BCE}=\frac{\text{三角錐}P-ACE}{\text{三角錐}P-BCE}=\frac{\text{三角錐}P-ADE}{\text{三角錐}P-BDE}$$
$$=\frac{(\text{三角錐}D-ACE)-(\text{三角錐}P-ACE)-(\text{三角錐}P-ADE)}{(\text{三角錐}D-BCE)-(\text{三角錐}P-BCE)-(\text{三角錐}P-BDE)}=\frac{\text{三角錐}P-ACD}{\text{三角錐}P-BCD}\cdots\cdots⑤$$

(vii) $$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\frac{\text{三角錐}D-ABF}{\text{三角錐}D-ACF}=\frac{\text{三角錐}P-ABF}{\text{三角錐}P-ACF}=\frac{\text{三角錐}P-BDF}{\text{三角錐}P-CDF}$$
$$=\frac{(\text{三角錐}D-ABF)-(\text{三角錐}P-ABF)-(\text{三角錐}P-BDF)}{(\text{三角錐}D-ACF)-(\text{三角錐}P-ACF)-(\text{三角錐}P-CDF)}=\frac{\text{三角錐}P-ABD}{\text{三角錐}P-ACD}\cdots\cdots⑥$$

(viii) $$\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\frac{\text{三角錐}A-BCG}{\text{三角錐}A-BDG}=\frac{\text{三角錐}P-BCG}{\text{三角錐}P-BDG}=\frac{\text{三角錐}P-ACG}{\text{三角錐}P-ADG}$$
$$=\frac{(\text{三角錐}A-BCG)-(\text{三角錐}P-BCG)+(\text{三角錐}P-ACG)}{(\text{三角錐}A-BDG)-(\text{三角錐}P-BDG)+(\text{三角錐}P-ADG)}=\frac{\text{三角錐}P-ABC}{\text{三角錐}P-ABD}\cdots\cdots⑦$$

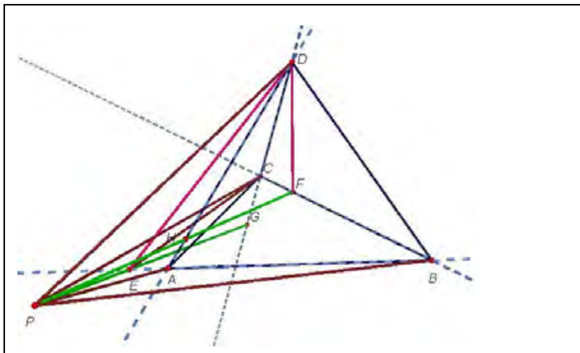
(ix) $$\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{\text{三角錐}B-CDH}{\text{三角錐}B-ACH}=\frac{\text{三角錐}P-CDH}{\text{三角錐}P-ACH}=\frac{\text{三角錐}P-BDH}{\text{三角錐}P-ABH}$$
$$=\frac{(\text{三角錐}B-CDH)+(\text{三角錐}P-CDH)-(\text{三角錐}P-BDH)}{(\text{三角錐}B-ACH)+(\text{三角錐}P-ACH)-(\text{三角錐}P-ABH)}=\frac{\text{三角錐}P-BCD}{\text{三角錐}P-ABC}\cdots\cdots⑧$$

(x) 由⑤×⑥×⑦×⑧得，

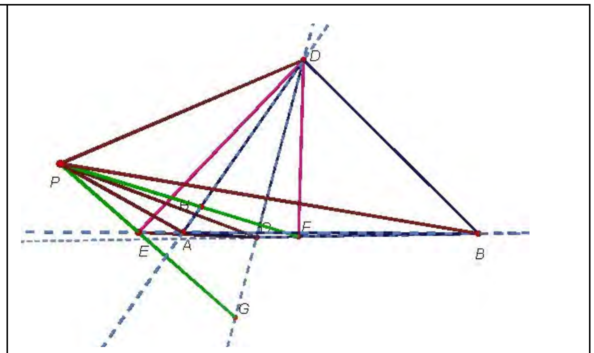
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{\text{三角錐}P-ACD}{\text{三角錐}P-BCD}\times\frac{\text{三角錐}P-ABD}{\text{三角錐}P-ACD}\times\frac{\text{三角錐}P-ABC}{\text{三角錐}P-ABD}\times\frac{\text{三角錐}P-BCD}{\text{三角錐}P-ABC}=1$$
，故在此情況之下，原命題成立。

(3) 空間中的『西瓦共點定理』_形式三

我們試著再將上述(1)式中的交點 P 移到四面體 $D-ABC$ 的外部的另一處，如下圖(二十六)與(二十七)所示，驗證其正確性。



圖(二十六)



圖(二十七)

