中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

040410

田忌賽馬問題的研究與推廣

學校名稱：國立新竹高級中學

作者：	指導老師：
高二 郭子翔 高二 高晧瑜	江青山

關鍵詞：組合對局論、排容原理、數學歸納法

摘要

本篇作品主要研究在兩個人或多個人在n場對戰中(例如賽馬)，其中一個人的實力處於劣勢，而處於劣勢的那個人，得到勝利的策略方法數有多少種。

如「田忌賽馬」原文中，田忌和齊王各有三匹馬，我們的目的在於找出一個演算的方法，可以求出當田忌和齊王各有n 匹馬時，田忌的致勝策略數。為了解決問題，我們利用排容原理先處理「超算方法數」及「修正係數」兩部分，最後才得到獲勝策略總數。又主要問題點在「超算方法數」，我們發現關於超算方法數的一種遞迴關係，並由此得到一般式的結論，且透過了數學歸納法證明之。

除了解決原先問題外，我們更推廣此問題至其他條件或規則，例如雙方條件一樣、差k等級、限定條件或多方對戰等，並得到一些結果。

壹、　研究動機

以前在學習關於排列組合這單元時老師常發些具有挑戰性的問題下來，但對於較困難的題目我們不外乎窮舉，那時便一直想著是否有其他的技巧可以解決關於有趣的組合方面的問題。

在某次課外閱讀活動時翻到<中國初等數學研究>，裡面便有則關於田忌賽馬的題目，內容如下：(Whc194 田忌賽馬問題的推廣《孫四周，2008.10》)

> **假設田忌和國王各有 n(n >2)匹馬，問田忌有多少種獲勝策略(用含 n 的解析式表示)？**
>
> **簡說：田忌和國王各出 3 匹馬進行比賽，孫儐出奇策：「上對中，中對下，下對上」，最終贏得比賽。這是運籌學和對策論專著中，屢屢引用的經典案例，顯示中國人超乎尋常的智慧。但是，如果不是 3 匹馬，是更多匹呢？**
>
> **至今未見有人提及，更遑論解決了。我〈孫四周〉認為，不論從文化意義上，還是從學術意義上，這都是一個值得研究的好問題。**
>
> **(出自<中國初等數學研究>,楊學枝,2011 年號,)**

於是我們躍躍欲試，著手進行這篇研究。

貳、　研究目的

一、田忌賽馬問題(Whc194)的研究與解決

二、田忌賽馬問題(Whc194)的推廣

參、　研究設備與器材

紙筆、電腦(Dev-C++,Excel)

肆、　研究過程

一、田忌賽馬問題研究

原先問題是問田忌有多少策略數可以獲勝(齊王皆使用相同策略)，而常識中認為贏得賭局的方法是取得$[\frac{n}{2}+1]$場以上的小勝利，但計算上不太方便，便以x表示，而後只要x為非負整數且不大於n皆可使用。

田忌總共有 n 匹馬，最快的可以快過齊王陣營中的 $n-1$ 匹馬、次快的可以贏過齊王陣營中的 $n-2$ 匹馬……最慢的則一匹都贏不了。由於兩方馬速快慢交遞，所以田忌不可能有兩匹不同的馬等速，為了方便指認田忌的某匹馬，

定義：T_l表示田忌陣營中第 l 慢的馬， K_m 表示田忌陣營中第 m 慢的馬。
$(l,m\in\mathbb{N}$ ，$l,m\geq 0)$

我們以四匹馬、兩勝以上做為例子：

起初遇到了些困難，因為當一匹馬的對手不同時會連帶影響其他匹馬，導致我們無法用單純乘法來做，下面放張樹狀圖示意(國王都按快慢順序出馬)：

策略\場別	大將戰	副將戰	三將戰	末將戰
二勝二敗	T_1	T_2	T_3	T_4
二勝二敗			T_4	T_2
一勝三敗		T_3	T_2	T_4
二勝二敗			T_4	T_2
二勝二敗		T_4	T_2	T_3
三勝一敗			T_3	T_2
二勝二敗	T_2	T_1	T_3	T_4
二勝二敗			T_4	T_3
一勝三敗		T_3	T_1	T_4
一勝三敗			T_4	T_1
二勝二敗		T_4	T_1	T_3
二勝二敗			T_3	T_1
一勝三敗	T_3	T_1	T_2	T_4
二勝二敗			T_4	T_2
一勝三敗		T_2	T_1	T_4
一勝三敗			T_4	T_1
二勝二敗		T_4	T_1	T_2
一勝三敗			T_2	T_1
一勝三敗	T_4	T_1	T_2	T_3
二勝二敗			T_3	T_2
一勝三敗		T_2	T_1	T_3
一勝三敗			T_3	T_1
一勝三敗		T_3	T_1	T_2
全敗			T_2	T_1

獲勝
敗北

先計算其中兩匹馬有多少種完全獲勝的方法，由於那兩匹馬都獲勝了，所以剩下兩匹馬可以隨意排，到時候再乘 2。現在先觀察不同的兩匹馬分別有多少種方法完全勝利；而全勝的算法，先假設有兩匹馬 $T_p,T_q(p<q)$則 T_p 先從 p 匹馬中選一匹來比賽，由於 T_p 贏的馬 T_q 必能贏，所以 T_q 只能從 q-1 匹馬中選一匹來贏，這兩匹馬要全勝的方法數便是 $(p-1)\times(q-2)$ 種；接著，再把 C_2^4 種情況列成下表：

獲勝的馬	全勝的方法數	獲勝的馬	全勝的方法數
T_1,T_2	0	T_2,T_3	1
T_1,T_3	0	T_2,T_4	2
T_1,T_4	0	T_3,T_4	4

$(1+2+4)\cdot 2$ 但還不是正確答案，因為這樣子會把每個三勝的情況各算到三次，我們只要一次，又三勝的策略只有一種，所以 $14-2=12$ 才是正解。

於是我們將原先的題目分成超算方法數 $B(n,x)$ 和修正所需的係數 $D(x,k)$ 兩部分來解決，最後得到獲勝策略總數 $A(n,x)$ 。

(一)超算方法數 $B(n,x)$ ：

這裡的方法數總和還要再乘上剩餘馬數的排列，即乘上 $(n-x)!$，才會是排容前的答案。為了方便說明，這裡再舉一個例子，以 n=6,x=3 為例

獲勝的馬	方法數	獲勝的馬	方法數	獲勝的馬	方法數	獲勝的馬	方法數
T_1,T_2,T_3	0	T_0,T_2,T_4	0	T_2,T_3,T_4	1×1×1	T_2,T_5,T_6	1×3×3
T_1,T_2,T_4	0	T_0,T_2,T_5	0	T_2,T_3,T_5	1×1×2	T_3,T_4,T_5	2×2×2
T_1,T_2,T_5	0	T_0,T_3,T_4	0	T_2,T_3,T_6	1×1×3	T_3,T_4,T_6	2×2×3
T_1,T_2,T_6	0	T_0,T_3,T_5	0	T_2,T_4,T_5	1×2×2	T_3,T_5,T_6	2×3×3
T_1,T_3,T_4	0	T_0,T_4,T_5	0	T_2,T_4,T_6	1×2×3	T_4,T_5,T_6	3×3×3

觀察出它是由 x 個數相乘、乘數 a_k 都小於等於 $n-x$ 、且 H_3^4 種情況各出現一次，

下面是有關它的說明：

先取 x 匹馬，在這 x 匹馬當中，若第 k 慢的馬為 T_p，則令 $a_k=p-1-(k-1)+1$ ，此 $x\,(x\geq 1)$ 匹馬全勝的方法數共有 $\prod_{k=1}^{x}a_k$ 種；再取不完全相同的 x 匹馬，若第 l 慢的馬為 T_q ，令 $a_l=q-1-(l-1)+1$ 。

1. 若 $a_m=a'_m\,(x\geq m\geq 1)$ 皆成立，則第一次和第二次取的是完全相同的 x 匹馬，所以和假設矛盾，此情況不成立
2. $a_k=p-1-(k-1)+1$ ， $a_{k+1}\geq p-k+1=a_k$ ，所以 $a_{k+1}\geq a_k$
3. $0=0-1+1\leq a_1\leq a_k\leq a_x\leq (n-1)-x+1=n-x$
4. 由於前三項，情況最多有 $H_x^{n-x+1}=C_x^n$ 種
5. 實際情況也共有 $H_x^{n-x+1}=C_x^n$ 種，故 H_x^{n-x+1} 種情況各會出現一次

由上面敘述可知，$\prod_{k=1}^{x} a_k$ 共有 H_x^{n-x+1} 種可能。將各種組合做加總，並令其總和為 $B(n,x)$ ，表示田忌的馬與國王的馬在馬速強弱的能力交錯的前提下(即 $T_1 < K_1 < T_2 < K_2 < \cdots < T_n < K_n$ (K_i 表示齊王第 i 慢的馬，T_l<K_m 代表 T_l 跑得比 K_m 慢)，雙方各 n 匹馬比賽，田忌的馬至少勝 x 場，敗 $n-x$ 場，0 和時的超算方法數。

而且我們由田忌最快的馬是否勝利得到關於 $B(n,x)$ 之遞迴關係式─

$$B(n,x) = (n-x)B(n-1,x-1) + B(n-1,x)$$

以下是有關它的解釋：

考慮田忌 n 戰至少 x 勝時，若田忌最強的馬 T_n 輸了，或者比贏了但不在 x 匹獲勝馬的其中一匹，則田忌需從較弱的 n–1 匹馬中挑出 x 匹馬來獲勝，方法數為 $B(n-1,x)$ ；但若 T_n 是 x 匹獲勝馬的其中一匹，一定是贏了齊王 $K_1,\cdots,K_{n-1}$ 中的一匹馬，但其中 $x-1$ 匹馬已被贏走，故田忌 T_n 只有 $n-1-(x-1)$ 匹馬可以贏，然後田忌再從較弱的 n-1 匹馬中挑出 x-1 匹來獲勝，其方法總數則為 $(n-x)\cdot B(n-1,x-1)$ ，兩者相加即為 $B(n,x)$ 。

後來我們經計算後得到以下表格，也的確如上所說：

n-x\x	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	7	15	31	63	127	255	511
3	6	25	90	301	966	3,025	9,330	28,501
4	10	65	350	1,701	7,770	34,105	145,750	611,501
5	15	140	1,050	6,951	42,525	246,730	1,379,400	7,508,501
6	21	266	2,646	22,827	179,487	1,323,652	9,321,312	63,436,373
7	28	462	5,880	63,987	627,396	5,715,424	49,329,280	408,741,333

