

# 中華民國第 53 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

高中組 數學科

第三名

040411

命中注定我「繞」你

學校名稱：國立新竹女子高級中學

|   |                             |
|---|-----------------------------|
| 作者：<br><br>高二 徐嘉琪<br><br>高二 林念慈<br><br>高二 劉又瑄 | 指導老師：<br><br>林典蔚<br><br>陳美雪 |
|---|-----------------------------|

關鍵詞：等比級數、仿射、位似旋轉

## 摘要

本研究的主要目的是探討瓢蟲在空間中行走的軌跡是否存在著某些性質。我們定義瓢蟲分別繞  $y$  軸和  $z$  軸旋轉  $\theta$  和  $\phi$ ，我們發現當旋轉次數  $n \rightarrow \infty$ ，各收斂點  $P$  均位於球面

$S: \left(x - \frac{1}{1-r^2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$  上。接著我們探討當瓢蟲的仰角  $\theta = \cos^{-1} r$  與  $-\cos^{-1} r$  時，

不論轉向角  $\phi$  為幾度，瓢蟲分別收斂於固定點  $A\left(1, 0, \frac{r\sqrt{1-r^2}}{1-r^2}\right)$  與  $B\left(1, 0, -\frac{r\sqrt{1-r^2}}{1-r^2}\right)$ 。透過幾

何證明，我們發現直線  $\overline{AB}$  與  $y$  軸恰為球面  $S$  的配極直線。

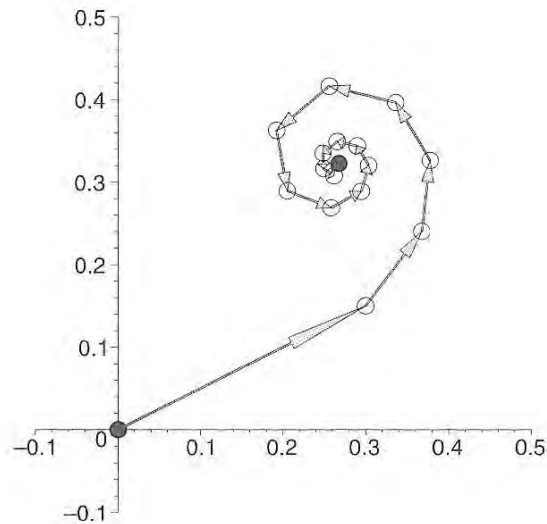
透過基底變換後，每個轉向點均位於一圓錐面  $x^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{c-z}{c}\right)^2$  上，且繞行的原點  $O$  及轉向

點  $P_n$  均位在一等角螺線  $G$  上， $G: \begin{cases} x = ar^t \cos t\alpha \\ y = ar^t \sin t\alpha \\ z = c(1-r^t) \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ 。從高觀點來看，各轉向點是經過一個

收縮的仿射變換而來，而收斂點  $P$  就是瓢蟲行走軌跡的點吸子 (*attractor*)。最後，我們將軌跡呈現的圖形與自然現象連結。

## 壹、研究動機

「碎形」—為以某種方式與整體相似部份所組成的圖形。觀察校園裡自然界的呈現，松樹的枝桠是一種自我相似的碎形，羊齒蕨的葉片也是一種碎形。在專題研究課中，我們對於動手玩碎形這本書裡的某個圖（如圖一）感到好奇：



▲ 圖一

該圖形重複不斷的繞行後，最後集中到一個點吸子 (*attractor*)。在歷屆科展中對於平面上質點繞行軌跡已經有所探討，而我們生活中的世界是個三維空間，三維空間中點吸子的軌跡又是如何？開啟了一系列的研究與探討。



自然界裡，空間中的點吸子 (*attractor*) 處處皆是。

▲ 圖二

## 貳、研究目的

- 一、探討當瓢蟲的轉向角為  $\phi(0 \leq \phi \leq 2\pi)$ ，仰角為  $\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$  時，各轉向角與仰角所對應的收斂點  $P$  在空間坐標中的關係。
- 二、探討當瓢蟲分別固定仰角  $\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$  與轉向角  $\phi(0 \leq \phi \leq 2\pi)$  時的收斂點  $P$  的位置。
- 三、探討各轉向點  $P_n (n \in \mathbb{N})$  之關聯性。
- 四、從旋轉矩陣探討瓢蟲的繞行模式。
- 五、從高觀點研究瓢蟲的收斂模式。
- 六、探討瓢蟲繞行模式的應用。

## 參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GSP 幾何畫板、MathType5、Microsoft Office Word

## 肆、研究過程或方法

### 一、空間中的旋轉定義

空間中的旋轉主要為下列三個旋轉矩陣的序列複合。關於右手笛卡爾坐標系的  $x, y$  和  $z$  軸的旋轉分別叫做 *roll*, *pitch* 和 *yaw* 旋轉（如圖三）。

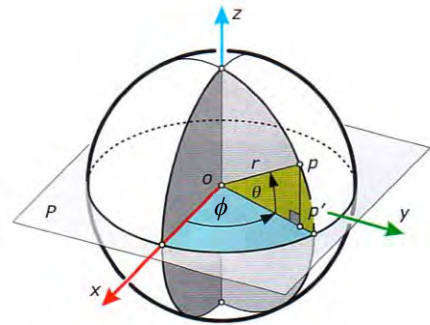
(一) 繞  $x$ -軸的主動旋轉定義為  $L(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}$  這裡的  $\omega$  是 *roll* 角。

(二) 繞  $y$ -軸的主動旋轉定義為  $K(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$  這裡的  $\theta$  是 *pitch* 角。

(三) 繞  $z$ -軸的主動旋轉定義為  $M(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  這裡的  $\phi$  是  $yaw$  角。



▲ 圖三



▲ 圖四

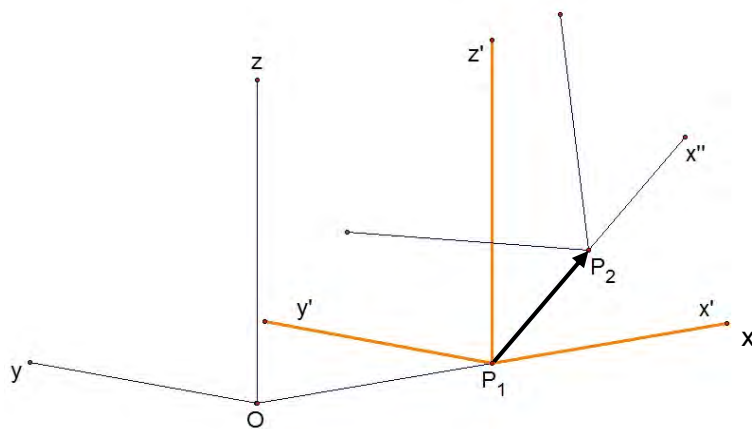
## 二、定義瓢蟲的行走模式

我們以瓢蟲代表空間中質點的移動與轉動並定義瓢蟲在三維空間中行走的角度區分如下(如圖四)：

$\phi$ ：方位角度坐標值 ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ )，即繞  $z$ -軸旋轉  $\phi$  角

$\theta$ ：仰角角度坐標值  $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ ，即繞  $y$ -軸旋轉  $(-\theta)$  角

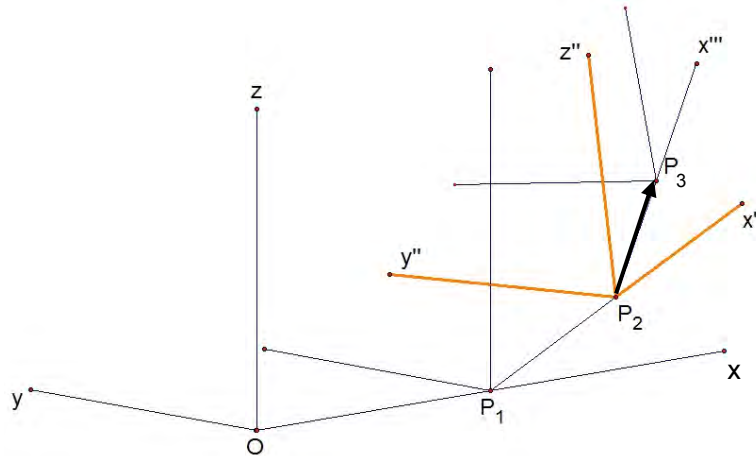
假設在  $(0,0,0)$  有一隻瓢蟲，背上背著一個坐標架，坐標架的  $x,y,z$  軸與瓢蟲所在坐標系統之  $x,y,z$  軸重合，當瓢蟲往  $x$  軸正向前進 1 單位到  $P_1(1,0,0)$ ，坐標架也跟著平移 1 單位，接著瓢蟲分別繞著自身坐標架的  $y'$ 、 $z'$  軸旋轉  $-\theta$  角與  $\phi$  角，然後沿著  $x''$  軸的正向前進  $r$  單位到  $P_2$ 。(如圖五)



▲ 圖五

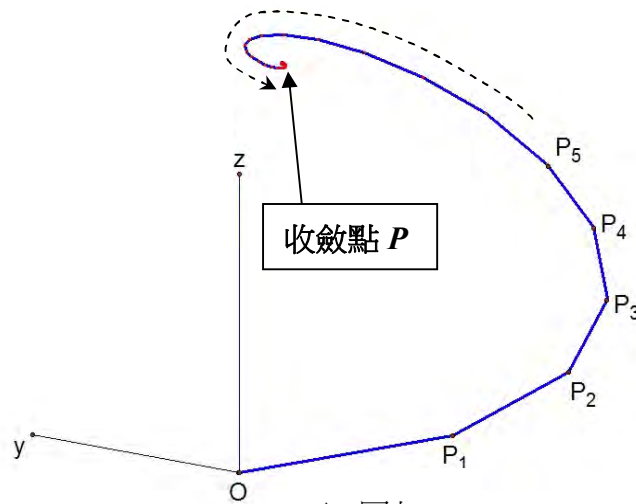
接著瓢蟲再次分別繞著自身坐標架的  $y''$ 、 $z''$  軸旋轉  $-\theta$  角與  $\phi$  角，然後沿著  $x'''$  軸的正向

前進  $r^2$  單位到  $P_3$ 。(如圖六)



▲ 圖六

當移動  $n$  次 ( $n \geq 4$ ) 後，每次瓢蟲和坐標架皆繞轉動後坐標架之  $y$  軸旋轉  $-\theta$ 、繞轉動後坐標架之  $z$  軸旋轉  $\phi$ ，瓢蟲以自身坐標架的  $x$  軸正向前進  $r^{n-1}$  單位到  $P_n$ ，繼續不斷，而這隻瓢蟲最後幾乎停止於一點  $P$ ，以下我們稱點  $P$  為瓢蟲的收斂點（如圖七）。



▲ 圖七

三、轉向角為  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ )，仰角為  $\theta$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) 時，收斂點  $P$  的猜想

定理一：當瓢蟲的轉向角為  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ )，仰角為  $\theta$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) 時，各收斂點  $P$  均位

$$\text{於球面 } S \text{ 上。} \left( S: \left( x - \frac{1}{1-r^2} \right)^2 + y^2 + z^2 = \left( \frac{r}{1-r^2} \right)^2 \right)$$