(xi) $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{三角錐\boldsymbol{D-ACE}}{三角錐\boldsymbol{D-BCE}}=\dfrac{三角錐\boldsymbol{P-ACE}}{三角錐\boldsymbol{P-BCE}}=\dfrac{三角錐\boldsymbol{P-ADE}}{三角錐\boldsymbol{P-BDE}}$

$=\dfrac{(三角錐\boldsymbol{D-ACE})-(三角錐\boldsymbol{P-ACE})+(三角錐\boldsymbol{P-ADE})}{(三角錐\boldsymbol{D-BCE})-(三角錐\boldsymbol{P-BCE})+(三角錐\boldsymbol{P-BDE})}=\dfrac{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ACD}}{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{BCD}}\cdots\cdots①$

(xii) $\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\dfrac{三角錐\boldsymbol{D-ABF}}{三角錐\boldsymbol{D-ACF}}=\dfrac{三角錐\boldsymbol{P-ABF}}{三角錐\boldsymbol{P-ACF}}=\dfrac{三角錐\boldsymbol{P-BDF}}{三角錐\boldsymbol{P-CDF}}$

$=\dfrac{(三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ABF})+(三角錐\boldsymbol{P-BDF})-(三角錐\mathrm{D}-\boldsymbol{ABF})}{(三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ACF})+(三角錐\boldsymbol{P-CDF})-(三角錐\mathrm{D}-\boldsymbol{ACF})}=\dfrac{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ABD}}{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ACD}}\cdots\cdots②$

(xiii) $\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\dfrac{三角錐\mathrm{A}-\boldsymbol{BCG}}{三角錐\mathrm{A}-\boldsymbol{BDG}}=\dfrac{三角錐\boldsymbol{P-BCG}}{三角錐\boldsymbol{P-BDG}}=\dfrac{三角錐\boldsymbol{P-ACG}}{三角錐\boldsymbol{P-ADG}}$

$=\dfrac{(三角錐\boldsymbol{P-BCG})-(三角錐\mathrm{A}-\boldsymbol{BCG})-(三角錐\boldsymbol{P-ACG})}{(三角錐\boldsymbol{P-BDG})-(三角錐\mathrm{A}-\boldsymbol{BDG})-(三角錐\boldsymbol{P-ADG})}=\dfrac{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ABC}}{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ABD}}\cdots\cdots③$

(xiv) $\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\dfrac{三角錐\mathrm{B}-\boldsymbol{CDH}}{三角錐\mathrm{B}-\boldsymbol{ACH}}=\dfrac{三角錐\boldsymbol{P-CDH}}{三角錐\boldsymbol{P-ACH}}=\dfrac{三角錐\boldsymbol{P-BDH}}{三角錐\boldsymbol{P-ABH}}$

$=\dfrac{(三角錐\mathrm{B}-\boldsymbol{CDH})+(三角錐\boldsymbol{P-CDH})+(三角錐\boldsymbol{P-BDH})}{(三角錐\mathrm{B}-\boldsymbol{ACH})+(三角錐\boldsymbol{P-ACH})+(三角錐\boldsymbol{P-ABH})}=\dfrac{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{BCD}}{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ABC}}\cdots\cdots④$

(xv) 由①×②×③×④得，

$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\dfrac{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ACD}}{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{BCD}}\times\dfrac{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ABD}}{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ACD}}\times\dfrac{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ABC}}{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ABD}}\times\dfrac{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{BCD}}{三角錐\mathrm{P}-\boldsymbol{ABC}}=1$，故在此情況之下，原命題成立。

Q.E.D.

Remark 3:

