中華民國第53屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040409

君子“號球”

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 張竣翔 高二 陳俊宇 高二 黃柏豪	梁俊宏

關鍵詞：遞迴數列、排列組合、尤拉三角形

摘要

本次研究的靈感來自於 2011 年亞太數學奧林匹亞競賽初選考題中：「將 10 個箱子編號為 1 , 2 , 3 , ⋯ , 10，另將 10 個球編號為 1 , 2 , 3 , ⋯ , 10。今規定編號 i 的球只能放入編號 1 , 2 , 3 , ⋯ , i 的箱子 , i = 1 , 2 , 3 , ⋯ , 10。求恰有一個空箱子的放球方法數?」

此報告由原題向外延伸，運用「遞迴數列」與「排列組合」找出關係，從 10 個箱子空任一個箱子的總方法數，推廣到 m 個箱子空任 n 個箱子的總方法數，其結果與 Euler's triangle 相符。最後也將限制條件加以改變，包括奇偶數、改變球數與限制容球數，並討論其解法。

壹、 研究動機

在數學專題課時，老師提供了 2011、2012 年亞太數學奧林匹亞競賽的初選考題，讓我們分組進行研討，其中 2011 年的第 2 題引起了我們極大的興趣：「將 10 個箱子編號為 1 , 2 , 3 , ⋯ , 10，另將 10 個球編號為 1 , 2 , 3 , ⋯ , 10。今規定編號 i 的球只能放入編號 1 , 2 , 3 , ⋯ , i 的箱子 , i = 1 , 2 , 3 , ⋯ , 10。求恰有一個空箱子的放球方法數?」

經過我們與老師的討論，發現此題運用高一的「遞迴數列」與「排列組合」便能輕鬆解出，然而題目背後似乎還隱藏著許多可以延伸的部分，於是我們決定探索下去，希望可以從中獲得更多的成果。

貳、 研究目的

一、設 m 個箱子編號為 1,2,3, ⋯ , m，另有 m 個球編號為 1,2,3, ⋯ , m。今規定編號 i 的球只能放入編號 1,2,3, ⋯ , i 的箱子，其中 i = 1,2,3, ⋯ , m。茲討論各種情況如下：

(一) 找出 m 個箱子空第 a 個箱子的方法數。(a≦m)

(二) 找出 m 個箱子空任一個箱子的總方法數。

(三) 找出 m 個箱子空第 a 和 b 個箱子的方法數。(a<b≦m)

(四) 找出 m 個箱子空任兩個箱子的總方法數。

(五) 找出 m 個箱子空任 n 個箱子的總方法數。(n<m)

二、給定其他不同類型的限制條件，並討論其方法數。

參、 研究設備及器材

一、電腦、紙。

二、WORD、GSP。

肆、 代數定義

一、令 A_x 為空第 x 個箱子的方法數。

二、令 $A_{x,y}$ 為空第 x 個箱子和第 y 個箱子的方法數。(x＞y)

三、令 $A_{x,y,z}$ 為空第 x 個箱子、第 y 個箱子和第 z 個箱子的方法數。(x＞y＞z)

四、令 $S_{m,n}$ 為 m 個箱子中空 n 個箱子的總方法數。

五、令 $K_{n,j}$ 為 n 個箱子中，第 j 個為空箱($1 \leqq j<n$)，且另有一編號大於 j 的空箱之總方法數。

伍、 研究過程與方法

一、 原題討論：

將 10 個箱子編號為 1,2,3,⋯,10，另將 10 個球編號為 1,2,3,⋯,10。今規定編號 i 的球只能放入編號 1,2,3,⋯, i 的箱子,i=1,2,3,⋯,10，求恰有一個空箱子的放球方法數?