(一) 當瓢蟲的轉向角為  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ )，仰角為  $\theta$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) 時，收斂點坐標為

$$\begin{cases} x = \frac{1 - r \cos \theta - r \cos \phi + r^2 \cos \theta \cos \phi}{-r^3 + r^2 s - rs + 1} \\ y = \frac{r \cos \theta \sin \phi - r^2 \sin \phi}{-r^3 + r^2 s - rs + 1} \\ z = \frac{r \sin \theta - r^2 \sin \theta \cos \phi}{-r^3 + r^2 s - rs + 1} \end{cases} \quad (s = \cos \theta + \cos \phi + \cos \theta \cos \phi)$$

【證明】

1. 我們對向量(1,0,0) 進行一次繞 y 軸旋轉 ( - \theta ) 角與繞 z 軸旋轉 \phi 角可得到向量

$$\vec{P_1 P_2} = rMK \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } M = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

$$\vec{P_2 P_3} = r^2 (MK)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \vec{P_{n-1} P_n} = r^{n-1} (MK)^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. 瓢蟲的第 n 個轉向點  $P_n = \vec{OP_1} + \vec{P_1 P_2} + \vec{P_2 P_3} + \dots + \vec{P_{n-1} P_n}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + rMK \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r^2 (MK)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r^3 (MK)^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + r^{n-1} (MK)^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

取  $n \rightarrow \infty$  可得瓢蟲的收斂點 P 之坐標為

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + rMK \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r^2 (MK)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + r^{n-1} (MK)^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \left[ I + rMK + r^2 (MK)^2 + \dots + r^{n-1} (MK)^{n-1} + \dots \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= (I - rMK)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-r\cos\theta\cos\phi & r\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ -r\cos\theta\sin\phi & 1-r\cos\phi & r\sin\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta & 0 & 1-r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} 1-r\cos\theta\cos\phi & r\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ -r\cos\theta\sin\phi & 1-r\cos\phi & r\sin\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta & 0 & 1-r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 1-r\cos\theta-r\cos\phi+r^2\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi-r^2\sin\phi \\ r\sin\theta-r^2\sin\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

其中  $\det(A) = -r^3 + r^2(\cos\theta + \cos\phi + \cos\theta\cos\phi) - r(\cos\theta + \cos\phi + \cos\theta\cos\phi) + 1$

$$\text{令 } s = \cos\theta + \cos\phi + \cos\theta\cos\phi \Rightarrow \det(A) = -r^3 + r^2s - rs + 1$$

$$\Rightarrow A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{-r^3 + r^2s - rs + 1} \begin{bmatrix} 1-r\cos\theta-r\cos\phi+r^2\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi-r^2\sin\phi \\ r\sin\theta-r^2\sin\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

$$3. \text{ 瓢蟲的收斂點 } P \text{ 之坐標可化簡為 } \begin{cases} x = \frac{1-r\cos\theta-r\cos\phi+r^2\cos\theta\cos\phi}{-r^3+r^2s-rs+1} \\ y = \frac{r\cos\theta\sin\phi-r^2\sin\phi}{-r^3+r^2s-rs+1} \\ z = \frac{r\sin\theta-r^2\sin\theta\cos\phi}{-r^3+r^2s-rs+1} \end{cases}$$

$$(s = \cos\theta + \cos\phi + \cos\theta\cos\phi)$$

## (二) 各收斂點的軌跡方程式

$$\text{我們由 (一) 可知收斂點坐標 } \begin{cases} x = \frac{1-r\cos\theta-r\cos\phi+r^2\cos\theta\cos\phi}{-r^3+r^2s-rs+1} \\ y = \frac{r\cos\theta\sin\phi-r^2\sin\phi}{-r^3+r^2s-rs+1} \\ z = \frac{r\sin\theta-r^2\sin\theta\cos\phi}{-r^3+r^2s-rs+1} \end{cases}$$

( $s = \cos\theta + \cos\phi + \cos\theta\cos\phi$ )，將三式平方和可得  $x^2 + y^2 + z^2$

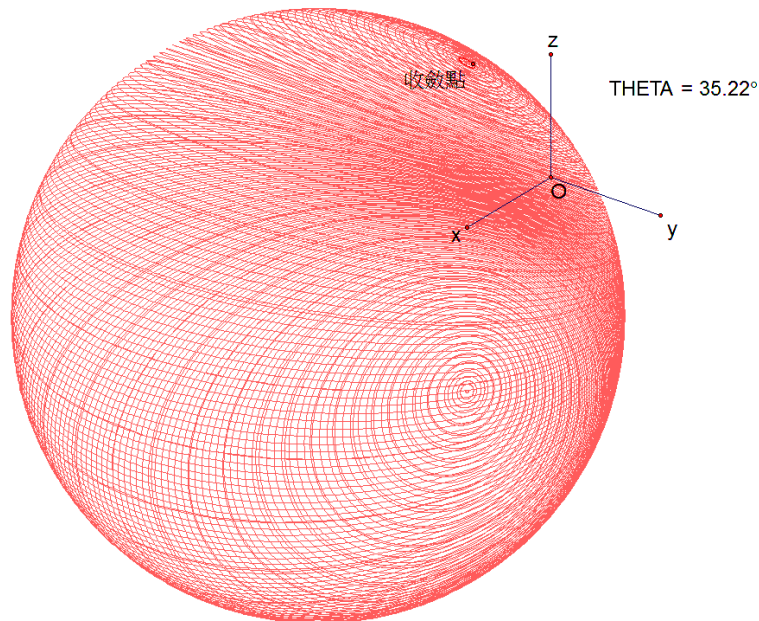
$$\begin{aligned} &= \left( \frac{1-r\cos\theta-r\cos\phi+r^2\cos\theta\cos\phi}{-r^3+r^2s-rs+1} \right)^2 + \left( \frac{r\cos\theta\sin\phi-r^2\sin\phi}{-r^3+r^2s-rs+1} \right)^2 + \left( \frac{r\sin\theta-r^2\sin\theta\cos\phi}{-r^3+r^2s-rs+1} \right)^2 \\ &= \frac{1-2r(\cos\theta + \cos\phi) + r^2(1+4\cos\theta\cos\phi + \cos^2\phi + \cos^2\theta - \cos^2\theta\cos^2\phi) - 2r^3(\cos\phi + \cos\theta) + r^4}{(-r^3+r^2s-rs+1)^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - 2rk + r^2(1 + k^2 + 2\cos\theta\cos\phi - \cos^2\theta\cos^2\phi) - 2r^3k + r^4}{(-r^3 + r^2s - rs + 1)^2} \quad (k = \cos\theta + \cos\phi) \\
&= \frac{[(1 - rk)^2 + 2r^2(1 - rk) + r^4] - r^2(\cos\theta\cos\phi - 1)^2}{(-r^3 + r^2s - rs + 1)^2} \\
&= \frac{(1 - rk + r^2 + r\cos\theta\cos\phi - r)(1 - rk + r^2 - r\cos\theta\cos\phi + r)}{(1 - r)^2(r^2 + r + 1 - rs)^2} \\
&= \frac{(1 - rk + r^2 + r\cos\theta\cos\phi - r)(r^2 + r + 1 - rs)}{(1 - r)^2(r^2 + r + 1 - rs)^2} \\
&= \frac{(r^2 - r - rk + r\cos\theta\cos\phi + 1)}{(1 - r)(-r^3 + r^2s - rs + 1)} = \frac{(r^2 - r - rk + r\cos\theta\cos\phi + 1)(1 + r)}{(1 - r)(-r^3 + r^2s - rs + 1)(1 + r)} \\
&= \frac{r^3 - r^2k + r^2\cos\theta\cos\phi - rk + r\cos\theta\cos\phi + 1}{(1 - r^2)(-r^3 + r^2s - rs + 1)} \\
&= \frac{1}{(1 - r^2)} \times \frac{2(r^2\cos\theta\cos\phi - rk + 1) - (-r^3 + r^2s - rs + 1)}{(-r^3 + r^2s - rs + 1)} = \frac{2x - 1}{(1 - r^2)} \\
\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{2x - 1}{(1 - r^2)} \\
\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{2x}{(1 - r^2)} + \frac{-1}{(1 - r^2)} = \frac{2x}{(1 - r^2)} + \frac{(r^2 - 1)}{(1 - r^2)^2} = \frac{2x}{(1 - r^2)} + \frac{-1}{(1 - r^2)^2} + \frac{r^2}{(1 - r^2)^2} \\
\Rightarrow x^2 - \frac{2x}{(1 - r^2)} + \frac{1}{(1 - r^2)^2} + y^2 + z^2 &= \left(\frac{r}{1 - r^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \left(x - \frac{1}{1 - r^2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{r}{1 - r^2}\right)^2
\end{aligned}$$

(三) 結論：各收斂點存在於一個球心在 $\left(\frac{1}{1 - r^2}, 0, 0\right)$ ，半徑為 $\left(\frac{r}{1 - r^2}\right)$ 的球  $S$  上。

(如圖八)

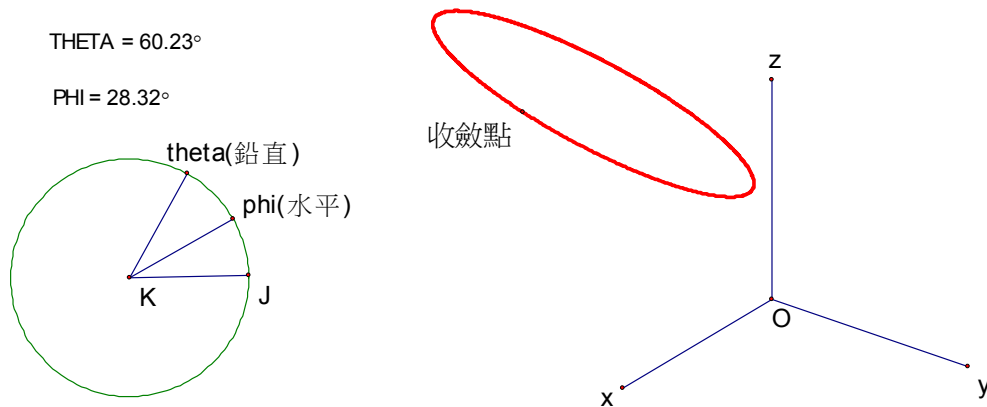


▲ 圖八

#### 四、收斂面與配極直線

##### (一) 仰角與轉向角分別固定時所產生的收斂面

透過動態幾何軟體，我們觀察到當仰角  $\theta$  與轉向角  $\phi$  分別固定時所產生的收斂點均位於一圓上，如圖九中紅色的部分即為仰角  $\theta = 60.23^\circ$ ，轉向角  $\phi$  為任意角時的收斂圓。由於空間中的圓並無直接的方程式，故我們先求出這些收斂點所在的平面  $E$ ，再寫出球面  $S$  與平面  $E$  的交圓方程式。



▲ 圖九

定理二：當瓢蟲固定仰角  $\theta \left( -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ ，改變轉向角  $\phi (0 \leq \phi \leq 2\pi)$  時的收斂點  $P$  均位於一平面  $E_1 : (r \sin \theta)x + (r \cos \theta - 1)z = 0$  上。反之，若固定轉向角  $\phi (0 \leq \phi \leq 2\pi)$ ，改變仰角  $\theta \left( -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$  時，收斂點  $P$  均位於一平面  $E_2 : \sin \phi x + (r - \cos \phi)y = \sin \phi$  上。

