中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第三名

040412

平方數列

學校名稱：國立彰化高級中學

作者：	指導老師：
高二 王建旻 高二 石佳鎧 高二 賴秉政	龔詩尹

關鍵詞：平方數列、平方項鍊、Pell Equation

摘要

本研究探討的主題是：給定正整數 n，是否存在 $1\sim n$ 的重排數列，使得「相鄰兩項之和都是平方數」。對於滿足上述條件的數列，我們稱其為平方數列，我們探討哪些 n 使得 $1\sim n$ 可排成平方數列。對於某類的正整數 n，我們已找到構造平方數列的方法：

1. 若正整數 a,b,c 及 $k=0,1,2,4$ 滿足 $a>b$，$a^2+b^2-k=c^2$ 且 $(a^2-k\ ,\ b^2-k)=1$，則 $1\sim a^2-k$ 可排成平方數列。

2. 若正整數 a,b,c,α,β 滿足 $a>c>b$ ，$b^2+c^2=\alpha^2$ ，$a^2+c^2=\beta^2$ 且 $(a^2-b^2\ ,\ c^2)=1$，則 $1\sim a^2-1$ 可排成平方數列。

再者，我們可以證明 $n=2$、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、18、19、20、21、22、24 時，$1\sim n$ 無法排成平方數列；藉由有效率的程式運算，我們得知 $n=15$、16、17、23 及 $n=25$、26、⋯、144 時，$1\sim n$ 可排成平方數列。

若平方數列的首尾兩項相加也是完全平方數時，我們將其定義為平方項鍊。我們造出 1~32 的平方項鍊，進而可知 1~32 排成平方數列的方法至少有 32 種。對於特定的 n，我們可將 $1\sim n$ 排成平方項鍊；而我們更證明出，$n=32$ 是可將 $1\sim n$ 排成平方項鍊的最小正整數。

壹、研究動機

在高一上專題課時，老師提及一道有趣的題目，出自於 2003 年 TRML 團體賽第七題，題目如下：

試將 $1\sim16$ 這 16 個數排成一列，使得相鄰兩項之和為完全平方數，且首項大於末項。

我們當時覺得驚訝！$1\sim16$ 是特例嗎？$1\sim17$ 可以嗎？哪些 n 可將 $1\sim n$ 排成相鄰兩項之和為平方數的數列（以下稱為平方數列）？在好奇心及好勝心的驅使下，展開研究的旅程！

貳、研究目的

一、找出哪些 n 可以將 $1\sim n$ 排成「平方數列」，並給出一般化的構造方法。

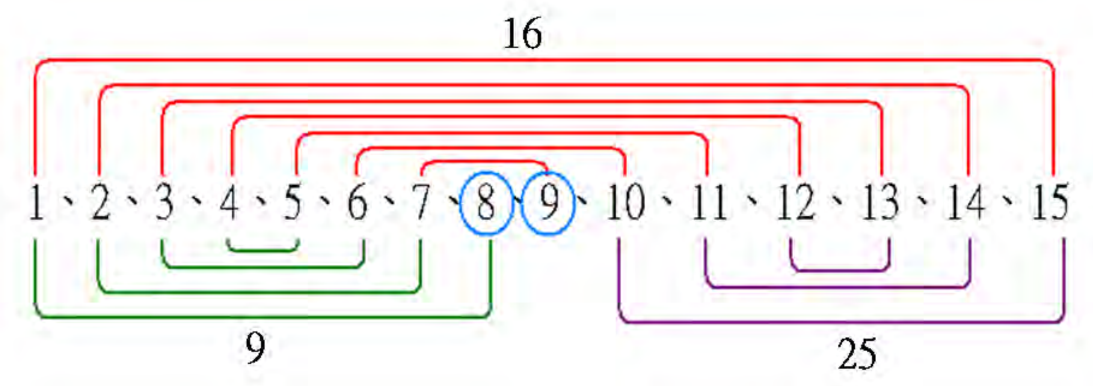
二、探討平方數列的排法是否唯一。

三、找出哪些 n 無法將 $1\sim n$ 排成平方數列。

參、研究過程及方法

一、1～15 排成平方數列

如下圖，我們將 1～15 由小到大排成一列，接著以線條連接特定二數，使其和爲平方數 9、16 或 25。



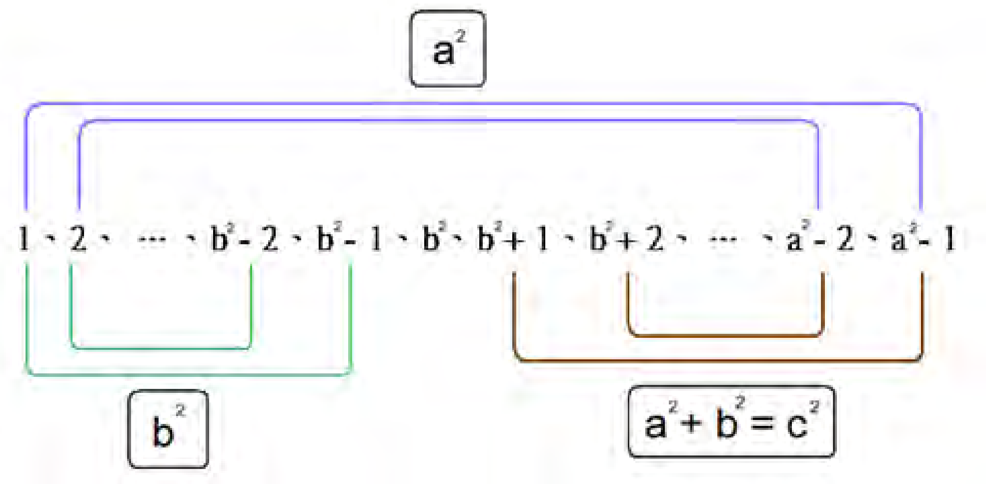
在上圖中，8 與 9 皆只有一條線連接，將其定義爲**單一配對數**，其餘的數都恰有兩條線連接。以 8 爲起點，隨著線條連接，可排出 1～15 的平方數列。

$$8 \rightarrow 1 \rightarrow 15 \rightarrow 10 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 13 \rightarrow 12 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 9$$

若將 16 排在 9 的右邊，則 1～16 可排成平方數列；進一步，再將 17 排在 8 的左邊，則 1～17 也可排成平方數列。

二、$a^2 + b^2 = c^2$

上述將 1～15排成平方數列的方法中，所形成的平方數有 9、16 和 25，顯然滿足 $9+16=25$。我們將 1～15 的**平方配對模式**推廣成圖一，並依循著構造 1～15 成平方數列的排序方式，我們得到一種建構平方數列的方法如下：



(圖一)

定理一：若正整數 a、b、c 滿足 $a > b$，$a^2 + b^2 = c^2$ 且 $(a, b) = 1$，則 $1 \sim a^2 - 1$ 及 $1 \sim a^2$ 可排成平方數列。

在證明此結果之前，我們需要三個引理，即引理1.1、1.2、1.3；由圖一的平方配對模式下，我們直接可得引理1.1及引理1.2。

引理1.1：在圖一的平方配對模式下，

(1)若 a 爲偶數且 b 爲奇數，則單一配對數爲 b^2 和 $\frac{a^2}{2}$;若 a 爲奇數且 b 爲偶數，則單一配對數爲 b^2 和 $\frac{b^2}{2}$。若 x 是單一配對數，則 x 只有一條線連接。

(2)若 x 不是單一配對數，則 x 有兩條線連接，其中一條線所連接的數與 x 之和爲 a^2，另一條線所連接的數與 x 之和可分兩種情形：若 $x < b^2$，則其和爲 b^2，若 $x > b^2$，則其和爲 c^2。