首先，我們先將所有球依照編號放入相對的箱子內，1 號球放入 1 號箱子內；2 號球放入 2 號箱子內⋯。接著我們分別討論空第幾個箱子的方法數。

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1 號箱子空的情況：因為 1 號球只能放置在 1 號箱內，亦即 $A_1=0$。

2 號箱子空的情況：會有一種情況，亦即 $A_2=1$。

3 號箱子空的情況：等於先把 3 號球拿到 2 號箱子內，接著如同下圖所示，若 2 號與 3 號球都不動，則會有 1 種可能；若 2 號球或 3 號球，任選一顆往前放，則有 $C_1^2 \cdot A_2$ 種，亦即 $A_3=2A_2+1$。

	③								
①	②	X	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

4 號箱子空的情況：等於先把 4 號球拿到 3 號箱子內，接著如同下圖所示，若 3 號與 4 號球都不動，則會有 1 種可能；若 3 號球或 4 號球，任選一顆往前放，則有 $C_1^2 \cdot A_3$ 種，亦即 $A_4=2A_3+1$。

		④							
①	②	③	X	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

其餘 5~10 號箱子的情況，皆與前面的箱子一樣。

我們得到 $A_{10}=2A_9+1$；$A_9=2A_8+1$⋯ ⋯ $A_2=2A_1+1$

整理一下可得 $(A_{10}+1)=2(A_9+1)$；$(A_9+1)=2(A_8+1)$⋯ ⋯ $(A_2+1)=2(A_1+1)$

相乘得到 $A_{10}=2^9-1$；$A_9=2^8-1\cdots\ \cdots A_1=2^0-1$

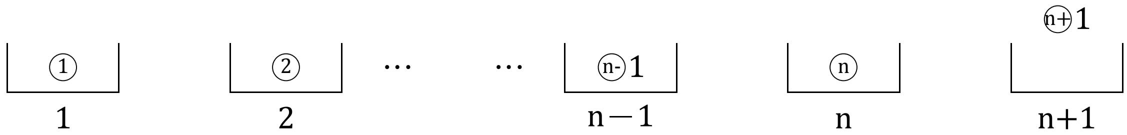
將所有可能相加，可得 $S_{10,1}=A_{10}+A_9+\cdots\ \cdots A_1$

$$=(2^9+2^8+\cdots+2^0)-10$$

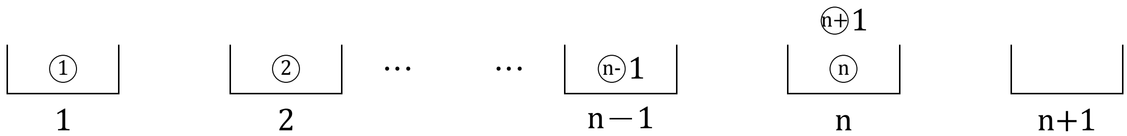
$$=(2^{10}-1)-10=1013$$

因此我們得 10 個箱子，10 顆球，恰有一個空箱子的放球方法數為 1013。

二、 空一個箱子的情況：



A_{n+1} 相當於將本來放置於第 n+1 個箱子裡的球拿出，並往前面的箱子放。



而此時，第 n 個箱子內會有兩顆球，若任選其中一顆往前放，其方法數為 A_n 種，因為有不同的兩球，所以共 $C_1^2\cdot A_n$ 種；若兩球都放在第 n 個箱子內不動，則會有 1 種可能。

於是我們得到一條遞迴公式：$A_{n+1}=2A_n+1$

$$A_{n+1}=2A_n+1\rightarrow\ (A_{n+1}+1)=2(A_n+1)$$
$$(A_2+1)=2(A_1+1)$$
$$(A_3+1)=2(A_2+1)$$
$$\cdots$$
$$\times)\ \ \underline{(A_n+1)=2(A_{n-1}+1)}$$
$$A_n=2^{n-1}-1$$

藉由 $A_n=2^{n-1}-1$ 此通式，能推得 n 個箱子空一個箱子的所有方法數。

$$S_{n,1}=A_n+A_{n-1}+A_{n-2}+\cdots+A_2+A_1$$
$$=(2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2^1+2^0)-n$$
$$=(2^n-1)-n$$
$$=2^n-(n+1)$$

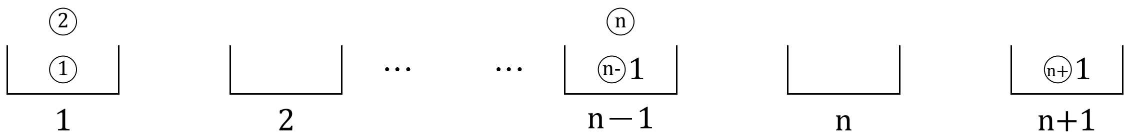
因此成功找出通式 $S_{n,1}=2^n-(n+1)$，將空一個箱子的所有情況討論完成。

