中華民國第53屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040414

循規蹈矩

學校名稱：國立潮州高級中學

作者：	指導老師：
高一 周　擎 高一 簡致軒	洪育祥

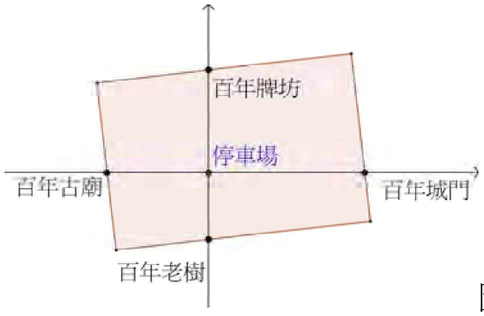
關鍵詞：等角多邊形、費馬點

摘要

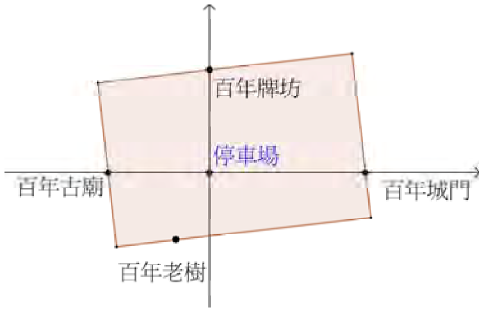
本文是從都市更新的新聞聯想出來的數學問題，在兩條互相垂直的道路中，如何找出過道路的東、西、南、北各一個點的矩形，而矩形的最大面積爲何？透過動態模擬，成功解決這個問題並研究一些有趣的結果。

壹、研究動機

一地區希望在一個垂直的十字路口蓋一個矩形的停車場(如圖①)，十字路口的東、西、南、北各有百年城門、百年古廟、百年老樹、百年牌坊，受限於文化資產保存法的規定，停車場的設置必須避開這些百年古蹟，試問這樣的停車場是否存在？以及它的最大面積爲何？



圖①



圖②

貳、研究目的

一、給定平面坐標軸上四點 A,B,C,D (x,y 軸之正向及負向各一點)，是否存在一個矩形通過這四點，這個矩形的最大面積及最大周長爲何。

二、給定平面坐標軸上三點 A,B,C 及不在軸上一點 D (如圖②)，是否存在一個矩形通過這四點，這個矩形的最大面積爲何。

三、給定平面相異四點，其中任三點不共線，是否存在一個矩形通過這四點，這個矩形的最大面積爲何。

四、任給平面三點，是否存在通過這三點的正三角形。

五、任給平面三點，是否存在通過這三點且與原三角形相似的三角形。

六、給定空間坐標軸上六點(x,y,z 軸之正向及負向各一點)，是否存在一個長方體通過這六點，這個長方體的最大體積爲何。

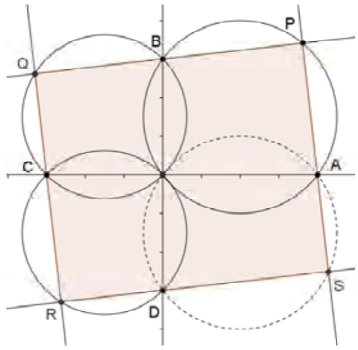
參、研究設備及器材

一、紙＆筆、筆記型電腦

二、GeoGebra 程式

肆、研究過程或方法

一、給定軸上四點 A,B,C,D (x,y 軸之正向及負向各一點)，如何找一個矩形通過這四點。



作法：①分別以 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD}$ 爲直徑作圓

②在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任選一點 P ，作 $\overrightarrow{PB}$ 交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 Q

③作 $\overleftrightarrow{QC}$ 交 $\overset{\frown}{CD}$ 於 R

④分別作 $\overleftrightarrow{RD}$ 與 $\overleftrightarrow{PA}$，假設交於 S

⑤則四邊形 $PQRS$ 爲所求矩形

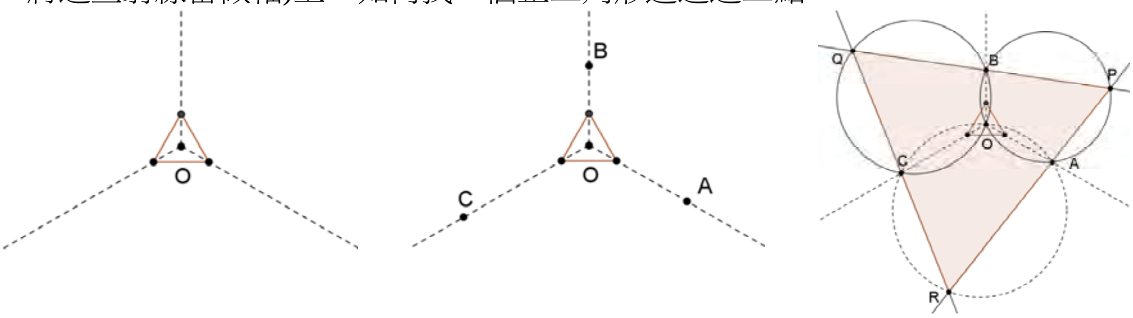
證明：因 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD}$ 分別爲三圓的直徑，由半圓上的圓周角爲直角得，$\angle APB=90°$ 、 $\angle BQC=90°$ 、 $\angle CRD=90°$ 。

在四邊形 $PQRS$ 中，因 $\angle APB=\angle BQC=\angle CRD=90°$ ，故 $\angle ASD=90°$ ，

所以證得 $PQRS$ 爲所求矩形，且 S 落在以 $\overline{AD}$ 爲直徑的圓上。

當 P 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上的移動，可得到過軸上四點 A,B,C,D 的矩形。

二、給定三點 A,B,C ，若此三點分布在<u>正三角形軸</u>(如圖定義以正三角形的中心沿三個頂點作射線，將這些射線當做軸)上，如何找一個正三角形通過這三點。



作法：①分別作 ΔOAB 、 ΔOBC 的外接圓

②在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任選一點 P ，作 $\overrightarrow{PB}$ 交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 Q

③分別作 $\overleftrightarrow{QC}$ 與 $\overleftrightarrow{PA}$，假設交於 R

④則 ΔPQR 爲所求正三角形

證明：因 A,B,C 三點分布在<u>正三角形軸</u>，故 $\angle AOB=\angle BOC=120°$

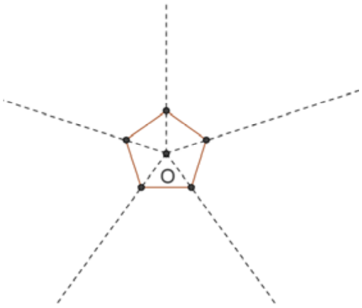
又 O,A,P,B 四點共圓，故 $\angle APB+\angle AOB=180° \Rightarrow \angle APB=60°$ ，同理可得 $\angle BQC=60°$

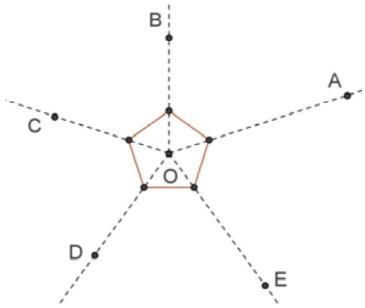
在 ΔPQR 中，因 $\angle APB=\angle BQC=60°$ ，故 $\angle ARC=60°$ ，

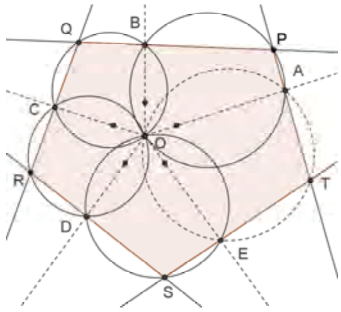
所以 ΔPQR 爲所求正三角形，故得證。

當 P 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上的移動，可得到過<u>正三角形軸</u>上三點 A,B,C 的正三角形

三、給定五點 A,B,C,D,E ，若此五點分布在<u>正五邊形軸</u>(如圖定義以正五邊形的中心沿五個頂點作射線，將這些射線當做軸)上，如何找一個等角五邊形通過這五點。







作法：①分別作 ΔOAB 、 ΔOBC 、 ΔOCD 、 ΔODE 的外接圓

②在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任選一點 P ，作 $\overleftrightarrow{PB}$ 交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 Q

③作 $\overleftrightarrow{QC}$ 交 $\overset{\frown}{CD}$ 於 R 、作 $\overleftrightarrow{RD}$ 交 $\overset{\frown}{DE}$ 於 S

④分別作 $\overleftrightarrow{SE}$ 與 $\overleftrightarrow{PA}$ ，假設交於 T

⑤則 $PQRST$ 爲所求等角五邊形

證明：因 A,B,C,D,E 五點分布在<u>正五邊形軸</u>，故 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=72°$

又 O,A,P,B 四點共圓，故 $\angle APB+\angle AOB=180° \Rightarrow \angle APB=108°$ ，同理可得

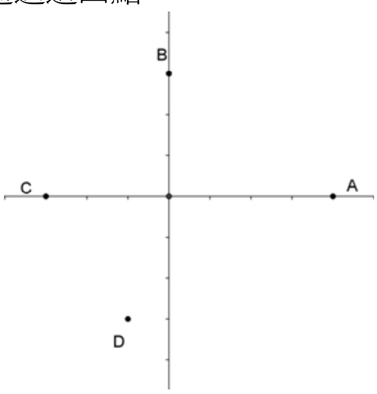
$\angle BQC=\angle CRD=\angle DSE=108°$

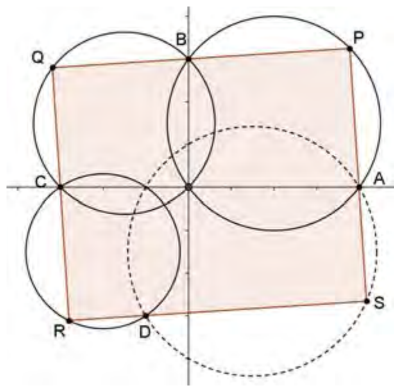
在五邊形 $PQRST$ 中，因 $\angle APB=\angle BQC=\angle CRD=\angle DSE=108°$ ，故 $\angle ATE=108°$ ，

所以 $PQRST$ 爲所求等角五邊形，故得證。

當 P 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上的移動，可得到過<u>正五邊形軸</u>上五點 A,B,C,D,E 的等角五邊形

四、給定四點 A,B,C,D ，若其中 A,B,C 三點分布在平面坐標軸上，另一點 D 不在軸上，如何找一個矩形通過這四點





作法：①分別以 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD}$ 爲直徑作圓

②在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任選一點 P ，作 $\overleftrightarrow{PB}$ 交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 Q