##### 【證明】

- 我們取三個轉向角  $\phi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  分別求出三個瓢蟲的收斂點  $A_1, B_1, C_1$  如下：

當  $\phi = 0^\circ$  時，收斂點坐標  $A_1$  為

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1 - r \cos \theta - r + r^2 \cos \theta}{-r^3 + r^2(2 \cos \theta + 1) - r(2 \cos \theta + 1) + 1}, 0, \frac{r \sin \theta - r^2 \sin \theta}{-r^3 + r^2(2 \cos \theta + 1) - r(2 \cos \theta + 1) + 1} \right) \\ & = \left( \frac{r \cos \theta - 1}{-r^2 + 2r \cos \theta - 1}, 0, \frac{-r \sin \theta}{-r^2 + 2r \cos \theta - 1} \right) \end{aligned}$$

當  $\phi = 90^\circ$  時，收斂點坐標  $B_1$  為

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1-r\cos\theta}{-r^3+r^2\cos\theta-r\cos\theta+1}, \frac{r\cos\theta-r^2}{-r^3+r^2\cos\theta-r\cos\theta+1}, \frac{r\sin\theta}{-r^3+r^2\cos\theta-r\cos\theta+1} \right) \\ &= \left( \frac{1-r\cos\theta}{(r-1)(-r^2+r\cos\theta-r-1)}, \frac{r(\cos\theta-r)}{(r-1)(-r^2+r\cos\theta-r-1)}, \frac{r\sin\theta}{(r-1)(-r^2+r\cos\theta-r-1)} \right) \end{aligned}$$

當  $\phi = 180^\circ$  時，收斂點坐標  $C_1$  為

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1-r\cos\theta+r-r^2\cos\theta}{-r^3-r^2+r+1}, 0, \frac{r\sin\theta+r^2\sin\theta}{-r^3-r^2+r+1} \right) \\ &= \left( \frac{r\cos\theta-1}{(r-1)(r+1)}, 0, \frac{-r\sin\theta}{(r-1)(r+1)} \right) \end{aligned}$$

由  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  三點可得

$$\begin{aligned} \vec{C_1A_1} &= \left( \frac{r\cos\theta-1}{-r^2+2r\cos\theta-1} - \frac{r\cos\theta-1}{r^2-1}, 0, \frac{-r\sin\theta}{-r^2+2r\cos\theta-1} - \frac{-r\sin\theta}{r^2-1} \right) \\ &= \left( \frac{1}{-r^2+2r\cos\theta-1} - \frac{1}{r^2-1} \right) (r\cos\theta-1, 0, -r\sin\theta) \\ &\Rightarrow \vec{C_1A_1} // (r\cos\theta-1, 0, -r\sin\theta) \\ \vec{C_1B_1} &= \left( \frac{1}{(r-1)(-r^2+r\cos\theta-r-1)} + \frac{1}{r^2-1} \right) (1-r\cos\theta, r+1, r\sin\theta) \\ &\Rightarrow \vec{C_1B_1} // (1-r\cos\theta, r+1, r\sin\theta) \\ &\Rightarrow \vec{C_1A_1} \times \vec{C_1B_1} // (r\sin\theta, 0, r\cos\theta-1) \end{aligned}$$

$$\text{代入 } C_1 \text{ 得平面 } E_1 \text{ 方程式 } r\sin\theta \left( x - \frac{r\cos\theta-1}{r^2-1} \right) + (r\cos\theta-1) \left( z + \frac{r\sin\theta}{r^2-1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow E_1: (r\sin\theta)x + (r\cos\theta-1)z = 0$$

2. 當  $\theta = 0^\circ$ ，收斂點坐標  $A_2$  為

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1-r\cos\phi-r+r^2\cos\phi}{-r^3+r^2(2\cos\phi+1)-r(2\cos\phi+1)+1}, \frac{r\sin\phi-r^2\sin\phi}{-r^3+r^2(2\cos\phi+1)-r(2\cos\phi+1)+1}, 0 \right) \\ &= \left( \frac{r\cos\phi-1}{-r^2+2r\cos\phi-1}, \frac{-r\sin\phi}{-r^2+2r\cos\phi-1}, 0 \right) \end{aligned}$$

當  $\theta = 180^\circ$ ，收斂點坐標  $C_2$  為

$$\left( \frac{1-r\cos\phi+r-r^2\cos\phi}{-r^3-r^2+r+1}, \frac{-r\sin\phi-r^2\sin\phi}{-r^3-r^2+r+1}, 0 \right) = \left( \frac{-r\cos\phi+1}{-r^2+1}, \frac{-r\sin\phi}{-r^2+1}, 0 \right)$$

當  $\theta = 90^\circ$ ，收斂點坐標  $B_2$  為

$$\left( \frac{1 - r \cos \phi}{-r^3 + r^2 \cos \phi - r \cos \phi + 1}, \frac{-r^2 \sin \phi}{-r^3 + r^2 \cos \phi - r \cos \phi + 1}, \frac{r - r^2 \cos \phi}{-r^3 + r^2 \cos \phi - r \cos \phi + 1} \right)$$

當  $\theta = 270^\circ$ ，收斂點坐標  $D_2$  為

$$\left( \frac{1 - r \cos \phi}{-r^3 + r^2 \cos \phi - r \cos \phi + 1}, \frac{-r^2 \sin \phi}{-r^3 + r^2 \cos \phi - r \cos \phi + 1}, \frac{-r + r^2 \cos \phi}{-r^3 + r^2 \cos \phi - r \cos \phi + 1} \right)$$

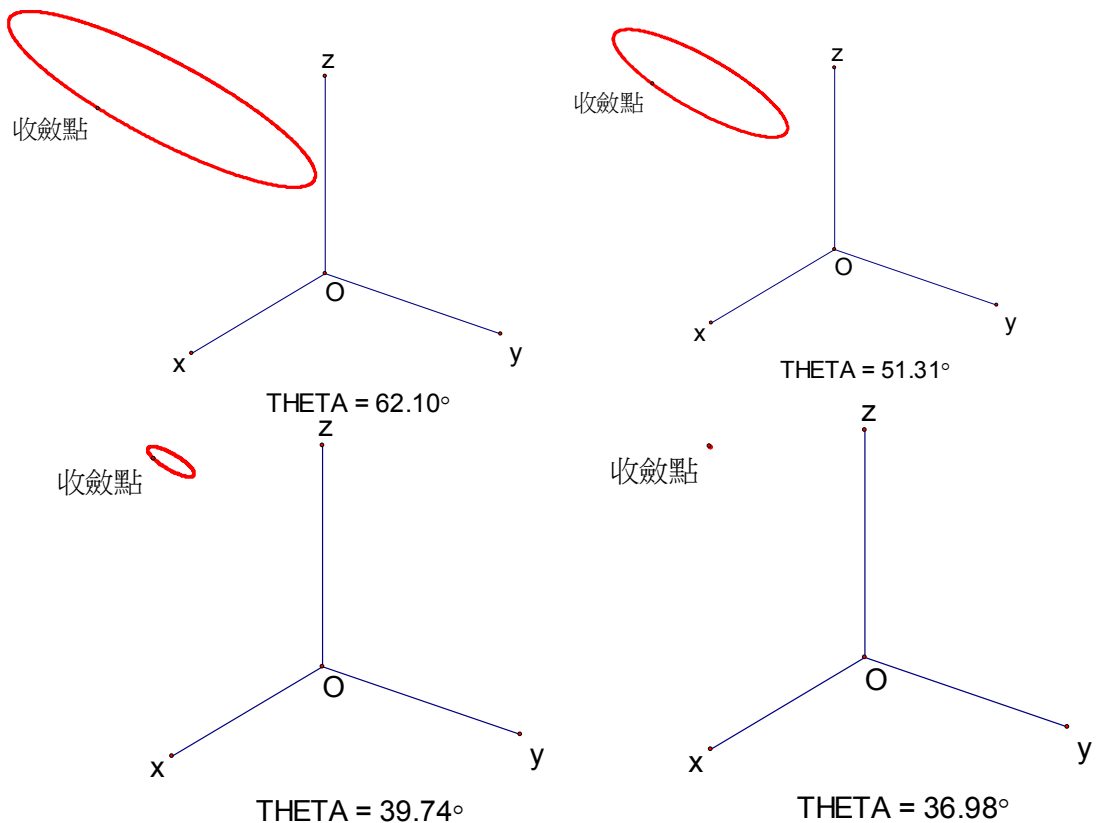
$$\vec{A_2 C_2} // (\cos \phi - r, \sin \phi, 0), \quad \vec{B_2 D_2} // (0, 0, 1 - r \cos \phi)$$

$$\vec{A_2 C_2} \times \vec{B_2 D_2} = (\cos \phi - r, \sin \phi, 0) \times (0, 0, 1 - r \cos \phi) // (\sin \phi, r - \cos \phi, 0)$$

代入  $C_2$  得平面  $E_2$  方程式  $\sin \phi x + (r - \cos \phi) y = \sin \phi$

## (二) 固定點的探討

我們改變  $\theta$  後交圓  $C_1$  :  $\begin{cases} \left(x - \frac{1}{1-r^2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2 \\ r \sin \theta x + (r \cos \theta - 1)z = 0 \end{cases}$  會隨著  $\theta$  的不同而產生各種大小不同的圓，我們觀察到當仰角  $\theta$  逐漸變小時，收斂圓也會逐漸縮小。(如圖十)



▲ 圖十

其中圖十右下角的圖形是我們感興趣的，這個圖形表示瓢蟲若固定某個仰角行走，則不論轉向角  $\phi$  為幾度瓢蟲都會收斂於該點上，以下我們稱此點為**固定點**。

**定理三：**當瓢蟲的仰角  $\theta = \cos^{-1} r$  與  $-\cos^{-1} r$  時，不論轉向角  $\phi$  為幾度，瓢蟲分別收斂於

$$\text{固定點 } A \left( 1, 0, \frac{r\sqrt{1-r^2}}{1-r^2} \right) \text{ 與 } B \left( 1, 0, -\frac{r\sqrt{1-r^2}}{1-r^2} \right)。$$

**【證明】**

1. 已知球  $S$  的球心為  $(\frac{1}{1-r^2}, 0, 0)$ ，半徑為  $\frac{r}{1-r^2}$ ，當收斂圓變成一點時，球面  $S$  與平

$$\text{面 } E \text{ 恰好相切，故 } d(S, E) = \frac{r}{1-r^2} \Rightarrow \frac{\left| r \sin \theta \frac{1}{1-r^2} \right|}{\sqrt{r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta - 1)^2}} = \frac{r}{1-r^2}$$

$$\Rightarrow \left| r \sin \theta \frac{1}{1-r^2} \right|^2 = \left( \frac{r}{1-r^2} \right)^2 [r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta - 1)^2]$$

$$\Rightarrow r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{1}{1-r^2} \right)^2 = \left( \frac{r}{1-r^2} \right)^2 [r^2 - 2r \cos \theta + 1]$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta = r^2 - 2r \cos \theta + 1 \Rightarrow \cos^2 \theta - 2r \cos \theta + r^2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta = r \Rightarrow \theta = \pm \cos^{-1} r$$