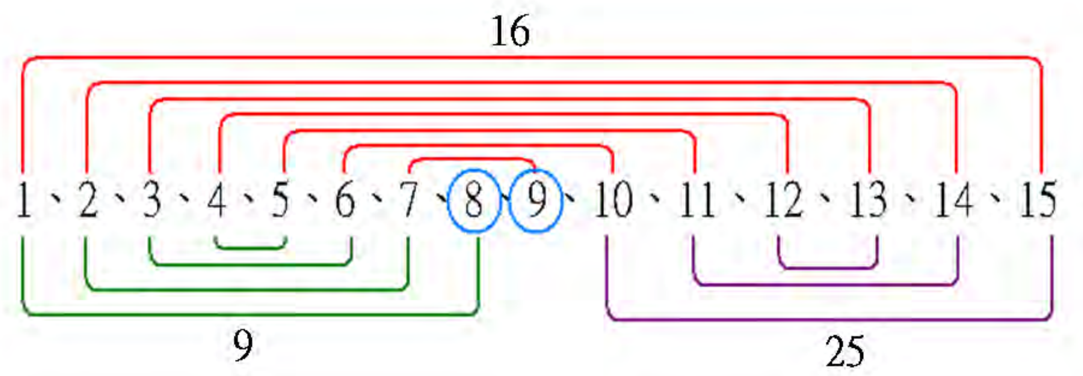
引理1.2：在圖一的平方配對模式下，以單一配對數 b^2 爲首，循著線條可連接到 $a^2 - b^2$，若 $a^2 - b^2$ 是單一配對數，則停止連接；若 $a^2 - b^2$ 不是單一配對數，則 $a^2 - b^2$ 還有另一條線與其連接，可連到下一個數，依此規則，可依序串起一數列，直到連接至另一個單一配對數爲止。

＊由於我們構造平方數列的方式，是從單一配對數作爲起始項，所以我們由 a、b 的奇偶性去討論單一配對數：

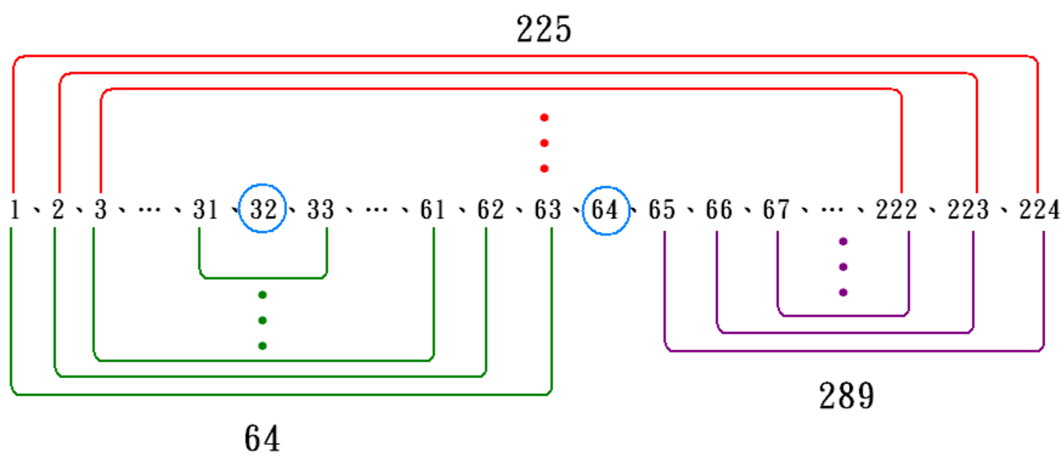
	a	b	c	單一配對數
Case 1	偶	奇	奇	b^2 、$\frac{a^2}{2}$
Case 2	奇	偶	奇	b^2 、$\frac{b^2}{2}$
Case 3	偶	偶	偶	b^2 、$\frac{a^2}{2}$ 、$\frac{b^2}{2}$ 、$\frac{c^2}{2}$
Case 4	奇	奇	偶	不可能滿足 $a^2 + b^2 = c^2$

首先我們先來看兩個例子：

ex1：數對 (a ,b ,c) = (4 ,3 ,5) 屬於 Case 1，以其中一個單一配對數 $\frac{a^2}{2}=8$ 爲首，循著線條依序連接 1、15、10、⋯，一直到線條的另一端（另一個單一配對數）$b^2=9$，所以1～15 可排成平方數列（如下圖）。若將 a^2 排在 b^2 的旁邊，則兩數之和爲 $c^2=25$，因此我們也可以將 1～16 排成平方數列。



ex2：數對 (a ,b ,c) = (15 ,8 ,17) 屬於 Case 2，以其中一個單一配對數 $\frac{b^2}{2}=32$ 爲首，循著線條依序連接，一直到線條的另一端（另一個單一配對數） $b^2=64$，所以 1～224 可排成平方數列（排列方式如下）。若將 a^2 排在 b^2 的旁邊，則兩數之和爲 $c^2=289$ 因此我們也可以將 1～225 排成平方數列。



1~224的平方數列排列如下：

32、193、96、129、160、65、224、1、63、162、127、98、191、34、
30、195、94、131、158、67、222、3、61、164、125、100、189、36、
28、197、92、133、156、69、220、5、59、166、123、102、187、38、

26、199、90、135、154、71、218、7、57、168、121、104、185、40、
24、201、88、137、152、73、216、9、55、170、119、106、183、42、
22、203、86、139、150、75、214、11、53、172、117、108、181、44、
20、205、84、141、148、77、212、13、51、174、115、110、179、46、
18、207、82、143、146、79、210、15、49、176、113、112、177、48、
16、209、80、145、144、81、208、17、47、178、111、114、175、50、
14、211、78、147、142、83、206、19、45、180、109、116、173、52、
12、213、76、149、140、85、204、21、43、182、107、118、171、54、
10、215、74、151、138、87、202、23、41、184、105、120、169、56、
8、217、72、153、136、89、200、25、39、186、103、122、167、58、
6、219、70、155、134、91、198、27、37、188、101、124、165、60、
4、221、68、157、132、93、196、29、35、190、99、126、163、62、
2、223、66、159、130、95、194、31、33、192、97、128、161、64

由引理1.2可知，以單一配對數爲首，可串起一平方數列，直到連接至另一個單一配對數爲止。但此串連方式是否一定會跑遍所有的數呢？我們先來考慮數對$(a,b,c)=(8,6,10)$這個例子。

定義：若平方數列的首尾兩項相加亦爲平方數，將其首尾相接，形成一項鍊，定義爲平方項鍊。

ex3：數對$(a,b,c)=(8,6,10)$ 屬於 Case 3，會形成兩個平方數列及一個平方項鍊，解釋如下：

以其中一個單一配對數 $\frac{a^2}{2}$ 爲首，循著線條連接至另一個單一配對數 b^2，可串起一平方數列：

$$\frac{a^2}{2}=32、4、60、40、24、12、52、48、16、20、44、56、8、28、36=b^2 \quad \text{--}\ 〈1〉$$

以其中一個單一配對數 $\frac{b^2}{2}$ 爲首，循著線條連接至另一個單一配對數 $\frac{c^2}{2}$，可串起一平方數列：

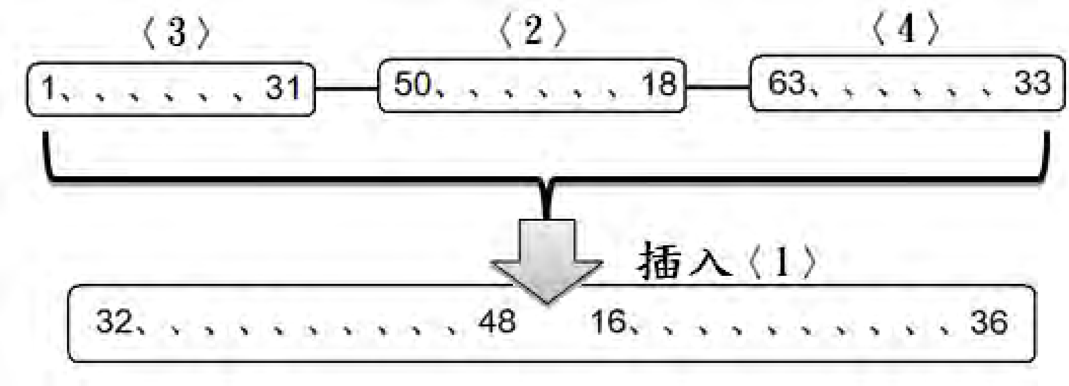
$$\frac{b^2}{2}=18、46、54、10、26、38、62、2、34、30、6、58、42、22、14、50=\frac{c^2}{2} \quad \text{--}\ 〈2〉$$