三、 空兩個箱子的情況：

空兩個箱子的情況，由於可能性很多，所以以表格方式來討論。

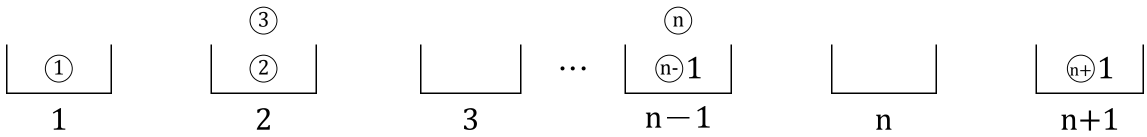
							$A_{2,1}=0$
						$A_{3,2}$	$A_{3,1}=0$
					$A_{4,3}$	$A_{4,2}$	$A_{4,1}=0$
				$A_{5,4}$	$A_{5,3}$	$A_{5,2}$	$A_{5,1}=0$
			$A_{6,5}$	$A_{6,4}$	$A_{6,3}$	$A_{6,2}$	$A_{6,1}=0$
		$A_{7,6}$	$A_{7,5}$	$A_{7,4}$	$A_{7,3}$	$A_{7,2}$	$A_{7,1}=0$
	⋯	$A_{8,6}$	$A_{8,5}$	$A_{8,4}$	$A_{8,3}$	$A_{8,2}$	$A_{8,1}=0$
⋯	⋯	$A_{9,6}$	$A_{9,5}$	$A_{9,4}$	$A_{9,3}$	$A_{9,2}$	$A_{9,1}=0$

首先討論右邊數來的第二行。



$A_{n,2}$ 相當於將本來置於第 n 個箱子和第 2 個箱子裡的球拿出，往前放。而此時若第 n－1 的箱子內的兩球皆不動，則就會有 A_2 種放法；若任選一顆往前放，其方法數為 $A_{n-1,2}$ 種，因為有不同的兩球，所以共C_1^2・$A_{n-1,2}$ 種，因此，$A_{n,2}= 2A_{n-1,2}+A_2$。

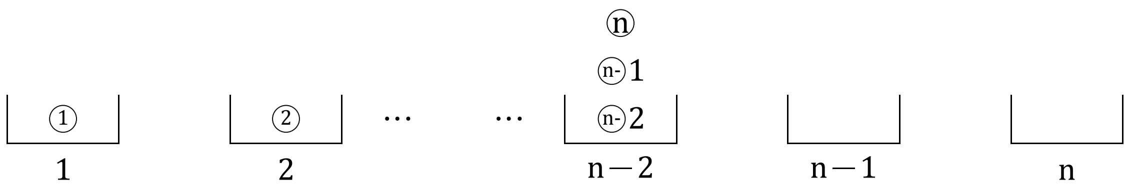
而接下來是右邊數來第三行。



$A_{n,3}$ 相當於將本來置於第 n 個箱子和第 3 個箱子裡的球拿出，往前放。而此時若第 n－1 的箱子內的兩球皆不動，則就會有 A_3 種放法；若任選一顆往前放，其方法數為 $A_{n-1,3}$ 種，因為有不同的兩球，所以共C_1^2・$A_{n-1,3}$ 種；因此，$A_{n,3}= 2A_{n-1,3}+A_3$。

有上述的討論，我們得到了一個適用於所有空兩個箱子的公式：$A_{n,m}= 2A_{n-1,m}+A_m$。然而此公式只能解決同行不同列間的關係，要解出表格中所有數字，也就是空兩個箱子的所有情形，還必須要有行與行之間的關係。

接著我們發現到 $A_{n,n-1}= C_2^3 \cdot A_{n-1,n-2}+ C_1^3 \cdot A_{n-2}+1$



$A_{n,n-1}$ 相當於將本來置於第 n 個箱子和第 n－1 個箱子裡的球拿出，往前放入第 n－2 號箱子，而此時若第 n－2 號箱子內的 3 球皆不動，則就會有 1 種放法，若是將 1 顆球拿出，則會有 $C_1^3 \cdot A_{n-2}$ 種放法，若是將 2 顆球拿出，則會有 $C_2^3 \cdot A_{n-1,n-2}$ 種放法，因此