③作$\overleftrightarrow{QC}$交$\overset{\frown}{CD}$於R

④分別作$\overleftrightarrow{RD}$與$\overrightarrow{PA}$，假設交於S

⑤則四邊形$PQRS$爲所求矩形

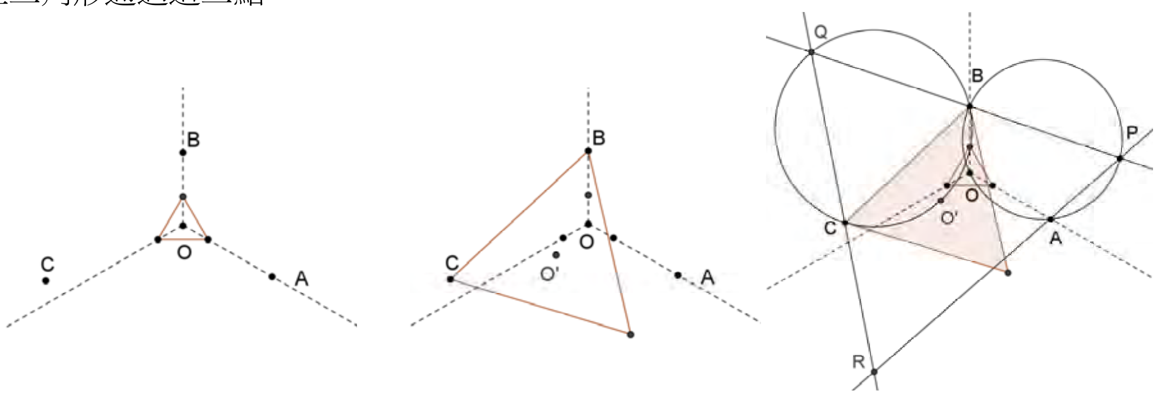
證明：因$\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD}$分別爲三圓的直徑，則由半圓上的圓周角爲直角得，$\angle APB=90°$、$\angle BQC=90°$、$\angle CRD=90°$。

在四邊形$PQRS$中，因$\angle APB=\angle BQC=\angle CRD=90°$，故$\angle ASD=90°$，

所以證得$PQRS$爲所求矩形，且S落在以$\overline{AD}$爲直徑的圓上。

當P在$\overset{\frown}{AB}$上的移動，可得到過A,B,C,D四點的矩形，其中A,B,C三點分布在平面坐標軸上，另一點D不在軸上。

五、給定三點A,B,C，若其中A,B二點分布在<u>正三角形軸</u>上，另一點C不在軸上，如何找一個正三角形通過這三點



作法：①作ΔOAB的外接圓，另以$\overline{BC}$爲正三角形一邊並找出中心O'，作$\Delta O'BC$的外接圓

②在$\overset{\frown}{AB}$上任選一點P，作$\overrightarrow{PB}$交$\overset{\frown}{BC}$於Q

③作$\overleftrightarrow{QC}$交$\overrightarrow{PA}$於R

④則ΔPQR爲所求正三角形

證明：因A,B二點分布在<u>正三角形軸</u>上，故$\angle AOB=120°$

又$OAPB$四點共圓，得$\angle APB+\angle AOB=180° \Rightarrow \angle APB=60°$

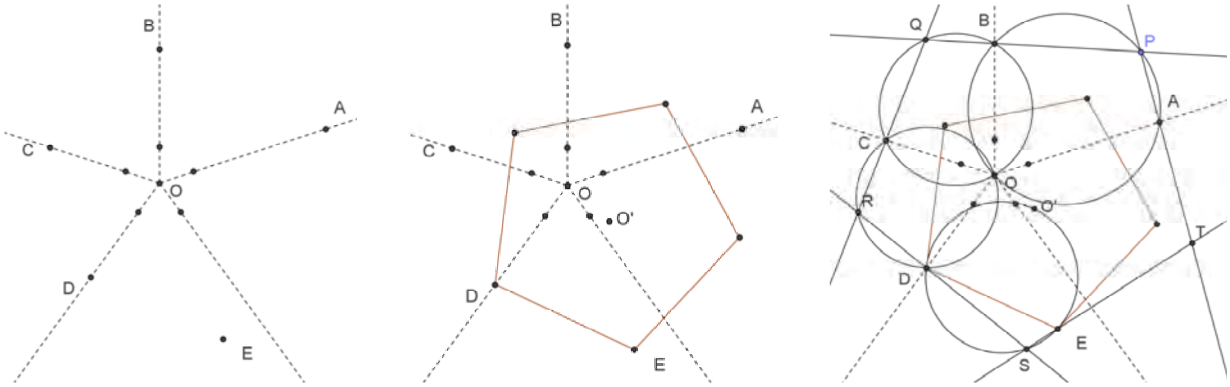
因O'爲正三角形的中心，故$\angle BO'C=120°$

同理，$O'BQC$四點共圓，故$\angle BQC=60°$

在ΔPQR中，因$\angle APB=\angle BQC=60°$，故$\angle ARC=60°$

所以ΔPQR爲所求正三角形，故得證。當P在$\overset{\frown}{AB}$上的移動，可得到過A,B,C三點的正三角形，其中A,B二點分布在<u>正三角形軸</u>上，另一點C不在軸上。

六、給定五點 A,B,C,D,E ，若其中 A,B,C,D 四點分布在<u>正五邊形軸</u>上，而 E 不在軸上，求通過這五點的等角五邊形。



作法：①分別作 $\Delta OAB, \Delta OBC, \Delta OCD$ 之外接圓，以 $\overline{DE}$ 爲正五邊形的一邊並找出中心 O' ，作 $\Delta O'DE$ 之外接圓

②在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任選一點 P ，作 $\overleftrightarrow{PB}$ 交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 Q

③作 $\overleftrightarrow{QC}$ 交 $\overset{\frown}{CD}$ 於 R 、作 $\overleftrightarrow{RD}$ 交 $\overset{\frown}{DE}$ 於 S

④分別作 $\overleftrightarrow{SE}$ 與 $\overleftrightarrow{PA}$ ，假設交於 T

⑤則 $PQRST$ 爲所求等角五邊形

證明：因 A,B,C,D 四點分布在<u>正五邊形軸上</u>，故

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 72°$

又 O,A,P,B 四點共圓，故 $\angle APB + \angle AOB = 180° \Rightarrow \angle APB = 108°$

同理 $\angle BQC = 108°$ 、 $\angle CRD = 108°$

因 O' 爲正五邊形的中心，故 $\angle DO'E = 72°$

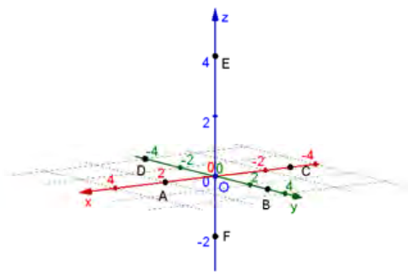
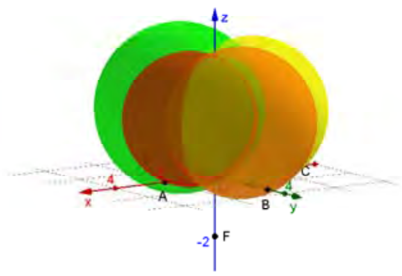
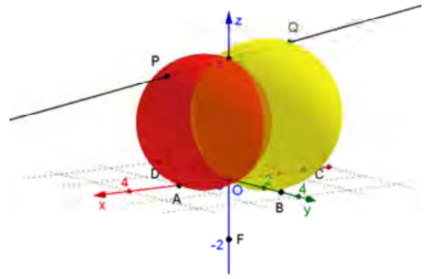
同理 O',D,S,E 四點共圓，故 $\angle DSE + \angle DO'E = 180° \Rightarrow \angle DSE = 108°$

在五邊形 $PQRST$ 中，因 $\angle APB = \angle BQC = \angle CRD = \angle DSE = 108°$ ，故 $\angle ETA = 108°$ ，

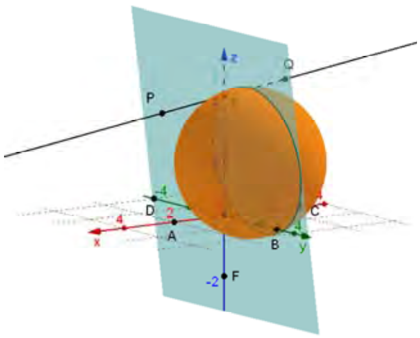
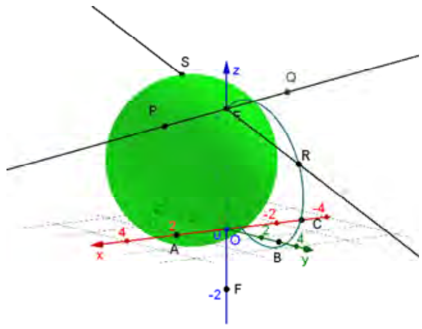
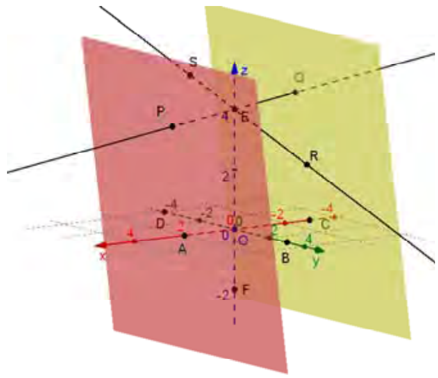
所以 $PQRST$ 爲等角五邊形，故得證。

當 P 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上的移動，可得到過 A,B,C,D,E 五點的等角五邊形，其中 A,B,C,D 四點分布在<u>正五邊形軸</u>上，而 E 不在軸上。

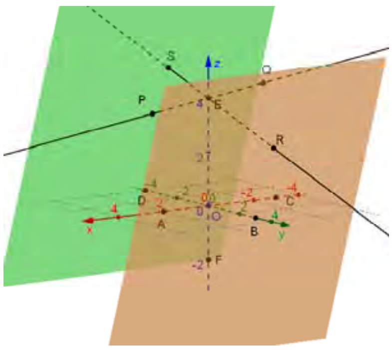
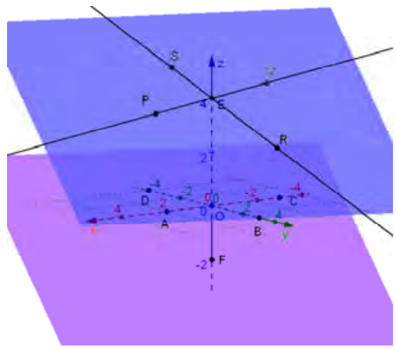
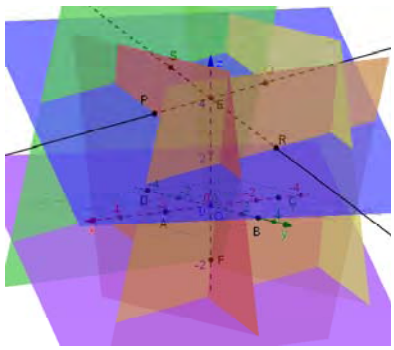
七、給定空間坐標軸上六點，其中A,C分別爲x軸正、負向上之一點，B,D分別爲y軸正、負向上之一點，E,F分別爲z軸正、負向上之一點(圖①)，如何找一個長方體通過這六點。