所以關於 $B(n,x)$ 我們有以下規律：

$$\begin{cases} B(x+1,x)=1;\ \ B(n,0)=1 \\ B(n,x)=(n-x)B(n-1,x-1)+B(n-1,x) \end{cases}$$

由以上可以遞推出當 n-x=1,2,3,4 時的一般式：

$B(x+1,x)=1$

$$B(x+2,x)=2B(x+1,x-1)+B(x+1,x)=2B(x+1,x-1)+1=2(2B\left(x,x-2\right)+1)+1$$

$$=1+2+2^2+\cdots+2^x=\frac{1(2^{x+1}-1)}{2-1}=2^{x+1}-1$$

$$B(x+3,x)=3B(x+2,x-1)+B(x+2,x)=3(3B(x+1,x-2)+B(x+1,x-1))+2^{x+1}-1$$

$$=(2^{x+1}-1)+3(2^x-1)+\cdots+3^{x-1}(2^2-1)+3^x$$
$$=2^{x+1}+3\cdot 2^x+\cdots+3^{x-1}\cdot 2^2-(3^{x-1}+3^x+\cdots+3^0)+3^x$$

$$=\frac{2^{x+1}(\frac{3^x}{2^x}-1)}{\frac{3}{2}-1}-\frac{1(3^x-1)}{3-1}+3^x=\frac{2\cdot 3^x-2^{x+1}}{\frac{1}{2}}-\frac{(3^x-1)}{2}+3^x$$

$$=4\cdot 3^x-2^{x+2}-\frac{3^x}{2}+\frac{1}{2}+3^x=\frac{(8-1+2)3^x}{2}-2^{x+2}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{9\cdot 3^x}{2}-2^{x+2}+\frac{1}{2}=\frac{3^{x+2}+1}{2}-2^{x+2}$$

$$B(x+4,x)=4B(x+3,x-1)+B(x+3,x)$$
$$=4^x+4^{x-1}B(4,1)+4^{x-2}B(5,2)+\cdots+4B(x+2,x-1)+B(x+3,x)$$

$$=4^x+\frac{3^{x+2}}{2}\cdot\frac{(\frac{4}{3})^x-1}{\frac{4}{3}-1}-2^{x+2}\cdot\frac{(\frac{4}{2})^x-1}{\frac{4}{2}-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4^x-1}{4-1}$$

$$=4^x+\frac{3^3\cdot 4^x-3^{x+3}}{2}-2^2\cdot 4^x+2^{x+2}+\frac{4^x-1}{6}$$
$$=\frac{4^{x+3}-1}{6}-\frac{3^{x+3}}{2}+2^{x+2}$$

然而，這樣還是無法得到$B(n,x)$一般式，於是我們通分，並使最高次方項皆化成$(n-x)+x-1$次方，做成以下表格，以方便找規律。

n-x	$B(n,x)$
1	1^x
2	$2^{x+1}-1^{x+1}$
3	$\frac{3^{x+2}-2\cdot 2^{x+2}+1^{x+2}}{2}$
4	$\frac{4^{x+3}-3\cdot 3^{x+3}+3\cdot 2^{x+3}-1^{x+3}}{6}$
5	$\frac{5^{x+4}-4\cdot 4^{x+4}+6\cdot 3^{x+4}-4\cdot 2^{x+4}+1^{x+4}}{24}$

由以上表格觀察得知，若$n-x$ **=1**，則$B(n,x)$之值必為 1，而且

$B(n,x)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n-x} i^{n-1}\cdot C_{i-1}^{n-x-1}\cdot(-1)^{n-x-i}}{(n-x-1)!}$，接下來我們將證明這個式子。

當田忌的馬與國王的馬在馬速強弱的能力交錯的前提下，雙方各 n 匹馬比賽，田忌的馬至少勝 x 場，敗 $n-x$ 場，0 和時，$B(n,x)$ 表示田忌取 x 匹馬得勝的所有可能方法數，即超算方法數。

整理以上的結果，我們重新定義 $B(n,x)$ 如下：

$$\begin{cases} B(\alpha,\beta)=0,\ \ if \quad \alpha<\beta \quad or \quad \beta<0 \\ B(0,0)=1 \\ B(\alpha,\beta)=(\alpha-\beta)B(\alpha-1,\beta-1)+B(\alpha-1,\beta),\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

由以上遞迴定義，我們可以推論出：

1. $B(\alpha,\alpha)=(\alpha - \alpha)B(\alpha -1,\alpha -1)+B(\alpha -1,\alpha)=0,\ \alpha\geq 1$
   即雙方 α 場對戰，田忌 α 馬全勝是不可能的。
2. $B(\alpha,0)=(\alpha - 0)B(\alpha -1,0 -1)+B(\alpha -1,0)=B(\alpha -1,0)=B(\alpha -2,0)=\cdots$
   $=B(1,0)=B(0,0)=1$
   即雙方 α 場對戰，田忌取 0 匹馬得勝的方法數僅有 1 種。
3. $B(\alpha+1,\alpha)=B(\alpha,\alpha -1)+B(\alpha,\alpha)=B(\alpha,\alpha -1)=B(\alpha-1,\alpha -2)=\cdots=B(1,0)=1$
   即雙方 $\alpha+1$ 場對戰，田忌取 α 匹馬得勝的方法數僅有 1 種。

接下來我們將證明：$B(n,x)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n-x} i^{n-1}\cdot C_{i-1}^{n-x-1}\cdot(-1)^{n-x-i}}{(n-x-1)!}$，$n>x\geq 0$

我們將證明分成兩個部分：

第一部分

證明 $B(n,0)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} i^{n-1}\cdot C_{i-1}^{n-1}\cdot(-1)^{n-i}}{(n-1)!}=1$，即證明 $\sum_{i=0}^{n} i^{n}\cdot C_{i}^{n}\cdot(-1)^{n-i}=n!$。

(於此我們定義 $0^0=1$)

定義 Δ 為可使函數 $f(x)$ 做 $f(x+1)-f(x)$ 的運算，即：$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$

定義運算 E 作用在函數 $f(x)$ 上，為 $E(f(x))=f(x+1)$

定義運算 I 作用在函數 $f(x)$ 上，為 $I(f(x))=f(x)$

令 $\Delta f(x)=(E-I)f(x)$

則 $\Delta^n f(x)=(E-I)^n f(x)=\sum_{k=0}^{n} C_k^n E^k(-I)^{n-k}\cdot f(x)$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_k^n E^k I^{n-k}(-1)^{n-k}\cdot f(x)=\sum_{k=0}^{n} C_k^n(-1)^{n-k}\cdot f(x+k)$$

再令 $f(x)=x^n$，則 $\Delta^n f(x)=\Delta^n x^n=n!$

得$n! = \sum_{k=0}^{n} C_k^n (-1)^{n-k} \cdot (x+k)^n$

當$x=0$即得證。

第二部分

我們先計算

$$
\begin{aligned}
B(x+1,x-1) &= 2^1 B(x,x-2) + B(x,x-1) \\
&= 2^2 B(x-1,x-3) + 2^1 B(x-1,x-2) + 2^0 \\
&= 2^3 B(x-2,x-4) + 2^2 B(x-2,x-3) + 2^1 + 2^0 \\
&\quad \vdots \\
&= 2^{x-1} B(2,0) + 2^{x-2} B(1,0) + 2^{x-3} + 2^{x-4} + \ldots + 2^1 + 2^0 \\
&= 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} + \ldots + 2^1 + 2^0 \\
&= 2^x - 1
\end{aligned}
$$

接著，在田忌與齊王馬速能力值交錯的設定下，田忌比賽n場x勝，不可能 0 敗，，所以$n-x \geq 1$，我們將對$n \geq x+1$，以數學歸納法證明以上得到的$B(n,x)$的一般式。

證明：只考慮 $x \geq 1$時即可

1. 當$n = x+1$時，

$$B(x+1,x) = \frac{\sum_{i=1}^{1} i^x \cdot C_{i-1}^0 \cdot (-1)^{1-i}}{0!} = 1 \text{，}$$

且$B(x+1,x-1) = \dfrac{\sum_{i=1}^{2} i^x \cdot C_{i-1}^{2-1} \cdot (-1)^{2-i}}{(2-1)!} = 1^x \cdot C_0^1 \cdot (-1)^{2-1} + 2^x \cdot C_1^1 \cdot (-1)^{2-2} = 2^x - 1$

2. 假設當$n \leq x+k$時，

$$B(x+k,x) = \frac{\sum_{i=1}^{k} i^{x+k-1} \cdot C_{i-1}^{k-1} \cdot (-1)^{k-i}}{(k-1)!} \quad \text{成立}$$

且$B(x+k,x-1) = \dfrac{\sum_{i=1}^{k+1} i^{x+k-1} \cdot C_{i-1}^{k} \cdot (-1)^{k+1-i}}{k!}$成立

則當$n = x+k+1$時，

$$
\begin{aligned}
B(x+k+1,x) &= (k+1)B(x+k,x-1) + B(x+k,x) \\
&= (k+1)\frac{\sum_{i=1}^{k+1} i^{x+k-1} \cdot C_{i-1}^{k} \cdot (-1)^{k+1-i}}{k!} + \frac{\sum_{i=1}^{k} i^{x+k-1} \cdot C_{i-1}^{k-1} \cdot (-1)^{k-i}}{(k-1)!}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{(k+1)\sum_{i=1}^{k+1} i^{x+k-1}\cdot C_{i-1}^{k}\cdot(-1)^{k+1-i}+k\sum_{i=1}^{k} i^{x+k-1}\cdot C_{i-1}^{k-1}\cdot(-1)^{k-i}}{k!}$$

$$=\frac{(k+1)^{x+k}+\sum_{i=1}^{k} i^{x+k-1}\cdot\left[(k+1)C_{i-1}^{k}-k\cdot C_{i-1}^{k-1}\right]\cdot(-1)^{k+1-i}}{k!}$$

$$=\frac{(k+1)^{x+k}+\sum_{i=1}^{k} i^{x+k-1}\cdot\left[\frac{(k+1)!}{(i-1)!(k-i+1)!}-\frac{(k-i+1)k!}{(i-1)!(k-i+1)!}\right]\cdot(-1)^{k+1-i}}{k!}$$

$$=\frac{(k+1)^{x+k}+\sum_{i=1}^{k} i^{x+k-1}\cdot\left[\frac{(k+1)!-(k+1)!+i\cdot k!}{(i-1)!(k-i+1)!}\right]\cdot(-1)^{k+1-i}}{k!}$$

$$=\frac{(k+1)^{x+k}+\sum_{i=1}^{k} i^{x+k}\cdot\frac{k!}{(i-1)!(k-i+1)!}\cdot(-1)^{k+1-i}}{k!}$$

$$=\frac{(k+1)^{x+k}+\sum_{i=1}^{k} i^{x+k}\cdot C_{i-1}^{k}\cdot(-1)^{k+1-i}}{k!}=\frac{\sum_{i=1}^{k+1} i^{x+k}\cdot C_{i-1}^{k}\cdot(-1)^{k+1-i}}{k!}$$

