中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040413

翻滾吧，Σ！

學校名稱：雲林縣私立永年高級中學

作者：	指導老師：
高一　陳仲宇	黃鈺涵
高一　張元譯	陳尚民
高一　陳怡伶	

關鍵詞：高斯∑圖形、sketchup、mathtype

翻滾吧，$\sum$ ！以$\sum_{k=1}^{n}k^m$的形式導出幾何空間圖形與公式

摘要

這是一份關於$\sum_{k=1}^{n}k^m$的研究，研究過程中，我們希望能以幾何圖形來找出$\sum_{k=1}^{n}k^m$的規律，我們透過圖形的翻轉，使得圖形翻轉後每一格數字之和皆相同，在算出個數，即能求出$\sum_{k=1}^{n}k^m$的公式。

壹、研究動機

還記得，以前我們最常接觸到的就是一個看似繁瑣，但卻可以用簡單的方法求得答案，它就是 —— $1+2+3+4+\cdots\cdots+100$原先，我們只會慢慢地從1開始加到100才能算出答案5050，但是早在十八世紀，就已經有一位天才數學家「高斯」為我們找到了一個輕鬆的方法：第一個數與末尾的那個數相加，第二個數與末尾第二個數相加，第三個數與末尾第三個數相加，它們的和都是一樣的，都等於101，照此加下去，一共能取得50對這樣的數，所以用101乘以50，就能得到5050了。而我們也找到了類似的方法 —— 透過一維線段的翻轉，使數線上的每一點相加之後都能為相同的數，因此我們發現原來這並沒有想像中的艱深，甚至能用不到一半的時間算出正確答案，所以，我們更加努力地尋找與這相類似的數學題目，並且試圖以輕易的方法求解，終於，在高中第二冊的課本中，我們發現了$\sum$ 也能運用翻轉的方式⋯⋯。

貳、研究目的

光是只背$\sum$的公式還不夠，因為這並不能讓我們深刻地記住$\sum$，且好好地利用它來解決數學難題，我們希望能以更簡化的方式，或者是用一些圖形來表達我們對$\sum$的研究，然後經由我們的研究，我們希望能發現，其實$\sum$也可以很簡單，高中生們也能因此更清楚地了解$\sum$，並且善用它。

叁、研究器材與設備

一、 紙、筆、相機

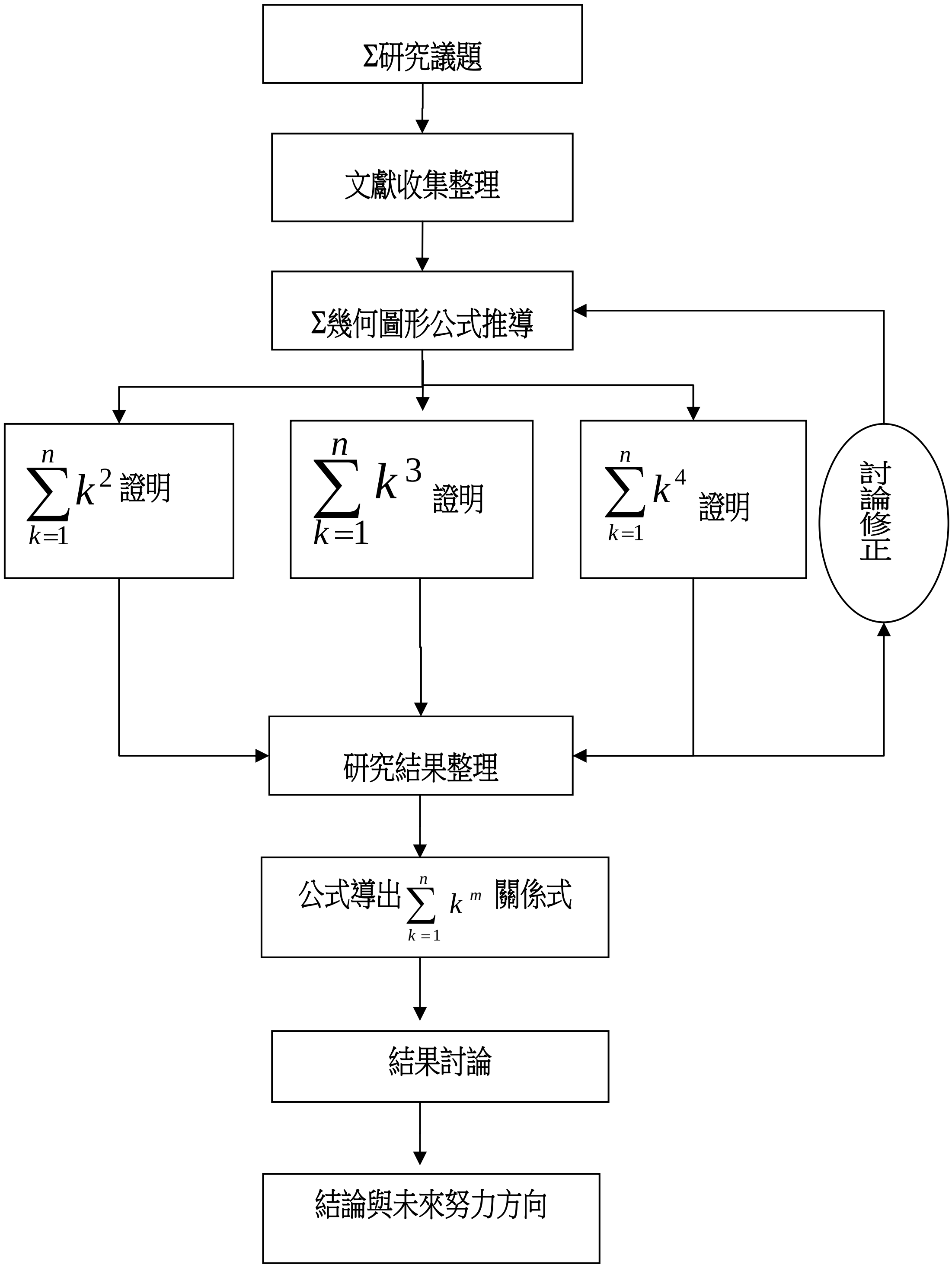
二、 繪圖軟體 sketchup

三、 數學方程式編輯軟體 mathtype

四、 幾何模型(本研究使用之幾何模型如下)