$A_{n,n-1}=C_2^3 \cdot A_{n-1,n-2}+ C_1^3 \cdot A_{n-2}+1=3(A_{n-1,n-2}+A_{n-2})+1$。

$$
\begin{aligned}
A_{n,n-1}&=3(A_{n-1,n-2}+A_{n-2})+1\\
&=3(A_{n-1,n-2}+2^{n-3}-1)+1\\
&=3\,A_{n-1,n-2}+3\cdot 2^{n-3}-2\\
\rightarrow A_{n,n-1}+2\cdot 3\cdot 2^{n-3}-1&=3\,A_{n-1,n-2}+3\cdot 3\cdot 2^{n-3}-3\\
\rightarrow A_{n,n-1}+3\cdot 2^{n-2}-1&=3(A_{n-1,n-2}+3\cdot 2^{n-3}-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_{4,3}+3\cdot 2^{2}-1=3(A_{3,2}+3\cdot 2^{1}-1)\\
&A_{5,4}+3\cdot 2^{3}-1=3(A_{4,3}+3\cdot 2^{2}-1)\\
&\cdots\\
\times)\ &\underline{A_{n,n-1}+3\cdot 2^{n-2}-1=3(A_{n-1,n-2}+3\cdot 2^{n-3}-1)}\\
&A_{n,n-1}+3\cdot 2^{n-2}-1=3^{n-3}(A_{3,2}+3\cdot 2^{1}-1)\\
\rightarrow\ &A_{n,n-1}+3\cdot 2^{n-2}-1=3^{n-3}(1+3\cdot 2^{1}-1)\\
\rightarrow\ &A_{n,n-1}=2\cdot 3^{n-2}-3\cdot 2^{n-2}+1
\end{aligned}
$$

有了行與行、列與列之間的關係後，接著我們便繼續延伸到試著表示空任一兩箱子的方法數。

$$
A_{4,2}= 2A_{3,2}+1\rightarrow A_{4,2}+1= 2(A_{3,2}+1)
$$

$$
\begin{aligned}
&A_{4,2}+1= 2(A_{3,2}+1)\\
&A_{5,2}+1= 2(A_{4,2}+1)\\
&\cdots\\
\times)\ &\underline{A_{n,2}+1= 2(A_{n-1,2}+1)}\\
&A_{n,2}=2^{n-3}\cdot(A_{3,2}+1)-1
\end{aligned}
$$

$$
A_{5,3}= 2A_{4,3}+3\rightarrow A_{5,3}+3= 2(A_{4,3}+3)
$$

$$
\begin{aligned}
&A_{5,3}+3= 2(A_{4,3}+3)\\
&A_{6,3}+3= 2(A_{5,3}+3)\\
&\cdots\\
\times)\ &\underline{A_{n,3}+3= 2(A_{n-1,3}+3)}\\
&A_{n,3}=2^{n-4}\cdot(A_{4,3}+3)-3
\end{aligned}
$$

討論後得到，$A_{m,n}=2^{m-n-1}\cdot(2\cdot 3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+2^{n-1})-(2^{n-1}-1)$，此通式可幫助我們完成空兩個箱子的所有情況，於是我們完成了下圖。

							$A_{2,1}=0$
						$A_{3,2}=1$	$A_{3,1}=0$
					$A_{4,3}=7$	$A_{4,2}=3$	$A_{4,1}=0$
				$A_{5,4}=31$	$A_{5,3}=17$	$A_{5,2}=7$	$A_{5,1}=0$
			$A_{6,5}=115$	$A_{6,4}=69$	$A_{6,3}=37$	$A_{6,2}=15$	$A_{6,1}=0$
		$A_{7,6}=391$	$A_{7,5}=245$	$A_{7,4}=145$	$A_{7,3}=77$	$A_{7,2}=31$	$A_{7,1}=0$
	…	$A_{8,6}=813$	$A_{8,5}=505$	$A_{8,4}=297$	$A_{8,3}=157$	$A_{8,2}=63$	$A_{8,1}=0$
…	…	$A_{9,6}=1657$	$A_{9,5}=1025$	$A_{9,4}=601$	$A_{9,3}=317$	$A_{9,2}=127$	$A_{9,1}=0$