由數學歸納法得證

(二)修正係數$D(x,k)$：

在高一的數學課程裡，曾經學到排容原理，在上面的舉例中(第三頁)，曾經提及會有重複，故需要修正係數進行修正，修正每個三勝的情況各多算到兩次的情形，此即排容原理之應用。

在n戰x勝的情況下，當我們算出x勝以上估計的策略數時，$x+1$勝以上的策略數將會被算到C_x^{x+1}次，故前頭須乘上$1-C_x^{x+1}$，才使$x+1$勝的策略數只會被算到一次；$x+2$勝的策略數會被每個估計的x勝全勝策略數算到C_x^{x+2}次，每個估計的$x+1$勝的全勝策略數算到C_{x+1}^{x+2}次，故須再乘上 $1-C_x^{x+2}-[(1-C_x^{x+1})\cdot C_{x+1}^{x+2}]$，才使$x+2$勝的策略數只會被算到一次；但每個$x+3$勝的情況會……以此類推的計算下去，直到算到$n-1$勝為止，因為它沒有誤差，也沒有能得到更多勝利的情況了。

定義 D 函數為： $\begin{cases} D(x,k)=1-\sum_{i=1}^{k-1} C_{x-1+i}^{x+k-1}\cdot D(x,i) \\ D(x,1)=1 \end{cases}$

為了找出規律，我們用跑出以下這個表格：

x\k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9
3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45
4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165
5	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	495
6	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	1,287

某次把頭左傾$\dfrac{\pi}{4}$的時候竟發現它有點像巴斯卡三角形，於是找到規律：

$$D(x,k)=C_{x-1}^{x+k-2}\cdot(-1)^{k-1}$$

以下是關於它的證明：

1. 當 $\mathrm{k}=1$ 時，$D(x,1)=1$

2. 假設當$k\le(m-1)$時，$D(x,k)=C_{x-1}^{k+x-2}\cdot(-1)^{x-1}$成立

則當$k=m$ 時

$$D(x,m)=1-C_{x+m-2}^{x+m-1}\cdot D(x,m-1)-C_{x+m-3}^{x+m-1}\cdot D(x,m-2)-\cdots-C_{x}^{x+m-1}\cdot D(x,1)$$

$$=1-C_{x+m-2}^{x+m-1}\cdot C_{x-1}^{x+m-3}\cdot(-1)^{m-2}-C_{x+m-3}^{x+m-1}\cdot C_{x-1}^{x+m-4}\cdot(-1)^{m-3}-\cdots-C_{x}^{x+m-1}\cdot C_{x-1}^{x-1}\cdot(-1)^{0}$$

由$C_{x-1}^{x+m-2}\cdot(-1)^{m-1}$

$$=1-C_{x+m-2}^{x+m-1}\cdot C_{x-1}^{x+m-3}\cdot(-1)^{m-2}-C_{x+m-3}^{x+m-1}\cdot C_{x-1}^{x+m-4}\cdot(-1)^{m-3}-\cdots-C_{x}^{x+m-1}\cdot C_{x-1}^{x-1}\cdot(-1)^{0}$$

$$\Leftrightarrow C_{x-1}^{x+m-2}\cdot(-1)^{m-1}+C_{x+m-2}^{x+m-1}\cdot C_{x-1}^{x+m-3}\cdot(-1)^{m-2}+C_{x+m-3}^{x+m-1}\cdot C_{x-1}^{x+m-4}\cdot(-1)^{m-3}+$$

$$\cdots+C_{x}^{x+m-1}\cdot C_{x-1}^{x-1}\cdot(-1)^{0}=1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{j=0}^{m-1}C_{x+j}^{x+m-1}\cdot C_{x-1}^{x+j-1}\cdot(-1)^{j}=1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(x+m-1)!}{(x+j)!(m-j-1)!}\cdot\frac{(x+j-1)!}{j!(x-1)!}\cdot(-1)^{j}=1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{j=0}^{m-1}C_{m-1}^{x+m-1}\cdot C_{j}^{m-1}\cdot(-1)^{j}\cdot\frac{x}{x+j}=1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{j=0}^{m-1}C_{j}^{m-1}\cdot(-1)^{j}\cdot\frac{x}{x+j}=(C_{m-1}^{x+m-1})^{-1}$$

令上式左端為 b_{m-1}

$$b_{m-1}=\sum_{j=0}^{m-1}C_j^{m-1}\cdot(-1)^j\cdot\frac{x}{x+j}$$

$$=1+\sum_{j=1}^{m-2}(C_j^{m-2}+C_{j-1}^{m-2})\cdot(-1)^j\cdot\frac{x}{x+j}+(-1)^{m-1}\frac{x}{x+m-1}$$

$$=b_{m-2}+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\cdot C_{j-1}^{m-2}\cdot\frac{x}{x+j}$$

$$=b_{m-2}+\frac{x}{m-1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\cdot C_j^{m-1}\cdot\frac{j}{x+j}$$

$$=b_{m-2}+\frac{x}{m-1}\{\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\cdot C_j^{m-1}-\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^jC_j^{m-1}\cdot\frac{j}{x+j}\}$$

$$=b_{m-2}-\frac{x}{m-1}\cdot b_{m-1}$$

$$b_{m-1}=\frac{m-1}{m+x-1}b_{m-2}=\frac{m-1}{m+x-1}\frac{m-2}{m+x-2}b_{m-3}=\frac{(m-1)!x!}{(m+x-1)!}b_0=(C_{m-1}^{m+x-1})^{-1}$$

以數學歸納法得證

(三) 獲勝策略總數 $A(n,x)$：

將 $B(n,x)$和 $D(x,k)$ 所取得的結果照預期的方法處理後，得到下列式子：

$$A(n,x)=\sum_{i=1}^{n-x}B(n,x+i-1)\cdot D(x,i)\cdot(n-x-i+1)!$$

接著再列一張表 $A(n,x)$ 以觀察規律：

n-x \x	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	2^3-3	2^4-4	2^5-5	2^6-6	2^7-7
3	3^4-4*2^4+6	3^5-5*2^5+10	3^6-6*2^6+15	3^7-7*2^7+21	3^8-8*2^8+28

觀察後推測 $A(n,x)=\sum_{i=1}^{n-x}i^n\cdot C_{i+x}^{n}\cdot(-1)^{n-x-i}$ ，但證明左式前需先證以下引理：

引理(一)：$\sum_{i=0}^{n-x-j}(C_j^{n-x-i}\cdot C_{x-1}^{i+x-1})=C_{j+x}^{n}$

證明：

1. 當 $n=x+j$ 時，$\sum_{i=0}^{0}(C_j^{j-i}\cdot C_{x-1}^{i+x-1})=C_{j+x}^{x+j}$
2. 若當 $n=x+j+k$ 時成立，則 $n=x+j+k+1$ 時

$$\sum_{i=0}^{n-x-j}C_j^{n-x-i}\cdot C_{x-1}^{i+x-1}=\sum_{i=0}^{k+1}C_j^{j+k+1-i}\cdot C_{x-1}^{i+x-1}$$

$$= C_j^j \cdot C_{x-1}^{x+k} + \sum_{i=0}^{k} C_j^{j+k+1-i} \cdot C_{x-1}^{i+x-1}$$

$$= C_j^j \cdot C_{x-1}^{x+k} + \sum_{i=0}^{k} (C_j^{j+k-i} + C_{j-1}^{j+k-i}) \cdot C_{x-1}^{i+x-1}$$

$$= C_{x-1}^{x+k} + \sum_{i=0}^{k} C_j^{j+k-i} \cdot C_{x-1}^{i+x-1} + \sum_{i=0}^{k} C_{j-1}^{j+k-i} \cdot C_{x-1}^{i+x-1}$$

$$= C_{x-1}^{x+k} + \sum_{i=0}^{x+j+k-x-j} C_j^{x+j+k-x-i} \cdot C_{x-1}^{i+x-1} + \sum_{i=0}^{x+j+k-x-j} C_{j-1}^{x+j+k-x-i} \cdot C_{x-1}^{i+x-1}$$

$$= C_{x+j}^{x+j+k} + \sum_{i=0}^{(x+j+k)-x-(j-1)} C_{j-1}^{(x+j+k)-x-i} \cdot C_{x-1}^{i+x-1}$$

$$= C_{x+j}^{x+j+k} + C_{x+j-1}^{x+j+k-1} + \sum_{i=0}^{(x+j+k-1)-x-(j-2)} C_{j-1}^{(x+j+k)-x-i} \cdot C_{x-1}^{i+x-1}$$

$$= C_{x+j}^{x+j+k} + C_{x+j-1}^{x+j+k-1} + \cdots + C_0^k = \sum_{i=0}^{x+j} C_i^{k+i}$$

$$= C_{x+j}^{x+j+k+1}$$

以數學歸納法得證

接著證明獲勝策略總數： $A(n,x) = \sum_{i=1}^{n-x} i^n \cdot C_{i+x}^n \cdot (-1)^{n-x-i}$

證明：

由 $A(n,x) = \sum_{i=1}^{n-x} B(n,x+i-1) \cdot D(x,i) \cdot (n-x-i+1)!$

$$= \sum_{i=0}^{n-x-1} D(x,i+1) \cdot B(n,x+i) \cdot (n-x-i)!$$

$$= \sum_{i=0}^{n-x-1} C_{x-1}^{i+x-1} \cdot (-1)^i \cdot \sum_{j=1}^{n-x-i} j^{n-1} \cdot C_{j-1}^{n-x-i-1} \cdot (-1)^{n-x-i-j} \cdot (n-x-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-x-1} C_{x-1}^{i+x-1} \cdot \sum_{j=1}^{n-x-i} j^n \cdot C_j^{n-x-i} \cdot (-1)^{n-x-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-x-1} \sum_{j=1}^{n-x-i} j^n \cdot C_j^{n-x-i} \cdot C_{x-1}^{i+x-1} \cdot (-1)^{n-x-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-x-1} (\sum_{j=1}^{n-x} j^n \cdot C_j^{n-x-i} \cdot C_{x-1}^{i+x-1} \cdot (-1)^{n-x-j}$$

$$- \sum_{j=n-x-i+1}^{n-x} j^n \cdot C_j^{n-x-i} \cdot C_{x-1}^{i+x-1} \cdot (-1)^{n-x-j})$$

$$= \sum_{j=1}^{n-x} \sum_{i=0}^{n-x-1} j^n \cdot C_j^{n-x-i} \cdot C_{x-1}^{i+x-1} \cdot (-1)^{n-x-j} - 0$$

$$= \sum_{j=1}^{n-x} j^n \cdot (-1)^{n-x-j} (\sum_{i=0}^{n-x-1} C_j^{n-x-i} \cdot C_{x-1}^{i+x-1})$$

$$=\sum_{j=1}^{n-x} j^n \cdot (-1)^{n-x-j}\left(\sum_{i=0}^{n-x-j} C_j^{n-x-i}\cdot C_{x-1}^{i+x-1}+\sum_{i=n-x-j+1}^{n-x-1} C_j^{n-x-i}\cdot C_{x-1}^{i+x-1}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n-x} j^n \cdot (-1)^{n-x-j}\left(\sum_{i=0}^{n-x-j} C_j^{n-x-i}\cdot C_{x-1}^{i+x-1}+0\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n-x} j^n \cdot (-1)^{n-x-j}\left(\sum_{i=0}^{n-x-j} C_j^{n-x-i}\cdot C_{x-1}^{i+x-1}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n-x} j^n \cdot C_{j+x}^{n}\cdot (-1)^{n-x+j} \qquad \text{根據引理(一)}$$