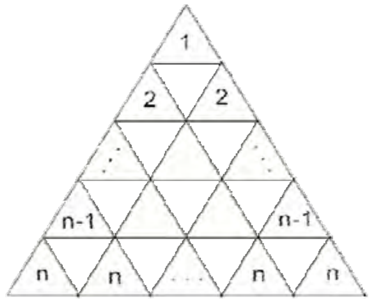
肆、研究過程與方法

一、研究流程



伍、研究過程

一、$\sum_{k=1}^{n} k^2$ 證明

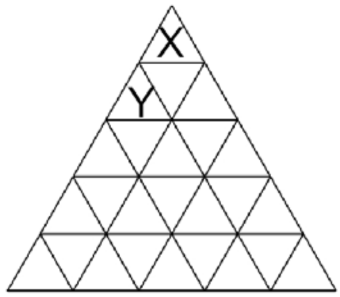


圖<1> 以幾何表示 $\sum_{k=1}^{n} k^2$

我們可以試著用圖形來表達。將數字以堆疊的方式，表示$\sum_{k=1}^{n} k^2$

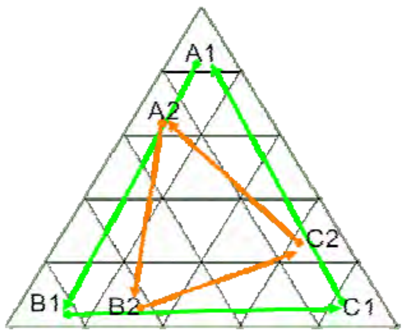
如圖<1>，在第n階中能用n個n加起來代表n的平方。這些數字堆疊起來為三邊長皆為n的正三角形。

我們可以算出總共有$\sum_{k=1}^{n} k$個位置，但每一階所代表的數字皆不同，無法輕易算出總和，我們必須想一個辦法使每一階的數字一樣，



圖<2>位置標上符號

首先，我們先把圖<1>標上符號，如圖<2>、<3>。圖<2>的X位置原本為圖<3>中的A_1，將圖<3>順時針旋轉120°後 B_1會在X的位置，再次順時針旋轉120°後C_1會在X的位置，所以X的位置的和為$A_1+B_1+C_1$，Y位置總和則為$A_2+B_2+C_2$。



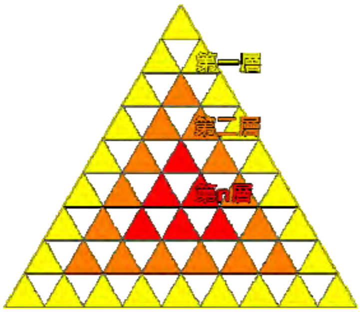
圖<3>同一層的不同位置

因為$A_2=A_1+1$；$B_2=B_1$；$C_2=C_1-1$；所以

$$A_2+B_2+C_2=(A_1+1)+B_1+(C_1-1)=A_1+B_1+C_1$$

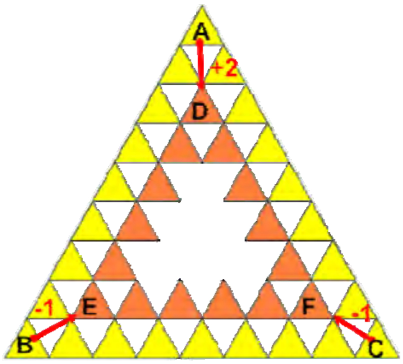
由此推論$A_n+B_n+C_n=\left[A_1+(n-1)\right]+B_n+\left[C_1+(n-1)\right]=A_1+B_1+C_1$,

看到圖<4>，我們以證明第一層中$A_n+B_n+C_n=A_1+B_1+C_1$，也就是最外層中每個位置的數字都等於三個頂點相加。



圖<4>同一層的不同位置

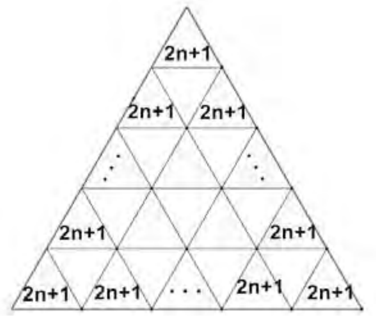
接著要探討<4>中不同層之間的關係,我們先取第一層和第二層，如圖<5>。因為A在第一階，D在第三階，可知D比A多2；B在第n階，E在第$n-1$階，可知E比B少1；因為C在第n階，F在第$n-1$階，可知F比C少1。所以第二層的總合為$D+E+F=(A+2)+(B-1)+(C-1)=A+B+C$。



圖<5>兩層三角形

將全部的圖形繪出後呈現圖<6>，是一個所有位置皆相等的圖形。

在原本的圖<2>中，一共有$\sum_{k=1}^{n}k$個$2n+1$。把個數乘上$2n+1$，可表示為圖<2>的和，但這是三個圖<1>旋轉後的和，最後我們要把3除回去，即可算出圖<1>的總和。



圖<6> 旋轉後相加

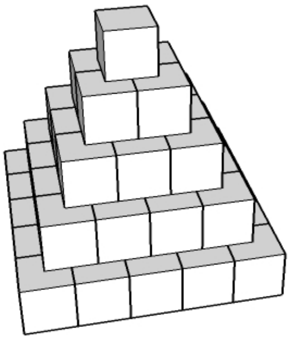
得到的公式為：

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{\left[n(n+1)(2n+1)\right]}{6}$$