(1)在參考資料[1]中，提到『已知 $\boldsymbol{E}$ 、$\boldsymbol{F}$ 、$\boldsymbol{G}$ 與 $\boldsymbol{H}$ 依次爲四面體 $\boldsymbol{D-ABC}$ 四稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，則四平面 $\boldsymbol{CDE}$ 、$\boldsymbol{ADF}$ 、$\boldsymbol{ABG}$ 與 $\boldsymbol{BCH}$ 共點 $\Leftrightarrow\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$。』，這樣的結論顯然有誤，因爲當 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ 時，四平面 $\boldsymbol{CDE}$ 、$\boldsymbol{ADF}$ 、$\boldsymbol{ABG}$ 與 $\boldsymbol{BCH}$ 不必然會共點，舉例如下：假設四面體 $\boldsymbol{D-ABC}$ 之四頂點坐標分別爲 $\boldsymbol{A}(0,0,0)$ 、$\boldsymbol{B}(1,0,0)$ 、$\boldsymbol{C}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ 與 $\boldsymbol{D}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，又取 $\boldsymbol{E}\left(\frac{3}{2},0,0\right)$ 、$\boldsymbol{F}\left(\frac{7}{8},\frac{\sqrt{3}}{8},0\right)$ 、$\boldsymbol{G}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 與 $\boldsymbol{H}\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 分別爲直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，滿足 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{3}{1}$ 、$\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\dfrac{1}{3}$ 、$\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\dfrac{1}{1}$ 與 $\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\dfrac{1}{1}$，則 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ 成立，又經計算得四平面 $\boldsymbol{CDE}$ 、$\boldsymbol{ADF}$ 、$\boldsymbol{ABG}$ 與 $\boldsymbol{BCH}$ 之方程式分別爲 $_{CDE}:\sqrt{3}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+\sqrt{2}\boldsymbol{z}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 、$_{ADF}:\sqrt{3}\boldsymbol{x}-7\boldsymbol{y}+\sqrt{2}\boldsymbol{z}=0$ 、$_{ABG}:\boldsymbol{y}-\sqrt{2}\boldsymbol{z}=0$ 與 $_{BCH}:\sqrt{3}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+2\sqrt{2}\boldsymbol{z}=\sqrt{3}$，且 $\boldsymbol{ADF}$ 、$\boldsymbol{ABG}$ 與 $\boldsymbol{BCH}$ 三平面之交點爲 $\boldsymbol{P}\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{9},\frac{\sqrt{6}}{18}\right)$，顯然 $\boldsymbol{P}\notin{}_{CDE}$，故四平面 $\boldsymbol{CDE}$ 、$\boldsymbol{ADF}$ 、$\boldsymbol{ABG}$ 與 $\boldsymbol{BCH}$ 不共點。

(2)假設四面體 $\boldsymbol{D-ABC}$ 之四頂點坐標分別爲 $\boldsymbol{A}(0,0,0)$ 、$\boldsymbol{B}(1,0,0)$ 、$\boldsymbol{C}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ 與 $\boldsymbol{D}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，又取 $\boldsymbol{E}\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ 、$\boldsymbol{F}\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$ 、$\boldsymbol{G}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 與 $\boldsymbol{H}\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 分別爲直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上之中點，滿足 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{1}{1}$ 、$\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\dfrac{1}{1}$ 、$\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\dfrac{1}{1}$ 與 $\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\dfrac{1}{1}$，則 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ 成立，且通過 $\boldsymbol{E}$ 、$\boldsymbol{F}$ 與 $\boldsymbol{G}$ 三點之平面方程式爲 $_{EFG}:\dfrac{\sqrt{2}}{8}\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\right)-\dfrac{\sqrt{6}}{24}(\boldsymbol{y}-0)+\dfrac{\sqrt{3}}{12}(\boldsymbol{z}-0)=0$，顯然 $\boldsymbol{H}\in{}_{EFG}$，故此時 $\boldsymbol{E}$ 、$\boldsymbol{F}$ 、$\boldsymbol{G}$ 與 $\boldsymbol{H}$ 四點共平面。

我試著將引理四中的『四面體』換成『四角錐』，於是發現了下述『問題九』之結果。

問題九：

空間中四角錐 $\boldsymbol{E-ABCD}$ 的五頂點分別爲 $\boldsymbol{A}(0,0,0)\,\boldsymbol{B}(4,0,0)\,\boldsymbol{C}(5,3,0)\,\boldsymbol{D}(0,2,0)\,\boldsymbol{E}(2,1,4)$，又給定一點 $\boldsymbol{P}(3,1,3)$，若直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 分別與三平面 E_{CEP}、E_{DEP} 與 E_{CDP} 交於 P_1,P_2 與 P_3（其中 P_1,P_2 與 P_3 均異於 A 與 B），直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 分別與三平面 E_{AEP}、E_{DEP} 與 E_{ADP} 交於 P_4,P_5 與 P_6（其中 P_4,P_5 與 P_6 均異於 B 與 C），直線 $\overleftrightarrow{CE}$ 分別與三平面 E_{ADP}、E_{BDP} 與 E_{ABP} 交於 P_7,P_8 與 P_9（其中 P_7,P_8 與 P_9 均異於 C 與 E），直線 $\overleftrightarrow{ED}$ 分別與三平面 E_{ACP}、E_{BCP} 與 E_{ABP} 交於 P_{10},P_{11} 與 P_{12}（其中 P_{10},P_{11} 與 P_{12} 均異於 E 與 D），直線 $\overleftrightarrow{DA}$ 分別與三平面 E_{BEP}、E_{CEP} 與 E_{BCP} 交於 P_{13},P_{14} 與 P_{15}（其中 P_{13},P_{14} 與 P_{15} 均異於 D 與 A），試證明：

$$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\times\frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}\times\frac{\overline{AP_3}}{\overline{P_3B}}\times\frac{\overline{BP_4}}{\overline{P_4C}}\times\frac{\overline{BP_5}}{\overline{P_5C}}\times\frac{\overline{BP_6}}{\overline{P_6C}}\times\frac{\overline{CP_7}}{\overline{P_7E}}\times\frac{\overline{CP_8}}{\overline{P_8E}}\times\frac{\overline{CP_9}}{\overline{P_9E}}\times\frac{\overline{EP_{10}}}{\overline{P_{10}D}}\times\frac{\overline{EP_{11}}}{\overline{P_{11}D}}\times\frac{\overline{EP_{12}}}{\overline{P_{12}D}}\times\frac{\overline{DP_{13}}}{\overline{P_{13}A}}\times\frac{\overline{DP_{14}}}{\overline{P_{14}A}}\times\frac{\overline{DP_{15}}}{\overline{P_{15}A}}=1\text{。}$$