二、原始問題延伸

我們只將雙方的馬之馬速做了一些改變，所以沿用之前的代號

$$T_1<T_2<T_3<\cdots<T_n \;；\; K_1<K_2<K_3<\cdots<K_n$$

並且賦予每個 T_l 和 K_l 一個數值來表示牠們之間馬速的大小關係。

原始問題中，$T_l=2l-1$；$K_l=2l$，現在我們打算更動馬速之間的相對關係或是人數多少，形成這四組新的問題。

問題(一)：若 $T_l=2l$；$K_l=2l$，即雙方馬速相等時，田忌共有多少種策略能夠恰得 x 勝 y 敗 z 和。

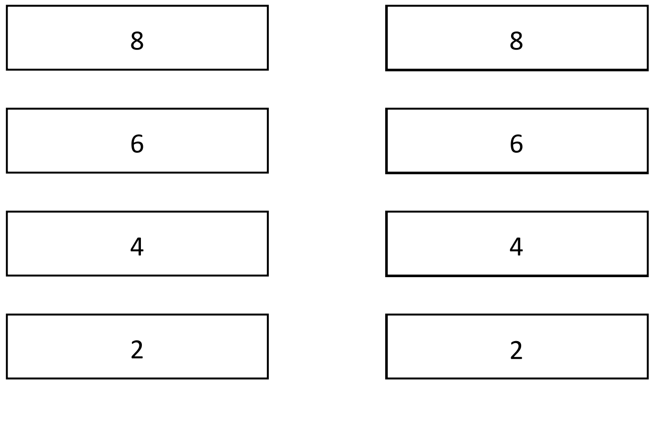
問題(二)：若 $T_l=2l-1-2k(k\in\mathbb{N},k\le n)$；$K_l=2l$，則田忌有多少種策略可獲得 x 場以上的勝利。

問題(三)：若雙方馬速與參賽者人數配置都與原本相同，但限定田忌的某一匹馬 T_l 和齊王的某匹馬 K_m 對戰，則田忌有多少種策略可獲得恰 x 場的勝利。

問題(四)：若不只有田忌和國王兩人賭馬，改為總共有 s 人賭馬，則田忌共有多少種策略可獲得 x 場以上的勝利。

問題(一)：雙方能力值相同

田忌與齊王的馬速能力值滿足 $T_i=K_i$，$i=1,2,3\ldots n-1,n$，下面放張圖示意：



如果要問這條件下田忌有多少策略能獲得 x 勝以上呢？其實和原始問題的答案是相同的，因為在原始問題的設定下會贏的馬在這條件下依舊會贏，倒是有些輸掉的馬會變成平手，所以我們目的在求出田忌有多少策略數恰得 x 勝 y 敗 z 和，並將其數量定為函數 $E(x,y,z)$ 的值。

以下兩個表格是在原條件(上表)和新條件(下表)下，雙方出戰順序相同，而得到的比賽結果：

	第一戰	第二戰	第三戰	第四戰	第五戰	結果
齊王	2	4	10	6	8	田忌 二勝三敗
田忌	1	3	5	7	9	

	第一戰	第二戰	第三戰	第四戰	第五戰	結果
齊王	2	4	10	6	8	田忌二勝 一敗二平
田忌	2	4	6	8	10	

其實新條件與原始條件的差異就是田忌每一匹馬的能力值都多了1，所以一定策略下，在原條件中田忌底下某匹馬的對手恰比自己高1，那麼在新條件下牠們就會平手。

為了簡化等一下的算式，我們假設 $\widetilde{A}(n,x)$ 為田忌恰 x 勝的策略數，而

$$\widetilde{A}(n,x)=A(n,x)-A(n,x+1)$$

$$=\sum_{i=1}^{n-x} i^n\cdot C_{i+x}^{n}\cdot(-1)^{i+n-x}-\sum_{i=1}^{n-x-1} i^n\cdot C_{i+x+1}^{n}\cdot(-1)^{i+n-x-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-x} i^n\cdot(C_{i+x}^{n}+C_{i+x+1}^{n})\cdot(-1)^{i+n-x}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-x} i^n\cdot C_{i+x+1}^{n+1}\cdot(-1)^{i+n-x}$$

而我們的算法是，不管在新舊條件下，田忌恰 x 勝的策略數都一樣。但在新的條件中有可能是一場平手、兩場平手.....，所以 $\widetilde{A}$ 和 E 函數的關係如下：

$$\widetilde{A}(n,x)=\sum_{i=0}^{y} E(x,y-i,z+i)$$

在田忌與齊王的馬速能力值相同的前提下，田忌 n 戰 x 勝 y 敗 z 和的策略數以符號 $E(x,y,z)$ 表示之。

由以上推論，得到一遞迴式：

$$E(x,y,0)=[\widetilde{A}(x+y,x)-C_1^{x+y}\cdot E(x,y-1,0)-C_2^{x+y}\cdot E(x,y-2,0)-.......-C_{y-1}^{x+y}\cdot E(x,1,0)]$$

$$= \widetilde{A}(x+y,x) - \sum_{i=1}^{y-1} C_i^{x+y} \cdot E(x, y-i, 0)$$

以下為田忌在原條件中，5 戰 2 勝 3 敗的情形之下，田忌在新條件下所有勝敗的可能情形：

2 勝 3 敗→2 勝 2 敗 1 和

	第一戰	第二戰	第三戰	第四戰	第五戰	數值總和
齊王	2	6	10	4	8	30
田忌	1	3	5	7	9	25

	第一戰	第二戰	第三戰	第四戰	第五戰	數值總和
齊王	2	6	10	4	8	30
田忌	2	4	6	8	10	30

2 勝 3 敗→2 勝 1 敗 2 和

	第一戰	第二戰	第三戰	第四戰	第五戰	數值總和
齊王	2	4	10	6	8	30
田忌	1	3	5	7	9	25

	第一戰	第二戰	第三戰	第四戰	第五戰	數值總和
齊王	2	4	10	6	8	30
田忌	2	4	6	8	10	30

(由於雙方能力值相等，所以田忌有勝就會有敗，不可能 2 勝 0 敗)

在雙方能力值相等的條件之下，以田忌 5 戰 2 勝 3 敗 0 和為例：

由於田忌沒有平手，故在 $\widetilde{A}(5,2)$ 內的對戰組合中不能出現有任何一場比賽平手，故必須去除 2 勝 2 敗 1 和、2 勝 1 敗 2 和的策略數，但是裡面仍然有諸多包含平手的策略數，所以要加回……，以此類推。以式子表示如下：

$$E(2,3,0) = C_0^5\{\widetilde{A}(5,2) - C_1^5[\widetilde{A}(4,2) - C_1^4 \cdot \widetilde{A}(3,2)] - C_2^5 \cdot \widetilde{A}(4,3)\}$$

$$= C_0^5\left[\widetilde{A}(5,2) - C_1^5\widetilde{A}(4,2) + C_2^5\widetilde{A}(3,2)\right]$$

$$= C_0^5[3^5 - 5\cdot 2^5 + 10 - (2^5 - 5) - 5(2^4 - 4 - 1) + 10] = 21$$

由上例，類推至 x 勝 y 敗 0 和時， $E(x,y,0)=\sum_{i=0}^{y-1} C_i^{x+y}\cdot \widetilde{A}(x+y-i,x)\cdot(-1)^i$

又可以續推至 x 勝 y 敗 z 和的策略方法數為：

$$E(x,y,z)=C_z^{x+y+z}\sum_{i=0}^{y-1} C_i^{x+y}\widetilde{A}(x+y-i,x)\cdot(-1)^i = C_z^n\cdot E(x,y,0)$$

只要證出 $E(x,y,0)$ 即可證出 $E(x,y,z)$ 。

我們先證明以下引理。

引理(二)： $C_1^{x+k+1}C_{k-1}^{x+k`}-C_2^{x+k+1}C_{k-2}^{x+k-1}+C_3^{x+k+1}C_{k-3}^{x+k-2}-......+(-1)^{k-1}C_k^{x+k+1}C_0^{x+1}=C_k^{x+k+1}$

證明：

$$C_1^{x+k+1}C_{k-1}^{x+k`}-C_2^{x+k+1}C_{k-2}^{x+k-1}+C_3^{x+k+1}C_{k-3}^{x+k-2}-......+(-1)^{k-1}C_k^{x+k+1}C_0^{x+1}$$

$$=\frac{(x+k+1)!}{1!\cdot(k-1)!\cdot(x+1)!}-\frac{(x+k+1)!}{2!\cdot(k-2)!\cdot(x+1)!}+\frac{(x+k+1)!}{3!\cdot(k-3)!\cdot(x+1)!}-......+(-1)^{k-1}\frac{(x+k+1)!}{k!\cdot(k-k)!\cdot(x+1)!}$$

$$=\frac{(x+k+1)!}{k!\cdot(x+1)!}\cdot\left(\frac{k!}{1!\cdot(k-1)!}-\frac{k!}{2!\cdot(k-2)!}+\frac{k!}{3!\cdot(k-3)!}-......+(-1)^{k-1}\frac{k!}{k!\cdot(k-k)!}\right)$$

$$=C_k^{x+k+1}\cdot\sum_{i=1}^{k} C_i^k(-1)^{i-1}$$

$$=C_k^{x+k+1}\cdot\left(C_0^k(-1)^0-\sum_{i=0}^{k} C_i^k(-1)^i\right)=C_k^{x+k+1}$$