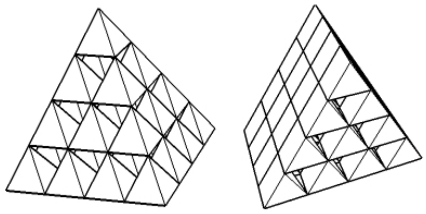
二、$\sum_{k=1}^{n} k^3$ 證明

我們試以圖形表示$\sum_{k=1}^{n} k^3$如圖<7>，用n^2個數字n代表第n層。

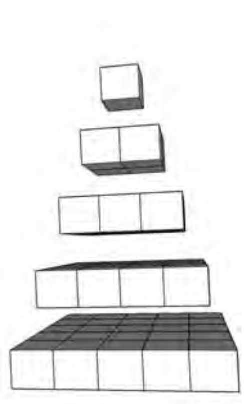
如果把單位正方體換成單位四角錐來思考，圖<8>即為一個四角錐。因為翻轉後



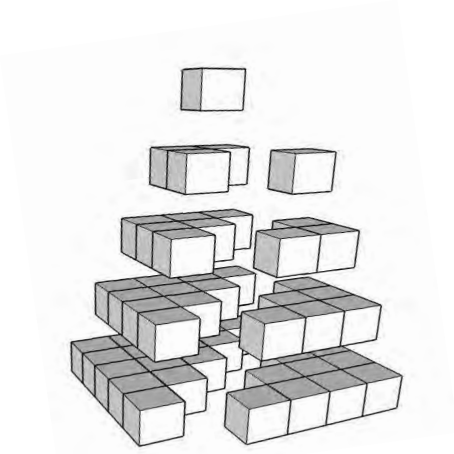
圖〈7〉以幾何表達



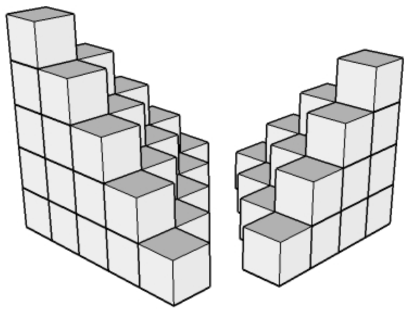
圖〈8〉轉換成四角錐



圖〈9〉分層觀察



圖〈10〉每一層切開



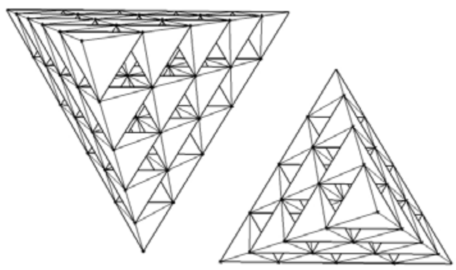
圖〈11〉分開後疊合

的數字無法找到對應的位置，所以四角錐並無法翻轉。若要可以翻轉，必須使翻轉後的圖形之形狀和翻轉前相同，必須使用正n面體，數字才能找到對應的位置，所以，我們將四角錐轉換成三角錐(正四面體)。

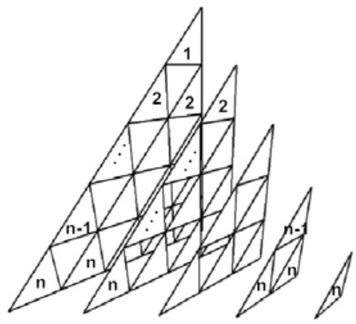
我們將圖<7>分層來看，得到圖<9>，圖中的每一層都是正方形，正方形可以切割

成兩個階梯形，如圖<10>，並分別把大小兩個圖形組合起來後得到圖<11>。

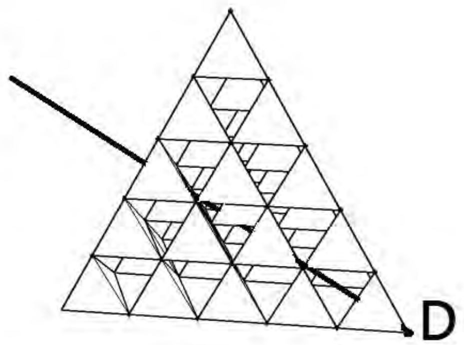
再把單位正方體換成單位三角錐，如圖<12>。我們分別來討論這兩個角錐。我們先取較大的三角錐，如果我們從分開來看，會發現它是很多三角形組合成的圖形，如圖<13>。



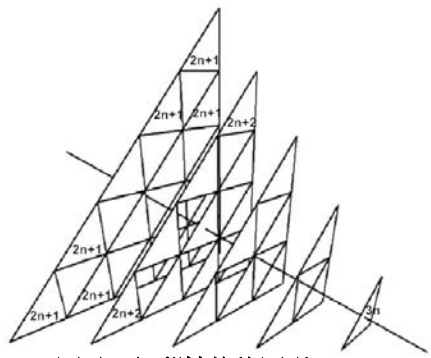
圖〈12〉轉換為三角錐



圖〈13〉分開看



圖〈14〉過D一軸線



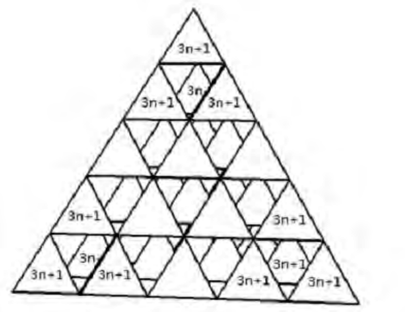
圖〈15〉翻轉後的圖形

以圖<14>的D點和對面三角形的外心的連線作為軸，往逆時針旋轉120°度兩次。依據$\sum_{k=1}^{n} k^2$公式的證明，翻轉後，我們得到圖<15>。

我們翻轉的目的是使每個單位三角錐上的數字相同，但翻轉後得到的圖形每一層間的數字卻不相同。觀察後發現，數字大小會從D點往對面的三角形移動而遞減。

因此只要將頂點往 D 點翻轉，便可使三角錐上的每一個數字皆為(3n+1)如圖<16>。

三維角錐內單位角錐的個數可視為第一層加第二層加到第 n 層的個數之總和，所以此圖一共有 $\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k$ 個單位三角錐，所以總和為 $(3n+1)\times\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$ 但因為那是 4 個三角錐的和，所以要把「4」除回去，可得到的和為 $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{4\times 3!}$。



圖〈16〉最後的圖形

另一個三角錐的每一單位為($3n+2$)，而一共有 $\sum_{n_2=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n_2}k$ 個，所以總和為 $\frac{(3n+2)\times(n-1)\times n\times(n+1)}{4\times 3!}$ 。

再來，把兩式相加並化簡，過程如下：

$$\frac{n\times(n+1)\times(n+2)\times(3n+1)}{4\times 3!}+\frac{(3n+2)\times(n-1)\times n\times(n+1)}{4\times 3!}$$

$$=\frac{n(n+1)}{4\times 3!}\left[(n+2)(3n+1)+(3n+2)(n-1)\right]$$

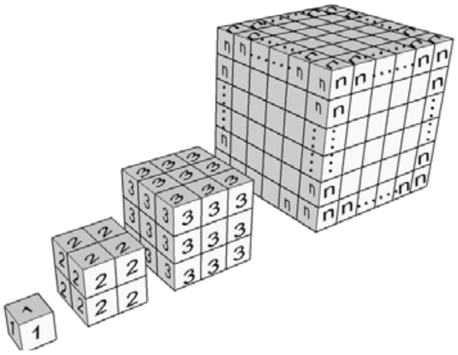
$$=\frac{n(n+1)}{4\times 3!}\left[(3n^2+7n+2)+(3n^2-n-2)\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{4\times 3!}\times(6n^2+6n)$$