故當瓢蟲仰角  $\theta = \pm \cos^{-1} r$  時，不論轉向角  $\phi$  為幾度，瓢蟲均會收斂於一點。

$$2. \text{ 將 } \theta = \pm \cos^{-1} r \text{ 代入收斂點 } P \begin{cases} x = \frac{1 - r \cos \theta - r \cos \phi + r^2 \cos \theta \cos \phi}{-r^3 + r^2 s - r s + 1} \\ y = \frac{r \cos \theta \sin \phi - r^2 \sin \phi}{-r^3 + r^2 s - r s + 1} \\ z = \frac{r \sin \theta - r^2 \sin \theta \cos \phi}{-r^3 + r^2 s - r s + 1} \end{cases}$$

$$(s = \cos \theta + \cos \phi + \cos \theta \cos \phi) \text{ 後可得 } (x, y, z) = \left( 1, 0, \pm \frac{r\sqrt{1-r^2}}{1-r^2} \right)。$$

### (三) 配極直線的產生

定理四：已知點  $H$  為平面  $E_1$  對於球面  $S$  的極點，則  $H$  必落在直線  $\overline{AB}$  上 ( $A$ 、 $B$  為定理三中的固定點)。同理，若點  $K$  為平面  $E_2$  對於球面  $S$  的極點，則  $K$  必落在  $y$  軸上。意即：直線  $\overline{AB}$  與  $y$  軸為球面  $S$  的配極直線。

(註： $E_1$  為恆通過  $y$  軸的平面， $E_2$  為恆通過  $\overline{AB}$  的平面)

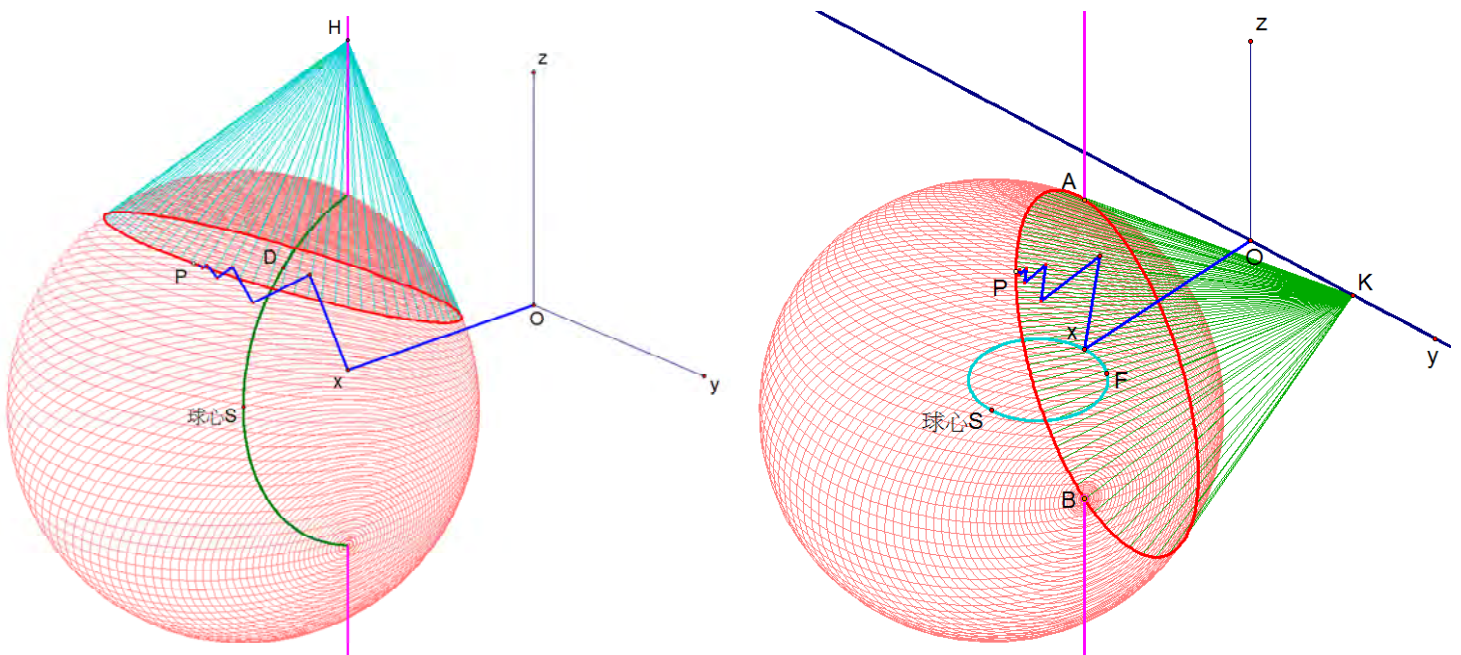
#### 【證明】

1. 平面  $E_1$  對於球面  $S$  的極點即為平面  $E_1$  與球面  $S$  之截圓

$$C_1: \begin{cases} \left(x - \frac{1}{1-r^2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2 \\ r \sin \theta x + (r \cos \theta - 1)z = 0 \end{cases}$$

$D \xrightarrow{I(S, \left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2)} H$ ，又因為  $C_1$  的圓心  $D$  必過球心  $S$  與固定點  $A$ 、 $B$ ，故  $H$  必落在直線  $\overline{AB}$  上 ( $A$ 、 $B$  為定理三中的固定點) (如圖十一左圖)

2. 同理，若空間中一點  $K$  為平面  $E_2$  對於球面  $S$  的極點，則  $K$  必落在  $y$  軸上。  
(如圖十一右圖)



▲ 圖十一

## 五、行走軌跡的模式分析

對於瓢蟲的行走模式，從繞行來看，則瓢蟲為先繞  $y$  軸旋轉  $(-\theta)$  角再繞  $z$  軸旋轉  $\phi$  角，接著移動的距離為前一段的  $r$  倍，持續不斷走下去。但我們好奇的是，矩陣  $MK$  在瓢蟲的行走模式中扮演的角色為何？

**定理五：**瓢蟲是以直線  $L$  為旋轉軸，每次轉向角為  $\alpha$  的等比繞行模式。其中  $L$  的參數式為

$$\begin{cases} x = \alpha + (\sin \theta \sin \phi)t \\ y = \beta - [\sin \theta (\cos \phi + 1)]t, (t \in \mathbb{R}), (\alpha, \beta, \gamma) \text{ 為收斂點 } P \text{ 之坐標;} \\ z = \gamma + [\sin \phi (\cos \theta + 1)]t \end{cases}$$

$$\text{轉向角 } \alpha = \cos^{-1} \left( \frac{\cos \theta + \cos \phi + \cos \theta \cos \phi - 1}{2} \right)$$

(一) 說明瓢蟲行走所繞的軸  $L$

$$\text{令 } MK = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} = T, \text{ 旋轉軸向量 } \vec{v}$$

$$\Rightarrow T(\vec{v}) = \vec{v} \Rightarrow T(\vec{v}) - \vec{v} = 0 \Rightarrow (T - I)\vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi - 1 & -\sin \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi - 1 & -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta - 1 \end{bmatrix} \vec{v} = 0$$

$$\text{我們令向量 } \vec{v} = (x, y, z), \text{ 則 } \begin{cases} (\cos \theta \cos \phi - 1) \cdot x - \sin \phi \cdot y - \sin \theta \cos \phi \cdot z = 0 \\ \cos \theta \sin \phi \cdot x - (\cos \phi - 1) \cdot y - \sin \theta \sin \phi \cdot z = 0 \\ \sin \theta \cdot x - (\cos \theta - 1) \cdot z = 0 \end{cases}$$

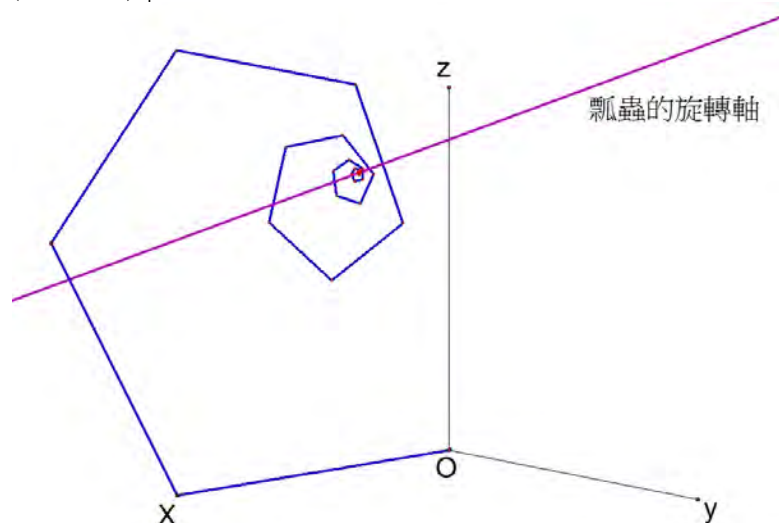
$$\Rightarrow (x, y, z) = \left( \cos \phi - 1, \sin \phi, \frac{\sin \theta (\cos \phi - 1)}{1 - \cos \theta} \right)$$

$$= ((\cos \phi - 1)(1 - \cos \theta), \sin \phi(1 - \cos \theta), \sin \theta(\cos \phi - 1))$$

$$= (\sin \theta \sin \phi, -\sin \theta(\cos \phi + 1), \sin \phi(\cos \theta + 1))$$

又因為瓢蟲的收斂點為  $P$ ，故可得瓢蟲所繞的軸  $L$  之參數式為

$$\begin{cases} x = \alpha + (\sin \theta \sin \phi)t \\ y = \beta - [\sin \theta (\cos \phi + 1)]t, (t \in \mathbb{R}), (\alpha, \beta, \gamma) \text{ 為收斂點 } P \text{ 之坐標。 (如圖十二)} \\ z = \gamma + [\sin \phi (\cos \theta + 1)]t \end{cases}$$



▲ 圖十二

## (二) 說明瓢蟲行走的轉向角 $\alpha$

在舊基底  $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$  下，瓢蟲的行走雖為旋轉，但卻難以掌握。因此，我們取平行旋

轉軸的向量  $e_3' = \left( \frac{\sin \theta \sin \phi}{2 \sin \alpha}, \frac{-\sin \theta (\cos \phi + 1)}{2 \sin \alpha}, \frac{\sin \phi (\cos \theta + 1)}{2 \sin \alpha} \right)$  與另取兩個單位正交向量

$e_1', e_2'$  形成新的有序基底  $\beta' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ ，

$$\text{令 } [T]_{\beta} = MK = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$\text{則由換底公式： } P^{-1}[T]_{\beta}P = [T]_{\beta'}, \text{ 可得 } [T]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{即 } P^{-1} \left( \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \right) P = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因為存在可逆矩陣  $P$  使得  $P^{-1}[T]_{\beta}P = [T]_{\beta'}$ ，所以矩陣  $[T]_{\beta}$ 、 $[T]_{\beta'}$  相似，故兩矩陣之跡數(trace)相同。

$$\Rightarrow \cos \theta + \cos \phi + \cos \theta \cos \phi = 1 + 2 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\cos \theta + \cos \phi + \cos \theta \cos \phi - 1}{2}$$



$$\text{所以 } \alpha = \cos^{-1} \left( \frac{\cos \theta + \cos \phi + \cos \theta \cos \phi - 1}{2} \right)。$$

## 六、發現位似旋轉變換

定理六：瓢蟲的繞行為以  $P$  為旋轉中心、位似比為  $r$ 、旋轉角為  $\alpha$ 、旋轉軸為  $L$  的位似旋轉變換。

(一) 瓢蟲的收斂點  $P$  與各轉向點  $P_n$  滿足  $|\vec{P_n P}| = r |\vec{P_{n-1} P}| (n \in \mathbb{N})$ 。