接下來為 $E(x,y,0)$ 的證明：

1.當 $y=1$ 時，

$$E(x,1,0)=\widetilde{A}(x+1,x)-\sum_{i=1}^{1-1} C_i^{x+1}\cdot E(x,1-i,0)$$

$$=\sum_{i=0}^{1-1} C_i^{x+1}\cdot\widetilde{A}(x+1-i,x)\cdot(-1)^i \qquad \text{此式成立}$$

2.令 $y=k$ 時， $E(x,k,0)=C_0^n\sum_{i=0}^{k-1} C_i^{x+k}\cdot\widetilde{A}(x+k-i,x)\cdot(-1)^i$

則 $y=k+1$ 時， $x+k+1=n$

$$E(x,k+1,0)=\widetilde{A}(n,x)-C_1^n\cdot E(x,k,0)-C_2^n\cdot E(x,k-1,0)-.......-C_k^n\cdot E(x,1,0)$$

$$=\widetilde{A}(n,x)-C_1^n\sum_{i=0}^{k-1} C_i^{x+k}\cdot\widetilde{A}(x+k-i,x)\cdot(-1)^i$$

$$-C_2^n\cdot\sum_{i=0}^{k-2} C_i^{x+k-1}\cdot\widetilde{A}(x+k-1-i,x)\cdot(-1)^i -... -\sum_{i=0}^{1-1} C_i^{x+1}\cdot\widetilde{A}(x+1-i,x)\cdot(-1)^i$$

$$= A(x+k+1,x) - A(x+k+1,x+1) - C_1^n C_0^{n-1} \cdot \widetilde{A}(x+k,x)$$

$$+(C_1^{x+k+1}C_1^{x+k} - C_2^{x+k+1}) \cdot \widetilde{A}(x+k-1,x) + \cdots$$

$$+(C_1^{x+k+1}C_{k-1}^{x+k`} - C_2^{x+k+1}C_{k-2}^{x+k-1} + C_3^{x+k+1}C_{k-3}^{x+k-2} - \ldots + (-1)^{k-1}C_k^{x+k+1}) \cdot (-1)^k \widetilde{A}(x+1,x)$$

$$= C_0^{x+k+1} \cdot \widetilde{A}(x+k+1,x) - C_1^{x+k+1} \cdot \widetilde{A}(x+k,x)$$

$$+C_2^{x+k+1} \cdot \widetilde{A}(x+k-1,x) + \cdots + (-1)^k \cdot C_k^{x+k+1} \cdot \widetilde{A}(x+1,x)$$

$$= C_0^n \sum_{i=0}^{y-1} C_i^{x+y} \cdot \widetilde{A}(x+y-i,x)(-1)^i$$

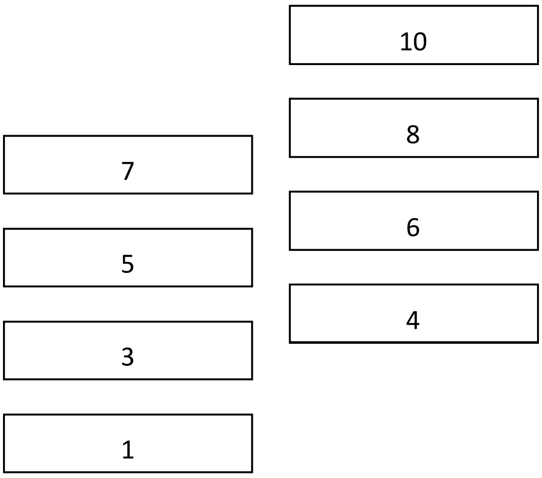
由引理(二)得證

問題(二)：差 k 等級

我們接著往下延伸，若田忌與齊王的馬速能力值滿足以下設定：
其中 T_i 代表田忌第 i 匹馬的能力值，K_i 代表國王第 i 匹馬的能力值，如下圖示：

$$T_1 = 1, T_2 = 3, K_1 = 4, \cdots, T_4 = 7, K_3 = 8, K_4 = 10$$

為 $n = 4$ 的例子，則田忌 x 勝以上的策略數為何？是我們將要解決的問題。



雖然難以直接看出兩者結果之間的關係，但用超算方法數來比便能找出它們之間的關係。將田忌跑得最慢的馬(1 號馬) 及齊王跑得最快的馬(10 號馬)先捨去不看(由於 1 號馬贏不了，10 號馬輸不了，所以都不會影響超算策略數的值)，可發現其餘的馬匹實力其實和【一、田忌賽馬問題研究】中的馬的情況相同，即馬的能力值交錯，所以這部份算法亦相同，代入公式即可得出結果。

現在，我們延伸至田忌慢齊王 k 個等級。即田忌與齊王的馬速能力值滿足以下設定(原題目中的 k 值為 0)：

$$T_1 < T_2 < \cdots < T_{k+1} < K_1 < T_3 < K_2 < T_4 < \cdots < T_n < K_{n-k-1} < \ldots < K_{n-1} < K_n$$

算法是將齊王最快的 k 匹馬，和田忌最慢的 k 匹馬先捨去不看，亦發現其餘的馬匹實力其實和相差 0 個等級的馬相同，而我們將此條件下的超算策略數定為 $B_k(n,x)$，而將不影響 $B_k(n,x)$ 數值的齊王最快的 k 匹馬和田忌最慢的 k 匹馬捨去不看，得 $B_k(n,x) = B(n-k,x)$，進而得其一般式：

$$A_k(n,x) = \sum_{i=1}^{n-x-k} B(n-k,x+i-1)\cdot D(x,i)\cdot(n-x-i+1)!$$

$$= \sum_{j=1}^{n-x-k} j^{n-k-1}\cdot C_{j+x+k}^{n}\cdot(-1)^{n-x-k-j}\cdot\frac{(j+k)!}{(j-1)!}$$

證明：

$$A_k(n,x) = \sum_{i=0}^{n-x-k-1} B(n-k,x+i)\cdot D(x,i+1)\cdot(n-x-i)!$$

$$= \sum_{i=0}^{n-x-k-1} \frac{\sum_{j=1}^{n-x-i-k} j^{n-k-1}\cdot C_{j-1}^{n-x-k-i-1}\cdot(-1)^{n-x-k-i-j}}{(n-x-k-i-1)!}\cdot(n-x-i)!\cdot C_{x-1}^{x+i-1}\cdot(-1)^{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-x-k-1} C_{x-1}^{i+x-1}\frac{\sum_{j=1}^{n-x-i-k} j^{n-k-1}\cdot C_{j-1}^{n-x-k-i-1}\cdot(-1)^{n-x-k-j}}{(n-x-k-i-1)!}\cdot(n-x-i)!$$

$$= \sum_{i=0}^{n-x-k-1}\sum_{j=1}^{n-x-i-k} C_{x-1}^{i+x-1}\cdot\frac{j^{n-k-1}\cdot C_{j-1}^{n-x-k-i-1}\cdot(-1)^{n-x-k-j}}{(n-x-k-i-1)!}\cdot(n-x-i)!$$

$$= \sum_{i=0}^{n-x-k-1}\sum_{j=1}^{n-x-k} C_{x-1}^{i+x-1}\cdot\frac{j^{n-k-1}\cdot C_{j-1}^{n-x-k-i-1}\cdot(-1)^{n-x-k-j}}{(n-x-k-i-1)!}\cdot(n-x-i)!$$
$$-\sum_{i=0}^{n-x-k-1}\sum_{j=n-x-i-k+1}^{n-x-k} C_{x-1}^{i+x-1}\cdot\frac{j^{n-k-1}\cdot C_{j-1}^{n-x-k-i-1}\cdot(-1)^{n-x-k-j}}{(n-x-k-i-1)!}\cdot(n-x-i)!$$

$$= \sum_{j=1}^{n-x-k}\sum_{i=0}^{n-x-1} C_{x-1}^{i+x-1}\cdot\frac{j^{n-k-1}\cdot C_{j-1}^{n-x-k-i-1}\cdot(-1)^{n-x-k-j}}{(n-x-k-i-1)!}\cdot(n-x-i)!-0$$

$$= \sum_{j=1}^{n-x-k} j^{n-k-1}\cdot(-1)^{n-x-k-j}\sum_{i=0}^{n-x-k-1} C_{x-1}^{i+x-1}\cdot\frac{C_{j-1}^{n-x-k-i}}{(n-x-k-i-1)!}\cdot(n-x-i)!$$

$$= \sum_{j=1}^{n-x-k} j^{n-k-1}\cdot(-1)^{n-x-k-j}\sum_{i=0}^{n-x-k-1} C_{x-1}^{x+i-1}\frac{(n-x-i)!}{(j-1)!(n-x-k-i-j)!}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-x-k} j^{n-k}\cdot(-1)^{n-x-k-j}\sum_{i=0}^{n-x-k-j} C_{x-1}^{x+i+1}\cdot C_{j+k}^{n-x-i}\cdot\frac{(j+k)!}{j!}$$

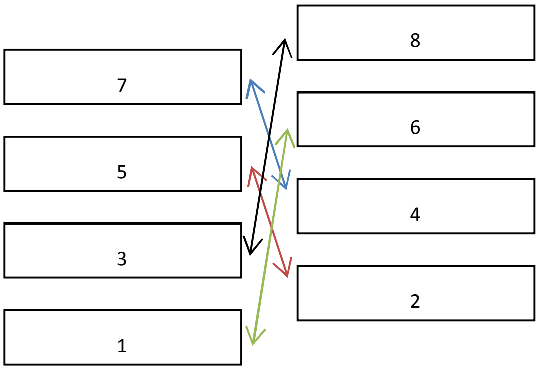
$$= \sum_{j=1}^{n-x-k} j^{n-k}\cdot C_{j+x+k}^{n}\cdot\frac{(j+k)!}{j!}(-1)^{n-x-k-j}$$

引用引理(一)得證

問題(三)：限制對手下田忌的勝敗情況數

現在，我們的研究又回到原始條件下田忌的勝敗情形。之前在解原問題的過程中發現，當田忌的某匹馬遇到比自己弱一定級數的對手的前提下的勝敗情況數，會和另一匹馬遇到比自己弱相同級數的對手的前提下相等。

畫圖示意



有了此條件以後，我們發現不論是馬 7 對馬 4 的前提、馬 5 對馬 2、馬 3 對馬 8、馬 1 對馬 6，田忌此時的勝敗策略數皆為：

0 勝 4 敗：0 種　　；1 勝 3 敗：2 種

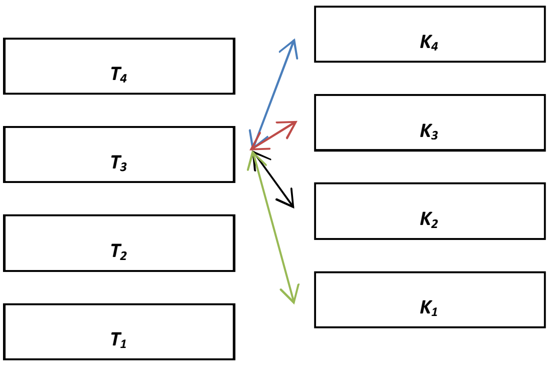
2 勝 2 敗：4 種　　；3 勝 1 敗：0 種

關於這特性的證明待會再證，因為可以根據一般式的解法來得知。

所以我們新定義函數 $\widetilde{A}_w^l(n,x)$ 代表田忌的一匹馬 T_l 遇到比自己弱 w 等的對手時，田忌 n 匹馬中獲得 x 勝以上的策略數。