圖①　圖②　圖③

圖④　圖⑤　圖⑥

圖⑦　圖⑧　圖⑨

作法：①分別以$\overline{AE},\overline{BE},\overline{CE},\overline{DE}$爲直徑作球面$S_1$(紅)$,S_2$(橙)$,S_3$(黃)$,S_4$(綠)(圖②)

②在球面S_1上任選一點P，作$\overleftrightarrow{PE}$交球面S_3於Q(圖③)

③以$\overrightarrow{PQ}$爲法向量作過點E之平面E_0，並假設平面E_0與球面S_2之截圓O(圖④)

④在截圓O上任選一點R，作$\overleftrightarrow{RE}$交球面S_4於S(圖⑤)

⑤以$\overrightarrow{PQ}$爲法向量分別作過點P,Q之平面E_1,E_3(圖⑥)；以$\overrightarrow{RS}$爲法向量分別作過點R,S之平面E_2,E_4(圖⑦)

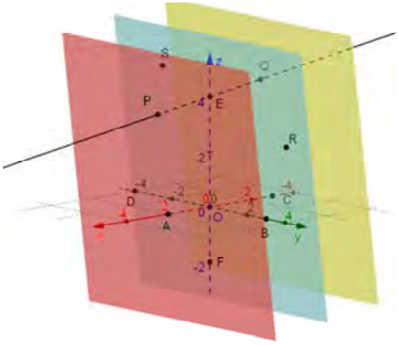
⑥作過兩相交直線$\overleftrightarrow{PQ},\overleftrightarrow{RS}$之平面則$E_5$，再作過點$F$與$E_5$平行之平面$E_6$(圖⑧)，則

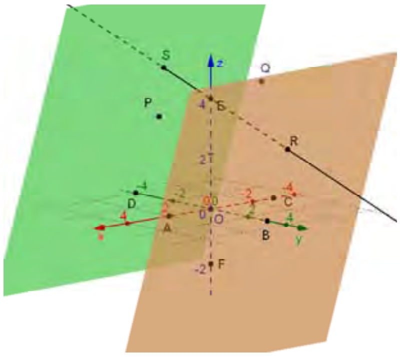
E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6所圍成之長方體爲所求(圖⑨)。

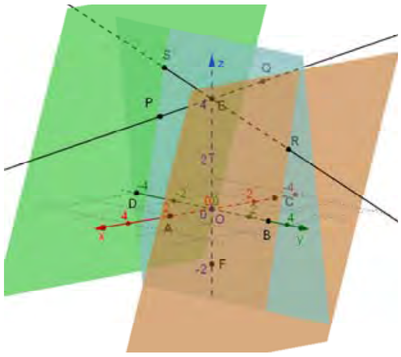
證明：(1)因E_0,E_1,E_3分別爲過點E,P,Q且以$\overrightarrow{PQ}$爲法向量之平面，故$E_0 // E_1 // E_3$(圖❶)…①。同理E_2,E_4分別爲過R,S且以$\overrightarrow{RS}$爲法向量且之平面，故$E_2 // E_4$(圖❷)…②。又$\overleftrightarrow{RS} \subset E_0$，故$E_0 \perp E_2, E_0 \perp E_4$(圖❸)…③。由①②③得，$E_1 \perp E_2, E_2 \perp E_3, E_3 \perp E_4, E_4 \perp E_1$(圖❹)

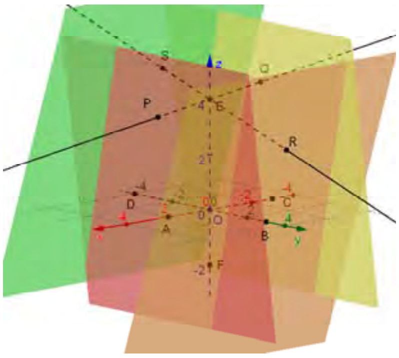
(2)E_5是兩相交直線$\overleftrightarrow{PQ},\overleftrightarrow{RS}$所決定之平面，所以$\overleftrightarrow{PQ} \subset E_5$，得$E_5 \perp E_1, E_5 \perp E_3$(圖❺)；同理$\overleftrightarrow{RS} \subset E_5$，得$E_5 \perp E_2, E_5 \perp E_4$(圖❻)，由此可知$E_5$分別與$E_1,E_2,E_3,E_4$垂直(圖❼)。

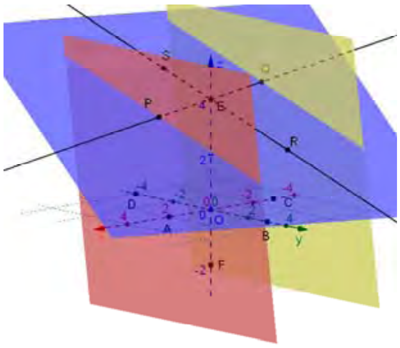
(3)平面E_6平行平面E_5，故E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6圍成的區域爲長方體(圖❼、圖❽)。

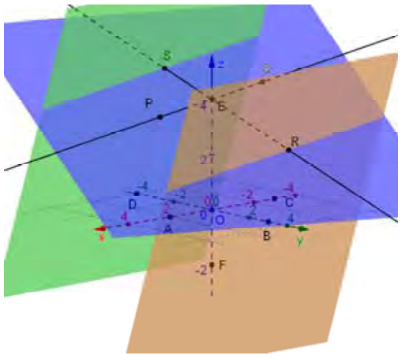

圖❶

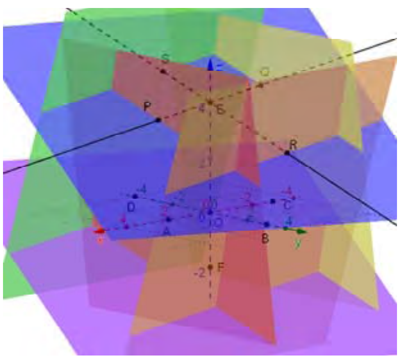

圖❷

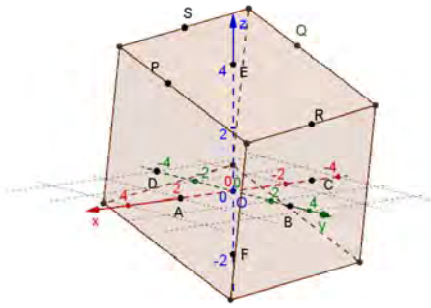

圖❸


圖❹


圖❺


圖❻

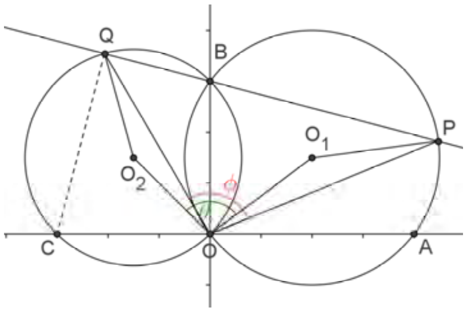

圖❼


圖❽

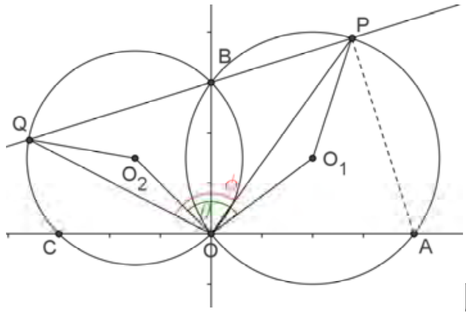
伍、研究結果

定理一：假設 A,B,C 爲軸上三點，圓 O_1,O_2 分別以 $\overline{AB},\overline{BC}$ 爲直徑，若 P 爲圓 O_1 上一點且 $\overleftrightarrow{PB}$ 交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 Q ，以 O 爲參考點，則不論 P 如何移動，恆有

(一) $\angle OO_1P=\angle OO_2Q$　(二) $\angle POQ=\angle O_1OO_2$ 。



圖①



圖②

證明：(一) P 可在圓 O_1 上任意移動，故 B 有可能在 $\overline{PQ}$ 內，或在 $\overline{PQ}$ 外

1.若 B 在 $\overline{PQ}$ 內

不失一般性(如圖①)，因圓周角度數等於所對弧圓心角度數的一半，故

$\angle OBP=\dfrac{1}{2}\angle OO_1P$ 、 $\angle OCQ=\dfrac{1}{2}\angle OO_2Q\ \ldots$①

又 $OBQC$ 爲圓內接四邊形，故 $\angle OCQ+\angle OBQ=180^\circ\ \ldots$②

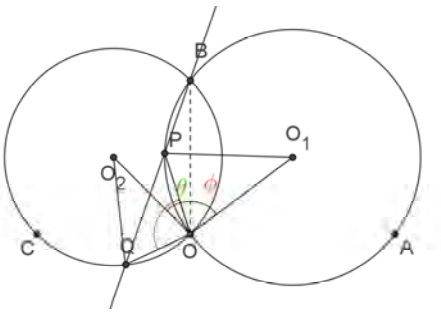
因 $P-B-Q$ 共線，故 $\angle OBP+\angle OBQ=180^\circ\Rightarrow\angle OBP=180^\circ-\angle OBQ\ \ldots$③

由①②③可得

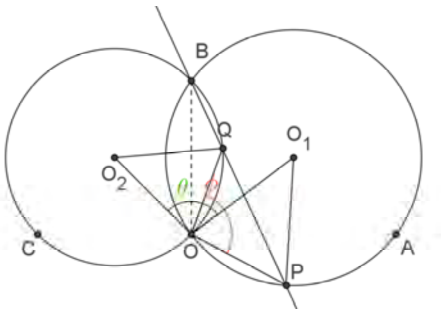
$\angle OO_1P=2\angle OBP=2(180^\circ-\angle OBQ)=2\angle OCQ=\angle OO_2Q$

同理可得圖②的情形

2.若 B 在 $\overline{PQ}$ 外



圖③



圖④

(1)圖③中， $\angle OBQ=\dfrac{1}{2}\angle OO_1P=\dfrac{1}{2}\angle OO_2Q$

(2)圖④中， $\angle OBP=\dfrac{1}{2}\angle OO_1P=\dfrac{1}{2}\angle OO_2Q$

綜合 1.2.之結論，不論 P 點如何移動 $\angle OO_1P=\angle OO_2Q$

(二)