剩下來的奇數我們先以 1 做爲起始項，循著線條連接到 63 後，可再接回起始項 1，串起一平方項鍊：

1、35、29、7、57、43、21、15、49、51、13、23、41、59、5、31、 --〈3〉
〈接下一列〉
33、3、61、39、25、11、53、47、17、19、45、55、9、27、37、63 --〈4〉

其實從任何一項奇數作爲起始項，皆可串起相同的平方項鍊。

若將〈1〉〈2〉〈3〉〈4〉四列調整如下：



即可排出 1～63，1～64 的平方數列。(64 排在 36 右側)

在 Case 3 中，因爲 a、b、c 皆爲偶數，所以依照圖一的平方配對模式，所構造出的平方數列，其相鄰兩項的數，和必爲四的倍數：a^2、b^2 或 c^2，故被四除整除的數串成一平方數列，被四除餘二的數串成一平方數列，而被四除餘一及餘三的數交錯搭配成一平方項鍊。

在 Case 3 中，單一配對數有 4 個，會串起兩個平方數列，無法一次串起所有的數；所以接下來我們把焦點放在恰有兩個單一配對數的 Case 1 及 Case 2，以單一配對數 b^2 爲首，可串起一條平方數列，但此平方數列是否可串完所有的數？或者只串完其中一部分的數，而剩餘的數可排成平方項鍊（ 可能不只一個 ）？

我們再考慮數對(a ,b , c) = (12,9 ,15) 這個例子，因爲 a、b、c 皆爲三的倍數，再根據圖一的平方配對模式，所構造出的平方數列，其相鄰兩項之和必爲 a^2 或 b^2 或 c^2，皆是三的倍數。由 $b^2 = 81$ 爲首無法串起所有的數，只可串起一個平方數列及一個平方項鍊，每一項皆爲三的倍數；而被三除餘一及餘二的數交錯搭配形成三個平方項鍊(排列如下)。

三的倍數所串成的平方數列：

$b^2 = 81$、63、18、126、99、45、36、108、117、27、54、90、135、9、$72 = \frac{a^2}{2}$

三的倍數所串成的平方項鍊：

3、78、66、15、129、96、48、33、111、114、30、51、93、132、12、69、75、6、138、87、57、24、120、105、39、42、102、123、21、60、84、141

被三除餘一及餘二的數交錯搭配形成三個平方項鍊：

1、80、64、17、127、98、46、35、109、116、28、53、91、134、10、71、73、8、136、89、55、26、118、107、37、44、100、125、19、62、82、143

2、79、65、16、128、97、47、34、110、115、29、52、92、133、11、70、74、7、137、88、56、25、119、106、38、43、101、124、20、61、83、142

4、77、67、14、130、95、49、32、112、113、31、50、94、131、13、68、76、5、139、86、58、23、121、104、40、41、103、122、22、59、85、140

＊在圖一的平方配對模式下，若以單一配對數 b^2 為首，希望可串起所有的數，就必須排除平方項鍊的存在。若能達成此目標，Case 1 及 Case 2即可排成一個平方數列。由上述數對（a，b，c）=（8，6，10）及數對（a，b，c）=（12，9，15）兩個例子可知，我們要對 a、b 有所限制才能辦得到。

引理1.3：在 Case 1 及 Case 2 中，若數對(a，b) = 1，則根據圖一的平方配對模式，從單一配對數為首去連接，不可能形成一個平方數列及數個平方項鍊。

證明：在 Case 1 及 Case 2 中，各有兩個單一配對數，故這兩個數不在平方項鍊內，所以組成平方項鍊的數字個數必不大於 a^2-3。根據圖一的平方配對模式，若 j 個數形成一個平方項鍊，j 必是偶數（根據我們的配對模式，若由一數開始，從上方連接出去，而其形成平方項鍊的話，則必從下方連接回來；反之若從下方連接出去，則必從上方連接回來，以如此一上一下的連接方式，則必定有偶數條線段，所以就有偶數個數，則 j 必為偶數）。若存在 x_1、x_2、⋯、x_{2m} 形成一個平方項鍊，即 x_1+x_2、x_2+x_3、⋯、$x_{2m-1}+x_{2m}$、$x_{2m}+x_1$皆是平方數（a^2、b^2、a^2+b^2 其中一個)，不失一般性，令 $x_1+x_2=a^2$，由於連接方式是一上(a^2)一下(b^2或a^2+b^2)，所以我們可得：

$x_1+x_2=x_3+x_4=\cdots=x_{2m-1}+x_{2m}=a^2$ (2-1)

且兩集合相等：$\{x_2+x_3、x_4+x_5、\cdots、x_{2m}+x_1\}=\{b^2、a^2+b^2\}$ (2-2)

假設有 r 個 a^2+b^2，(m − r) 個 b^2

由(2-1)可知 $x_1+x_2+\cdots+x_{2m}=ma^2$ (2-3)

由(2-2)可知 $x_1+x_2+\cdots+x_{2m}=mb^2+ra^2$ (2-4)

由(2-3)及(2-4)可知 $a^2|mb^2$

但 $2m\le a^2-3$，故 a^2 不會是 m 的因數，進而可得（a，b）≠ 1，此與假設不符，故引理1.3得証。

證明定理一：由引理1.1、引理1.2及引理1.3和以上的討論得知，可以從 b^2 為首開始連接，將 $1\sim a^2-1$ 排成平方數列；若將 a^2 排在 b^2 旁邊，則其和 $a^2+b^2=c^2$亦為平方數，故可排成 $1\sim a^2$ 的平方數列。

接下來我們要製造出滿足定理一條件的正整數 a、b、c：

由已知的畢氏數可得 $(2pq)^2+(p^2-q^2)^2=(p^2+q^2)^2$，a = 2pq 或 $|p^2-q^2|$，該如何選取？

我們令 $a_{p,q}=Max\{2pq,|p^2-q^2||p,q\in N$ 且$(2pq,|p^2-q^2|)=1\}$，

$b_{p,q}=min\{2pq,|p^2-q^2||p,q\in\mathrm{N}$ 且$(2pq\,,|p^2-q^2|)=1\}$，和 $c_{p,q}=p^2+q^2$，舉例如下表：

p	q	2pq	p^2-q^2	p^2+q^2	$a_{p,q}$	$b_{p,q}$	$c_{p,q}$
2	1	4	3	5	4	3	5
4	1	8	15	17	15	8	17
6	1	12	35	37	35	12	37

定理二：(1)設 $(5+2\sqrt{6})^k=\alpha_k+\beta_k\sqrt{6}$ ，其中 k、α_k、β_k 皆為正整數，若兩正整數 p、q 滿足 $\mathrm{pq}=\beta_k$ 及 $a_{p,q}=2pq$，則 $1\sim(a_{p,q})^2+1$ 可排成平方數列。

(2)設 $(17+6\sqrt{8})^m=\gamma_m+\delta_m\sqrt{8}$ ，其中 m、γ_m、δ_m 皆為正整數，若兩正整數 p、q 滿足 $\mathrm{pq}=\delta_m$ 及 $a_{p,q}=2pq$，則 $1\sim(a_{p,q})^2+1$ 可排成平方數列。

證明：(1)由定理一可知，$1\sim(a_{p,q})^2$ 可排成平方數列。$a_{p,q}=2pq$ 是偶數，屬於 Case 1 ，故其排列如下：

$$(a_{p,q})^2、(b_{p,q})^2、\cdots、\frac{(a_{p,q})^2}{2}=2p^2q^2$$

今欲將 $(a_{p,q})^2+1$ 排在 $2p^2q^2$ 的右側，其兩項的和為 $6p^2q^2+1$，若 $6p^2q^2+1$ 是平方數，則 $1\sim(a_{p,q})^2+1$ 可排成平方數列。

數對 $(x,y)=(5\,,2)$ 是滿足 pell equation $x^2-6y^2=1$ 之整數解中，離原點最近的點；故 α_k、β_k 可由 $(5+2\sqrt{6})^k$ 生成並滿足 $\alpha_k^2-6\beta_k^2=1$，檢驗如下：

$$(5+2\sqrt{6})^k=\alpha_k+\beta_k\sqrt{6}，更進一步可知\ (5-2\sqrt{6})^k=\alpha_k-\beta_k\sqrt{6}$$