定義：田忌馬 T_l 和齊王馬 K_m 對戰，則 $w \equiv (l-m) \bmod n$ 且 $1 \le w \le n$)。

下面再放張圖解釋甚麼是弱 w 等：



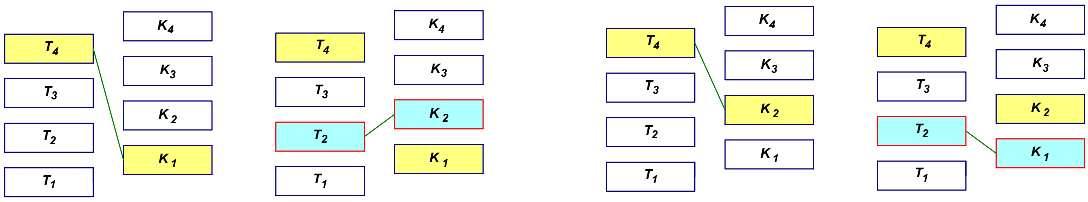
藍線對應的 $w = (3-4) \bmod 4 = 3$

紅線對應的 $w = (3-3) \bmod 4 = 4$

黑線對應的 $w = (3-2) \bmod 4 = 1$

綠線對應的 $w = (3-1) \bmod 4 = 2$

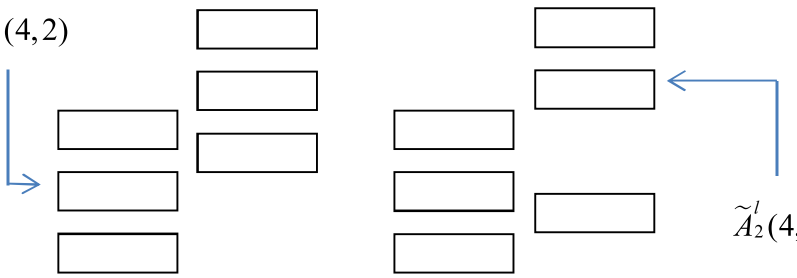
其中，w 越小將代表田忌勝率越大，不過暫時不理它，先解 $\widetilde{A}_w^l(n,x)$ 的一般式。試了許多方法，決定還是由遞迴關係下手，以下以 $\widetilde{A}_3^l(4,2)$ 和其他 $w=1$ 的關係為例：



$\tilde{A}^l_3(4,2)$ - $\tilde{A}^l_2(3,2)$ = $\tilde{A}^l_2(4,2)$ - $\tilde{A}^l_2(3,1)$

上圖中，$\tilde{A}^l_3(4,2)-\tilde{A}^l_2(3,2)$ 代表 $\tilde{A}^l_3(4,2)$ 的策略中 T_2 不以 K_2 為對手且田忌恰獲得 2 勝的部分，而 $\tilde{A}^l_2(4,2)-\tilde{A}^l_2(3,1)$ 則代表 $\tilde{A}^l_2(4,2)$ 的策略中 T_2 不以 K_1 為對手的部分，而這兩者是相等的，因為(如下圖) $\tilde{A}^l_3(4,2)$ 和 $\tilde{A}^l_2(4,2)$ 的差別只會發生在 T_2 以 K_2 或 K_1 為對手的時候。

$\tilde{A}^l_3(4,2)$



$\tilde{A}^l_2(4,2)$

將 $w=3$ 、 $w=2$ 分兩邊： $\tilde{A}^l_3(4,2)=\tilde{A}^l_2(4,2)-\tilde{A}^l_2(3,1)+\tilde{A}^l_2(3,2)$

其實對各種情況的分析後這遞迴式都會成立。接者我們要計算 $\tilde{A}^l_c(n,x)$ 的一般式，以下列出它的遞迴關係式以及起始條件：

$$\begin{cases} \tilde{A}^l_1(n,x)=\tilde{A}(n-1,x-1) \\ \tilde{A}^l_w(n,x)=\tilde{A}^l_{w-1}(n,x)-\tilde{A}^l_{w-1}(n-1,x-1)+\tilde{A}^l_{w-1}(n-1,x) \end{cases}$$

由於三個變數的表格不太好畫，所以我直接寫下觀察後臆測的結果：

$$\tilde{A}^l_w(n,x)=\sum_{i=0}^{w-1}\sum_{j=0}^{i}\tilde{A}^l_1(n-i,x-j)C^i_jC^{w-1}_i\cdot(-1)^j$$

接著我們使用數學歸納法證明之：

證明：

1. 當 $w=1$ 時，$\tilde{A}^l_1(n,x)=\tilde{A}^l_1(n,x)$

2. 當 $w=k$ 時正確，則 $w=k+1$ 時，可以推得

$$\tilde{A}^l_{k+1}(n,x)=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\tilde{A}^l_2(n-i,x-j)C^i_jC^{k-1}_i\cdot(-1)^j$$

接著檢查 $\widehat{A}^l_1(n-i,x-j)$ 的係數是否為 $C^i_jC^k_i(-1)^j$ ，如果是

的話便證明完成了。又能影響 $\tilde{A}^l_1(n-i,x-j)$ 係數的只有 $\tilde{A}^l_2(n-i,x-j)$，

$\tilde{A}^l_2(n-i+1,x-j+1)$, $\tilde{A}^l_2(n-i+1,x-j)$ 三項所以直接比較係數檢查：

$$C^i_jC^{k-1}_i(-1)^j+C^{i-1}_jC^{k-1}_{i-1}(-1)^j-C^{i-1}_{j-1}C^{k-1}_{i-1}(-1)^{j-1}$$

$$=(-1)^j[C^i_jC^{k-1}_i+C^{i-1}_jC^{k-1}_{i-1}+C^{i-1}_{j-1}C^{k-1}_{i-1}]$$

$$=(-1)^j[C^i_jC^{k-1}_i+C^i_jC^{k-1}_{i-1}]$$

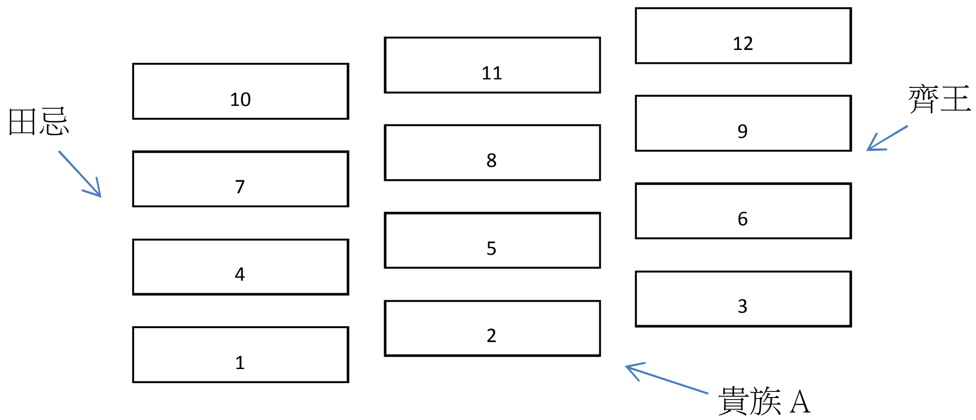
$$=(-1)^jC^i_jC^k_i$$

故得證

至於之前說田忌任何一匹馬遇到比自己弱 w 等的對手，田忌的勝敗情況數都會相同，其實只要把弱 1 等的情況證明出來，再利用遞迴關係比對歸納即可。

問題(四)：多人對戰

延伸至 s 人參與對戰，田忌的馬仍是最慢的，而齊王的馬則是全部裡面馬速最快的，但田忌最快的那匹馬，可以贏過其餘 $s-1$ 個人的第二快的人，雙方的實力結構可以如下所示，表中數字為馬速能力值，以 $s=3,n=4$ 為例：



我們先設定多人對戰的規則：

1. 假定已知其他人的馬速排列
2. 只有馬速最快的馬得勝，其它 $s-1$ 匹馬均敗北
3. 只討論田忌獲勝 x 場以上的策略數，不討論他們獲勝場次間的相對關係

我們的解法和雙人對局一樣，拆成 B 函數和 D 函數，由於所需修正的地方和雙人對局時相同，x 勝重複 x+1 勝的次數，並不會因為人數變多而不同，故 D 函數不必改變。至於 B 函數，則不太一樣，需要有所修正。

先令多人對局裡田忌 n 戰 x 勝中的超算方法數為 $B'(s,n,x)$ ，其意義就像兩人對局中的 B 函數一樣。然而，在多人對局中，假設 h_p 贏了對局，其餘 $s-1$ 個人各有 $p-1$ 個選擇輸這場對局，光只討論這種情況的策略數，就有 $(p-1)^{s-1}$，故多人對戰的 a_k (田忌贏的馬中第 k 慢的馬 h_p 能贏的馬數)為：

$a_k=(p-1-(k-1)+1)^{s-1}$，而此 x 匹馬全勝的方法數共有 $\prod_{k=1}^{x}a_k$ 種，而 $B'(s,n,x)$ 即為所有的 $\prod_{k=1}^{x}a_k$ 加總而已。

我們也和兩人對局時的做法一樣，考慮田忌 n 戰 x 勝時，若田忌最強的馬 $h_{n\text{-}1}$ 輸了，或者比贏了但不在 x 匹獲勝馬的其中一匹，則田忌需從較弱的 n-1 匹馬中挑出 x 匹馬來獲勝，方法數為 $B'(s,n-1,x)$；但若 $h_{n\text{-}1}$ 是 x 匹獲勝馬的其中一匹，一定是贏了齊王 $k_1,\cdots k_{n-1}$ 中的一匹馬，但其中 $x-1$ 匹馬已被贏走，故田忌 h_{n-1} 只有 $n-1-(x-1)$ 匹馬可以贏，又其餘參賽者共有(n-x)種選擇輸田忌的 $h_{n\text{-}1}$，然後田忌再從較弱的 n–1 匹馬中挑出 x–1 匹來獲勝，其方法總數則為 $(n-x)^{s-1}\cdot B'(s,n-1,x-1)$ ，兩者相加即為 $B'(s,n,x)$ 。