1.考慮圖①、圖④的情形

如圖①，因為 ΔOQO_2 為等腰三角形，所以 $\angle O_2OQ = \dfrac{180° - \angle OO_2Q}{2}$ ，即

$\angle O_1OO_2 = \theta = \dfrac{180° - \angle OO_2Q}{2} + \angle O_1OQ$

同理， ΔOPO_1 為等腰三角形，所以 $\angle O_1OP = \dfrac{180° - \angle OO_1P}{2}$

即 $\angle POQ = \phi = \dfrac{180° - \angle OO_1P}{2} + \angle O_1OQ$

由(一)知 $\angle OO_1P = \angle OO_2Q$

故 $\angle O_1OO_2 = \theta = \phi = \angle POQ$ ，同理可得圖④的情形

2.考慮圖②、圖③的情形

如圖②，因為 ΔOPO_1 為等腰三角形，所以 $\angle O_1OP = \dfrac{180° - \angle OO_1P}{2}$

即 $\angle O_1OO_2 = \theta = \dfrac{180° - \angle OO_1P}{2} + \angle O_2OP$

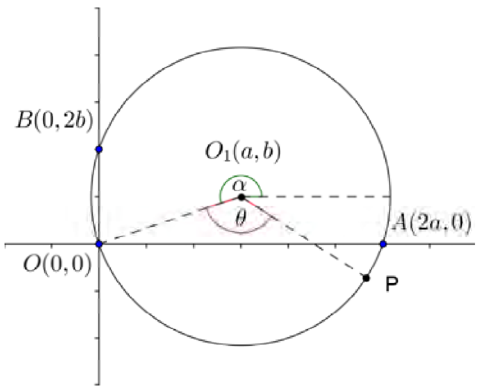
同理， ΔOQO_2 為等腰三角形，所以 $\angle O_2OQ = \dfrac{180° - \angle OO_2Q}{2}$ ，即

$\angle POQ = \phi = \dfrac{180° - \angle OO_2Q}{2} + \angle O_2OP$

由(一)知 $\angle OO_1P = \angle OO_2Q$

故 $\angle O_1OO_2 = \theta = \phi = \angle POQ$ ，同理可得圖③的情形

引理一：假設兩點 $A(2a,0), B(0,2b), ab \neq 0$ ，以 $\overline{AB}$ 為直徑作圓 O_1 ，則圓 O_1 上動點的參數式為 $P(a - a\cos\theta + b\sin\theta, b - b\cos\theta - a\sin\theta)$ ，其中 θ 表示 P 自原點 O 逆時針繞圓 O_1 旋轉的角度



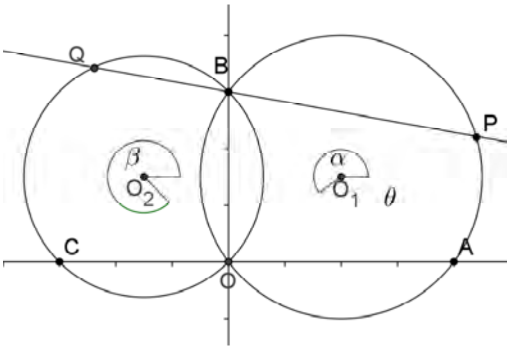
證明：不失一般性考慮 $a,b>0$，以 $A(2a,0), B(0,2b)$ 為直徑的圓 O_1 方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ，其中圓心 $O_1(a,b)$ 且 $r^2 = a^2 + b^2$

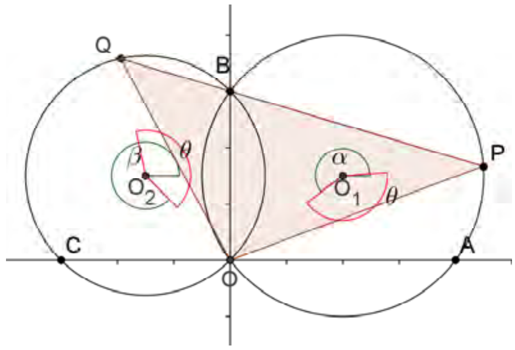
若 P 爲圓 O_1 上動點，可假設動點 $P(a+r\cos(\theta+\alpha),b+r\sin(\theta+\alpha))$，其中 $\cos\alpha=\dfrac{-a}{r},\sin\alpha=\dfrac{-b}{r}$，化簡後可得 $P(a-a\cos\theta+b\sin\theta,b-b\cos\theta-a\sin\theta)$，其中 θ 表示 P 自原點 O 逆時針繞圓 O_1 旋轉的角度

定理二：假設 $A(2a,0),B(0,2b),C(2c,0)$，其中 $a,b>0,c<0$，以 $\overline{AB}$ 爲直徑作圓 O_1、以 $\overline{BC}$ 爲直徑作圓 O_2，若 P 爲圓 O_1 上一點且 $\overleftrightarrow{PB}$ 交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 Q，則

(一) ΔPOQ 有最大面積 $2|b(a-c)|$，此時恰爲 ΔOO_1O_2 面積的 4 倍

(二) $\overline{PQ}$ 有最大値 $2|a-c|$，此時恰爲圓心距 $\overline{O_1O_2}$ 的 2 倍





證明：因爲 $A(2a,0),B(0,2b),C(2c,0)$，得圓 O_1,O_2 的方程式分別如下：

圓 $O_1:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，其中 $r^2=a^2+b^2$

圓 $O_2:(x-c)^2+(y-b)^2=s^2$，其中 $s^2=b^2+c^2$

由定理 1 知 $\angle OO_1P=\angle OO_2Q$，即 P 自 O 逆時針繞圓 O_1 轉 θ 時，Q 也恰好自 O 逆時針繞圓 O_2 轉 θ，

再由引理一，可假設圓 O_1 上的動點爲 $P(a-a\cos\theta+b\sin\theta,b-b\cos\theta-a\sin\theta)$，

圓 O_2 上的動點爲 $Q(c-c\cos\theta+b\sin\theta,b-b\cos\theta-c\sin\theta)$

(一) $\Delta POQ=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{OP}\\ \overrightarrow{OQ}\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a-a\cos\theta+b\sin\theta & b-b\cos\theta-a\sin\theta\\ c-c\cos\theta+b\sin\theta & b-b\cos\theta-c\sin\theta\end{vmatrix}\right|$

$=\dfrac{1}{2}|(ab-bc)(2-2\cos\theta)|=|(ab-bc)(1-\cos\theta)|\le 2|b(a-c)|=4\left|\dfrac{b(a-c)}{2}\right|$。

當 $\theta=180^\circ$ 時，即 P,Q 自 O 分別逆時針繞圓 O_1,O_2 轉 180° 時，ΔPOQ 有最大面積且恰爲 ΔOO_1O_2 面積的 4 倍。

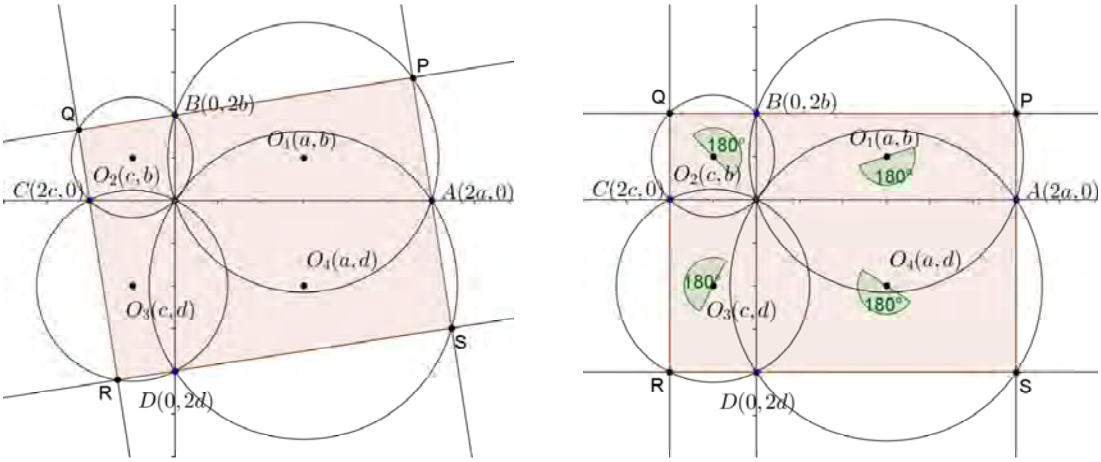
(二) $\overline{PQ}^2=[(a-c)(1-\cos\theta)]^2+[(c-a)\sin\theta]^2=2(c-a)^2(1-\cos\theta)\le 4(c-a)^2$。

當 $\theta=180^\circ$ 時，即 P,Q 自 O 分別逆時針繞圓 O_1,O_2 轉 180° 時，$\overline{PQ}$ 有最大長度 $2|c-a|$，恰爲圓心距 $\overline{O_1O_2}$ 的 2 倍。

定理三：假設 $A(2a,0),B(0,2b),C(2c,0),D(0,2d)$，其中 $a,b>0,c,d<0$，以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 爲直徑分別作圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3、圓 O_4，若 P 爲圓 O_1 上一點，建構通過軸上四點的矩形 $PQRS$，則

(一) $PQRS$ 有最大面積 $4|(a-c)(b-d)|$，此時恰爲 $O_1O_2O_3O_4$ 面積的 4 倍

(二) $PQRS$ 有最大周長 $4(|a-c|+|b-d|)$，此時恰爲 $O_1O_2O_3O_4$ 周長的 2 倍



證明：由定理一可知，當 P 自 O 逆時針繞圓 O_1 轉 θ 時，Q 也恰好自 O 逆時針繞圓 O_2 轉 θ，同理 R 也恰好自 O 逆時針繞圓 O_3 轉 θ，S 也恰好自 O 逆時針繞圓 O_4 轉 θ，

由引理一可假設 P,Q,R,S 的參數式分別爲

$P(a-a\cos\theta+b\sin\theta,b-b\cos\theta-a\sin\theta)$、$Q(c-c\cos\theta+b\sin\theta,b-b\cos\theta-c\sin\theta)$、

$R(c-c\cos\theta+d\sin\theta,d-d\cos\theta-c\sin\theta)$、$S(a-a\cos\theta+d\sin\theta,d-d\cos\theta-a\sin\theta)$，可得

$$\overrightarrow{PQ}=((c-a)(1-\cos\theta),(a-c)\sin\theta)$$

$$\overrightarrow{PS}=((d-b)\sin\theta,(d-b)(1-\cos\theta))$$

(一)矩形 $PQRS$ 面積 $=\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{PQ}\\ \overrightarrow{PS}\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}(c-a)(1-\cos\theta) & (a-c)\sin\theta\\ (d-b)\sin\theta & (d-b)(1-\cos\theta)\end{vmatrix}\right|$