證明：

(i) 四角錐 $\boldsymbol{E-ABCD}$ 八條稜線中的五條稜線所在的直線方程式如下：

$$\overleftrightarrow{AB}:\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}；\ \overleftrightarrow{BC}:\begin{cases}x=4+t\\y=3t\\z=0\end{cases},t\in\mathbb{R}；\ \overleftrightarrow{CE}:\begin{cases}x=5+3t\\y=3+2t\\z=-4t\end{cases},t\in\mathbb{R}；\ \overleftrightarrow{ED}:\begin{cases}x=2t\\y=2-t\\z=4t\end{cases},t\in\mathbb{R}；\ \overleftrightarrow{DA}:\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$$

(ii) 過點 $\boldsymbol{P}$ 且過四角錐 $\boldsymbol{E-ABCD}$ 五頂點中的任兩個頂點之十個平面如下：

$E_{ABP}:3y-z=0$；$E_{ACP}:9x-15y-4z=0$；$E_{ADP}:x-z=0$；$E_{AEP}:-x+6y-z=0$；
$E_{BCP}:9x-3y+4z-36=0$；$E_{BDP}:3x+6y-z-12=0$；$E_{BEP}:-x+2y-z+4=0$；
$E_{CDP}:-3x+15y+8z-30=0$；$E_{CEP}:2x+y+2z-13=0$；$E_{DEP}:x+6y+z-12=0$

(iii) 上述(i)中的五條稜線與(ii)中的十個平面之十五個交點如下：

E_{CEP} 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 交於 $P_1\Rightarrow P_1\left(\frac{13}{2},0,0\right)$；$E_{DEP}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 交於 $P_2\Rightarrow P_2(12,0,0)$；$E_{CDP}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 交於 $P_3\Rightarrow P_3(-10,0,0)$；

E_{AEP} 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於 $P_4\Rightarrow P_4\left(\frac{72}{17},\frac{12}{17},0\right)$；$E_{DEP}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於 $P_5\Rightarrow P_5\left(\frac{84}{19},\frac{24}{19},0\right)$；$E_{ADP}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於 $P_6\Rightarrow P_6(0,-12,0)$；

E_{ADP} 與 $\overleftrightarrow{CE}$ 交於 $P_7\Rightarrow P_7\left(\frac{20}{7},\frac{11}{7},\frac{20}{7}\right)$；$E_{BDP}$ 與 $\overleftrightarrow{CE}$ 交於 $P_8\Rightarrow P_8\left(\frac{62}{25},\frac{33}{25},\frac{84}{25}\right)$；$E_{ABP}$ 與 $\overleftrightarrow{CE}$ 交於 $P_9\Rightarrow P_9\left(\frac{23}{10},\frac{12}{10},\frac{36}{10}\right)$；

E_{ACP} 與 $\overleftrightarrow{ED}$ 交於 $P_{10}\Rightarrow P_{10}\left(\frac{60}{17},\frac{4}{17},\frac{120}{17}\right)$；$E_{BCP}$ 與 $\overleftrightarrow{ED}$ 交於 $P_{11}\Rightarrow P_{11}\left(\frac{84}{37},\frac{32}{37},\frac{168}{37}\right)$；$E_{ABP}$ 與 $\overleftrightarrow{ED}$ 交於 $P_{12}\Rightarrow P_{12}\left(\frac{12}{7},\frac{8}{7},\frac{24}{7}\right)$；

E_{BEP} 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 交於 $P_{13}\Rightarrow P_{13}(0,-2,0)$；$E_{CEP}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 交於 $P_{14}\Rightarrow P_{14}(0,13,0)$；$E_{BCP}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 交於 $P_{15}\Rightarrow P_{15}(0,-12,0)=P_6$。

(iv) 計算得 $\overline{AP_1}=\frac{13}{2}$；$\overline{AP_2}=12$；$\overline{AP_3}=10$；$\overline{P_1B}=\frac{5}{2}$；$\overline{P_2B}=8$；$\overline{P_3B}=14$

$\overline{BP_4}=\frac{4\sqrt{10}}{17}$；$\overline{BP_5}=\frac{8\sqrt{10}}{19}$；$\overline{BP_6}=4\sqrt{10}$；$\overline{P_4C}=\frac{13\sqrt{10}}{17}$；$\overline{P_5C}=\frac{11\sqrt{10}}{19}$；$\overline{P_6C}=5\sqrt{10}$