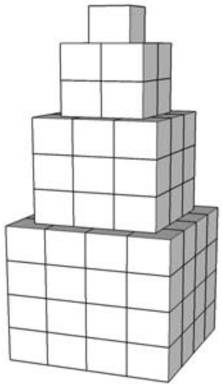
$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

三、$\sum_{k=1}^{n} k^4$ 證明

我們試著排列出的圖形，第n層必須以n^3個n來排列，如圖<17>。我們無法將每一層排列成階梯狀，如圖<18>。我們必需將圖<17>排列成階梯狀，以利之後的翻轉。但不管如何排列，都無法形成正確的圖形。



圖〈17〉以幾何表示$\sum^{n} k^4$



圖〈18〉疊起來

如果二次方需要二維圖形，三次方則需要三維圖形，那麼四次方需要應該是四維圖形。

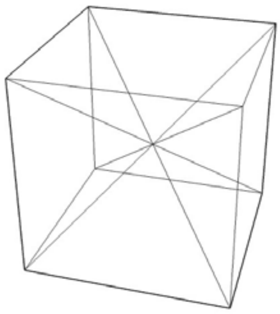
圖〈19〉超正方體投影圖

由於我們生活的空間只有三維度，無法直接畫出四維的圖形，若要畫出四維，必須先將四維的圖「投影」到三維。我們可以利用投影，將四維畫出來。

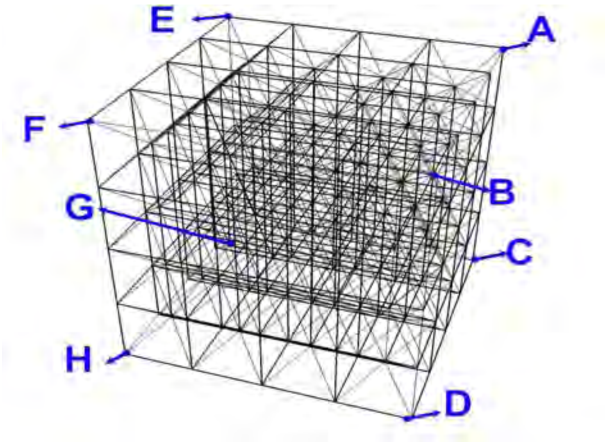
我們先從一個最小的單位開始。首先看到圖<19>，圖<19>是一個超正方體投影到三維後的圖形，四維中超正方體相當於三維中的正方體，因此我們可以效法三維，將

超正方體轉換，轉換後的圖形如圖<20>。在下文中，我們稱此種圖形為「角錐」。

將每一層往 w 軸的方向排列，得到圖<21>，形成一個底面為正六面體，另外六個面為三角錐的圖形。

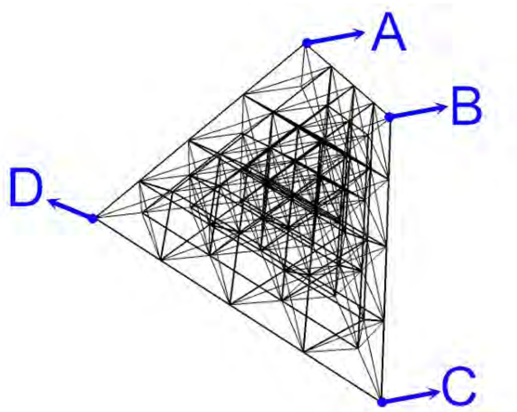


圖〈20〉轉換後的角錐



圖〈21〉疊合呈現

由於「三維」對於「四維」就如同「二維」 對於「三維」，所以「三維」在「四維」中，就像一個面，因此我們之後便以「面」來稱呼「四維」體上的一個「三維」體。

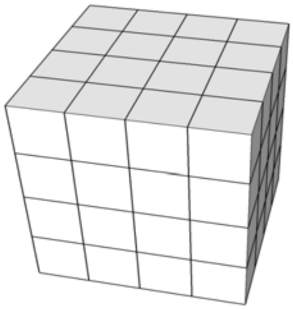


圖〈22〉可翻轉的圖形

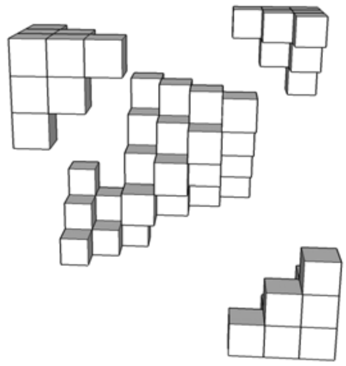
參考 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 證明，將圖形轉換成角錐後，無法直接翻轉，若要逕行翻轉必須使用正 n 面體，所以必須將圖形轉換成每個面都相同而且都是三維正四面體的四維圖形，如圖<22>，但我們排列出的是底面為正方體的角錐，所以我們必須將圖<21>轉換成我們需要的圖形。

若我們將底面和平行於底面的每一層正方體轉換為數個正四面體，在將切割後的

圖形疊合，就能排列出可翻轉的圖形，先看其中一個截面圖<23>，我們試著將其切割，首先切下四個角如圖<24>，但正中間剩餘的部份無法再切割，我們必須另一個方法。

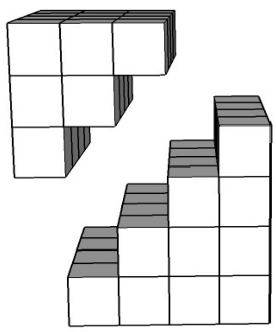


圖〈13〉截面



圖〈24〉切割後的圖形

其實不一定要用「切割」，我們最主要的目的是排列出「底面為正四面體的角錐」，只要超正方體數目相同，過程如何進行並不會造成任何影響，我們亦可視為拆開再重新組合。



圖〈25〉正方體拆解

一個邊長為 n 的三維三角錐中有 $\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k$ 個單位三角錐。由於我們排列出來的圖形每一個截面都是正方體，我們可用二維切割公式將正方體可以拆成兩個三角柱如圖<25>，若正方體的邊長為 n，三角柱中的底面各有 $\sum_{k=1}^{n}k$，$\sum_{k=1}^{n-1}k$ 個正方體，高為 n，正方體的個數分別為 $n\times\sum_{k=1}^{n}k$ 和 $n\times\sum_{k=1}^{n-1}k$。可利用下列的公式將一個三角柱分別再拆成三個三角錐。