$=|(d-b)(c-a)(2-2\cos\theta)|\le 4|(a-c)(b-d)|$，

當 $\theta=180°$ 時，即 P,Q,R,S 自 O 分別逆時針繞圓 O_1,O_2,O_3,O_4 轉 $180°$ 時，矩形 $PQRS$ 有最大面積且恰爲 $O_1O_2O_3O_4$ 面積的 4 倍。

(二)矩形 $PQRS$ 周長

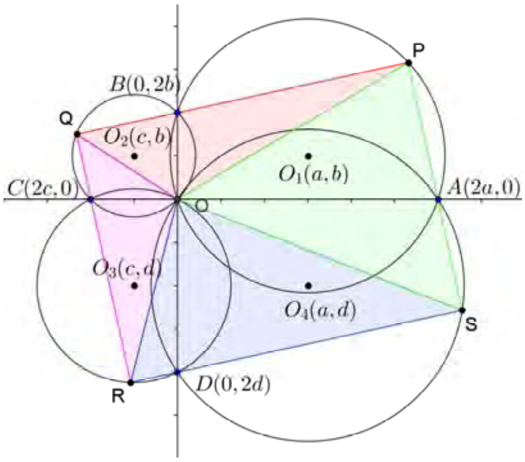
$\overline{PQ}^2=2(a-c)^2(1-\cos\theta)\Rightarrow\overline{PQ}=|a-c|\sqrt{2(1-\cos\theta)}$、

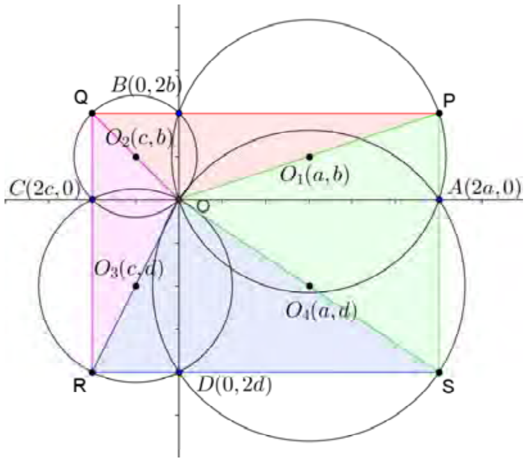
$\overline{PS}^2=2(b-d)^2(1-\cos\theta)\Rightarrow\overline{PS}=|b-d|\sqrt{2(1-\cos\theta)}$

$PQRS$ 周長 $=2\overline{PQ}+2\overline{PS}=2|a-c|\sqrt{2(1-\cos\theta)}+2|b-d|\sqrt{2(1-\cos\theta)}$

$= 2(|a-c|+|b-d|)\sqrt{2(1-\cos\theta)} \le 4(|a-c|+|b-d|)$

當 $\theta = 180°$ 時，矩形 $PQRS$ 有最大周長且恰爲 $O_1O_2O_3O_4$ 周長的 2 倍





另證：將 $PQRS$ 拆成四個三角形 $\Delta OPQ, \Delta OQR, \Delta ORS, \Delta OSP$

由定理二知，ΔOPQ 在 P,Q 分別由 O 出發繞圓 O_1,O_2 轉當 $180°$ 時，ΔPOQ 有最大面積 $2|b(a-c)|$，而 $\overline{PQ}$ 有最大值 $2|a-c|$，同理

ΔOQR 在 Q,R 分別由 O 出發繞圓 O_2,O_3 轉當 $180°$ 時，ΔOQR 有最大面積 $2|c(b-d)|$，而 $\overline{QR}$ 有最大值 $2|b-d|$

ΔORS 在 R,S 分別由 O 出發繞圓 O_3,O_4 轉當 $180°$ 時，ΔORS 有最大面積 $2|d(a-c)|$，而 $\overline{RS}$ 有最大值 $2|a-c|$

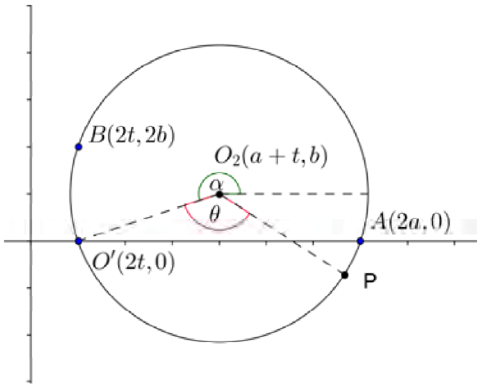
ΔOSP 在 S,P 分別由 O 出發繞圓 O_4,O_1 轉當 $180°$ 時，ΔOSP 有最大面積 $2|a(b-d)|$，而 $\overline{SP}$ 有最大值 $2|b-d|$，

故得矩形 $PQRS$ 有

最大面積 $2|b(a-c)|+2|c(b-d)|+2|d(a-c)|+2|a(b-d)| = 4|(a-c)(b-d)|$；

最大周長 $2|a-c|+2|b-d|+2|a-c|+2|b-d| = 4(|a-c|+|b-d|)$。

引理二：假設兩點 $A(2a,0), B(2t,2b), ab \ne 0$，以 $\overline{AB}$ 爲直徑作圓 O_2，則圓 O_2 上動點的參數式爲 $P(a+t-(a-t)\cos\theta + b\sin\theta, b-b\cos\theta-(a-t)\sin\theta)$，其中 θ 表示 P 自點 $O'(2t,0)$ 逆時針繞圓 O_2 旋轉的角度



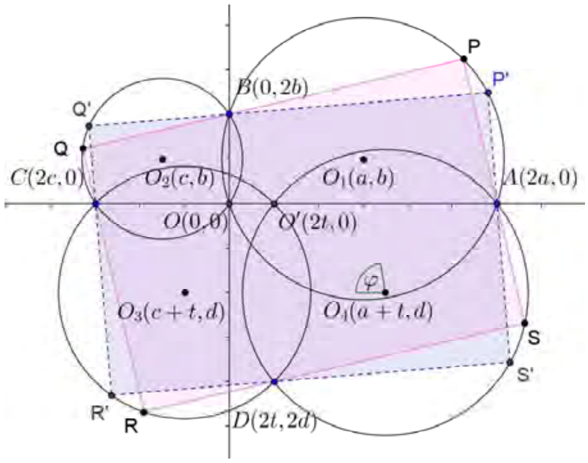
證明：不失一般性考慮$B(2t,2b)$在第一象限的情形，假設$a,b>0$，以$A(2a,0),B(2t,2b)$爲直徑的圓O_2方程式$(x-(a+t))^2+(y-b)^2=r^2$，其中圓心$O_2(a+t,b)$且$r^2=(a-t)^2+b^2$

若P爲圓O_2上動點，可假設動點$P(a+t+r\cos(\theta+\alpha),b+r\sin(\theta+\alpha))$，其中

$\cos\alpha=\dfrac{-(a-t)}{r},\sin\alpha=\dfrac{-b}{r}$，化簡後可得

$P(a+t-(a-t)\cos\theta+b\sin\theta,b-b\cos\theta-(a-t)\sin\theta)$，其中$\theta$表示$P$自點$O'(2t,0)$逆時針繞圓$O_2$旋轉的角度

定理四：假設$A(2a,0),B(0,2b),C(2c,0),D(2t,2d)$，以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$爲直徑分別作圓$O_1$、圓$O_2$、圓$O_3$、圓$O_4$，若$P$爲圓$O_1$上一點，建構通過軸上四點的矩形$PQRS$，則$PQRS$有最大面積$2|a-c||b-d|+2|a-c|\sqrt{t^2+(b-d)^2}$



證明：由引理一可假設$P(a-a\cos\theta+b\sin\theta,b-b\cos\theta-a\sin\theta)$

$Q(c-c\cos\theta+b\sin\theta,b-b\cos\theta-c\sin\theta)$，表示$P,Q$分別自原點$O$逆時針繞圓$O_1,O_2$轉$\theta$

由引理二可假設$R(c+t-(c-t)\cos\theta+d\sin\theta,d-d\cos\theta-(c-t)\sin\theta)$、

$S(a+t-(a-t)\cos\theta+d\sin\theta,d-d\cos\theta-(a-t)\sin\theta)$，表示$R,S$分別自點$O'(2t,0)$逆時針繞$O_3,O_4$旋轉$\theta$

$\overrightarrow{PQ}=((c-a)(1-\cos\theta),(a-c)\sin\theta)$

$\overrightarrow{PS}=(t+t\cos\theta+(d-b)\sin\theta,(d-b)(1-\cos\theta)+t\sin\theta)$

矩形 $PQRS$ 面積 $=\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{PQ}\\ \overrightarrow{PS}\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}(c-a)(1-\cos\theta) & (a-c)\sin\theta\\ t+t\cos\theta+(d-b)\sin\theta & (d-b)(1-\cos\theta)+t\sin\theta\end{vmatrix}\right|$

$=2|a-c\|(b-d)-\left(t\sin\theta+(b-d)\cos\theta\right)|$

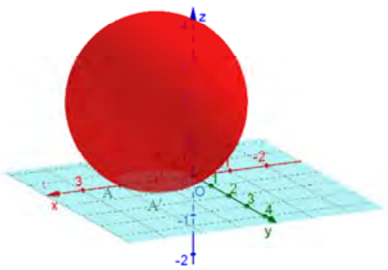
其中

$t\sin\theta+(b-d)\cos\theta=\sqrt{t^2+(b-d)^2}\sin(\theta+\phi),\cos\phi=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+(b-d)^2}},\sin\phi=\dfrac{b-d}{\sqrt{t^2+(b-d)^2}}$，故

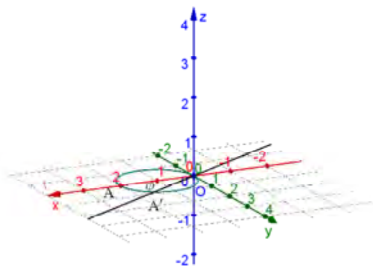
當 $\sin(\theta+\phi)=-1\Rightarrow\theta+\phi=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{3\pi}{2}-\phi$

可得最大矩形 $P'Q'R'S'$，其面積爲 $2|a-c\|b-d|+2|a-c|\sqrt{t^2+(b-d)^2}$

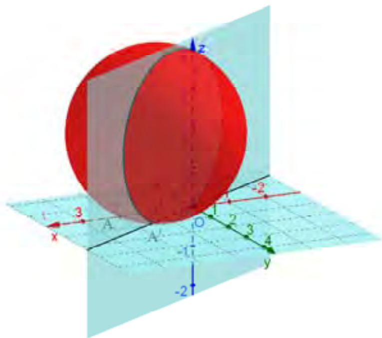
引理三：在空間坐標中，假設 $A(2a,0,0),E(0,0,2e),a,e>0$，以 $\overline{AE}$ 爲直徑作球 S_1，一平面 $E_0: y=\tan\phi x,0\le\phi<\pi,\phi\neq\dfrac{\pi}{2}$，若平面 E_0 與球 S_1 截出圓 O_1，則截圓 O_1 上動點的參數式爲 $P(x_1\cos\phi,x_1\sin\phi,z_1)$，其中 $x_1=a\cos\phi-a\cos\phi\cos\theta+e\sin\theta$、$z_1=e-e\cos\theta-a\cos\phi\sin\theta$，而 θ 表示 P 自原點 O 逆時針繞圓 O_1 旋轉的角度