$\overline{CP_7}=\frac{5\sqrt{29}}{7}$；$\overline{CP_8}=\frac{21\sqrt{29}}{25}$；$\overline{CP_9}=\frac{9\sqrt{29}}{10}$；$\overline{P_7E}=\frac{2\sqrt{29}}{7}$；$\overline{P_8E}=\frac{4\sqrt{29}}{25}$；$\overline{P_9E}=\frac{\sqrt{29}}{10}$

$\overline{EP_{10}}=\frac{13\sqrt{21}}{17}$；$\overline{EP_{11}}=\frac{5\sqrt{21}}{37}$；$\overline{EP_{12}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$；$\overline{P_{10}D}=\frac{30\sqrt{21}}{17}$；$\overline{P_{11}D}=\frac{42\sqrt{21}}{37}$；$\overline{P_{12}D}=\frac{6\sqrt{21}}{7}$

$\overline{DP_{13}}=4$；$\overline{DP_{14}}=11$；$\overline{DP_{15}}=14$；$\overline{P_{13}A}=2$；$\overline{P_{14}A}=13$；$\overline{P_{15}A}=12$。

(v) 故 $\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\times\frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}\times\frac{\overline{AP_3}}{\overline{P_3B}}\times\frac{\overline{BP_4}}{\overline{P_4C}}\times\frac{\overline{BP_5}}{\overline{P_5C}}\times\frac{\overline{BP_6}}{\overline{P_6C}}\times\frac{\overline{CP_7}}{\overline{P_7E}}\times\frac{\overline{CP_8}}{\overline{P_8E}}\times\frac{\overline{CP_9}}{\overline{P_9E}}\times\frac{\overline{EP_{10}}}{\overline{P_{10}D}}\times\frac{\overline{EP_{11}}}{\overline{P_{11}D}}\times\frac{\overline{EP_{12}}}{\overline{P_{12}D}}\times\frac{\overline{DP_{13}}}{\overline{P_{13}A}}\times\frac{\overline{DP_{14}}}{\overline{P_{14}A}}\times\frac{\overline{DP_{15}}}{\overline{P_{15}A}}$

$$=\frac{\frac{13}{2}\times12\times10\times\frac{4\sqrt{10}}{17}\times\frac{8\sqrt{10}}{19}\times4\sqrt{10}\times\frac{5\sqrt{29}}{7}\times\frac{21\sqrt{29}}{25}\times\frac{9\sqrt{29}}{10}\times\frac{13\sqrt{21}}{17}\times\frac{5\sqrt{21}}{37}\times\frac{\sqrt{21}}{7}\times4\times11\times14}{\frac{5}{2}\times8\times14\times\frac{13\sqrt{10}}{17}\times\frac{11\sqrt{10}}{19}\times5\sqrt{10}\times\frac{2\sqrt{29}}{7}\times\frac{4\sqrt{29}}{25}\times\frac{\sqrt{29}}{10}\times\frac{30\sqrt{21}}{17}\times\frac{42\sqrt{21}}{37}\times\frac{6\sqrt{21}}{7}\times2\times13\times12}$$

$=1$ 。 **Q.E.D**

Remark 4:

(1)『問題九』之結果其實是空間中『西瓦共點定理』在四角錐的形式，我發現每條被選中的稜線上會有 $3(=C_2^3=C_2^{5-2})$ 個交點（例如：$\overleftrightarrow{AB}$ 上有 P_1,P_2 與 P_3 三個交點），按照這樣的規則，如果是『n 個頂點多面體 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$』，每條被選中的稜線上應該要有 C_2^{n-2} 個交點，譬如說，第 i 條被選中的稜線 $\overleftrightarrow{A_{k_i}A_{k_{i+1}}}$ 上應該要有 $P_{(i-1)C_2^{n-2}+1},P_{(i-1)C_2^{n-2}+2},\cdots,P_{(i-1)C_2^{n-2}+C_2^{n-2}}$ 共 C_2^{n-2} 個交點，此時我猜測『西瓦共點定理』的形式應爲 $\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\overline{A_{k_i}P_{(i-1)C_2^{n-2}+1}}}{\overline{P_{(i-1)C_2^{n-2}+1}A_{k_{i+1}}}}\times\frac{\overline{A_{k_i}P_{(i-1)C_2^{n-2}+2}}}{\overline{P_{(i-1)C_2^{n-2}+2}A_{k_{i+1}}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k_i}P_{(i-1)C_2^{n-2}+C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{(i-1)C_2^{n-2}+C_2^{n-2}}A_{k_{i+1}}}}\right)=1$，其中 m 表示所選循環路徑包含的稜線數，此猜測尚待證明之。