最後我們要討論的是空兩個箱子的總方法數。藉由
$A_{m,n}=2^{m-n}\cdot(3^{n-1}-2^{n-1})-(2^{n-1}-1)$兩條式子來做加總，取得 $S_{n,2}$ 的值。

舉例來說：

$S_{3,2}=(A_{2,1}+A_{3,1})+A_{3,2}=K_{3,1}+K_{3,2}$

	$A_{2,1}=0$
$A_{3,2}=1$	$A_{3,1}=0$

$S_{4,2}=(A_{2,1}+A_{3,1}+A_{4,1})+(A_{3,2}+A_{4,2})+A_{4,3}=K_{4,1}+K_{4,2}+K_{4,3}$

		$A_{2,1}=0$
	$A_{3,2}=1$	$A_{3,1}=0$
$A_{4,3}=7$	$A_{4,2}=3$	$A_{4,1}=0$

$S_{5,2}=(A_{2,1}+A_{3,1}+A_{4,1}+A_{5,1})+(A_{3,2}+A_{4,2}+A_{5,2})+(A_{4,3}+A_{5,3})+A_{5,4}=K_{5,1}+K_{5,2}+K_{5,3}+K_{5,4}$

			$A_{2,1}=0$
		$A_{3,2}=1$	$A_{3,1}=0$
	$A_{4,3}=7$	$A_{4,2}=3$	$A_{4,1}=0$
$A_{5,4}=31$	$A_{5,3}=17$	$A_{5,2}=7$	$A_{5,1}=0$

$$A_{3,2}=2^0(A_{3,2}+1)-1$$
$$A_{4,2}=2^1(A_{3,2}+1)-1$$
$$\ldots$$
$$+)\ \underline{A_{n,2}=2^{n-3}(A_{3,2}+1)-1}$$
$$K_{n,2}=(2^0+2^1+\ldots+2^{n-3})(A_{3,2}+1)-(n-2)$$
$$\rightarrow\quad K_{n,2}=(2^{n-2}-1)(A_{3,2}+1)-(n-2)$$

同理可得 $K_{n,3}=(2^{n-3}-1)(A_{4,3}+3)-3(n-3)$

$K_{n,4}=(2^{n-4}-1)(A_{5,4}+7)-7(n-4)$

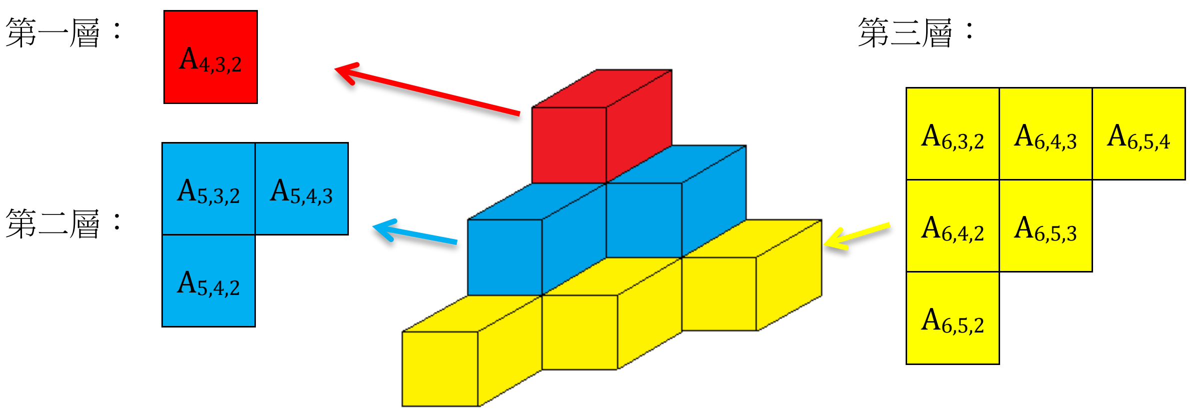
由此可知 $K_{n,j}=(2^{n-j}-1)(A_{j+1,j}+2^{j-1}-1)-(2^{j-1}-1)(n-j)$

$$S_{n,2}=\sum_{j=1}^{n-1}K_{n,j}=\sum_{j=1}^{n-1}\left[\left(2^{n-j}-1\right)\left(2\cdot 3^{j-1}-2\cdot 2^{j-1}\right)-\left(2^{j-1}-1\right)(n-j)\right]$$