所以關於 $B'(s,n-1,x)$ 我們有以下規律

$$\begin{cases} B'(s,x+1,x)=1\ ;\ B(s,n,0)=1 \\ B'(s,n,x)=(n-x)^{s-1}B'(s,n-1,x-1)+B'(s,n-1,x) \end{cases}$$

得到此遞迴式後，我們將數字一個一個代入，跑出數據觀察，並試著將每個數據的最高次方項固定，得到一般式(定義函數 $I'(0)=1$ ，$if\ \ x\neq 0\ \ I'(x)=x$)：

$$B'(s,n,x)=\sum_{i=1}^{n-x}\frac{i^{n(s-1)}}{\prod_{j=0}^{n-x}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$$

當田忌、大夫 A 與國王的馬在馬速交錯的前提下，雙方各 n 匹馬比賽，田忌的馬至少勝 x 場，敗 $n-x$ 場，0 和時，$B'(s,n,x)$ 表示田忌取 x 匹馬得勝的所有可能方法數，即超算方法數。

整理以上的結果，我們重新定義$B'(s,n,x)$如下：

$$\begin{cases} B'(s,\alpha,\beta)=0, \quad if \quad \alpha<\beta \quad or \quad \beta<0 \\ B'(s,0,0)=1 \\ B'(s,\alpha,\beta)=(\alpha-\beta)B'(s,\alpha-1,\beta-1)+B'(s,\alpha-1,\beta), \ \alpha,\beta\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

由以上遞迴定義，我們可以推論出：

1. $B'(s,\alpha,\alpha)=(\alpha-\alpha)B'(s,\alpha-1,\alpha-1)+B'(s,\alpha-1,\alpha)=0, \ \alpha\ge 1$

   即雙方α場對戰，田忌α馬全勝是不可能的。

2. $B'(s,\alpha,0)=(\alpha-0)B'(s,\alpha-1,0-1)+B'(s,\alpha-1,0)=B'(s,\alpha-1,0)$
   $=B'(s,\alpha-2,0)=\cdots=B'(s.1,0)=B'(s,0,0)=1$

   即雙方α場對戰，田忌取 0 匹馬得勝的方法數僅有 1 種。

3. $B'(s,\alpha+1,\alpha)=B'(s,\alpha,\alpha-1)+B'(s,\alpha,\alpha)=B'(s,\alpha,\alpha-1)=B'(s,\alpha-1,\alpha-2)$
   $=\cdots=B'(s,1,0)=1$

   即雙方$\alpha+1$場對戰，田忌取α匹馬得勝的方法數僅有 1 種。

   接下來我們將證明：$B'(s,n,x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-x}\frac{i^{n(s-1)}}{\prod_{j=0}^{n-x}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$, $n>x\ge 0$

我們將證明分成兩個部分：

第一部分

我們將證明：$B'(s,n,0)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{n(s-1)}}{\prod_{j=0}^{n}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}=1,\ n\in\mathbb{N}$

證明：

1. 當$n=1$、2 時，$B'(s,1,0)=B'(s,2,0)=1$ 成立，

   且$\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{i^{(3-2)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{3}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}=\sum_{i=1}^{3-1}\frac{i^{(3-2)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{3-1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}=0$ 成立。

2. 當$n=k-1\ge 3$時，$B'(s,k-1,0)=\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i^{(k-1)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k-1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}=1$ 成立，

   且$\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{i^{(k-2)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i^{(k-2)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k-1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}=0$ 成立。

   則$n=k$時，

   (1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{i^{(k-1)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$

$$=k^{s-1}\sum_{i=1}^{k}\frac{i^{(k-2)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}+\sum_{i=1}^{k}\frac{i^{(k-2)(s-1)}(i^{s-1}-k^{s-1})}{\prod_{j=0}^{k}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$$

$$=0+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i^{(k-2)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k-1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}=0$$

(2) 由(1)之結果

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{i^{k(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$$

$$=k^{s-1}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{i^{(k-1)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}+\sum_{i=1}^{k}\frac{i^{(k-1)(s-1)}(i^{s-1}-k^{s-1})}{\prod_{j=0}^{k}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$$

$$=0+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i^{(k-1)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k-1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}=1$$

第二部分

$$\begin{aligned}B'(s,x+1,x-1)&=2^{(s-1)}B'(s,x,x-2)+B'(s,x,x-1)\\&=2^{2(s-1)}B'(s,x-1,x-3)+2^{(s-1)}B'(s,x-1,x-2)+1\\&\vdots\\&=2^{(x-1)(s-1)}B'(s,2,0)+2^{(x-2)(s-1)}+\cdots+2^{(s-1)}+1\\&=\frac{(2^{s-1})^{x}-1}{2^{s-1}-1}=\frac{2^{x(s-1)}-1}{2^{s-1}-1}\end{aligned}$$

接著，由於田忌無法 0 敗，所以 $n-x\geq 1$，我們將對 $n\geq x+1$，以數學歸納法證明以上得到的 $B'(s,n,x)$ 的一般式。

證明：

1. 若 $n=x+1$ ，$B'(s,x+1,x)=\sum_{i=1}^{1}\frac{i^{(x+1)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}=1$

且 $B'(s,x+1,x-1)=\sum_{i=1}^{2}\frac{i^{(x+1)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{2}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$

$$=\frac{1^{(x+1)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{2}I'(1^{s-1}-j^{s-1})}+\frac{2^{(x+1)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{2}I'(2^{s-1}-j^{s-1})}$$

$$=\frac{1}{I'(1)I'(0)I'(1^{s-1}-2^{s-1})}+\frac{2^{(x+1)(s-1)}}{I'(2^{s-1})I'(2^{s-1}-1^{s-1})I'(0)}$$

$$=\frac{1}{1-2^{s-1}}+\frac{2^{(x+1)(s-1)}}{2^{s-1}\cdot(2^{s-1}-1)}=\frac{2^{(x+1)(s-1)}-2^{s-1}}{2^{s-1}\cdot(2^{s-1}-1)}$$

$$=\frac{2^{x(s-1)}-1}{(2^{s-1}-1)}\quad \text{成立}$$

2. 設 $n=x+k$ 時，

$$B'(s,x+k,x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^{(x+k)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}\quad \text{成立}$$

且 $B'(s,x+k,x-1)=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{i^{(x+k)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k+1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$ 成立

則 $n=x+k+1$ 時

$$B'(s,x+k+1,x)=B'(s,x+k,x)+B'(s,x+k,x-1)\cdot(k+1)^{s-1}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{i^{(x+k)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}+\sum_{i=0}^{k+1}\frac{i^{(x+k)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k+1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}\cdot(k+1)^{s-1}$$

$$=\frac{(k+1)^{(x+k+1)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k+1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}+\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{i^{(x+k)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}+\frac{i^{(x+k)(s-1)}\cdot(k+1)^{s-1}}{\prod_{j=0}^{k+1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}\right)$$

$$=\frac{(k+1)^{(x+k+1)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k+1}I'((k+1)^{s-1}-j^{s-1})}+\sum_{i=0}^{k}\frac{i^{(x+k)(s-1)}\cdot(n-x)^{s-1}+i^{(x+k)(s-1)}\cdot(i^{(s-1)}-(n-x)^{s-1})}{\prod_{j=0}^{k+1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$$

$$=\frac{(k+1)^{(x+k+1)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k+1}I'((k+1)^{s-1}-j^{s-1})}+\sum_{i=0}^{k}\frac{i^{(x+k+1)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k+1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$$

$$=\sum_{i=0}^{k+1}\frac{i^{(x+k+1)(s-1)}}{\prod_{j=0}^{k+1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$$

由數學歸納法得證

特別地，當 $s=2$ 時， $B'(2,n,x)=B(n,x)$ 。

定義田忌 n 戰 x 勝之策略數為 $A'(s,n,x)$，由於想法和雙人對局幾乎相同，可代入式子：

$$A(n,x)=\sum_{i=1}^{n-x}B(n,x+i-1)\cdot D(x,i)\cdot(n-x-i+1)!$$

但剩餘沒算到的 $n-x$ 匹馬的組合數為 $[(n-x)!]^{(s-1)}$ ，故式子為：

$$A'(s,n,x)=\sum_{k=1}^{n-x}B'(s,n,x+k-1)\cdot D(x,k)\cdot[(n-x-k+1)!]^{s-1}$$

經整理後得：

$$A'(s,n,x)=\sum_{k=1}^{n-x}\sum_{i=1}^{n-x-k+1}\frac{i^{n(s-1)}\cdot(-1)^{k-1}\cdot C_{x-1}^{x+k-2}\cdot[(n-x-k+1)!]^{s-1}}{\prod_{j=0}^{n-x-k+1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$$

伍、　研究成果

一、 田忌與齊王馬速交遞的前提下(即$T_1<K_1<T_2<K_2<\cdots<T_n<K_n$)：

(即$T_1<K_1<T_2<K_2<\cdots<T_n<K_n$)，雙方各$n$匹馬比賽，田忌的馬至少勝$x$場，超算方法數的遞迴定義式為：

$$\begin{cases}B(\alpha,\beta)=0,\ \ if\ \ \alpha<\beta\ \ \ or\ \ \beta<0\\ B(0,0)=1\\ B(\alpha,\beta)=(\alpha-\beta)B(\alpha-1,\beta-1)+B(\alpha-1,\beta),\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

一般式為： $B(n,x)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n-x}i^{n-1}\cdot C_{i-1}^{n-x-1}\cdot(-1)^{n-x-i}}{(n-x-1)!}$ ， $n>x\geq 0$

修正係數為： $D(x,k)=C_{x-1}^{x+k-2}\cdot(-1)^{k-1}$

n戰x勝以上之策略總數為：

$$\begin{aligned}A(n,x)&=\sum_{i=1}^{n-x}B(n,x+i-1)\cdot D(x,i)\cdot(n-x-i+1)!\\&=\sum_{i=1}^{n-x}i^n\cdot C_{i+x}^{n}\cdot(-1)^{n-x-i}\end{aligned}$$

二、田忌和齊王的馬速相同，即$T_i=K_i$ ，$i=1,2,3,\ldots,(n-1),n$時，田忌n戰中恰x勝y敗z和的策略數：

$$E(x,y,z)=C_z^n\cdot E(x,y,0)=C_z^n\sum_{i=0}^{y-1}C_i^{x+y}\widetilde{A}(x+y-i,x)\cdot(-1)^i$$

三、田忌差齊王k個等級。即田忌與齊王的馬速滿足以下設定：

$T_1<T_2<\cdots<T_{k+1}<K_1<T_3<K_2<T_4<\cdots<T_n<K_{n-k-1}<\ldots<K_{n-1}<K_n$

田忌n戰x勝以上之策略總數：

$$A_k(n,x)=\sum_{j=1}^{n-x-k}j^{n-k}\cdot C_{j+x+k}^{n}\cdot\frac{(j+k)!}{j!}(-1)^{n-x-k-j}$$