可得 $1=(5+2\sqrt{6})^k(5-2\sqrt{6})^k={\alpha_k}^2-6{\beta_k}^2$

即 ${\alpha_k}^2=6{\beta_k}^2+1=6p^2q^2+1$，得證。

(2)在(1)的證明中，今若將 $(a_{p,q})^2+1$ 排在 $(a_{p,q})^2=4p^2q^2$ 的左側，其兩項的和為 $8p^2q^2+1$，若 $8p^2q^2+1$ 是平方數，則 $1\sim(a_{p,q})^2+1$ 可排成平方數列。

如同(1)的討論可知：

$$(17+6\sqrt{8})^m=\gamma_m+\delta_m\sqrt{8}，(17-6\sqrt{8})^m=\gamma_m-\delta_m\sqrt{8}$$

可得 $1=(17+6\sqrt{8})^m(17-6\sqrt{8})^m={\gamma_m}^2-8{\delta_m}^2$

即 ${\gamma_m}^2=8{\delta_m}^2+1=8p^2q^2+1$，得證。

ex4：k = 1 時，$\beta_1=2$，令數對(p , q) = (2 , 1)，可知 $a_{2,1}=4$，由定理一及定理二可知 1 ~ 15、1 ~ 16，及 1 ~ 17 皆可排成平方數列。

ex5：m = 1 時，$\delta_1=6$，令數對(p , q) = (3 , 2)，可知 $a_{3,2}=12$，由定理一及定理二可知 1 ~ 143、1 ~ 144，及 1 ~ 145 皆可排成平方數列。

定理三：奇數數列 1、3、5、⋯、$4(a_{p,q})^2-1$ 可重排成平方數列，且首尾兩數相加亦爲平方數，可串成一平方項鍊。

證明：由定理一可知，數列 $1\sim(a_{p,q})^2$ 可排成平方數列

(1)若 $a_{p,q}=2pq$，屬於 Case 1，其排列如下：

$$(a_{p,q})^2、(b_{p,q})^2、\cdots、\frac{(a_{p,q})^2}{2}$$

今將此數列每一項皆同乘以 4，則新數列相鄰兩項之和亦爲平方數

$$4(a_{p,q})^2、4(b_{p,q})^2、\cdots、2(a_{p,q})^2 \qquad (\#)$$

接著將新數列 (#) 依序從左邊開始，奇數項減一，偶數項加一，則相鄰兩項之和亦爲平方數

$$4(a_{p,q})^2-1、4(b_{p,q})^2+1、\cdots、2(a_{p,q})^2+1 \qquad (\#\text{-}1)$$

若將新數列 (#) 依序從左邊開始，奇數項加一，偶數項減一，且將第一項加一後的數 $4(a_{p,q})^2+1$ 換成 1，則相鄰兩項之和亦爲平方數

$$1、4(b_{p,q})^2-1、\cdots、2(a_{p,q})^2-1 \qquad (\#\text{-}2)$$

今將 (#-1)、(#-2) 連接，可形成奇數數列 1、3、5、⋯、$4(a_{p,q})^2-1$ 的平方數列，且可串成一平方項鍊

$$4(a_{p,q})^2-1、4(b_{p,q})^2+1、\cdots、2(a_{p,q})^2+1$$

和爲 $4(a_{p,q})^2$　　　　和爲 $4(a_{p,q})^2$

$$1、4(b_{p,q})^2-1、\cdots、2(a_{p,q})^2-1$$

(2)若 $a_{p,q}=|p^2-q^2|$，屬於 Case 2，同理可證。

ex6：以 $a_{2,1}=4$ 爲例，1 ~ 16 可排成平方數列，排列如下：

16、9、7、2、14、11、5、4、12、13、3、6、10、15、1、8

由定理三的證明可得

(#) 64、36、28、8、56、44、20、16、48、52、12、24、40、60、4、32

(#-1) 63、37、27、9、55、45、19、17、47、53、11、25、39、61、3、33

(#-2) 1、35、29、7、57、43、21、15、49、51、13、23、41、59、5、31

連接 (#-1)、(#-2) 可將奇數數列 1、3、5、⋯、63 重排成平方數列，且可串成一平方項鍊（如下圖）。

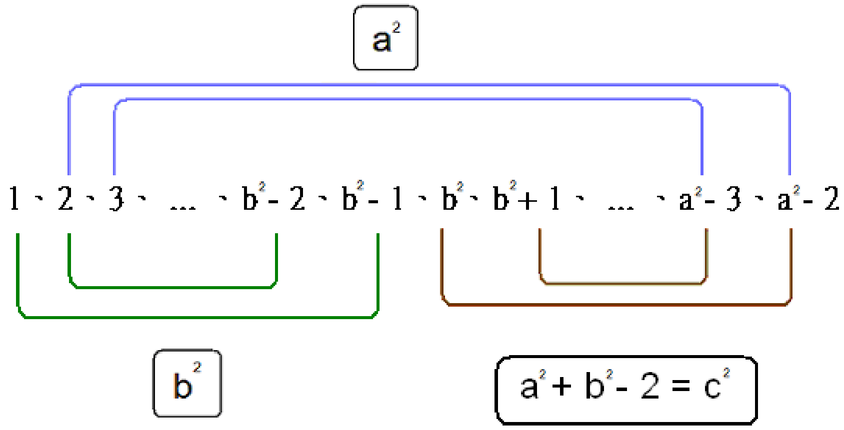
63、37、27、9、55、45、19、17、47、53、11、25、39、61、3、33

1、35、29、7、57、43、21、15、49、51、13、23、41、59、5、31

三、$a^2+b^2-k=c^2$，$k=1$、2、4

不同於圖一的平方配對模式；如圖二、三、四，我們亦可得到相似的定理。

(一)



(圖二)

＊我們必須要求 a＞b
＊以 a、b 的奇偶性去討論單一配對數：

a	b	c	單一配對數
奇	奇	偶	1、$\frac{c^2}{2}$
奇	偶	奇	不可能滿足 $a^2+b^2-2=c^2$
偶	奇	奇	
偶	偶	偶	

引理2：若數對$(a^2-2, b^2-2)=1$，則根據圖二的平方配對模式，從單一配對數爲首去連接，不可能形成一個平方數列及數個平方項鍊。

證明：與引理1.3的證明同，若 x_1、x_2、⋯、x_{2m} 形成一個平方項鍊，令$x_1+x_2=a^2$，則

$x_1+x_2=x_3+x_4=\cdots=x_{2m-1}+x_{2m}=a^2$ (2-5)

且 $\{x_2+x_3、x_4+x_5、\cdots、x_{2m}+x_1\}=\{b^2、a^2+b^2-2\}$ (2-6)

假設有 r 個 a^2+b^2-2 ，(m－r) 個 b^2

由(2-5)可知 $x_1+x_2+\cdots+x_{2m}=ma^2$ (2-7)

由(2-6)可知 $x_1+x_2+\cdots+x_{2m}=mb^2+r(a^2-2)$ (2-8)

由(2-7)及(2-8)可知 $m(a^2-2)=m(b^2-2)+r(a^2-2)$

可得 $(a^2-2)|m(b^2-2)$ 且 $(a^2-2, b^2-2)\neq 1$，此與假設不符，故引理2得証。

定理四：若三正整數 a、b、c 滿足 $a^2+b^2-2=c^2$、a > b，且

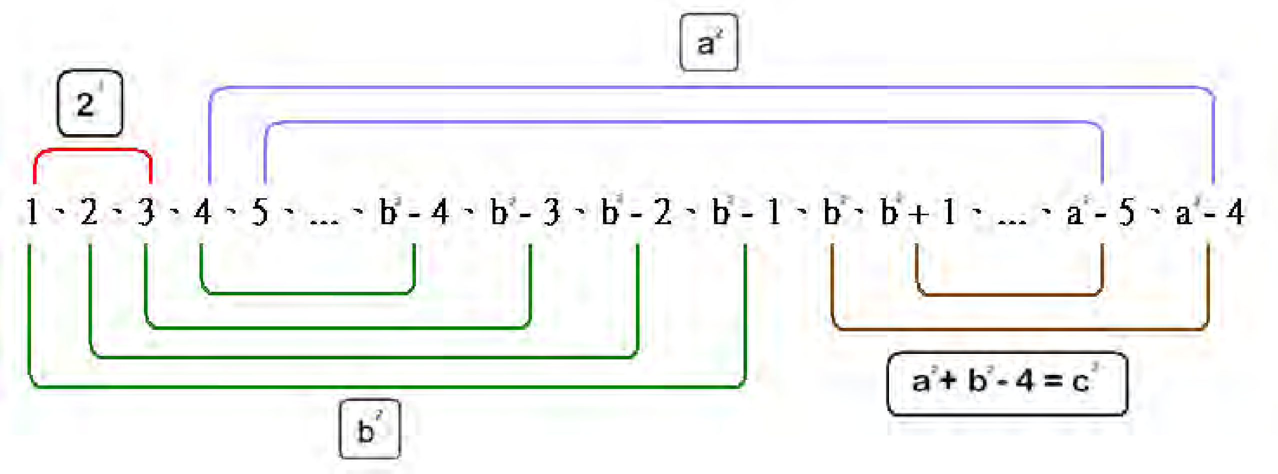
$(a^2-2, b^2-2)=1$，則 $1\sim a^2-2$ 及 $1\sim a^2-1$ 皆可排成平方數列。