【證明】

瓢蟲的收斂點  $P$  之坐標為

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + rMK \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r^2 (MK)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + r^{n-1} (MK)^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots = (I - rMK)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

瓢蟲的第  $n$  個轉向點  $P_n = \vec{OP}_1 + \vec{P_1 P_2} + \vec{P_2 P_3} + \cdots + \vec{P_{n-1} P_n}$

$$P_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + rMK \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r^2 (MK)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r^3 (MK)^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + r^{n-1} (MK)^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= (I - (rMK)^n) (I - rMK)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (I - (rMK)^n) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} - (rMK)^n \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{P_n P} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} - (rMK)^n \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \right) = (rMK)^n \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = rMK (rMK)^{n-1} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = rMK \vec{P_{n-1} P}$$

由於  $MK$  為旋轉矩陣，故由旋轉不變量可得  $|\vec{P_n P}| = r |\vec{P_{n-1} P}|$ 。

(二) 位似旋轉變換

在此我們令  $O = P_0$

設  $T = MK$ ， $T_\alpha$  表示物件繞矩陣  $MK$  的旋轉軸  $L$  轉動  $\alpha$  的變換，

設  $T_\alpha(P_0) = P_0'$ ,  $T_\alpha(P_1) = P_1'$ ,  $\dots$ ,  $T_\alpha(P_n) = P_n'$

由於  $P$  在旋轉軸  $L$  上

$$\Rightarrow T_{\alpha}(\vec{PP}_0) = \vec{PP}_0', T_{\alpha}(\vec{PP}_1) = \vec{PP}_1', \dots, T_{\alpha}(\vec{PP}_n) = \vec{PP}_n'$$

$$\Rightarrow \vec{PP}_1 = rT_{\alpha}(\vec{PP}_0) = r\vec{PP}_0' \quad (|\vec{PP}_1| = r|\vec{PP}_0'|)$$

$$\Rightarrow \vec{PP}_n = rT_{\alpha}(\vec{PP}_{n-1}) = r\vec{PP}_{n-1}'$$

$\therefore P, P_{n-1}', P_n$  三點共線。

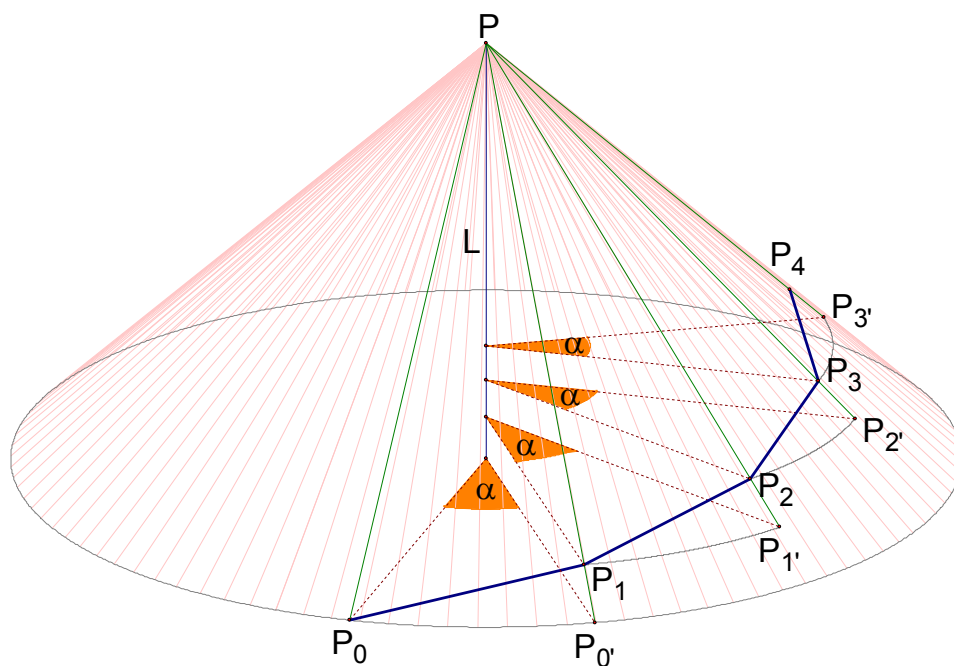
透過旋轉不變量可知  $\triangle PP_0P_1 \cong \triangle PP_0'P_1'$ ,  $\triangle PP_1P_2 \cong \triangle PP_1'P_2'$ ,  $\dots$ ,  $\triangle PP_{n-1}P_n \cong \triangle PP_{n-1}'P_n'$

所以  $\triangle PP_0P_1 \sim \triangle PP_1P_2 \sim \triangle PP_2P_3 \sim \dots \sim \triangle PP_{n-1}P_n (n \in \mathbb{N})$  且  $\triangle PP_{n-1}P_n$  為  $\triangle PP_{n-2}P_{n-1}$  以  $P$  位似旋轉  $\alpha$  角的結果。

故瓢蟲的繞行為以  $P$  為旋轉中心、位似比為  $r$ 、旋轉角為  $\alpha$ 、旋轉軸為  $L$  的位似旋轉變換。

### (三) 以圖說明

從上述的證明與圖十三可知，瓢蟲從  $P_0$  點出發，繞  $L$  軸旋轉  $\alpha$  角後來到  $P_0'$ ，而後以  $P$  為伸縮中心縮放  $r$  倍來到  $P_1$ ；接著繞  $L$  軸旋轉  $\alpha$  角後來到  $P_1'$ ，再以  $P$  為伸縮中心縮放  $r$  倍來到  $P_2$ ，以此類推繼續不斷，這就是瓢蟲的收斂行走模式，也因此我們可知瓢蟲的原點及轉向點  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  應屬於同一個直圓錐面。



▲圖十三

## 七、瓢蟲各轉向點 $P_n$ 所在的圓錐面

定理七：給定新基底  $\beta' = \{e_1', e_2', e_3'\}$  下，其中  $e_1' = \frac{\vec{MO}}{|\vec{MO}|}$ ，

$$e_3' = \left( \frac{\sin \theta \sin \phi}{2 \sin \alpha}, \frac{-\sin \theta (\cos \phi + 1)}{2 \sin \alpha}, \frac{\sin \phi (\cos \theta + 1)}{2 \sin \alpha} \right), e_2' \text{ 為 } e_1' \times e_3' \text{ 的單位向量，若以原點}$$

對軸  $L$  的投影點  $M$  為新原點，則瓢蟲繞行軌跡所在的錐面  $\Gamma$  之方程式為

$$x^2 + y^2 = a^2 \left( \frac{c-z}{c} \right)^2, \text{ 其中 } a = d(O, L), c = |\vec{PM}|。$$

### (一) 證明圓錐面方程式

【證明】

給定新基底  $\beta' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ ，並以原點  $O$  對軸  $L$  的投影點  $M$  為新原點下，瓢蟲的起始點為  $(a, 0, 0)$ ， $a = |\vec{MO}|$ ，旋轉軸向量  $\vec{v} = (\sin \theta \sin \phi, -\sin \theta (\cos \phi + 1), \sin \phi (\cos \theta + 1))$

$$\Rightarrow \vec{PO} = \left( -\frac{1-r \cos \theta - r \cos \phi + r^2 \cos \theta \cos \phi}{-r^3 + r^2 s - rs + 1}, -\frac{r \cos \theta \sin \phi - r^2 \sin \phi}{-r^3 + r^2 s - rs + 1}, -\frac{r \sin \theta - r^2 \sin \theta \cos \phi}{-r^3 + r^2 s - rs + 1} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{PM} = \frac{\vec{PO} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

$$= \frac{\sin \theta \sin \phi (r^2 - r(s-1) + 1)}{r^3 - r^2 s + rs - 1} (\sin \theta \sin \phi, -\sin \theta (\cos \phi + 1), \sin \phi (\cos \theta + 1))$$

$$= \frac{\sin \theta \sin \phi (r^2 - r(s-1) + 1)}{(s-3)(s+1)(r^3 - r^2 s + rs - 1)} (\sin \theta \sin \phi, -\sin \theta (\cos \phi + 1), \sin \phi (\cos \theta + 1))$$

$$\Rightarrow \vec{MO} = \vec{PO} - \vec{PM}$$

$$\text{則 } \vec{MO} = \frac{1}{(s-3)(s+1)(r^3 - r^2 s + rs - 1)} (x, y, z)$$

$$\begin{cases} x = (s-3)(s+1)(1-r\cos\theta - r\cos\phi + r^2\cos\theta\cos\phi) - \sin^2\theta\sin^2\phi(r^2 - r(s-1) + 1) \\ y = (s-3)(s+1)(r\cos\theta\sin\phi - r^2\sin\phi) + \sin^2\theta\sin\phi(r^2 - r(s-1) + 1)(1 + \cos\phi) \\ z = (s-3)(s+1)(r\sin\theta - r^2\sin\theta\cos\phi) - \sin\theta\sin^2\phi(r^2 - r(s-1) + 1)(1 + \cos\theta) \end{cases}$$

$$|\vec{MO}|^2 = (\vec{PO} - \vec{PM})^2 = |\vec{PO}|^2 - 2\vec{PO} \cdot \vec{PM} + |\vec{PM}|^2$$

$$|\vec{MO}|^2 = \frac{(s-3)^2(s+1)^2|\vec{PO}|^2 + \sin^2\theta\sin^2\phi(r^2 - r(s-1) + 1)^2|\vec{v}|^2 - 2\sin\theta\sin\phi(s-3)(s+1)(r^2 - r(s-1) + 1)(r^3 - r^2s + rs - 1)(\vec{PO} \cdot \vec{v})}{(s-3)^2(s+1)^2(r^3 - r^2s + rs - 1)^2}$$