特別地，當$k=0$**時，** $A_0(n,x)=A(n,x)$ 。

四、田忌與齊王馬速交遞的前提下(即$T_1 < K_1 < T_2 < K_2 < \cdots < T_n < K_n$)：

(即$T_1 < K_1 < T_2 < K_2 < \cdots < T_n < K_n$)，雙方各$n$匹馬比賽，限定$T_l$的對手的前提下，田忌恰勝$x$場的策略數為：

$$\widetilde{A}_w^l(n,x) = \sum_{i=0}^{w-1}\sum_{j=0}^{i}\widetilde{A}(n-i-1,x-j-1)C_j^iC_i^{w-1}(-1)^j$$

五、假設一共有s人，田忌是其中最弱者，田忌、大夫$A,B,C,\cdots$與國王的馬在馬速一一遞增時，田忌的馬至少勝x場的策略數：

超算方法數的遞迴定義式為：

$$\begin{cases} B'(s,\alpha,\beta)=0, \ \ if \ \ \alpha<\beta \ \ or \ \ \beta<0 \\ B'(s,0,0)=1 \\ B'(s,\alpha,\beta)=(\alpha-\beta)B'(s,\alpha-1,\beta-1)+B'(s,\alpha-1,\beta), \ \alpha,\beta\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

一般式為：$B'(s,n,x)=\sum_{i=1}^{n-x}\dfrac{i^{n(s-1)}}{\prod_{j=0}^{n-x}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$，$n>x\geq 0$

修正係數為：$D(x,k)=C_{x-1}^{x+k-2}\cdot(-1)^{k-1}$

田忌n戰x勝以上之策略總數：

$$A'(s,n,x)=\sum_{k=1}^{n-x}\sum_{i=1}^{n-x-k+1}\frac{i^{n(s-1)}\cdot(-1)^{k-1}\cdot C_{x-1}^{x+k-2}\cdot[(n-x-k+1)!]^{s-1}}{\prod_{j=0}^{n-x-k+1}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}$$

特別地，當$s=2$時，$A'(2,n,x)=A(n,x)$。

陸、 討論

這次的作品裡面，我們使用了高中所教的關於排列組合的技巧，如二項式定理、巴斯卡定理、等比公式、數學歸納法、排容原理等技巧，逐漸化簡而得到許多組合恆等式還有一些值得討論的結果。例如：

1.在證明$B(n,0)=1$的過程中，發現$\sum_{i=0}^{n}i^n\cdot C_i^n\cdot(-1)^{n-i}=n!$。

2.在得到$B'(s,n,0)=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{i^{n(s-1)}}{\prod_{j=0}^{n}I'(i^{s-1}-j^{s-1})}=1$的結論後，以$s=2$為例

當 $n=4$ 時，$\frac{1}{1\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}+\frac{2^4}{2\cdot1\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)}+\frac{3^4}{3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot(-1)}+\frac{4^4}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1}=1$

當 $n=5$ 時，

$$\frac{1}{1\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}+\frac{2^5}{2\cdot1\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}+\frac{3^5}{3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)}+\frac{4^5}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot(-1)}+\frac{5^5}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1}=1$$

3.證完引理(一) $\sum_{i=0}^{n-x-j}(C_j^{n-x-i}\cdot C_{x-1}^{i+x-1})=C_{j+x}^n$ 後，意外發現和凡得夢(Vandermonde)公式內容相似。

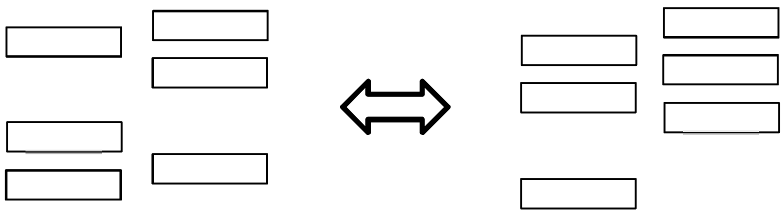
4.在證明 D 函數的過程中，我們得到了這個恆等式

$$\sum_{j=0}^{m-1}C_j^{m-1}\cdot(-1)^j\cdot\frac{x}{x+j}=(C_{m-1}^{x+m-1})^{-1}$$

5.在證明雙方能力值相同且田忌 n 戰 x 勝 y 敗 z 和時，化簡過程中得到：

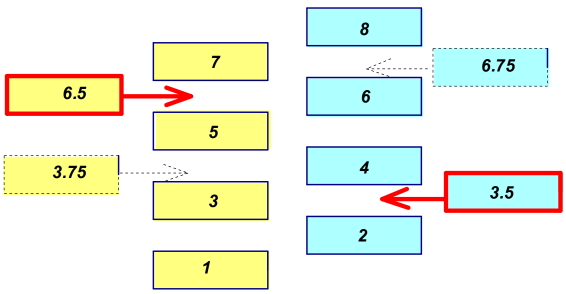
$$C_1^{x+k+1}C_{k-1}^{x+k}-C_2^{x+k+1}C_{k-2}^{x+k-1}+C_3^{x+k+1}C_{k-3}^{x+k-2}-\ldots\ldots+(-1)^{k-1}C_k^{x+k+1}C_0^{x+1}=C_k^{x+k+1}$$

6.另外，在限定條件的內容中，我們看到了許多有趣的性質，可以判斷某些馬速的排列勝敗情況數是否相同。例如：



像以上兩種排列就沒那麼容易判斷他們勝敗策略數是否完全相等，但他們確實是完全相等的。

還有算完限定條件的情形後也可以解決其他問題，例如在原問題的馬速配置中，田忌、齊王各增了一匹馬(馬速不限)，那麼田忌的勝敗策略數為多少？



如果是雙方各加一匹馬(粗線部分)，則我們可以假想再加兩匹馬(虛線部分)，就能看成兩邊各有 $5+1$ 匹馬，然後田忌一匹馬遇到弱 4 等($w=4$)對手的情形。那麼其解便為 $\tilde{A}_4^l(5,x+1)$ 。

柒、 結論

我們成功利用排容原理解決了孫先生的問題(whc 194)，並且將其推廣到多人對戰、等速對戰、k 級差對戰、以及限制田忌某匹馬對手的情況下田忌的勝敗情況數。對於這幾個問題，我們主要分為兩種方法解決：

我們認為排容原理十分適用於計算這類型的策略數多寡。只要使用排容原理，便能依照最強的馬是否被選入必須得勝的 x 匹馬中來得到超算策略數的遞迴式，例如 k 級的差對戰以及多人對戰超算策略數的遞迴式分別為：

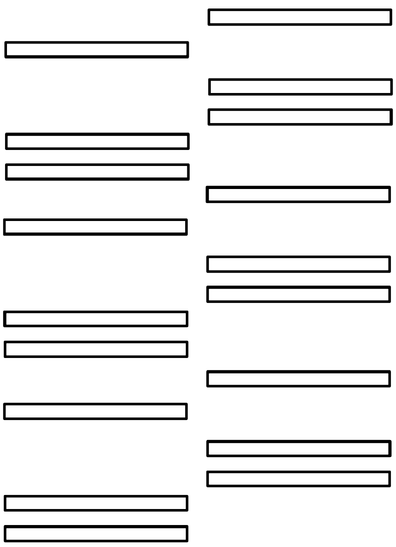
$$B_k(n,x) = (n-x-k)B_k(n-1,x-1) + B_k(n-1,x)$$

$$B'(s,n,x) = (n-x)^{s-1}B'(n-1,x-1) + B'(n-1,x)$$

我們依這遞迴關係歸納出它們的一般式。

另外一種則是由原問題的結果延伸，例如等速對局和限制對手的情形。在某些特定的情況下，它們的策略數與原問題的策略數相等。我們利用這特定情況下的策略數作為遞迴式的起始條件，再觀察它們之間的遞迴關係，進而解答之。

目前我們的目標是解決更一般的情形，也就是當雙方相對關係以 r 匹馬為一循環(若以 t_k 代表 T_k 在齊王陣營中能勝過多少匹馬，則 $t_k - t_{k-r} = r$)時我們都能解決。我們試著以上述的兩種方法來解決這問題，下方以 3 循環的其中一種情況為例：



假設如左方排列，我們尚可利用原問題的結果來解決。因為只有在每個循環中的第二匹馬遇到齊王同一循環中最慢馬的時候會有差別。透過修正原問題與左側排列下的策略數差即可得此時恰 n (此處 3 整除 n)戰 x 勝的策略數即為

$$\widetilde{A}(n,x) - \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} C_i^{\frac{n}{3}} \widetilde{A}(n-i,x-i)(-1)^{i-1} + \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} C_i^{\frac{n}{3}} \widetilde{A}(n-i,x)(-1)^{i-1}$$

但是在每個循環中有超過一匹馬和原問題有差異的話，我們便無法用這方法解決。

如果我們以最快的數匹馬是否得勝來列出超算策略數的遞迴式，則可得

$$b(n,x) = b(n-3,x) + [3(n-x)+4]\times b(n-3,x-1) + (n-x-1)[3(n-x)-2]\times b(n-3,x-2)$$
$$+(n-x-1)(n-x-2)(n-x-3)\times b(n-3,x-3)$$

希望將來能找出一種演算法來解決類似的遞迴式，那麼只要雙方馬速排列具有循環規律都能解決。

組合對局的題目十分的多變，我們無法找到一種解法能解決所有的問題，所以我們只致力於擴充自己作品的內容，讓我們可以靠著這些結論解決更多的排列組合問題。

捌、 參考資料

一、楊學枝 2011 中國初等數學研究 第三期 第一頁
二、史濟懷 2001 數學奧林匹亞輔導叢書組合恆等式 第二期 第六、七十頁
三、夏興國 1999 數學歸納法縱橫談 75 頁~84 頁

【評語】040410

1. 在作品報告書及海報上所提到的人物「孫儐」實為「孫臏」之筆誤。

2. 有關 B(n, x)數值的列表：這是可以利用試算表(如 Excel) 當中 COPY 指令輕易完成的工作。該工作徹底反映作者對於絕對位置(Absolute Cell Address)與相對位置(Relative Cell Address)之認識，也具體展示軟體在數學實驗的活用性。

3. (數學)科展重視數學概念精巧的表達，全文應具自足完備性(self-contained)，不宜給人「某巨著中的一段」的印象。本文採用眾多附帶多層次駐碼(上、下標)的符號。作者宜對於這類符號進行簡化，甚至該檢討採用符號的必要性。