證明：由引理2可知 $1\sim a^2-2$ 可排成平方數列，其兩端的數為 1 及 $\frac{c^2}{2}$，若將 a^2-1 排在 1 的旁邊，則是 $1\sim a^2-1$ 的平方數列。

＊ 數對$(a, b, c)=(2k^2+2k-1, 2k+1, 2k^2+2k)$，$k\in N$ 且 $k\geq 2$

滿足 $a^2+b^2-2=c^2$ 及 a > b

(二)



(圖三)

＊我們必須要求 a > b

＊以 a、b 的奇偶性去討論單一配對數：

	a	b	c	單一配對數
Case 1	偶	奇	奇	$2, \frac{a^2}{2}$
Case 2	奇	偶	奇	$2, \frac{b^2}{2}$

Case 3	偶	偶	偶	$2, \frac{a^2}{2}, \frac{b^2}{2}, \frac{c^2}{2}$
Case 4	奇	奇	偶	不可能滿足 $a^2+b^2-4=c^2$

引理3：若 $(a^2-4, b^2-4)=1$，則根據圖三的平方配對模式，從單一配對數爲首去連接，不可能形成一個平方數列及數個平方項鍊。

證明：與引理1.3的證明同，若 x_1、x_2、$\cdots$、x_{2m} 形成一個平方項鍊，令$x_1+x_2=a^2$，因爲 1、3 有可能同時在平方項鍊內，或同時不在平方項鍊內，所以

$x_1+x_2+\cdots+x_{2m}=ma^2$ 或 $(m-1)a^2+4$ (2-9)

且 $x_1+x_2+\cdots+x_{2m}=mb^2+r(a^2-4)$ (2-10)

由(2-9)及(2-10)可知

$$m(a^2-4)=m(b^2-4)+r(a^2-4)$$

或

$$(m-1)(a^2-4)=m(b^2-4)+r(a^2-4)$$

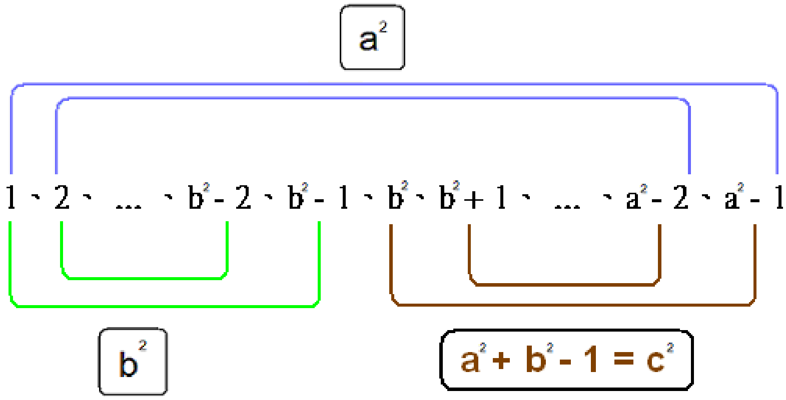
無論哪一種情形，皆可得到 $(a^2-4)|m(b^2-4)$且$(a^2-4, b^2-4)\neq 1$，此與假設不符，故引理3得証。

定理五：若三正整數 a、b、c 滿足 $a^2+b^2-4=c^2$、$a>b$，且 $(a^2-4, b^2-4)=1$，則數列 $1 \sim a^2-4$ 可排成平方數列。

* 數對$(a, b, c)=(2k^2+2k-2, 2k+1, 2k^2+2k-1)$，$k\in N$ 且 $k\geq 2$，屬於Case 1 滿足 $a^2+b^2-4=c^2$ 及 $a>b$

* 數對$(a, b, c)=(k^2-2, 2k, k^2)$，k 是不小於 3 的正奇數，屬於 Case 2 滿足 $a^2+b^2-4=c^2$ 及 $a>b$

(三)



(圖四)

＊我們必須要求 a＞b
＊以 a、b 的奇偶性去討論單一配對數：

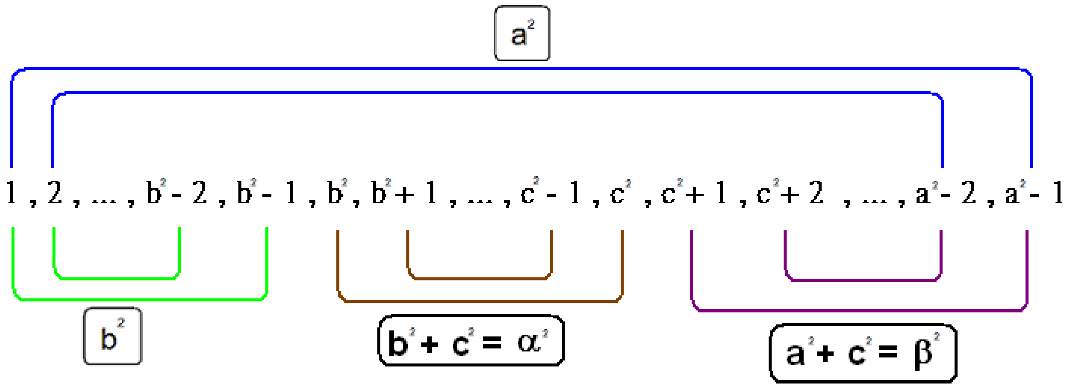
a	b	c	單一配對數
偶	奇	偶	$\frac{a^2}{2},\frac{c^2}{2}$
奇	偶	偶	$\frac{b^2}{2},\frac{c^2}{2}$
奇	奇	奇	無
偶	偶	偶	不可能滿足 $a^2+b^2-1=c^2$

與定理一相同的證明手法可得定理六

定理六：若三正整數 a、b、c 滿足 $a^2+b^2-1=c^2$、a＞b，且
$(a^2-1,b^2-1)=1$，則數列 $1\sim a^2-1$ 可排成平方數列。

＊ 數對$(a,b,c)=(2k^2-1,2k,2k^2)$，k ∈ N 且 k ≥ 2，滿足 a＞b 及
$a^2+b^2-1=c^2$

四、多組配對模式



(圖五)

＊以 a , b , c 的奇偶性去討論單一配對數：

	a	b	c	單一配對數
Case 1	奇	偶	偶	$\frac{b^2}{2},\frac{b^2+c^2}{2}$
Case 2	偶	奇	偶	$\frac{a^2}{2},\frac{a^2+c^2}{2}$
Case 3	偶	偶	奇	$\frac{a^2}{2},\frac{b^2}{2}$
Case 4	奇	奇	偶	$(a^2-b^2,c^2)\neq 1$
Case 5	偶	偶	偶	
Case 6	奇	奇	奇	無法滿足 $b^2+c^2=\alpha^2$ 或 $a^2+c^2=\beta^2$
Case 7	奇	偶	奇	
Case 8	偶	奇	奇	