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

$$3\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k=\left(n+2\right)\left[\frac{n(n+1)}{2!}\right]$$

$$1\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k+2\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k=\left(n+2\right)\sum_{k=1}^{n}k$$

①

$$1\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k+2\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k=n\sum_{k=1}^{n}k+2\sum_{k=1}^{n}k$$

$$1\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k+2\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{m}k=n\sum_{k=1}^{n}k$$

②

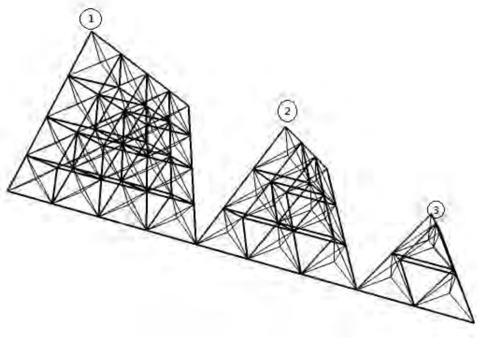
$$1\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k+2\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k=\left(n+1\right)\sum_{k=1}^{n}k+1\sum_{k=1}^{n}k$$

$$1\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{m}k+2\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k=\left(n+1\right)\sum_{k=1}^{n}k$$

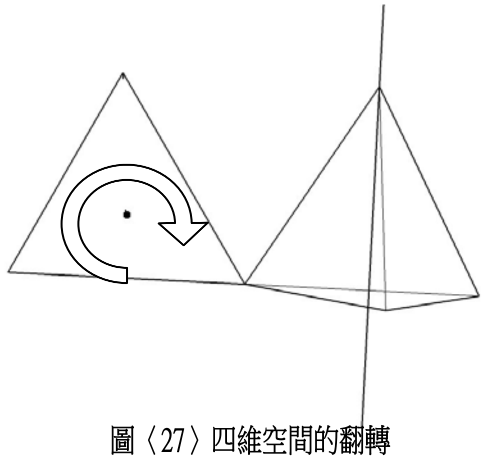
我們所切割出的圖形分別為是體積為$n\times\sum_{k=1}^{n}k$及$n\times\sum_{k=1}^{n-1}k$的三角柱，將n帶入式①，可得到三個三角錐，分別為一個體積$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k$的三角錐及兩個體積$\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{m}k$的三角錐，將$\left(n-1\right)$帶入式②也可以得到三個三角錐，分別為兩個體積$\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{m}k$的三角錐及一個體積$\sum_{m=1}^{n-2}\sum_{k=1}^{m}k$的三角錐。

但所切割出來的三角錐大小都不同，為了分辨不同的三角錐，我們以三角錐最上層的數字來命名不同的三角錐。如圖<26>，頂層為1的三角錐命名為①型、頂層為2則命名為②型，依此類推。我們切割出來的圖形分別為①、②、②及②、②、③。

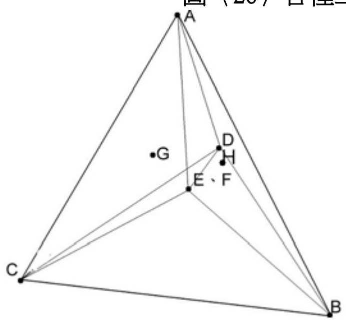
如圖<27>，二維圖形繞著一個點旋轉；三維圖形可視為無窮多的二維圖形疊合，



圖〈26〉各種三角錐



圖〈27〉四維空間的翻轉



圖〈28〉頂點和外心

三維圖形翻轉時就如同繞著無窮多的點疊合所形成的軸旋轉，四維圖形可視為無窮多的三維圖形疊合，四維圖形旋轉時就如同繞著無窮多的線疊合所形成的面翻轉。

只要三點不共線，就可以構成一個平面，所以可用三個點表示一個平面。圖<28>，$A \sim E$ 為此圖的頂點，F 點為此圖形的外心（E 點與 F 點看起來較接近是因為此圖投影的關係）。四維三角錐的旋轉可視為許多三維的三角錐旋轉後疊合，我們已看過三維的三角錐翻轉了，使用相同的方法翻轉後(先繞著面 DGF 轉三次及繞著面 EGF 轉一次)可得到每一層分別相同的圖形，如圖<28>，數字由三角錐 $ABCD$ 往 E 點遞增，將頂點翻往 E 點(繞著面 AHF 轉)即可使每一層數的字相等。

旋轉完畢後的圖形中每個單位三角錐所代表的數字分別是

①型角錐為 n+n+n+n+1=4n+1，

②型角錐為 n+n+n+n+2=4n+2

③型角錐為 n+n+n+n+3=4n+3

①裡的單位三角錐的個數為$\sum_{m=1}^{n}\sum_{o=1}^{m}\sum_{k}^{o}k$，將位三角錐的數字乘以個數再除以5（因為這是5個三角錐加起來的圖形），得到式$\frac{4n+1}{5}\times\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$

②裡的單位三角錐的個數為$\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{o=1}^{m}\sum_{k}^{o}k$，將位三角錐的數字乘以個數再除以5，得到式$\frac{4n+2}{5}\times\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4!}$。因為②型三角錐有四個，所以總數要再乘以4，因此得到式$4\times\frac{4n+2}{5}\times\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4!}$

③裡的單位三角錐的個數為$\sum_{m=1}^{n-2}\sum_{o=1}^{m}\sum_{k}^{o}k$，將位三角錐的數字乘以個數再除以5，得到式$\frac{4n+3}{5}\times\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4!}$

最後將三種角錐相加得到式

$$\frac{(4n+1)}{5}\times\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}+4\times\frac{(4n+2)}{5}\times\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4!}+\frac{(4n+3)}{5}\times\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)}{5\times4!}\left[(4n+1)(n+2)(n+3)+(16n+8)(n-1)(n+2)+(4n+3)(n-2)(n-1)\right]$$