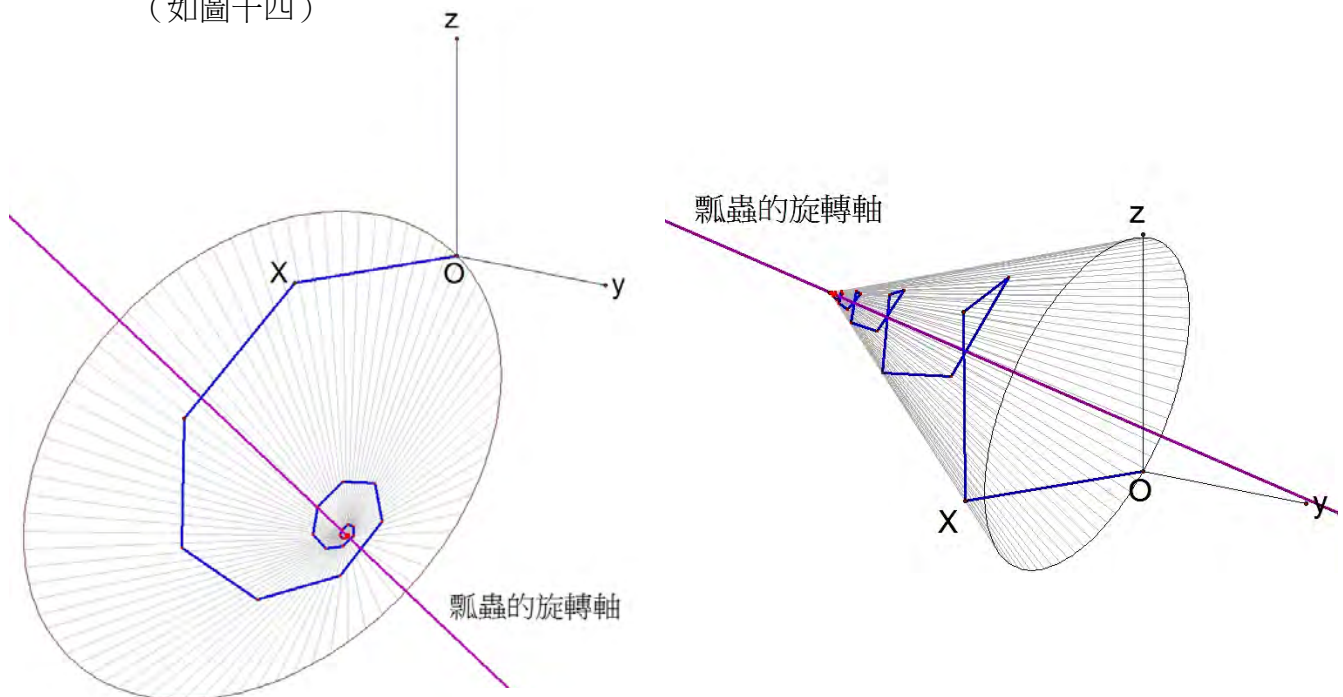
$$|\vec{MO}| = a = \sqrt{\frac{(s-3)^2(s+1)^2|\vec{PO}|^2 + \sin^2\theta\sin^2\phi(r^2 - r(s-1) + 1)^2|\vec{v}|^2 - 2\sin\theta\sin\phi(s-3)(s+1)(r^2 - r(s-1) + 1)(r^3 - r^2s + rs - 1)(\vec{PO} \cdot \vec{v})}{(s-3)(s+1)(r^3 - r^2s + rs - 1)}}$$

收斂點坐標為  $P(0,0,c)$  ( $c = |\vec{PM}|$ )，在新的  $xy$  平面與圓錐的截面上取一點

$$S(a\cos\alpha, a\sin\alpha, 0), \text{ 則 } \vec{PS} = (a\cos\alpha, a\sin\alpha, -c), \text{ 所以 } \vec{PS} = \begin{cases} x = a\cos\alpha t \\ y = a\sin\alpha t \\ z = c - ct \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)t^2 = a^2t^2 \\ t^2 = \left(\frac{c-z}{c}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \text{圓錐面 } \Gamma \text{ 的方程式為 } x^2 + y^2 = a^2\left(\frac{c-z}{c}\right)^2$$

(如圖十四)



▲ 圖十四

## 八、瓢蟲各轉向點 $P_n$ 所在的等角螺線

定理八：給定新基底  $\beta' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ ，及新原點  $M$ ，瓢蟲的收斂點均位於等角螺線  $G$  上，

$$G = \begin{cases} x = ar^t \cos t\alpha \\ y = ar^t \sin t\alpha \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = c(1-r^t) \end{cases} \circ$$

(一) 在新基底  $\beta'$  下，瓢蟲的轉向點坐標為  $(ar^n \cos n\alpha, ar^n \sin n\alpha, c(1-r^n)) (n = 0, 1, 2, \dots)$

【證明】

因為新基底下的  $z$  軸即為瓢蟲繞行的旋轉軸，所以瓢蟲從  $(a, 0, 0)$  不斷繞  $z$  軸轉  $\alpha$  角且與收斂點距離不斷縮為  $r$  倍，也就是與收斂點相距高度不斷縮為  $r$  倍，所以第  $n$  次旋轉後高度上升為  $c(1-r^n)$ ，轉向點坐標可以寫成

$$(ar^n \cos n\alpha, ar^n \sin n\alpha, c(1-r^n)) (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \circ$$

(二) 在新基底  $\beta'$  下，瓢蟲繞行的轉向點在一等角螺線  $G$  上

我們將轉向點坐標中的  $n (n = 0, 1, 2, \dots)$  換成  $t (t \in \mathbb{R})$  即可得參數式

$$G = \begin{cases} x = ar^t \cos t\alpha \\ y = ar^t \sin t\alpha \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = c(1-r^t) \end{cases}, \text{ 以下我們將證明 } G \text{ 所繪出的曲線為空間中的等角螺線}$$

【證明】

軌跡之等角性質：

$f(\theta)$  為瓢蟲軌跡所在曲線  $G$  在新的  $xy$  平面上之投影，則  $f(\theta) = ar^{\frac{\theta}{\alpha}}$

$$\text{曲線 } G \text{ 上一點 } P_t(ar^t \cos t\alpha, ar^t \sin t\alpha, c - cr^t) = \left( ar^{\frac{\theta}{\alpha}} \cos \theta, ar^{\frac{\theta}{\alpha}} \sin \theta, c - cr^{\frac{\theta}{\alpha}} \right)$$

( $\alpha$  為旋轉角， $\theta$  為任意角)

$$\vec{PP}_t = \left( ar^{\frac{\theta}{\alpha}} \cos \theta, ar^{\frac{\theta}{\alpha}} \sin \theta, -cr^{\frac{\theta}{\alpha}} \right) = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta, f(\theta) \tan \zeta) \left( \tan \zeta = -\frac{c}{a} \right)$$

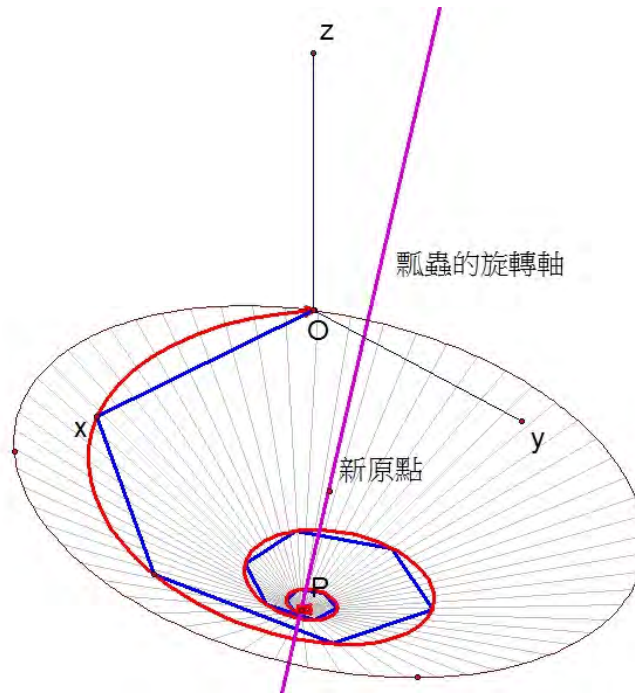
令  $\vec{PP}_n$  與其切向量  $(f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta, f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta, f'(\theta) \tan \zeta)$  夾角

$\alpha'$ ，則：

$$\cos \alpha' = \frac{f'(\theta) + f'(\theta) \tan^2 \zeta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \tan^2 \zeta} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2 (1 + \tan^2 \zeta)}} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha \cos^2 \zeta + 1}}$$

$\Rightarrow \tan \alpha' = \tan \alpha \cos \zeta = \text{定值}。$

(三) 瓢蟲的收斂點均位於等角螺線  $G$  上。(如圖十五)

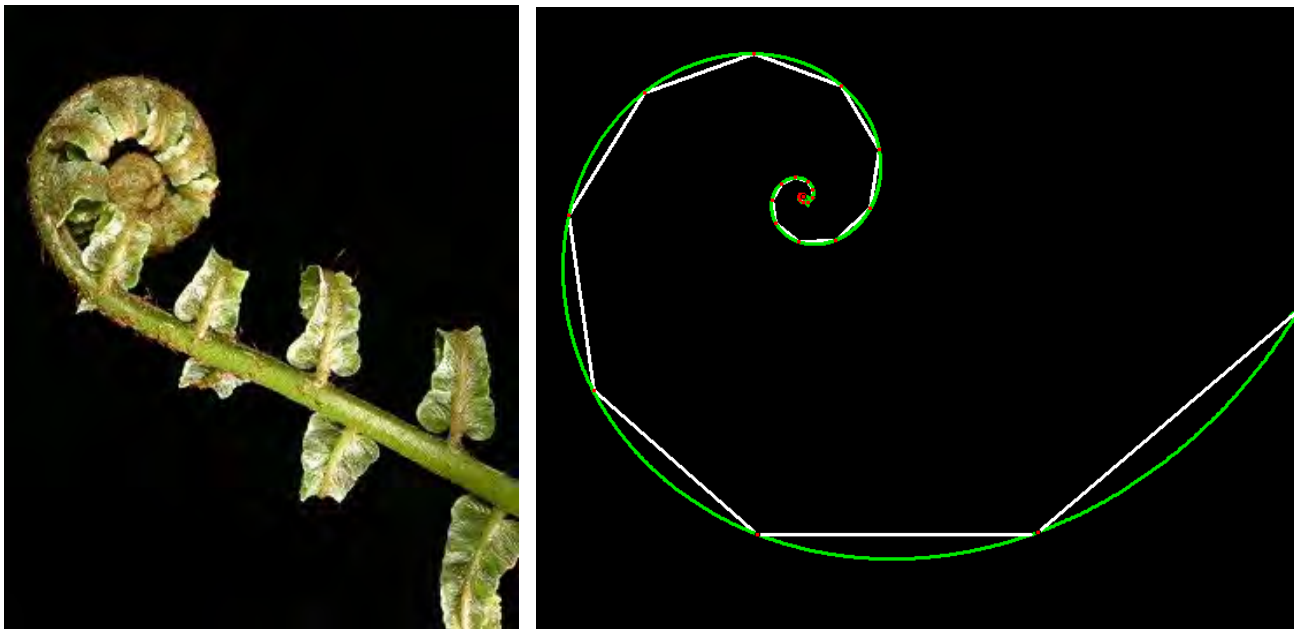


▲ 圖十五

## 九、等比繞行與大自然的意向

### (一) 蕨類

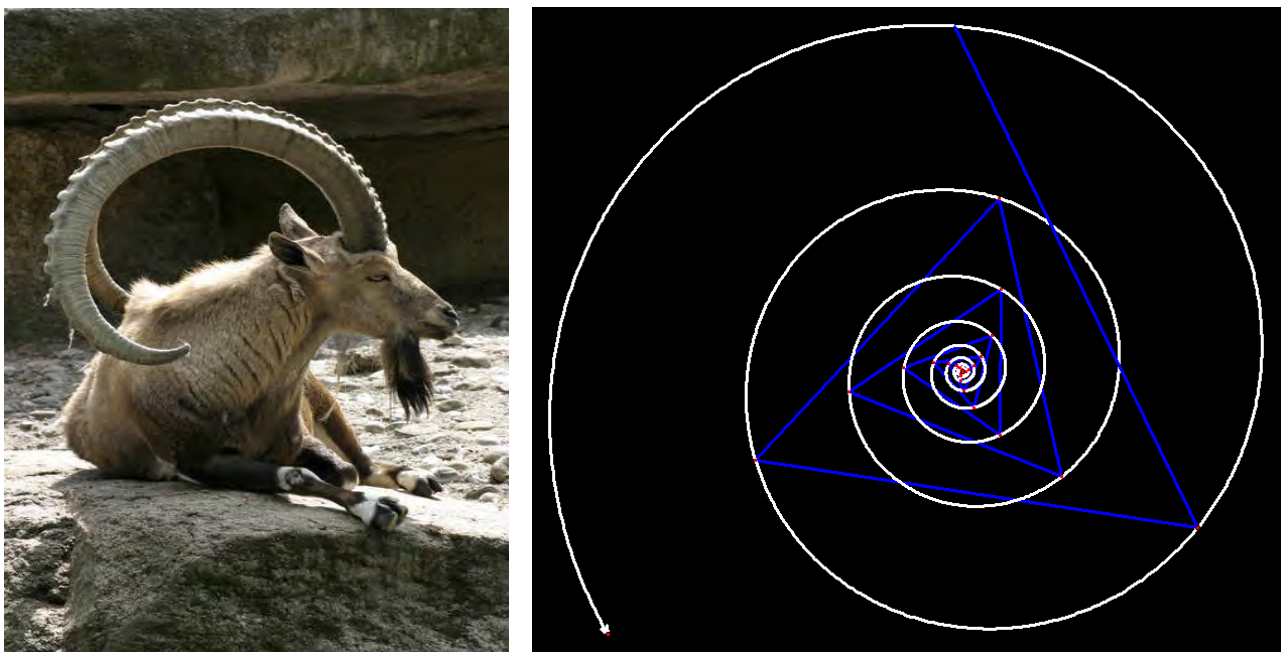
當我們一看到各轉向點的軌跡就馬上對蕨類有了聯想，那彎曲的形狀好似正開展的蕨類，圖中的等角螺線與蕨類是否很相似呢？