引理4：若 $(a^2-b^2,c^2)\neq 1$，則根據圖五的平方配對模式，從單一配對數為首去連接，不可能形成一個平方數列及數個平方項鍊。

證明：若 x_1、x_2、⋯、x_{2m} 形成一個平方項鍊，且 $x_1+x_2=a^2$，則

$$x_1+x_2=x_3+x_4=\cdots=x_{2m-1}+x_{2m}=a^2 \quad (2\text{-}11)$$

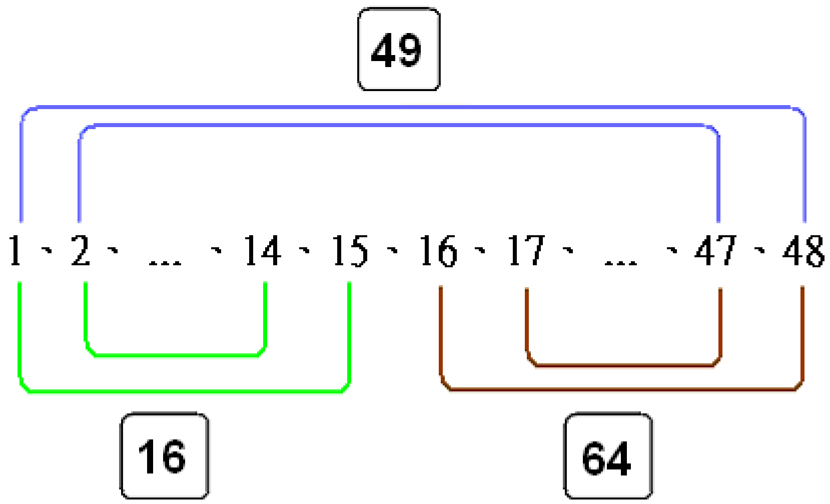
且 $\{x_2+x_3、x_4+x_5、\cdots、x_{2m}+x_1\}=\{b^2、b^2+c^2、a^2+c^2\}$ (2-12)
假設有 x 個 b^2、y 個 b^2+c^2、(m − x − y) 個 a^2+c^2
由(2-11)可知 $x_1+x_2+\cdots+x_{2m}=ma^2$ (2-13)
由(2-12)可知
$x_1+x_2+\cdots+x_{2m}=xb^2+y(b^2+c^2)+(m-x-y)(a^2+c^2)$ (2-14)
由(2-13)及(2-14)可知 $(a^2-b^2)(x+y)=(m-x)c^2$，因爲$x+y\le\frac{c^2}{2}$，
且 $c^2|(a^2-b^2)(x+y)$ 可得 $(a^2-b^2,c^2)\neq 1$，此與假設不符，故引理4得証。

定理七：在 Case 1 , Case 2 及 Case 3 中，若五正整數 a , b , c , α , β 滿足 $b^2+c^2=\alpha^2$、$a^2+c^2=\beta^2$、a > c > b 且 $(a^2-b^2,c^2)=1$，則數列 $1\sim a^2-1$ 可排成平方數列。

ex7：設數對(a , b , c) = $(\frac{(p^2-q^2)^2}{4}-1, 2pq, |p^2-q^2|)$，可知其滿足 $b^2+c^2=(p^2+q^2)^2$ 及 $a^2+c^2=(\frac{(p^2-q^2)^2}{4}+1)^2$。如數對(p , q) = (3 , 1) 時，數對(a , b , c) = (15 , 6 , 8)，$1\sim 224$ 可排成平方數列。

五、平方項鍊

在這一小節，我們將探討平方項鍊的性質；在ex8中，我們先構造出一個平方項鍊。
ex8：設數對(a , b , c) = (7 , 4 , 8)，可知其滿足 $a^2+b^2-1=c^2$，但 $(a^2-1, b^2-1)\neq 1$，今將其在第三小節的平方配對模式列於下圖：



今以 $\frac{b^2}{2}=8$ 爲首，可串起一平方數列：

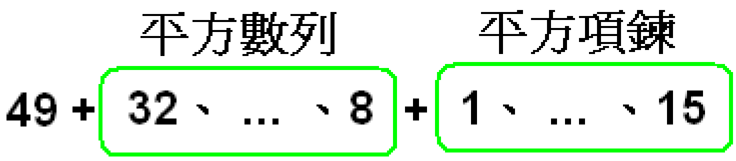
$\frac{b^2}{2} = 8、41、23、26、38、11、5、44、20、29、35、14、2、47、17、32 = \frac{c^2}{2}$

所剩下的數可串起一平方項鍊：

1、48、16、33、31、18、46、3、13、36、28、21、43、6、10、〈接下一列〉

39、25、24、40、9、7、42、22、27、37、12、4、45、19、30、34、15

今將此平方數列及平方項鍊與 49 作連接，可將 1～49 排成平方數列。



且此排列方式首尾相加亦爲平方數，自形成一個平方項鍊。

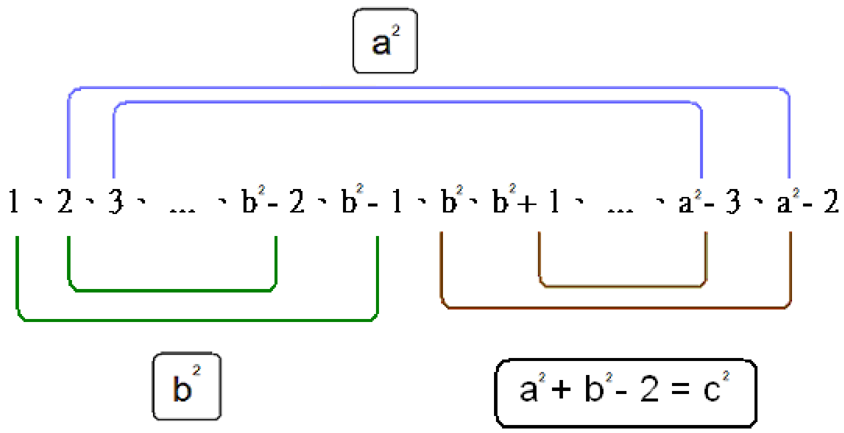
今若從任一處剪斷，皆是 1～49 的平方數列，即 1～49 平方數列的排列方式至少有 49 種！

而 50 加 14 等於 8 的平方，若將 1～49的平方項鍊從「14」處剪斷，可排成相同於以 14 爲首項的平方數列，再將 50 排在 14 的旁邊，可排成 1～50 的平方數列。由以上的討論可定理八。

定理八：若 1～n 可排成平方項鍊，則 1～n－1，1～n 及 1～n＋1 皆可排成平方數列。

證明：因爲 1～n 可排成平方項鍊，今從「n」處剪斷，可排成以 n 爲首項的平方數列，今 n 拿掉，即爲 1～n－1 的平方數列。若 $k^2 \le n+1 < (k+1)^2$，今從「$(k+1)^2-(n+1)$」處剪斷，可排成以 $(k+1)^2-(n+1)$ 爲首項的平方數列，今將 n＋1 排在 $(k+1)^2-(n+1)$ 的旁邊，可排成 1～n＋1 的平方數列。

接下來，我們對特定的 n，給出構造 1~n 排成平方項鍊的方法。



如上圖 $(a^2+b^2-2=c^2)$ 的平方配對模式下。由定理四可知，我們可將 $1 \sim a^2-2$ 重排

成平方數列。而其首尾兩端的數為 1 及 $\frac{c^2}{2}$ ，而當

$(a,b,c)=(2k^2+2k-1,2k+1,2k^2+2k)$，$k\in N$ 且 $k\geq 2$ 時，a,b,c 會滿足 $a^2+b^2-2=c^2$ 及 $a>b$。

若要滿足 $(a^2-2,b^2-2)=1$，k 需做何種限制呢？

$a^2-2=4k^4+8k^3-4k-1, b^2-2=4k^2+4k-1$

由輾轉相除法原理可知

$$(a^2-2,b^2-2)=(b^2-2,-3k^2-3k-1)=(-3k^2-3k-1,k^2+k-2)$$
$$=(k^2+k-2,-7)$$

當 k被 7除餘數為 0,2,3,4,6 時，$(a^2-2,b^2-2)=1$

若 $1+\frac{c^2}{2}=1+2k^2(k+1)^2$ 為完全平方數時，則可串成一平方項鍊，我們整理成定理九

定理九：若正整數 k 滿足

(1) k 被 7 除餘數為 0 , 2 , 3 , 4 , 6 (2) $1+2k^2(k+1)^2$ 為完全平方數

則 $1\sim(2k^2+2k-1)^2-2$ 可排成平方項鍊

ex9：當 $k=3$，滿足定理九的條件，1~527 可排成平方項鍊。

六、特定的 n 無法將 1 ~ n 排成平方數列

考慮數列 $1\sim15$，其中 $1+3=4$、$1+8=9$、$1+15=16$，1 可以有三種方法，使其與另一數相加成為平方數；而 $7+2=9$、$7+9=16$，7 有兩種方法，然而 8 與 9 只有一種方法：$1+8=9$、$9+7=16$。