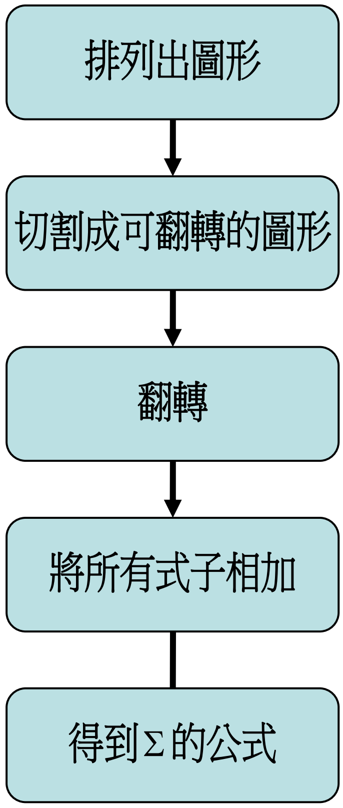
$$=\frac{n(n+1)}{5\times4!}\left[24n^3+36n^2+4n-4\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{5\times4!}\left[4(2n+1)(3n^2+3n-1)\right]$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

陸、討論

一、$\sum_{k=1}^{n} k^m$ 證明方式



流程圖<2>

之前已推導過Σ $2 \sim 4$ 次方的公式，可利用相同的模式將Σ推廣到 m 次方，如流程圖<2>。

首先，先將 n^m 拆成 $n^{m-1} \times n$，也就是第 n 層是邊長為 n 的 $m-1$ 維正方體，再將每一個正方體組合起來，即可得到一個 m 維的角錐。例如 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 的圖形為每一層皆為 n^1 的線段(一維)所組成的三角形(參考 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 證明)；$\sum_{k=1}^{n} k^3$ 的圖形為每一層皆為 n^2 的正方形所組成的四角錐（參考 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 證明）。

如同 $2 \sim 4$ 次方，m 次方也需要將圖形切割成可翻轉的階梯形，以式子表達為 $\sum_{n_2=1}^{n} \sum_{n_3=1}^{n_2} \cdots \sum_{k=1}^{n_{m-1}} k$。

我們先了解 $\sum_{n_2=1}^{n} \sum_{n_3=1}^{n_2} \cdots \sum_{k=1}^{n_{m-1}} k$ 的值。

假設 $m = 1$

因為 $n_{m-1} = n_0$，n_0 不存在，所以 m 的值不能等於 1

假設$m=2$

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2!}$$

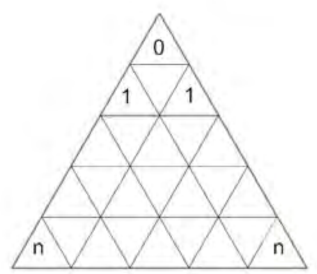
假設$m=3$

$$\sum_{n_2=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_2} k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2!}$$

$$=\frac{(0\times1)+(1\times2)+(2\times3)+\cdots+[n\times(n+1)]}{2!}$$

$$=\frac{1}{2!}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$可視為1個0加2個1加3個$2\cdots$加$n+1$個n，如圖<29>方式排列，可得到一個三角形，將此三角形旋轉後相加，可得到每一個單位三角形所代表的數字均為$2n$的圖形，因為翻轉後的圖形是三個圖<25>的和，所以要除以3。圖中的單位三角形的個數為$\sum_{k=1}^{n+1} k$，因此可用下列式子表達圖中數字的總和



圖〈29〉$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$圖形

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)\times\left(\frac{2n}{3}\right)$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\times\frac{2n}{3}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

將$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$帶入$\sum_{n_2=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_2} k=\frac{1}{2!}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

得到$\sum_{n_2=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_2}k=\frac{1}{2!}\times\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$$\sum_{n_2=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_2}k=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

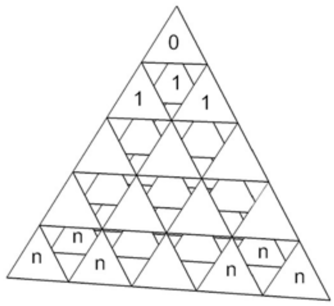
設$m=4$

$$\sum_{n_2=1}^{n}\sum_{n_3=1}^{n_2}\sum_{k=1}^{n_3}k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(k+2)}{2}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(k\times\sum_{k_2=1}^{k+1}k_2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(0\times\sum_{k=1}^{1}k+1\times\sum_{k=1}^{2}k+2\times\sum_{k=1}^{3}k+\cdots n\times\sum_{k=1}^{n+1}k\right)$$



圖〈30〉 $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$三角錐

$\sum_{k=0}^{n}\left(k\times\sum_{k_2=1}^{k+1}k_2\right)$可視為$\sum_{k=1}^{1}k$個$0$加$\sum_{k=1}^{2}k$個$1$加$\sum_{k=1}^{3}k$個$2\cdots$加$\sum_{k=1}^{n+1}k$個$n$，如圖<30>方式排列，可得到一個三角錐，將此三角錐翻轉後相加，可得到每一個單位三角錐所代表的數字均為$3n$的圖形，因為翻轉後的圖形是四個圖<30>的和，所以要除以4。圖中的單位三角錐的個數為$\sum_{n_2=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n_2}k$，因此可用下列式子表達圖中數字的總和

$$=\frac{3n}{4}\times\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4\times 2!}$$

將$\sum_{k=0}^{n}\left(k\times\sum_{k_2=1}^{k+1}k_2\right)$帶入式$\frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(k\times\sum_{k_2=1}^{k+1}k_2\right)\right]$

得到$\sum_{n_2=1}^{n}\sum_{n_3=2}^{n_2}\sum_{k=1}^{n_3}k=\frac{1}{3}\times\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4\times 2!}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$

表(一)、觀察$m=2\sim 4$的結果

m	公式(1)	公式(2)
2	$\frac{n(n+1)}{2!}$	C_2^{n+1}
3	$\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$	C_3^{n+2}
4	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$	C_4^{n+3}