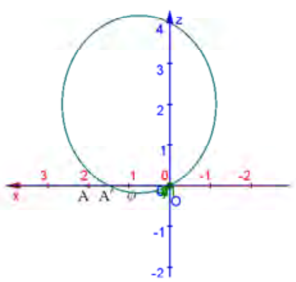
圖①



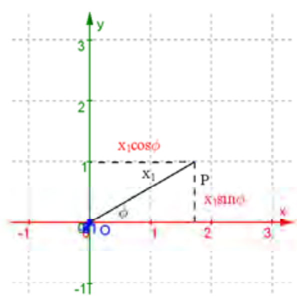
圖②



圖③



圖④



圖⑤

證明：(1)因 S_1 是以 $\overline{AE}$ 爲直徑的球(如圖①)，假設球 S_1 與平面 $z=0$ 之截痕爲以 $\overline{OA}$ 爲直徑的截圓 O_2。假設平面 E_0 與平面 $z=0$ 之交線爲 L，則圓 O_2 與 L 交於 A',O 兩點(如圖②)，由題意知 $\angle AOA'=\phi$，故得 $\overline{OA'}=\overline{OA}\cos\phi=2a\cos\phi$

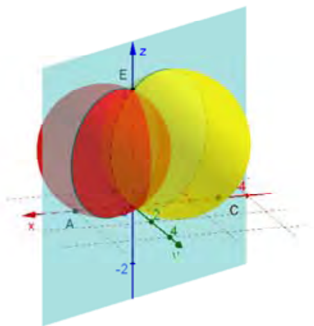
(2)考慮截圓 O_1 與平面 E_0 之關係(如圖③)，將 L 視爲 x 軸、z 軸視爲 y 軸，則截圓 O_1 可視爲以 $A'(2a\cos\phi,0)$、$E(0,2e)$ 爲直徑的圓(如圖④)，由引理一可設圓 O_1 上動點 $P(a\cos\phi-a\cos\phi\cos\theta+e\sin\theta,e-e\cos\theta-a\cos\phi\sin\theta)=P(x_1,z_1)$，則虛擬動點 $P(x_1,z_1)$ 在空間坐標中應爲 $P(x_1\cos\phi,x_1\sin\phi,z_1)$ (如圖⑤)

定理五：空間坐標軸上三點 $A(2a,0,0),C(2c,0,0),E(0,0,2e),a,e>0,b<0$，分別以 $\overline{AE},\overline{CE}$ 爲直徑作球 S_1,S_3，一平面 $E_0:y=\tan\phi x,0\le\phi<\pi,\phi\ne\dfrac{\pi}{2}$，若平面 E_0 分別與球 S_1、球 S_3 各截出圓 O_1、圓 O_3 (圖①)，假設 P 爲截圓 O_1 上一點且 $\overleftrightarrow{PE}$ 交截圓 O_3 於 Q (圖②)，則

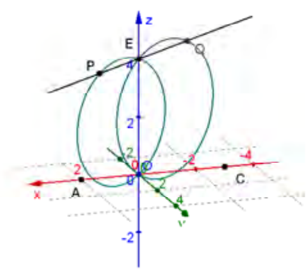
(一) $\overleftrightarrow{PQ}$ 爲 $\overline{PA}$、$\overline{QC}$ 之公垂線

(二)過點 P 且以 $\overrightarrow{PQ}$ 爲法向量之平面 E_1 及過點 Q 且以 $\overrightarrow{PQ}$ 爲法向量之平面 E_3，則平面 E_1 過點 A、平面 E_3 過點 C，且平面 E_1,E_3 平行

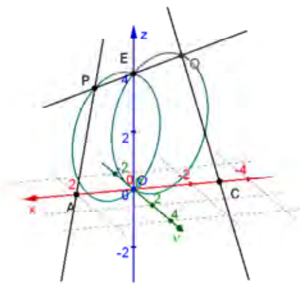
(三)兩平行平面 E_1,E_3 之距離爲 $\overline{PQ}$，當平面 E_0 之 $\phi=0^\circ$ 可得最大距離 $2|a-c|$ 恰爲球心距 $\overline{S_1S_3}$ 的 2 倍



圖①

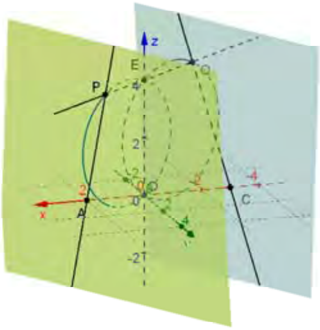


圖②

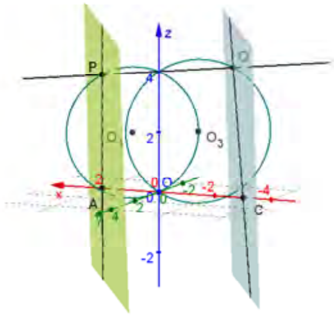


圖③

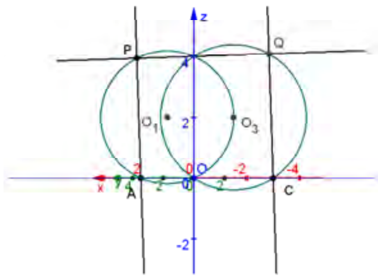
證明：(一) P 爲截圓 O_1 上一點，則 P 在以 $\overline{AE}$ 爲直徑的球 S_1 上，因球面上任一點與直徑兩端點的夾角爲 90°，故 $\angle APE=90^\circ$，即 $\overrightarrow{PQ}$ 垂直 $\overline{PA}$，同理 $\overrightarrow{PQ}$ 垂直 $\overline{QC}$，故 $\overrightarrow{PQ}$ 爲 $\overline{PA}$、$\overline{QC}$ 之公垂線(圖③)



圖④



圖⑤



圖⑥

(二)平面 E_1, E_3 均以 $\overrightarrow{PQ}$ 爲法向量，故平面 E_1, E_3 平行(圖④、圖⑤)。又平面 E_1 過點 P 且由(一)知 $\overrightarrow{PQ}$ 垂直 $\overline{PA}$，故平面 E_1 過點 A ，同理平面 E_3 過點 C

(三)由(一)(二)知，平面 E_1, E_3 平行與兩平面之距離爲 $\overline{PQ}$ (圖⑥)，由引理三可得球 S_1 上的動點 $P(x_1\cos\phi, x_1\sin\phi, z_1)$ ，其中 $x_1 = a\cos\phi - a\cos\phi\cos\theta + e\sin\theta$ 、

$z_1 = e - e\cos\theta - a\cos\phi\sin\theta$ ，

球 S_3 上的動點 $Q(x_2\cos\phi, x_2\sin\phi, z_2)$ ，其中

$x_2 = c\cos\phi - c\cos\phi\cos\theta + e\sin\theta$ 、 $z_2 = e - e\cos\theta - c\cos\phi\sin\theta$

則 $\overline{PQ}^2 = (x_1\cos\phi - x_2\cos\phi)^2 + (x_1\sin\phi - x_2\sin\phi)^2 + (z_1 - z_2)^2$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

$$= \big((a-c)\cos\phi(1-\cos\theta)\big)^2 + \big((a-c)\cos\phi\sin\theta\big)^2$$

$$= (a-c)^2\cos^2\phi(2 - 2\cos\theta)$$

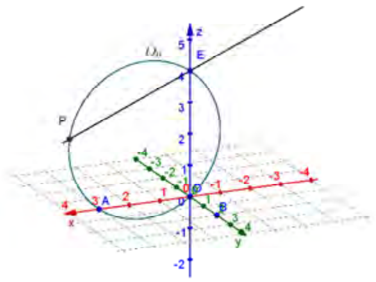
故當 $\phi = 0°, \theta = 180°$ 時， $\overline{PQ}^2$ 有最大值 $4(a-c)^2$ ，即當截平面爲 xz 平面時，且 P, Q 自 O 分別逆時針繞截圓 O_1, O_3 轉 $180°$ 時，兩平行平面 E_1, E_3 有最大距離 $2|a-c|$，恰爲球心距 $\overline{S_1S_3}$ 的 2 倍。

引理四：假設 $A(2a,0,0), B(0,2b,0), E(0,0,2e)$ 分別在 x, y, z 軸正向上，若 S 是以 $\overline{BE}$ 爲直徑的球，而點 $P(a - a\cos\theta + e\sin\theta, 0, e - e\cos\theta - a\sin\theta)$ 在以 $\overline{AE}$ 爲直徑的圓 O_0 上(圖①)，則以 $\overrightarrow{PE}$ 爲法向量分別過點 E, O 之平面 F_1, F_2 ，

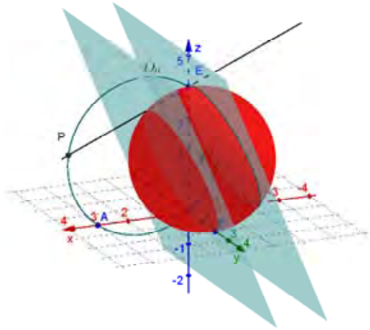
(1)平面 F_1, F_2 會在球 S 上截出兩個相等的截圓 O_1, O_2 (圖②、圖③)

(2)截圓 O_1 上動點參數式爲 $P_3(z_1\cos\frac{\theta}{2} - 2e\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}, y_1, z_1\sin\frac{\theta}{2} + 2e\cos^2\frac{\theta}{2})$ ，其中

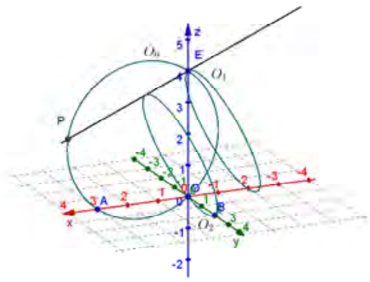
$y_1 = b - b\cos w + e\sin\frac{\theta}{2}\sin w$ 、 $z_1 = e\sin\frac{\theta}{2} - e\sin\frac{\theta}{2}\cos w - b\sin w$ ， w是任意角