定義：數列 $1\sim n$，若使 k 與另一數相加成為平方數之方法數不大於 1，我們稱 k 為數列 $1\sim n$ 的孤單數。

性質 1：若 $1\sim n$ 可排成平方數列，則孤單數必排在數列的左右兩端，且孤單數的個數必不大於 2。

推論 1：數列 $1\sim n$，當 $n=2$、3、4、⋯13、14 或 18 時，皆不可能排成平方數列。

證明：(1) $n=2$、3、4 時，窮舉列出來即可得。

(2) $n=5$、6、7、8、9、10 時，4 與 5 是孤單數，故要放在兩端，而其連接方法只有 $4+5=9$，必定要串在一起，故無法排成平方數列。

(3) $n=11$、12、13、14，皆有三個孤單數：8、9、10 $(8+1=9$、$9+7=16$、$10+6=16)$，故無法排成平方數列。

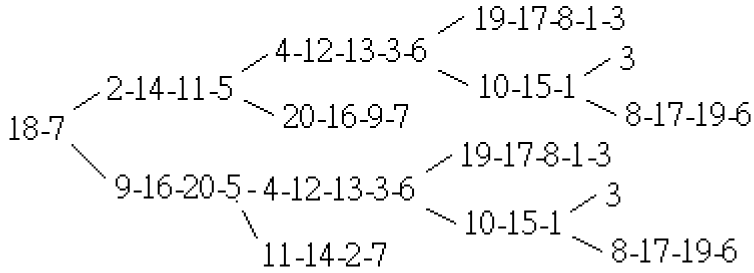
(4) $n=18$ 時，有三個孤單數：16、17、18 $(16+9=25$、$17+8=25$

、18 + 7 = 25)，故無法排成平方數列。

推論 2：數列 $1 \sim n$，當 $n = 19$、20、21、22 或 24 時，皆不可能排成平方數列。
證明：利用樹狀圖方式列出，其相鄰兩項之和為平方數，說明無法排成平方數列：

(1) 以 $1 \sim 19$ 為例：16 及 18 是孤單數，必放在兩端
18 − 7 − 9 − 16，故數列 $1 \sim 19$ 無法排成平方數列

(2) 以 $1 \sim 20$ 為例：18 是孤單數



無法排成平方數列

(3) $n = 21$、22、24 時亦相同。

七、可將 1~n 排成平方數列、平方項鍊的最小正整數 n

由上一節的討論得知，$n = 15$ 是可將 $1 \sim n$ 排成平方數列的最小正整數 n。

當 $n = 2$、3、、、14 時，$1 \sim n$ 皆無法排成平方數列，當然無法排成平方項鍊。

而 $n = 15$、16、17 時，若不考慮頭尾順序，將 $1 \sim n$ 排成平方數列的方法皆只有一種，所以無法將 $1 \sim 15$、$1 \sim 16$、$1 \sim 17$ 排成平方項鍊。

當 $18 \leq n \leq 30$ 時，18與另一數相加成為平方數的方法只有 $18 + 7 = 25$，即 18 為數列 $1 \sim n$ 的孤單數，所以無法將 $1 \sim n$ 排成平方項鍊。

當 $n = 31$ 時，31 與另一數相加成為平方數的方法有 $31 + 5 = 36$、$31 + 18 = 49$，若 $1 \sim 31$ 可排成平方項鍊，則存在以 31 為首項，5 或 18 為末項的平方數列。然而以 31 為首項排成的平方數列有 20 種 (**程式可驗證**)，但其末項皆不為 5 或 18，故 $1 \sim 31$ 無法排成平方項鍊。

若我們可將 $1 \sim 32$ 排成平方項鍊，則 $n = 32$ 是可將 $1 \sim n$ 排成平方項鍊的最小正整數 n。我們成功地給出一種排法，其排法如下：

1、8、28、21、4、32、17、19、30、6、3、13、12、24、25、11、5、31、18、7、29、20、16、9、27、22、14、2、23、26、10、15

八、程式

我們想要找出那些 n 可將 $1 \sim n$ 排成平方數列，故我們利用程式 (如附件一) 來幫我們運算，若可排成平方數列，我們只取其中一種排法，條列於附件二。可知 $n = 15$、16、17、23 及 $n = 25$、26、⋯、144 時，$1 \sim n$ 可排成平方數列。

肆、研究結果

在本文中，我們以特定的平方配對模式，構造出一個排成平方數列的排法。其主要結果如下：

1. 若正整數 a、b、c 滿足 a > b，$a^2+b^2=c^2$ 且 $(a,b)=1$，則 $1\sim a^2-1$ 及 $1\sim a^2$ 可排成平方數列。

2. (1) 設 $(5+2\sqrt{6})^k=\alpha_k+\beta_k\sqrt{6}$，其中 k、$\alpha_k$、$\beta_k$ 皆爲正整數，若兩正整數p、q 滿足 $pq=\beta_k$ 及 $a_{p,q}=2pq$，則 $1\sim(a_{p,q})^2+1$ 可排成平方數列。

   (2) 設 $(17+6\sqrt{8})^m=\gamma_m+\delta_m\sqrt{8}$，其中 m、$\gamma_m$、$\delta_m$ 皆爲正整數，若兩正整數 p、q 滿足 $pq=\delta_m$ 及 $a_{p,q}=2pq$，則 $1\sim(a_{p,q})^2+1$ 可排成平方數列。

3. 奇數數列 1、3、5、⋯、$4(a_{p,q})^2-1$ 可重排成平方數列，且首尾兩數相加亦爲平方數，可串成一平方項鍊。
4. 若三正整數 a , b , c 滿足 $a^2+b^2-2=c^2$，a > b，且$(a^2-2,b^2-2)=1$，則數列 $1\sim a^2-2$ 及 $1\sim a^2-1$ 皆可排成平方數列。
5. 若三正整數 a , b , c 滿足$a^2+b^2-4=c^2$，a > b，且$(a^2-4,b^2-4)=1$，則數列 $1\sim a^2-4$ 可排成平方數列。
6. 若三正整數 a , b , c 滿足 $a^2+b^2-1=c^2$，a > b，且$(a^2-1,b^2-1)=1$，則數列 $1\sim a^2-1$ 可排成平方數列。
7. 若五正整數 a , b , c , α , β 滿足 $b^2+c^2=\alpha^2$、$a^2+c^2=\beta^2$、a > c > b，且 $(a^2-b^2,c^2)=1$，則數列 $1\sim a^2-1$ 可排成平方數列。
8. 若 1 ~ n 可排成平方項鍊，則 1 ~ n − 1 , 1 ~ n 及 1 ~ n + 1 皆可排成平方數列。
9. n = 2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、18、19、20、21、22、24 時，數列 1 ~ n 無法排成平方數列。
10. n = 15、16、17、23 及 n = 25、26、⋯ 、144時，1 ~ n可排成平方數列。
11. 若正整數 k滿足
    (1) k被 7 除餘 數爲 0 , 2 , 3 , 4 , 6　(2) $1+2k^2(k+1)^2$爲完全平方數
    則 $1\sim(2k^2+2k-1)^2-2$ 可排成平方項鍊。
12. n = 32 是可將 1 ~ n排成平方項鍊的最小正整數 n ；1 ~ 32 排成平方數列的方法至少有32 種。

伍、討論

1. 「孤單數的個數不大於 2」是「1 ~ n 可排成平方數列」的必要條件。數列 1 ~ 19 的孤單數只有 16 及 18，但 1 ~ 19 卻無法排成平方數列，故「孤單數的個數不大於 2」不是「1 ~ n 可排成平方數列」的充分條件。
2. 在引理1.3、引理2、引理3及至引理4的證明過程中，我們必須加上限制條件：$(a^2-k,b^2-k)=1$，k = 0、1、2、4，才能合理的處理完整。但去除此條件，只要