藉由上表，可觀察出m維角錐的規律為C_m^{n+m-1}

證明:假設m為任意數

可藉由遞回關係$C_m^{n+m-1}=\sum_{k=1}^{n}C_{m-1}^{k+(m-1)-1}$證明$m$為任意數時$m$維角錐的公式

C_m^{n+m-1}皆會成立

上述的m維角錐公式只限定在①型角錐，將$n-1$帶入即可得到②型角錐的公式

為$C_m^{(n-1)+m-1}$，ⓧ型的角錐則為$C_m^{(n-x+1)+m-1}=C_m^{n+m-x}$

已找出三角錐的規律，接下來就是切割，參考上一章節的四維切割，第一次切割

將正方體分為兩個三角柱，可用公式切割，再將切割後的圖形疊合。下列是切割時需

要用到的公式。

m維切割公式:

$$C_m^{n+m-1}=\frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)}{m!}$$

$$m\times C_m^{n+m-1}=(n+m-1)\frac{n(n+1)\cdots(n+m-2)}{(m-1)!}$$

$$m\times C_m^{n+m-1}=(n+m-1)\times C_{m-1}^{n+m-2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&n\times C_{m-1}^{n+(m-1)-1}=1\times C_m^{n+m-1}+(m-1)\times C_m^{(n-1)+m-1}\\
&(n+1)\times C_{m-1}^{n+(m-1)-1}=2\times C_m^{n+m-1}+(m-2)\times C_m^{n-1+m-1}\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\\
&(n+m-2)\times C_{m-1}^{n+(m-1)-1}=(m-1)\times C_m^{n+m-1}+1\times C_m^{(n-1)+m-2}
\end{aligned}}$$

m維切割公式會隨著m的值不同而改變，且m維切割會有$m-1$個公式，所以切割公式為一組公式，並非一個。

假設要切割的圖形為m維n層正方體，第一步是將n^m視為$n^{m-2}\times n^2$，並將$n^{m-2}\times n^2$帶入2維切割公式，切割後的圖形為

$$n^m=n^{m-2}\times C_2^{n+2-1}+n^{m-2}\times C_2^{(n-1)+2-1}$$

$$n^{m-2}\times C_2^{n+2-1}=n^{m-3}\times n\times C_2^{n+2-1}$$

$$n^{m-2}\times C_2^{(n-1)+2-1}=n^{m-3}\times n\times C_2^{(n-1)+2-1}$$

再分別將$n^{m-3}\times n\times C_2^{n+2-1}$和$n^{m-3}\times n\times C_2^{(n-1)+2-1}$帶入3 維切割公式，依此類推，直到所有圖形體積皆為C_m^{n+m-x}。

以 $m=5$ 為例並將截面 n^4 帶入

$$n^4 = \boxed{n^2\times C_2^{n+2-1}} + \boxed{n^2\times C_2^{(n-1)+2-1}}$$

$$n^2\times C_2^{n+2-1} = \boxed{1\times n\times C_3^{n+3-1}} + \boxed{2\times n\times C_3^{(n-1)+3-1}}$$

$n\times C_3^{n+3-1} = C_4^{n+4-1} + 3\times C_4^{(n-1)+4-1}$ ：①②②②

設 $k=n-1$　$2\times\left[(k+1)\times C_3^{k+3-1}\right] = 2\times\left[2\times C_4^{k+4-1} + 2C_4^{(k-1)+4-1}\right]$ ：(②②③③)×2

$$n^2\times C_2^{(n-1)+2-1} = \boxed{2\times n\times C_3^{(n-1)+3-1}} + \boxed{1\times n\times C_3^{(n-2)+3-1}}$$

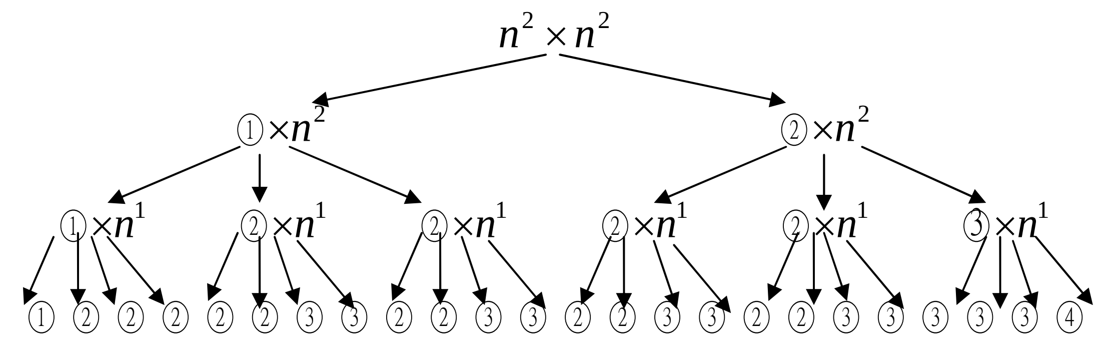
設 $k=n-1$　$2\times\left[(k+1)\times C_3^{k+3-1}\right] = 2\times\left[2\times C_4^{k+4-1} + 2C_4^{(k-1)+4-1}\right]$ ：(②②③③)×2

設 $k=n-2$　$(k+2)\times C_3^{k+3-1} = 3\times C_4^{k+4-1} + 1C_4^{(k-1)+4-1}$ ：(③③③④)

我們切割出來的圖形為

①②②②、②②③③、②②③③、②②③③、②②③③、③③③④。

①×1＋②×11＋③×11＋④×1



圖〈44〉角錐圖形公式

第一步驟是將 n^4 視為 n^2 個 n^2。我們可將 n^2 切割成兩個圖形，分別是①×n^2 和②×n^2。第二個步驟將①×n^2 和②×n^2 分別切割成三個圖形。

觀察此圖可發現底面是 $m-1$ 維的①型角錐且高為 n 的圖形，只可切割出一個

m維的①型角錐，其餘的圖形皆為②型。底面是$m-1$維的②型角錐且高為n的圖形則可切割出兩個m維②型的角錐，其餘的皆為③型…。藉由此規律推論出底面是$m-1$維的x型角錐可切割出x個m維x型角錐，其餘的圖形皆為$x+1$型。

表(二)、可利用下表表達出各種三角錐的個數

	①	②	③	④
n^1	1	0	0	0
n^2	1	1	0	0
n^3	1	4	1	0
n^4	1	11	11	1

依照此規律推出n^5：

①$=1\times1=1$

②$=1\times(5-1)+11\times2=26$

③$=11\times(5-2)+11\times3=66$

④$=11\times(5-3)+1\times3=26$

⑤$=1\times(5-4)=1$

$n^5=1\times$①$+26\times$②$+66\times$③$+26\times$④$+1\times$⑤

得到表(三)