圖①



圖②

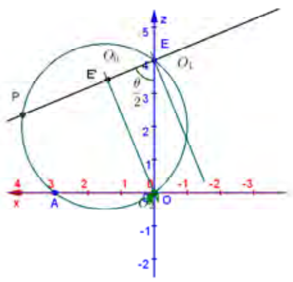


圖③

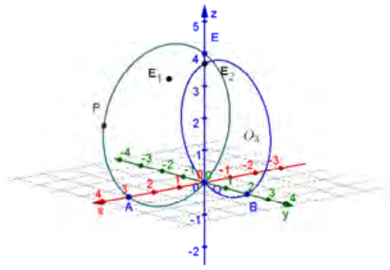
證明：(1)因平面 F_2 是以 $\overrightarrow{PE}$ 爲法向量且過點 O 之平面(圖②)，又 $\overrightarrow{PE}$ 在 xz 平面上，故平面 F_2 與 xz 平面垂直，即平面 F_2 必過點 B 。

平面 F_1, F_2 均以 $\overrightarrow{PE}$ 爲法向量，故兩平面平行；又平面 F_2 過點 B ，依題意平面 F_1 過點 E 。

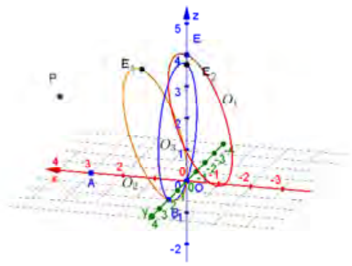
因 S 是以 $\overline{BE}$ 爲直徑的球，平面 F_1, F_2 互相平行且過球直徑的兩端點，故截出相同截圓 O_1, O_2 。



圖④



圖⑤



圖⑥

(2)因 $P(a - a\cos\theta + e\sin\theta, 0, e - e\cos\theta - a\sin\theta)$，由引理一知，表示 P 自原點 O 繞圓 O_0 轉 θ ，故圓周角 $\angle OEP = \dfrac{\theta}{2}$ (圖④)

已知 $\overline{OE} = 2e$ ，則 $\overline{OE_1} = \overline{OE}\sin\dfrac{\theta}{2} = 2e\sin\dfrac{\theta}{2}$

接下來透過 3 個步驟，建構圓 O_1 上的動點

第 1 步驟，觀察圓 O_2 ，可得 $\overline{OB} = 2b$ 、 $\overline{OE_1} = 2e\sin\dfrac{\theta}{2}$ 。在坐標軸上建立圓 O_3 (圖⑤)，圓 O_3 是以 $B(0,2b,0)$ 、 $E_2(0,0,2e\sin\dfrac{\theta}{2})$ 爲直徑的圓，由引理一得圓 O_3 上動點參數式 $P_1(0, b - b\cos w + e\sin\dfrac{\theta}{2}\sin w, e\sin\dfrac{\theta}{2} - e\sin\dfrac{\theta}{2}\cos w - b\sin w) = P_1(0, y_1, z_1)$，表示 P_1 自原點 O 繞圓 O_3 轉 w

第 2 步驟，將在 y 軸、 z 軸的圓 O_3 (圖⑥藍)，往 x 軸傾斜 $90° - \dfrac{\theta}{2}$ ，得到圓 O_2 (圖⑥橙)，

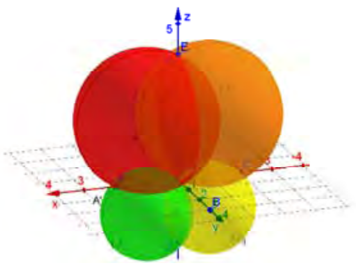
此時 E_1 真正坐標爲

$$E_1(2e\sin\frac{\theta}{2}\sin(90^\circ-\frac{\theta}{2}),0,2e\sin\frac{\theta}{2}\cos(90^\circ-\frac{\theta}{2}))=E_1(2e\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},0,2e\sin^2\frac{\theta}{2})$$ ，同理圓 O_2 上動點坐標變成 $P_2(z_1\cos\frac{\theta}{2},y_1,z_1\sin\frac{\theta}{2})$

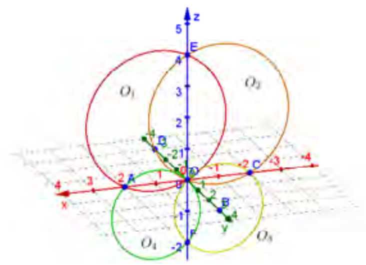
第 3 步驟，將圓 O_2 平移 $\overrightarrow{E_1E}=(-2e\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},0,2e-2e\sin^2\frac{\theta}{2})=(-2e\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},0,2e\cos^2\frac{\theta}{2})$

可得圓 O_1(圖⑥紅)，故得圓 O_1 上的動點 $P_3(z_1\cos\frac{\theta}{2}-2e\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},y_1,z_1\sin\frac{\theta}{2}+2e\cos^2\frac{\theta}{2})$

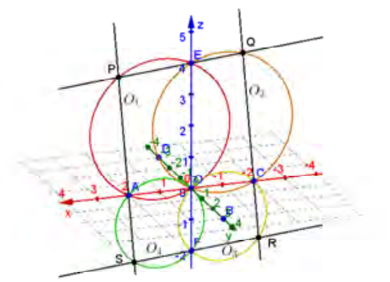
定理六：空間坐標軸上六點 $A(2a,0,0),B(0,2b,0),C(2c,0,0),D(0,2d,0),E(0,0,2e),F(0,0,2f)$，其中 $a,b,e>0,b,c,f<0$。試建構一個長方體 Ω，使得長方體 Ω 的六個面通過 A,B,C,D,E,F ，而長方體 Ω 之最大體積爲 $8|a-c||b-d||e-f|$



圖①



圖②



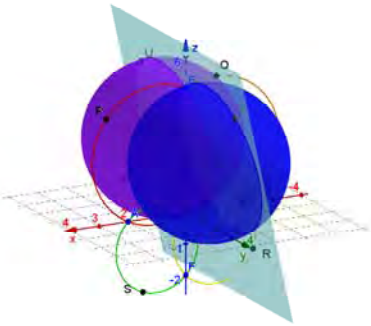
圖③

證明：(1)以 $\overline{AE},\overline{CE},\overline{CF},\overline{AF}$ 爲直徑作球 S_1(紅),S_2(橙),S_3(黃),S_4(綠)(圖①)，一平面 $F_0:y=\tan\phi x,0\le\phi<\pi,\phi\ne\frac{\pi}{2}$，當 $\phi=0^\circ$ 時，平面 F_0 與球 S_1,S_2,S_3,S_4 截出圓 O_1,O_2,O_3,O_4(圖②)，假設 P 爲圓 O_1 上一點，由定理三建構通過軸上四點的矩形 $PQRS$(圖③)，可得四圓上動點 $P(a-a\cos\theta+e\sin\theta,0,e-e\cos\theta-a\sin\theta)$ 、 $Q(c-c\cos\theta+e\sin\theta,0,e-e\cos\theta-c\sin\theta)$ 、 $R(c-c\cos\theta+f\sin\theta,0,f-f\cos\theta-c\sin\theta)$ 、 $S(a-a\cos\theta+f\sin\theta,0,f-f\cos\theta-a\sin\theta)$，則 P,Q,R,S 分別自 O 逆時針繞著 O_1,O_2,O_3,O_4 轉 θ 。

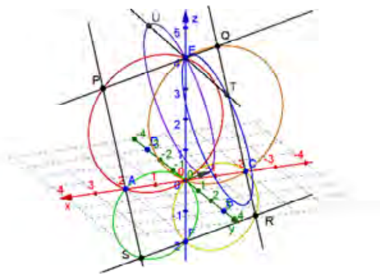
(2)以 $\overline{AE}$ 爲直徑作球 S_5；以 $\overrightarrow{PQ}$ 爲法向量作過 O 之平面 E_0，設平面 E_0 與球面 S_5 截出圓 O_5(圖④)，由引理四可得截圓 O_5 上動點參數式爲 $T(z_1\cos\frac{\theta}{2}-2e\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},y_1,z_1\sin\frac{\theta}{2}+2e\cos^2\frac{\theta}{2})$，其中 $y_1=b-b\cos w+e\sin\frac{\theta}{2}\sin w$ 、 $z_1=e\sin\frac{\theta}{2}-e\sin\frac{\theta}{2}\cos w-b\sin w$ ， w 是任意角

同理以 $\overline{AF}$ 爲直徑作球 S_6 ，設平面 F_0 與球面 S_4 截出圓 O_6 ，若 Q 爲 O_6 之點，則

$U(z_2\cos\frac{\theta}{2}-2e\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}, y_2, z_2\sin\frac{\theta}{2}+2e\cos^2\frac{\theta}{2})$，其中 $y_2=d-d\cos w+e\sin\frac{\theta}{2}\sin w$、$z_2=e\sin\frac{\theta}{2}-e\sin\frac{\theta}{2}\cos w-d\sin w$，此時 T 與 U 的連線仍通過 E (圖⑤)。



圖④



圖⑤

(3)長方體 Ω 之體積爲

$$\text{絕對值}\begin{vmatrix}\overrightarrow{PQ}\\ \overrightarrow{PS}\\ \overrightarrow{TU}\end{vmatrix}=\text{絕對值}\begin{vmatrix}(c-a)(1-\cos\theta) & 0 & -(c-a)\sin\theta\\ (f-e)\sin\theta & 0 & (f-e)(1-\cos\theta)\\ (z_2-z_1)\cos\frac{\theta}{2} & y_2-y_1 & (z_2-z_1)\sin\frac{\theta}{2}\end{vmatrix}$$

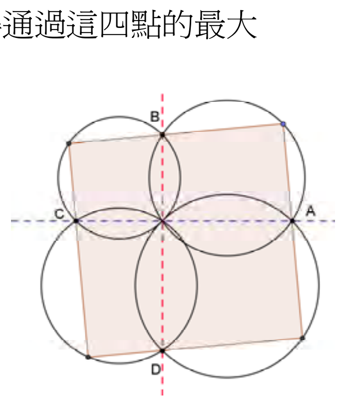
$=|y_2-y_1||(e-f)(a-c)(2-2\cos\theta)|$

$=|(d-b)(1-\cos w)||(c-a)(b-d)(2-2\cos\theta)|\le 8|a-c||b-d||e-f|$

故當 $\theta=180°, w=180°$ 時，長方體 Ω 最大體積 $8|a-c||b-d||e-f|$，即當 P,Q,R,S 在 xz 平面上且分別自 O 逆時針繞著 O_1,O_2,O_3,O_4 轉 $180°$，而 T,U 繞著 O_5,O_6 轉 $180°$ 時，可得最大體積。

陸、討論

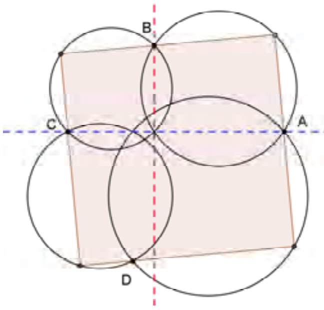
一、任給平面相異四點其中任三點不共線，若此四點可圍成凸多邊形，可求得通過這四點的最大矩形。