(2)『問題九』中所計算得的 30 個線段長，並無法獨立相消。

陸、 研究成果

1. 假設平面上有一凸或凹四邊形 $ABCD$，又 E、F、G 與 H 分別爲 $\overleftrightarrow{DA}$、$\overleftrightarrow{DC}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 上一點，滿足 E、F、G 與 H 四點共線，且 E、F、G 與 H 四點不得與四邊形 $ABCD$ 之四頂點重合，則 $\frac{\overline{DE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=1$。
2. 假設平面上有一五邊形 $ABCDE$，又 F、G、H、I 與 J 分別爲 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DE}$ 與 $\overleftrightarrow{EA}$ 上一點，滿足 F、G、H、I 與 J 五點共線，則 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\frac{\overline{CH}}{\overline{HD}}\times\frac{\overline{DI}}{\overline{IE}}\times\frac{\overline{EJ}}{\overline{JA}}=1$。
3. 設直角坐標平面上有一個凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，今依序分別在 n 個邊或其延長線上各取一點 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，使得這 n 個點在同一條直線 L 上，則
$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-2}P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_{n-1}}}\times\frac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=1。$$
4. 假設直角坐標平面上有 n 條兩兩不平行的直線 $L_1,L_2,\cdots,L_n$，又此 n 條直線均無『三線共點的情形』，且 L_n 與 L_1 相交於 A_1，L_k 與 L_{k+1} 相交於 A_1，其中 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，今有另一直線 L，已知直線 L 分別直線 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 各交於一點 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，則
$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-2}P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_{n-1}}}\times\frac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=1。$$
5. 假設平面上有一凸或凹四邊形 $ABCD$，又 P 點爲平面上一定點，P 點不落在四邊形 $ABCD$ 四邊所在的直線上，亦不落在其兩對角線 $\overleftrightarrow{AC}$ 與 $\overleftrightarrow{BD}$ 上，且 $\overleftrightarrow{CP}$、$\overleftrightarrow{DP}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 分別交於 P_1 與 P_2，$\overleftrightarrow{DP}$、$\overleftrightarrow{AP}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 分別交於 P_3 與 P_4，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 分別交於 P_5 與 P_6，$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 分別交於 P_7 與 P_8，則 $\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\times\frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}\times\frac{\overline{BP_3}}{\overline{P_3C}}\times\frac{\overline{BP_4}}{\overline{P_4C}}\times\frac{\overline{CP_5}}{\overline{P_5D}}\times\frac{\overline{CP_6}}{\overline{P_6D}}\times\frac{\overline{DP_7}}{\overline{P_7A}}\times\frac{\overline{DP_8}}{\overline{P_8A}}=1$。
6. 假設平面上有一凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，又 P 點爲平面上一定點，P 點不落在五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 五邊所在的直線上，亦不落在其對角線上，且 $\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$、$\overleftrightarrow{A_5P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 分別交於 P_1、P_2 與 P_3，$\overleftrightarrow{A_4P}$、$\overleftrightarrow{A_5P}$、$\overleftrightarrow{A_1P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 分別交於 P_4、P_5 與 P_6，$\overleftrightarrow{A_5P}$、$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 分別交於 P_7、P_8 與 P_9，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 分別交於 P_{10}、P_{11} 與 P_{12}，$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 分別交於 P_{13}、P_{14} 與 P_{15}，則
$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_5}}{\overline{P_5A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_6}}{\overline{P_6A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_7}}{\overline{P_7A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_8}}{\overline{P_8A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{10}}}{\overline{P_{10}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{11}}}{\overline{P_{11}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{12}}}{\overline{P_{12}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{13}}}{\overline{P_{13}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{14}}}{\overline{P_{14}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{15}}}{\overline{P_{15}A_1}}=1。$$

7. 假設平面上有一凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，又 P 點為平面上一定點，$\overleftrightarrow{A_3P}$ 、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 、…、$\overleftrightarrow{A_nP}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 分別交於 P_1 、P_2 、…、P_{n-2}，$\overleftrightarrow{A_4P}$ 、$\overleftrightarrow{A_5P}$ 、…、$\overleftrightarrow{A_nP}$ 、$\overleftrightarrow{A_1P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 分別交於 $P_{(n-2)+1}$ 、$P_{(n-2)+2}$ 、…、$P_{2(n-2)}$ ，・・・，$\overleftrightarrow{A_2P}$ 、$\overleftrightarrow{A_3P}$ 、…、$\overleftrightarrow{A_nP}$ 、$\overleftrightarrow{A_{n-1}P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 分別交於 $P_{(n-1)(n-2)+1}$ 、$P_{(n-1)(n-2)+2}$ 、…、$P_{n(n-2)}$ ，則

$$\left(\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_1P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_2}}\right)\times\left(\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-2)+1}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-2)+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_2P_{2(n-2)}}}{\overline{P_{2(n-2)}A_3}}\right)\times\cdots\times\left(\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_nP_{n(n-2)}}}{\overline{P_{n(n-2)}A_1}}\right)=1$$