表(三)、計算結果

	①	②	③	④	⑤
n^5	1	26	66	26	1

其餘的數字可查詢表(四)

二次方的①型圖形旋轉後會得到每一個單位三角形皆為$n+n+1$（三個頂點相加）的圖形；三次方①型經翻轉後得到每一個單位三角錐皆為$n+n+n+1$的圖形（四個頂點相加）；圖形翻轉相加後每一個單位三角錐中的數字皆為圖形中所有頂點相加，m次方①型的圖形翻轉後會得到$n+n+n+\cdots n+1=m\times n+1$；$m$次方②型則是$n+n+n+\cdots n+2=m\times n+2$，所以$m$次方ⓧ型的圖形翻轉後會得到$n+n+n+\ldots+n+x$

將每一格所代表的數字乘以單位三角錐的個數除以翻轉次數即可得到整個角錐中所有數字的和。將全部的圖形成以個數後相加後就能得到$\sum_{k=1}^{n}k^m$的公式。

我們先以$m=2$和$m=4$為例來推導出$\sum_{k=1}^{n}k^2$和$\sum_{k=1}^{n}k^4$的公式

設 $m=2$

$\sum_{k=1}^{n} k^2$ 的截面是一維的圖形，所以要參考表格中的 n^1

表格(參考附錄)	①
n^1	$\boxed{1}$

$1\times\frac{2n+1}{3}\times C_{2}^{n+2-1}$ 將表格的數字帶入

$$=\frac{2n+1}{3}\times\frac{n(n+1)}{2!}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

設 $m=4$

表格(參考附錄)	①	②	③
n^3	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$

$$1\times\frac{4n+1}{5}\times C_{4}^{n+4-1}+4\times\frac{4n+2}{5}\times C_{4}^{(n-1)+4-1}+1\times\frac{4n+3}{5}\times C_{4}^{(n-2)+4-1}$$

$$=\frac{4n+1}{5}\times\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}+4\times\frac{4n+2}{5}\times\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4!}+\frac{4n+3}{5}\times\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4!}$$

我們將 $m\otimes x$ 定義為表(四)的第 m 行第 x 列的數字，例如

$1\otimes 1=1$

$5\otimes 3=66$

$\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的公式即為

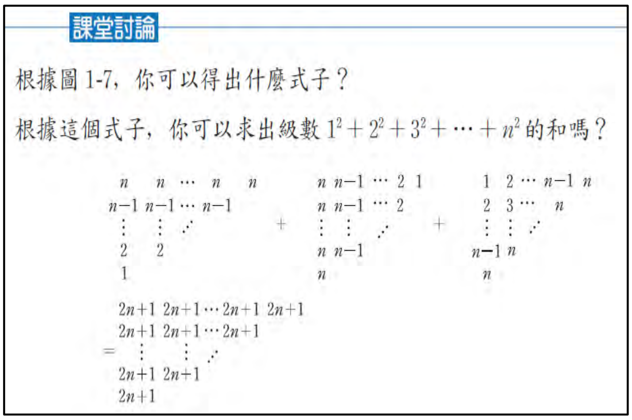
$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{k=1}^{m} \left[(m-1) \otimes k \right] \times C_m^{n+m-k}$$

表(四) $m = 1 \sim 10$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	11	11	1	0	0	0	0	0	0
5	1	26	66	26	1	0	0	0	0	0
6	1	57	302	302	57	1	0	0	0	0
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0	0	0
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	0	0
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	0
10	1	1013	47840	455192	1310354	1310354	455192	47840	1013	1

柒、結論

在此次研究中，我們以高中的數學課本為基礎，先將 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 畫成圖形，以翻轉的方式，使得每一格的數字皆相同，並且推導出 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 的公式。接著，在本次的研究過程中，我們也想出了原來 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 也能以圖形 —— 四角錐，推導出公式，我們先將四角錐切割成三角錐，同樣地，我們也藉著翻轉的方式，將每一格的數字也變成相同的數，並且推導出公式。之後的 $\sum_{k=1}^{n} k^4$ ，我們更運用「四維空間」畫出圖形，轉化成了公式，並且找出規律。最後，我們以 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 作為結尾，我們運用規律，計算出了公式，雖然我們並無法準確地畫出 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的圖形，但我們仍能以現有的知識，推導出 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的公式。藉由本次的研究，我們得以更加清楚的了解 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ ，並且從研究中獲得極大的樂趣。


課堂討論

根據圖 1-7，你可以得出什麼式子？

根據這個式子，你可以求出級數 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的和嗎？

$$\begin{array}{lllll} n & n & \cdots & n & n \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ 2 & 2 & & & \\ 1 & & & & \end{array} + \begin{array}{lllll} n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ n & n-1 & & & \\ n & & & & \end{array} + \begin{array}{lllll} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ n-1 & n & & & \\ n & & & & \end{array}$$

$$= \begin{array}{lllll} 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ 2n+1 & 2n+1 & & & \\ 2n+1 & & & & \end{array}$$

圖〈31〉課本範例

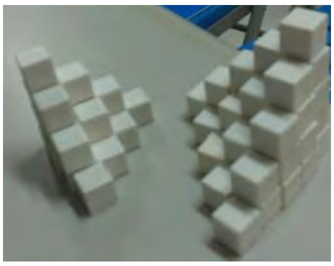
捌、參考文獻

一、林福來、陳創義等(2013)，高中數學第二冊，課本，南一書局，台南。

二、余秉勤、劉捷(2007)，「三維軟件 Sketchup 創意的思索」，武漢工程職業技術學院學報，十九卷，第三期，第 24-28 頁。

三、維基百科「四維空間」(2013/1/2)，https://zh.wikipedia.org/wiki/

玖、附錄

		
		
研究過程中計算後實際堆疊模型驗證		

【評語】040413

本作品藉由幾何分割圖形，依序求 k^2，k^3，k^4，...，k^n 和的公式。對 k^2 之和，方法巧妙，對中學生理解 k^2 和的公式有不小幫助。只是隨著 n 之增大，求 k^n 和的分割圖形公式，恐怕不容易理解。若能推導出更易理解的方法，此作品將更有價值。