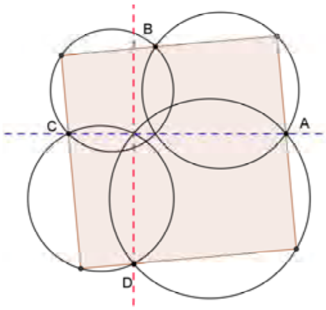
解：(一)若給定四點恰位於二條垂直的軸上(如右圖)，由定理三可求得最大矩形。

(二)給定四點不在二條垂直的軸上，不失一般性，假設先選對角線 $\overleftrightarrow{AC}$，其次做過 B 垂直 $\overleftrightarrow{AC}$ 的垂線(圖①)，此時三點在軸上另一點在軸外，由定理四可得最大矩形。仿上述方法取軸可得圖②、圖③、圖④，無論如何

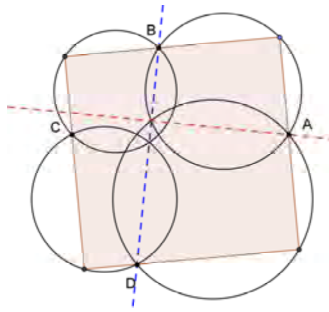
選兩個垂直的軸，所得到的四個圓都一樣，按照定理四的方法求出的最大矩形均相同。



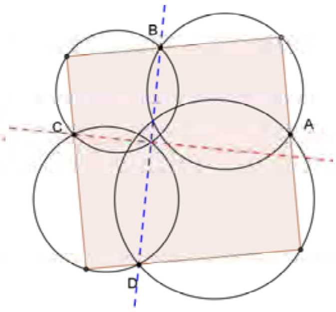
圖①



圖②

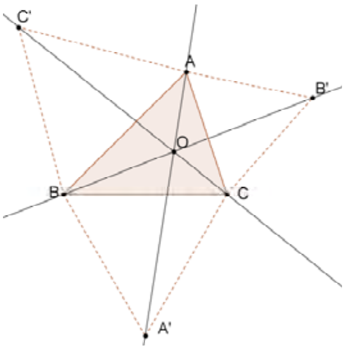


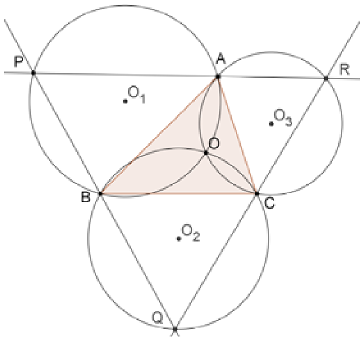
圖③

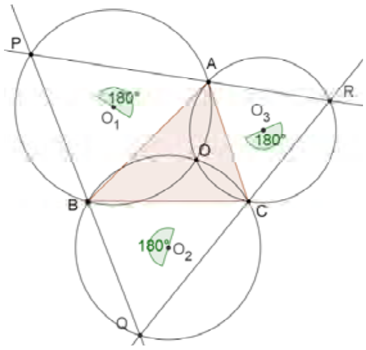


圖④

二、任給平面三點 A, B, C ，求通過這三點的正三角形？







解：以 ΔABC 的 $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ 兩邊分別做正三角形 $\Delta ABC', \Delta ACB', \Delta BCA'$ ，假設 $\overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{AA'}$ 的交點為 O ，則 O 稱為 ΔABC 的費馬點，則有 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$

分別作 $\Delta OAB, \Delta OBC, \Delta OCA$ 之外接圓及圓心 O_1, O_2, O_3

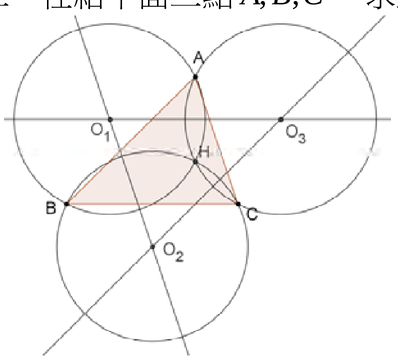
在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任選一點 P ，作 $\overline{PB}$ 交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 Q ，作 $\overline{QC}$ 交 $\overset{\frown}{CA}$ 於 R ，作 $\overline{RA}$ 交 $\overset{\frown}{AB}$ 於 P

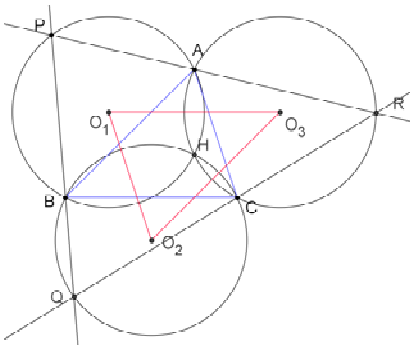
因 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$ 及共圓性質得 $\angle APB = \angle BQC = \angle CRA = 60°$

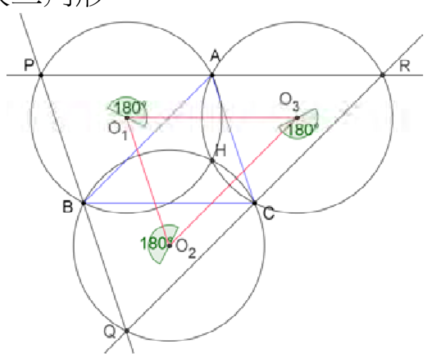
故 ΔPQR 為正三角形

由定理一知正三角形 PQR 的最大面積為 $\Delta O_1O_2O_3$ 面積的 4 倍；正三角形 QRP 的最大周長為 $\Delta O_1O_2O_3$ 周長的 2 倍

三、任給平面三點 A, B, C ，求通過這三點且與 ΔABC 相似的最大三角形







解：設H爲ΔABC之垂心，作$\overline{AH},\overline{BH},\overline{CH}$之中垂線，假設分別交於$O_1,O_2,O_3$，則$O_1,O_2,O_3$分別爲$\Delta ABH,\Delta BCH,\Delta ACH$之外接圓圓心

(1)$\overline{O_1O_2}$是$\overline{BH}$之中垂線，故

$\overline{O_1B}=\overline{O_1H}\Rightarrow\angle O_2O_1B=\angle O_2O_1H=\dfrac{1}{2}\angle BO_1H=\angle BAH$ ….①

$\overline{O_2B}=\overline{O_2H}\Rightarrow\angle O_1O_2B=\angle O_1O_2H=\dfrac{1}{2}\angle BO_2H=\angle BCH$ ….②

因$\overline{AH}\perp\overline{BC}$，故$\angle BAH+\angle B=90°$…③

因$\overline{CH}\perp\overline{AB}$，故$\angle BCH+\angle B=90°$…④

由③④得$\angle BAH=\angle BCH$…⑤

再由①②得$\angle O_2O_1H=\angle O_1O_2H$，故

ΔO_1O_2H爲等腰三角形，即$\overline{HO_1}=\overline{HO_2}$，同理$\overline{HO_2}=\overline{HO_3}$，故

$\Delta ABH,\Delta BCH,\Delta ACH,\Delta O_1O_2O_3$之外接圓爲等圓且$H$爲$\Delta O_1O_2O_3$之外心

(2)因爲等圓，所以由半徑所構成的四邊形BO_1HO_2、四邊形CO_3HO_2爲平行四邊形，故

$\overline{O_1B}\,//\,\overline{HO_2}\,//\,\overline{O_3C}$且$\overline{O_1B}=\overline{HO_2}=\overline{O_3C}$，所以四邊形$BO_1O_3C$爲平行四邊形，故$\overline{BC}=\overline{O_1O_3}$

同理$\overline{AB}=\overline{O_2O_3}$、$\overline{AC}=\overline{O_1O_2}$

所以$\Delta ABC\cong\Delta O_2O_3O_1$

(3)在$\overset{\frown}{AB}$上任選一點P，作$\overline{PB}$交$\overset{\frown}{BC}$於Q，作$\overline{QC}$交$\overset{\frown}{CA}$於R，作$\overline{RA}$交$\overset{\frown}{AB}$於P由共圓性質

得$\angle RPQ=180°-\angle AHB$….⑥

由⑤得$\angle BAH=\angle BCH$，同理$\angle ABH=\angle ACH$

故$\angle BCA=\angle BCH+\angle ACH=\angle ABH+\angle BAH=180°-\angle AHB$…⑦

由⑥⑦得$\angle RPQ=\angle BCA$，同理$\angle PQR=\angle BAC$、$\angle PRQ=\angle ABC$

故ΔPQR相似於ΔCAB

由定理一知三角形PQR的最大面積爲$\Delta O_1O_2O_3=\Delta ABC$面積的 4 倍；正三角形$QRP$的最大周長爲$\Delta O_1O_2O_3=\Delta ABC$周長的 2 倍

柒、結論

一、給定軸上四點$A(2a,0),B(0,2b),C(2c,0),D(0,2d)$，其中$a,b>0,c,d<0$，若$PQRS$爲通過$A,B,C,D$的矩形，則

(一)$PQRS$有最大面積$4|(a-c)(b-d)|$　(二)$PQRS$有最大周長$4(|a-c|+|b-d|)$

二、給定軸上三點 $A(2a,0),B(0,2b),C(2c,0)$ 及不在軸上一點 $D(2t,2d)$ ，其中 $a,b>0,c,d<0$ ，若 $PQRS$ 爲通過 A,B,C,D 的矩形，則 $PQRS$ 有最大面積 $2|a-c||b-d|+2|a-c|\sqrt{t^2+(b-d)^2}$

三、任給平面相異四點其中任三點不共線，若此四點可圍成凸多邊形，可求得通過這四點的最大矩形。

四、任給平面不共線相異三點，可求得通過這三點的最大正三角形。

五、任給平面不共線相異三點，可求得通過這三點且與原三角形相似的最大三角形。

六、給定空間坐標軸上六點 $A(2a,0,0),B(0,2b,0),C(2c,0,0),D(0,2d,0),E(0,0,2e),F(0,0,2f)$ ，其中 $a,b,e>0,b,c,f<0$ 。若有一長方體通過軸上六點 A,B,C,D,E,F ，則此長方體有最大體積 $8|a-c||b-d||e-f|$

捌、參考資料及其他

一、高中必修數學第一冊第二章多項式函數、第三冊第一章三角、第二章直線與圓、第三章平面向量。

二、平面幾何中的小花。單墫著。上海教育出版社。

三、https://zh.wikipedia.org/zh-tw/垂心组

【評語】040414

1. 作者能清楚交待參考資料與研究內容之關聯性，顯示整體清晰之研究脈絡。
2. 作品有不錯的分析與歸納思維，但過多的研究目的與重點反而無法呈現具體主軸；另也無法交待彼此的關聯性。
3. 整體而言，作者們頗為用心，嘗試用幾何軟體來呈現研究內容使整體內容更具可讀性；但主體名稱不佳與教材無相關性，學術性與實用價值亦不高。