，其中對於 $0\le k\le n-1$，$1\le j\le n-2$，滿足 $P_{k(n-2)+j}\in\overleftrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$，亦即直線 $\overleftrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$ 上有 $(n-2)$ 個點 $P_{k(n-2)+1},P_{k(n-2)+2},P_{k(n-2)+3},\cdots P_{k(n-2)+(n-2)}$。

8. 給定一三角形 ΔABC，且一圓 Γ 位於 ΔABC 內部，過 A 點作圓 Γ 的兩切線 $\overleftrightarrow{AT_1},\overleftrightarrow{AT_2}$ 分別交 $\overline{BC}$ 於 D_1,D_2，過 B 點作圓 Γ 的兩切線 $\overleftrightarrow{BU_1},\overleftrightarrow{BU_2}$ 分別交 $\overline{CA}$ 於 E_1,E_2，過 C 點作圓 Γ 的兩切線 $\overleftrightarrow{CV_1},\overleftrightarrow{CV_2}$ 分別交 $\overline{AB}$ 於 F_1,F_2，則 $\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$。

9. (1)給定一個三角形 ABC，接著我們試著將『定理四』中三角形 ABC 內部的『圓』換成一個正三角形 PQR，並自 A 點出發作出三射線 $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AR},\overrightarrow{AQ}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D_1,D,D_2，自 B 點出發作出三射線 $\overrightarrow{BQ},\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BR}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 E_1,E,E_2，自 C 點出發作出三射線 $\overrightarrow{CR},\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 F_1,F,F_2，試證：$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\times\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$。

(2)給定一個三角形 ABC，接著我們試著將『定理四』中三角形 ABC 內部的『圓』換成一個正方形 $DEFG$，並自 A 點出發作出四射線 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D_1,D_2,D_3,D_4，自 B 點出發作出四射線 $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BG}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 E_1,E_2,E_3,E_4，自 B 點出發作出四射線 $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CG}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 F_1,F_2,F_3,F_4，試證：

$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\times\frac{\overline{AF_3}}{\overline{F_3B}}\times\frac{\overline{BD_3}}{\overline{D_3C}}\times\frac{\overline{CE_3}}{\overline{E_3A}}\times\frac{\overline{AF_4}}{\overline{F_4B}}\times\frac{\overline{BD_4}}{\overline{D_4C}}\times\frac{\overline{CE_4}}{\overline{E_4A}}=1。$$

10. 已知 E 、F 、G 與 H 依次為四面體 $D-ABC$ 四稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，且 E 、F 、G 與 H 四點不與四面體 $D-ABC$ 四頂點重合，又 E 、F 、G 與 H 四點同時落在平面 U 上，則 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$。(孟氏共面定理)

11. 已知 F 、G 、H 、I 與 J 依次為四角錐 $E-ABCD$ 五稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CE}$ 、$\overleftrightarrow{ED}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上五點，且 F 、G 、H 、I 與 J 五點不與四角錐 $E-ABCD$ 五頂點重合，又 F 、G 、H 、I 與 J 五點同時落在平面 U 上，則 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\dfrac{\overline{CH}}{\overline{HE}}\times\dfrac{\overline{EI}}{\overline{ID}}\times\dfrac{\overline{DJ}}{\overline{JA}}=1$。

12. 已知 G 、H 、I 、J 、K 與 L 依次為五角錐 $F-ABCDE$ 五稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CF}$ 、$\overleftrightarrow{DE}$ 與 $\overleftrightarrow{EA}$ 上六點，且 G 、H 、I 、J 、K 與 L 六點不與五角錐 $F-ABCDE$ 六頂點重合，又 G 、H 、I 、J 、K 與 L 六點同時落在平面 U 上，則 $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\dfrac{\overline{CI}}{\overline{IF}}\times\dfrac{\overline{FJ}}{\overline{JD}}\times\dfrac{\overline{DK}}{\overline{KE}}\times\dfrac{\overline{EL}}{\overline{LA}}=1$。

13. 已知 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 、P_5 、P_6 、P_7 與 P_8 依次為六角錐 $A_7-A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 八稜所在直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_7}$ 、$\overleftrightarrow{A_7A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 與 $\overleftrightarrow{A_7A_1}$ 上八點，且 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 、P_5 、P_6 、P_7 與 P_8 八點不與六角錐 $A_7-A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 七頂點重合，又 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 、P_5 、P_6 、P_7 與 P_8 八點同時落在平面 U 上，則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_7}}\times\frac{\overline{A_7P_4}}{\overline{P_4A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_5}}{\overline{P_5A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_6}}{\overline{P_6A_6}}\times\frac{\overline{A_6P_7}}{\overline{P_7A_7}}\times\frac{\overline{A_7P_8}}{\overline{P_8A_1}}=1$$ 。