▲ 圖十六

### (二) 山羊

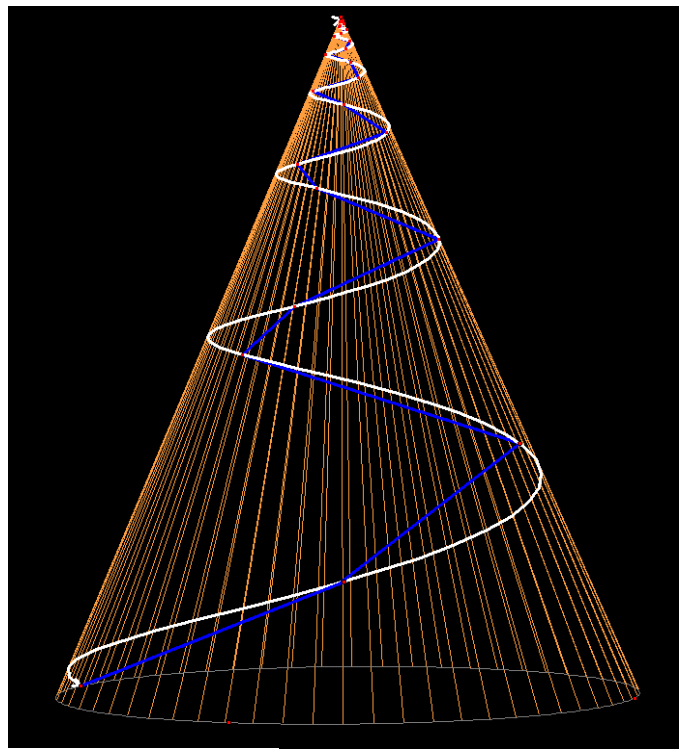
當我們從收斂點上方俯瞰瓢蟲行走軌跡所在的螺線，看起來像羊的犄角，同樣是照著螺線的模式生長，且其犄角呈螺線狀在打鬥時有減震的功能。兩者不約而同的相似，是不是很有趣呢？



▲ 圖十七



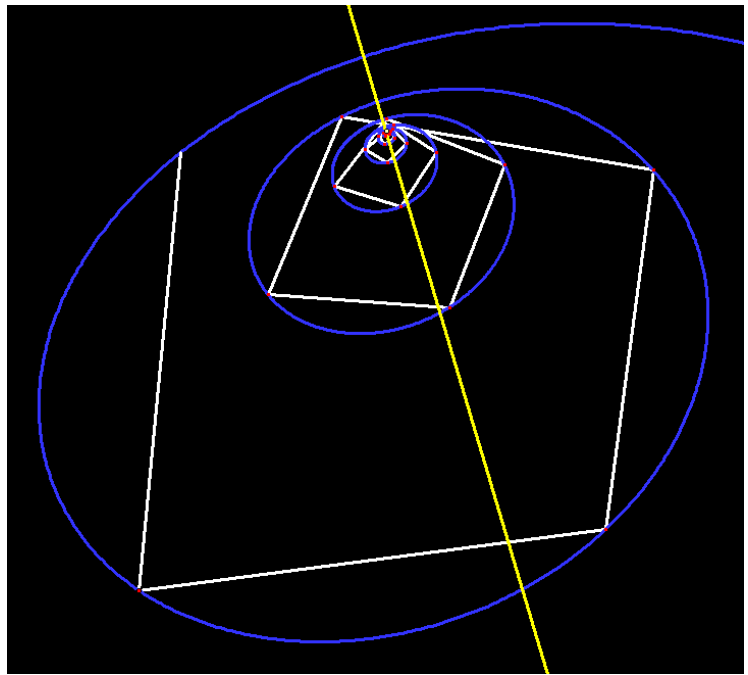
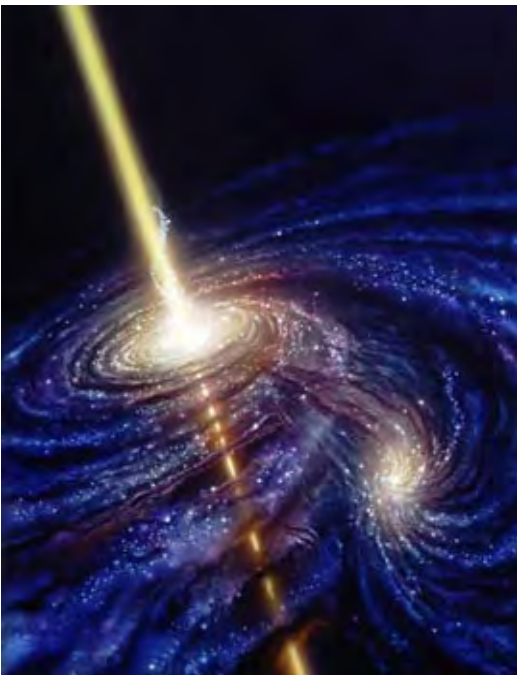
因為自然界中螺線隨處可見，因此我們猜想瓢蟲行走軌跡所在的等角螺線和自然界應當有某種關聯性，即使是小小的蝸牛殼都和瓢蟲的等角螺線相似。



▲ 圖十八

#### (四)銀河系

令我們驚奇的是，在浩瀚的宇宙中也可以找到相似的等角螺線。



▲ 圖十九



## 伍、討論

研究的過程中我們從空間中的狀態回顧平面的收斂模式，我們討論如下：

### 一、平面上（仰角 $\theta = 0$ 時）

雖然歷屆作品對於平面上的研究已算完整，但我們嘗試著從較高的觀點來看平面上的收斂型態，平面上的收斂可以看成如下：

（一）Möbius 變換： $f(z) = 1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z}$  在複數平面上屬於保角變換，也就是說

如果原本  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  在一個半徑為  $r$  的圓上，則  $\frac{1}{1-z}$  當然也就是個圓。

（二）反演變換：基本上會有反演的產生是源自於（一），因為複平面上  $f(z) = \frac{1}{z}$  就是一個反演變換，所以可以看成是圓  $(1, r)$  對單位圓作反演後的結果。

### 二、空間中

空間中的狀況是以矩陣操作，所以我們從兩個面向來談：位似旋轉、仿射

#### （一）位似旋轉變換

由於  $P$  點到兩相異定點  $O$ 、 $P_1$  之距離的比例為  $1:r$ ，從阿波羅圓的角度來看， $P$  點所形成的圖形為圓，又因為瓢蟲為空間行走，所以可以猜測瓢蟲的收斂點  $P$  所成的軌跡為一個球  $S$ ，我們予以計算如下：令  $P$  點的坐標為  $(x, y, z)$ ，則：

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} : \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = 1:r$ ，化簡後就可以得到方程式

$\left(x - \frac{1}{1-r^2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$ ，故各收斂點存在於一個球心在  $\left(\frac{1}{1-r^2}, 0, 0\right)$ ，且

半徑為  $\left(\frac{r}{1-r^2}\right)$  的球  $S$  上。

#### （二）仿射：

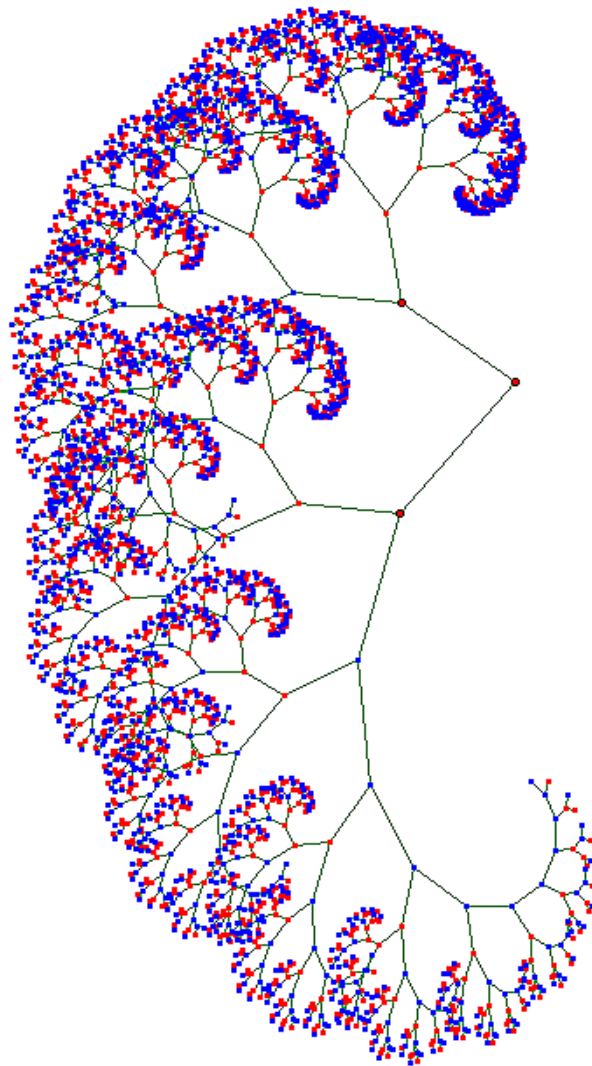
回歸到最原始的初衷～三維空間中的點吸子。向量空間中進行一次線性變換(包含放大、縮小、旋轉、鏡射、推移)並接上一個平移，其中若線性變換為一收縮變換，那麼不斷進行收縮平移映射就可以製造出具有精確自我相似特性的分形。並非每個變換都有吸子，必須是「收縮」變換才会有吸子，而且單一收縮變換的吸子是

一個點，多個收縮變換的聯集也有吸子，是一個由無窮多個點所組成的圖形。在

我們的作品中，瓢蟲的轉向點  $P_n$  就是仿射變換  $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = rMK \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，將初始值

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  輸入後迭代  $n$  次的結果，由於  $rMK$  為收縮及旋轉變換，所以吸子為一個單點，