稍做調整，亦可排成平方數列。需要有更高明的處理手法才能突破此障礙！

陸、結論

一、結論

在我們構造的平方配對模式下，$a^2+b^2-k=c^2$，k = 0、1、2、4，若加上限制條件$(a^2-k\,,b^2-k)=1$，則可成功地拉出一條平方數列。至於 $(a^2-k\,,b^2-k)\neq 1$ 的情況下，仍可稍作調整成平方數列，但調整方法有些繁複不易統整，有待日後提出更好的方法。至於多組配對模式，我們也有些討論，期待更一般化結果。另外，我們得知 n = 2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、18、19、20、21、22、24 時，數列 1 ~ n 無法排成平方數列。n = 49 時，數列 1 ~ 49 可排成一平方項鍊，相鄰兩項皆爲平方數，即平方數列的排列方式至少有 49 種。藉由程式的運算 n = 15、16、17、23 及 n = 25、26、⋯ 、144時，1 ~ n可排成平方數列。

再者，我們也得知 n = 15 是最小正整數，可將 1~n 排成平方數列； n = 32 是最小正整數，可將 1~n 排成平方項鍊。

二、未來展望

未來我們能夠朝下列這幾個尚未解決的問題努力：

(一) 提出更好的方法，去除 $(a^2-k\,,b^2-k)\neq 1$ 的條件，使其能排成平方數列。

(二) 除了 $a^2+b^2-k=c^2$，k = 0、1、2、4 的形式以外，能再進一步地推廣。

(三) 當 n 很大時，是否皆能排成平方數列，除了改良討論的方法外，更要在電腦程式上有所精進。

(四) 建構不同的平方配對模式，討論平方數列。

(五) 提出能排出平方數列、平方項鍊的充分條件或必要條件。

柒、參考資料及其他

一、參考資料

1. TRML 台灣區高中數學競賽(2010)。**歷屆試題暨詳解(增訂版)**。博凱出版社，(92 頁)
2. 嚴鎮軍(2007)。**高中數學競賽教程**(1 版)。九章出版社，(24 – 31 頁) 。
3. 潘承洞 ，潘承彪(2002)。**簡明數論**(1 版)。九章出版社，(277 – 283 頁)。
4. 許志農(無日期)。**算術講義 第三十七講 佩爾方程式**
   http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/arith/arith37.pdf
5. 許志農(無日期)。**算術講義 第三十八講 再談佩爾方程式**
   http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/arith/arith38.pdf

6. 李佳奇(2005)。**論 PELL 方程式及其推廣**，雄中學報第八期

二、附件一

程式碼：

```
#include<iostream>
#include<cstring>
#define MAX 150
#define MAX' 18
using namespace std;
int a[MAX],b[MAX],c[MAX][MAX];
int p,k,r;

void g()
{
	for (int i=0;i<MAX;i++)
	{
		int x=0;
		for (int j=MAX';j>0;j--)
		{
			p=j*j-i-1;
			if (p<=0) break;
			c[i][x++]=p;
		}
	}
}
void f(int n)
{
	if (n==0){}
	else if (a[0]==0)
	{
		for (int l=k;l>0;l--)
		{
			p=l;
			a[0]=l;
			b[l-1]=1;
			f(n-1);
			a[0]=0;
```

```
				b[l-1]=0;
			}
		}
		else
		{
			for (int i=0;i<MAX';i++)
			{
				if (c[p-1][i]>k) continue;
				if (c[p-1][i]==0) return;
				if (b[(c[p-1][i]-1)]) continue;
				a[k-n]=c[p-1][i];
				b[(c[p-1][i]-1)]=1;
				int u=p;    p=a[k-n];
				if (n==1)
				{
					for (int j=0;j<k;j++)
						cout<<a[j]<<" ";
					cout<<endl;    r=0;
				}
				f(n-1);
				a[k-n]=0;
				b[(c[u-1][i]-1)]=0;
				p=a[k-n-1];
			}
		}
}
int main()
{
		memset(c,0,sizeof(c));    g();
		while (cin>>k)
		{
			memset(a,0,sizeof(a));      memset(b,0,sizeof(b));    r=1;    f(k);
			if (r)    cout<<"無"<<endl<<endl;
			else    cout<<endl;
		}
		return 0;
}
```

三、附件二

n = 2 , 3 , … , 14 皆無解

n = 15 ：9 7 2 14 11 5 4 12 13 3 6 10 15 1 8 (若不考慮頭尾順序，此爲唯一解)

n = 16 ：16 9 7 2 14 11 5 4 12 13 3 6 10 15 1 8 (若不考慮頭尾順序，此爲唯一解)

n = 17 ：17 8 1 15 10 6 3 13 12 4 5 11 14 2 7 9 16 (若不考慮頭尾順序，此爲唯一解)

n = 18 , 19 , 20 , 21 , 22 皆無解

n = 23 ：22 3 1 8 17 19 6 10 15 21 4 12 13 23 2 14 11 5 20 16 9 7 18

n = 24 無解

n = 25 ：23 2 14 22 3 13 12 4 21 15 10 6 19 17 8 1 24 25 11 5 20 16 9 7 18

n = 26 ：26 23 2 14 22 3 13 12 4 21 15 10 6 19 17 8 1 24 25 11 5 20 16 9 7 18

n = 27 ：27 22 14 2 23 26 10 15 21 4 12 13 3 6 19 17 8 1 24 25 11 5 20 16 9 7 18

n = 28 ：28 21 15 10 26 23 13 12 4 5 20 16 9 27 22 3 6 19 17 8 1 24 25 11 14 2 7 18

⋮

n = 142 ：142 114 111 85 140 116 109 87 138 118 107 89 136 120 105 91 134 122 103 93 132 124 101 95 130 126 99 97 128 68 76 45 55 141 115 110 86 139 117 108 88 137 119 106 90 135 121 104 92 133 123 102 94 131 125 100 96 129 127 98 71 73 48 52 69 75 46 54 67 77 44 56 113 112 84 60 61 83 38 62 82 39 42 79 65 35 29 20 80 64 57 43 78 66 34 47 74 70 51 49 72 28 53 11 25 24 1 63 18 7 2 14 50 31 5 59 41 8 17 32 4 21 15 10 26 23 58 6 30 19 81 40 9 16 33 3 22 27 37 12 13 36

n = 143 ：143 113 112 84 141 115 110 86 139 117 108 88 137 119 106 90 135 121 104 92 133 123 102 94 131 125 100 96 129 127 98 71 73 48 52 69 75 46 54 142 114 111 85 140 116 109 87 138 118 107 89 136 120 105 91 134 122 103 93 132 124 101 95 130 126 99 97 128 68 76 45 55 66 78 43 57 64 80 41 59 62 82 39 61 83 38 26 74 70 51 49 72 28 53 47 34 30 19 81 63 58 42 79 65 56 44 77 67 33 16 20 29 35 1 8 17 32 4 5 11 25 24 12 37 27 22 3 6 10 15 21 60 40 9 7 18 31 50 14 2 23 13 36

n = 144 ：144 112 113 143 82 114 142 83 86 139 117 108 88 137 119 106 90 135 121 104 92 133 123 102 94 131 125 100 96 129 127 98 71 73 48 52 69 75 46 54 115 141 84 85 140 116 109 87 138 118 107 89 136 120 105 91 134 122 103 93 132 124 101 95 130 126 99 97 128 68 76 45 55 66 78 43 57 64 80 41 59 110 34 47 74 70 51 49 72 28 53 11 38 62 19 30 6 58 111 33 67 77 44 56 65 79 42 39 25 24 40 81 63 18 31 50 14 22 3 61 60 21 15 10 26 23 2 7 29 35 1 8 17 32 4 5 20 16 9 27 37 12 13 36

【評語】040412

本問題十分有趣，作者也花了很多精神導出很多可以排成平方數列和平方項鍊的條件。很可惜的是，這些充分條件很多只是基於一些較一般性的觀察。就實質上，可以拿來應用輔助判定任一數列是否具有平方數列的情形並非十分廣泛。作者或許可以轉向找些必要條件，試著以刪去法去剃除不具平方數列的情形。