14. 假設空間中一多面體$\Gamma: A_1A_2A_3\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$，從 n 個頂點中任取 m 個點 $A_{k_1},A_{k_2},A_{k_3},\cdots,A_{k_{m-1}},A_{k_m}$（可以重複選取），使得 $\forall i\in\{1,2,3,\cdots,m-1,m\}$， $\overline{A_{k_i}A_{k_{i+1}}}$ 均是Γ的稜(此處視 $A_{k_{m+1}}=A_{k_1}$)，又 $\forall j\in\{1,2,3,\cdots,m-1,m\}$， P_j 爲直線 $\overleftrightarrow{A_{k_j}A_{k_{j+1}}}$ 上異於 A_{k_j} 與 $A_{k_{j+1}}$ 的點，且此 m 個點 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 共平面 U ，則 $\frac{\overline{A_{k_1}P_1}}{\overline{P_1A_{k_2}}}\times\frac{\overline{A_{k_2}P_2}}{\overline{P_2A_{k_3}}}\times\frac{\overline{A_{k_3}P_3}}{\overline{P_3A_{k_4}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k_{m-1}}P_{m-1}}}{\overline{P_{m-1}A_{k_m}}}\times\frac{\overline{A_{k_m}P_m}}{\overline{P_mA_{k_1}}}=1$ 。

15. 假設空間中有 n 個點 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{n-2},A_{n-1},A_n$ ，且 $\forall j\in\{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$， P_j 爲直線 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ 上異於 A_j 與 A_{j+1} 的點(此處視 $A_{n+1}=A_1$)，又此 n 個點 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 共平面 U ，則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=1$$ 。

16. 已知 E 、F 、G 與 H 依次爲四面體 $D-ABC$ 四稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，且 E 、F 、G 與 H 四點不與四面體 $D-ABC$ 四頂點重合，又四平面 CDE 、ADF 、ABG 與 BCH 共點，則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ 。(西瓦共點定理)

柒、 結論與展望

由於課餘的一個機緣，讓我有機會接觸了幾何上兩個重要結果—『孟氏定理與西瓦定理』，在好奇心的驅使下，我分別將孟氏定理推廣到凸四邊形、凹四邊形、凸五邊形，乃至凸 n 邊形，更甚者，將『凸 n 邊形』換成『n 條直線』，我也可以推得類似的結果。而事實上，『n 條直線』的情形就包含了『凸 n 邊形』與『凹 n 邊形』的所有情形。

在孟氏定理獲得推論的成功之後，很自然地，想到其『對偶命題』—『西瓦定理』也應該有相對應的結果，果不其然，我證得其在凸四邊形、凹四邊形與凸五邊形上的推廣，乃至於到凸 n 邊形也有相對應的結果。而事實上，『凹 n 邊形』的證明方式與『凸 n 邊形』之狀況類似，所以我其實完成了『西瓦定理』在『凸、凹 n 邊形』的推廣。

完成前面兩大部分的推論之後，我嘗試作另一個向度的推廣，也就是將西瓦定理中的三線共點的『點』擴大變成一個『圓』，則我可以獲得如『定理四』的結果。

在證明『定理四』之後，我開始思考『問題五』、『問題六』、『問題七』與『定理三』應該也有類似的結果，我試著用 **Geogebra** 繪圖軟體驗證其正確性，發現這樣的猜測應該是成立的，只不過證明尚在努力中。

另外，在立體空間中的推廣，我也做了一些努力，在分區科展後，我又陸續完成了空間中任意『n 個頂點多面體』的『孟氏共面定理』，此外，我也證明了空間中任意四面體的『西瓦共點定理』，同時以實例驗證空間中的『西瓦共點定理』在四角錐中的形式。至於空間中『n 個頂點多面體』的『西瓦共點定理』之一般化形式與證明，則尚在努力中，盼未來可以完整的解決立體空間中的所有情形。

捌、 參考資料

[1] 中華民國第二十八屆中小學科學展覽優勝作品專輯高中組，國立台灣科學教育館彙編，作品名稱：『從平面到立體—從三角形看四面體的性質，作者：林志民、陳彥匡、范治民，指導老師：許燦煌。

[2] 高中幾何學（上）與幾何學（下），余文卿　吳志揚教授 主編，龍騰版，2003。

[3] 高中數學第一冊至第四冊，南一版，2011~2013。

【評語】040415

作品完成度高，表達能力強，分析清楚。對所有多邊形中適當的條件下定理都成立，反而可以思考是否存在〝有意義〞的反例。另外建議是否可以構造出將凹多邊形轉換成凸多邊形情形的証明方法。