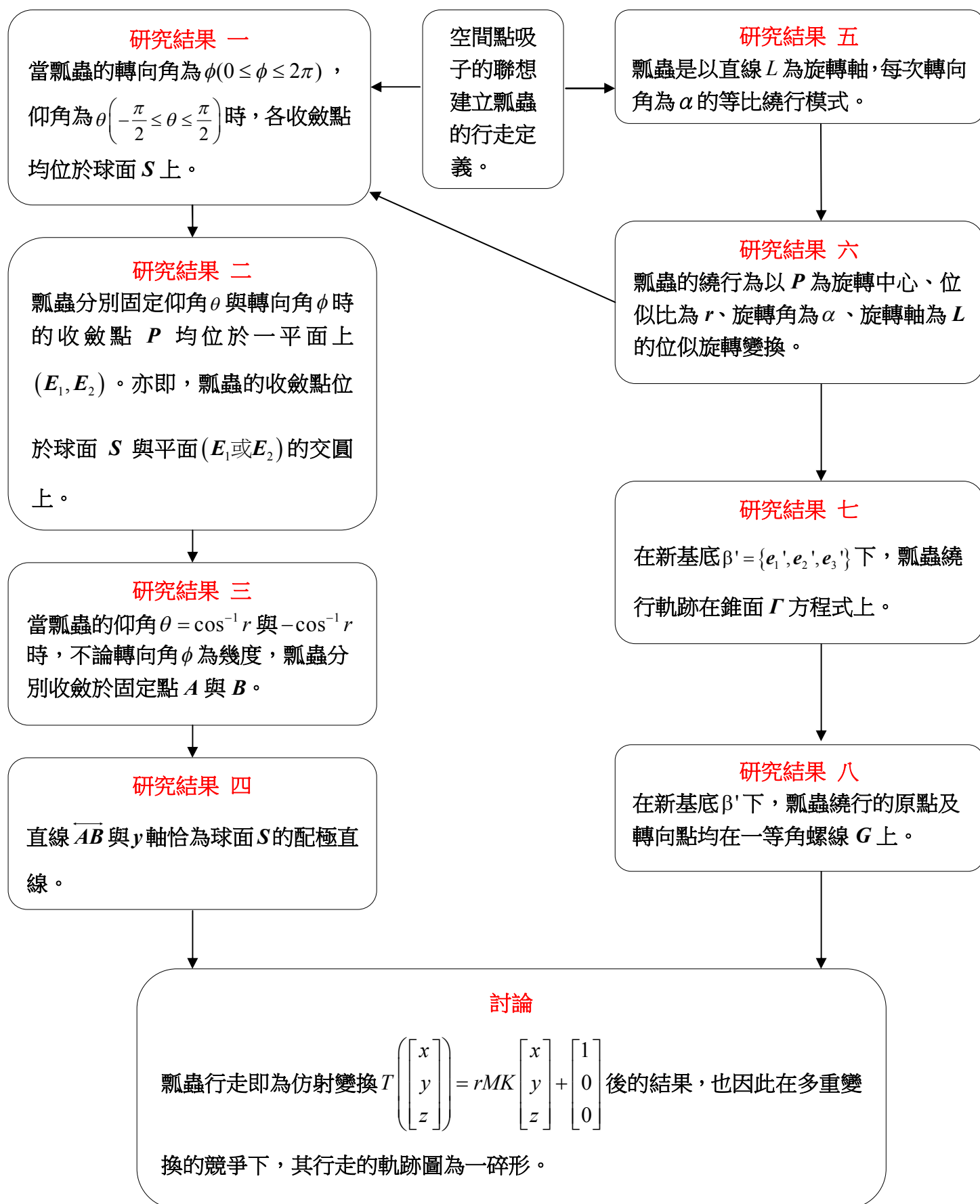
也就是我們的收斂點  $P$ ，若讓瓢蟲在每個轉向點有多種不同旋轉角度和收縮倍數的選擇，同時顯示所有行走軌跡，那麼圖形就會是數個收縮變換的聯集，成為一更複雜的碎形，圖二十即為瓢蟲經過兩個相異的伸縮旋轉變換的競爭下所得到的碎形結構圖。



▲ 圖二十

碎形在自然界隨處可見，雪花晶體、樹幹枝椏、血管分支、海岸沿線、雲彩的邊緣以及天空的閃電都是碎形，就連瓢蟲行走軌跡也不例外。碎形強調空間感，所以碎形的美學也必須有空間性的呈現。這種空間感，蘊涵著無窮的套嵌結構，這種結構的套嵌性，帶給了碎形藝術極大的豐富與無窮的創造力，因此空間中的瓢蟲行走比平面的狀態更具吸引力。

## 陸、研究結果架構圖



## 柒、研究結果

一、當瓢蟲的轉向角為  $\phi(0 \leq \phi \leq 2\pi)$  仰角為  $\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$  時，各收斂點  $P$  均位於

$$\left(S: \left(x - \frac{1}{1-r^2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2\right)。$$

二、當瓢蟲固定仰角  $\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ ，改變轉向角  $\phi(0 \leq \phi \leq 2\pi)$  時的收斂點  $P$  均位於一平面

$E_1: (r \sin \theta)x + (r \cos \theta - 1)z = 0$  上。反之，若固定轉向角  $\phi(0 \leq \phi \leq 2\pi)$ ，改變仰角

$\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$  時，收斂點  $P$  均位於一平面  $E_2: \sin \phi x + (r - \cos \phi)y = \sin \phi$  上。

三、當瓢蟲的仰角  $\theta = \cos^{-1} r$  與  $-\cos^{-1} r$  時，不論轉向角  $\phi$  為幾度，瓢蟲分別收斂於固定點

$$A\left(1, 0, \frac{r\sqrt{1-r^2}}{1-r^2}\right) \text{ 與 } B\left(1, 0, -\frac{r\sqrt{1-r^2}}{1-r^2}\right)。$$

四、已知點  $H$  為平面  $E_1$  對於球面  $S$  的極點，則  $H$  必落在直線  $\overline{AB}$  上。同理，若點  $K$  為平面  $E_2$

對於球面  $S$  的極點，則  $K$  必落在  $y$  軸上。意即：直線  $\overline{AB}$  與  $y$  軸為球面  $S$  的配極直線。

五、瓢蟲是以直線  $L$  為旋轉軸，每次轉向角為  $\alpha$  的等比繞行模式。其中  $L$  的參數式為

$$\begin{cases} x = \alpha + (\sin \theta \sin \phi)t \\ y = \beta - [\sin \theta (\cos \phi + 1)]t, (t \in \mathbb{R}), (\alpha, \beta, \gamma) \text{ 為收斂點 } P \text{ 之坐標；} \\ z = \gamma + [\sin \phi (\cos \theta + 1)]t \end{cases}$$

$$\text{轉向角 } \alpha = \cos^{-1} \left( \frac{\cos \theta + \cos \phi + \cos \theta \cos \phi - 1}{2} \right)。$$

六、瓢蟲的繞行為以  $P$  為旋轉中心、位似比為  $r$ 、旋轉角為  $\alpha$ 、旋轉軸為  $L$  的位似旋轉變換。

七、在新基底  $\beta' = \{e_1', e_2', e_3'\}$  下，瓢蟲繞行軌跡所在的錐面  $\Gamma$  的方程式為  $x^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{c-z}{c}\right)^2$ 。

八、在新基底  $\beta' = \{e_1', e_2', e_3'\}$  下，瓢蟲繞行的原點及轉向點均在一等角螺線  $G$  上，

$$G = \begin{cases} x = ar^t \cos t\alpha \\ y = ar^t \sin t\alpha (t \in \mathbb{R}) \\ z = c(1 - r^t) \end{cases}。$$

九、瓢蟲行走即為仿射變換  $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = rMK \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  後的結果，也因此多重變換的競爭下，

其行走的軌跡圖為一碎形。

## 捌、討論與推廣

除了上述的討論外，亦可做更深入的研究如下：

- 一、我們探討了瓢蟲同時繞  $y$  軸與  $z$  軸旋轉的運動情形。而倘若瓢蟲同時繞  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸又或者當旋轉矩陣順序對調的運動又是如何？
- 二、研究的過程中，關於軸的運算我們曾看過相關文獻以四元數處理空間中的旋轉問題。因此，我們的研究問題能否由四元數簡化計算，也是未來可以深入探討的部分。
- 三、在「動手玩碎形」裡曾提及碎形、吸子間的關係，而我們的研究具有吸子與碎形，倘若加入隨機的想法，收斂點  $P$  軌跡為何？有待未來研究。

## 玖、參考資料及其他

- 一、國立台灣師範大學－陳創義教授個人網頁 <http://math.ntnu.edu.tw/~cyc/>。
- 二、趙文敏。等角螺線及其他，科學月刊第 20 卷第 9、10 期。
- 三、張聖文(民 83)有趣的對數螺線。中華民國第 34 屆中小學科展作品。
- 四、孫宏奇(民 101)峰迴路轉~等比繞行的秘密。中華民國第 51 屆中小學科展作品。
- 五、毛爾 (民 89)。毛起來說  $e$ 。台北市：天下遠見。
- 六、林義雄、黃文達、洪萬生(1979)。線性代數導引。台北市:森大圖書。
- 七、蕭振綱(2010)。幾何變換與幾何證題。哈爾濱市：哈爾濱工業大學出版社。
- 八、廖思善(2006)。動手玩碎形。台北市:天下遠見。
- 九、Anton · Rorres(2004)。初等線性代數與應用。台北市:東華書局。
- 十、Paul Berner, PhD(13 June 2007). *Orientation, Rotation, Velocity, and Acceleration and the SRM*(Version 1.01)
- 十一、Joseph Bak & Donald J.Newman (1991). *Complex Analysis* (2nd ed.). New York : Springer

十二、Rotation matrix [http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation\\_matrix](http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix)

十三、Theodore Shifrin & Malcolm Adams (2001). *Linear Algebra*(1st ed.). New York : W.H. Freeman and Company

十四、圖一：節錄自動手玩碎形第 177 頁

圖二：節錄自網址：<http://sofia8879576.blogspot.tw/2011/06/blog-post.html>

圖三：節錄自網址：

<http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%97%8B%E8%BD%AC%E7%9F%A9%E9%98%B5>

圖四：節錄自網路－空間球坐標系統。(2010)

<http://moodle.ncku.edu.tw/mod/resource/view.php?id=20050>

圖十六：節錄自網址：<http://ppt.cc/xLRY>

圖十七：節錄自網址：<http://ppt.cc/EEgH>

圖十八：節錄自網址：<http://ppt.cc/f0ac>

圖十九：節錄自網路－對撞機引發恐慌 掉進黑洞將會發生什麼事。(2008)

[http://tech.china.com/zh\\_cn/science/universe/1030/20080914/15086873.html](http://tech.china.com/zh_cn/science/universe/1030/20080914/15086873.html)

## 【評語】 040411

本作品探討立體等比繞行的問題，是平面等比繞行的不錯推廣。對於收斂點軌跡、截圓、固定點、旋轉軸、繞行錐面等均有完整探討。但是定理二的證明只有針對三個特殊角，定理五的旋轉軸  $L$  從幾何直觀上並不唯一，位似比與位似旋轉變換並無明確定義，最後與碎形的圖形關聯過於薄弱，是本作品尚待改進之處。