因此成功將空二個箱子的所有情況討論完成。

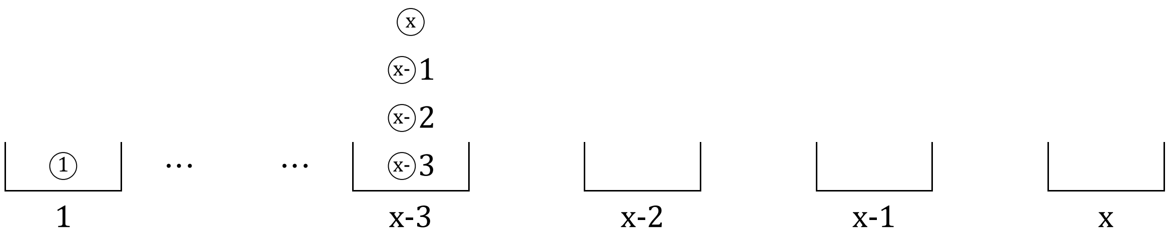
四、 空三個箱子的情況：

空三個箱子的情況，由於可能性很多，所以由一個立體圖形來討論。



空三個箱子的情況，可以分為四種，分別為三個箱子皆相鄰($A_{x,x-1,x-2}$)、兩個箱子相鄰一個分開($A_{x,x-1,z}$、$A_{x,y,y-1}$)與三個箱子互不相鄰($A_{x,y,z}$)。

(一)、 三個箱子皆相鄰($A_{x,x-1,x-2}$)



$A_{x,x-1,x-2}$ 相當於將本來置於第 x 個箱子、第 x-1 個箱子和第 x-2 個箱子裡的球拿出，往前放入第 x-3 個箱子。此時若將第 x-3 號箱子內的 3 顆球拿出，則會有$C_3^4A_{x-1,x-2,x-3}$種放法，若將 2 顆球拿出，則會有$C_2^4A_{x-2,x-3}$種放法，若將 1 球拿出，則會有$C_1^4A_{x-3}$種放法，若 4 球皆不動，則有 1 種放法。最後整理得到，$A_{x,x-1,x-2}=C_3^4A_{x-1,x-2,x-3}+C_2^4A_{x-2,x-3}+C_1^4A_{x-3}+1$。

$$A_{x,x-1,x-2}=4A_{x-1,x-2,x-3}+6A_{x-2,x-3}+4A_{x-3}+1$$
$$\rightarrow A_{x,x-1,x-2}+4\cdot 3^{x-2}-7\cdot 2^{x-3}+1=4(A_{x-1,x-2,x-3}+4\cdot 3^{x-3}-7\cdot 2^{x-4}+1)$$

$$A_{5,4,3}+4\cdot 3^{3}-7\cdot 2^{2}+1=4(A_{4,3,2}+4\cdot 3^{2}-7\cdot 2^{1}+1)$$
$$A_{6,5,4}+4\cdot 3^{4}-7\cdot 2^{3}+1=4(A_{5,4,3}+4\cdot 3^{3}-7\cdot 2^{2}+1)$$
$$\cdots$$
$$\times)\quad A_{x,x-1,x-2}+4\cdot 3^{x-2}-7\cdot 2^{x-3}+1=4(A_{x-1,x-2,x-3}+4\cdot 3^{x-3}-7\cdot 2^{x-4}+1)$$
$$A_{x,x-1,x-2}+4\cdot 3^{x-2}-7\cdot 2^{x-3}+1=4^{x-4}(A_{4,3,2}+4\cdot 3^{2}-7\cdot 2^{1}+1)$$
$$\rightarrow A_{x,x-1,x-2}=6\cdot 4^{x-3}-4\cdot 3^{x-2}+7\cdot 2^{x-3}-1$$

整理後得 $A_{x,x-1,x-2}=6\cdot 4^{x-3}-4\cdot 3^{x-2}+7\cdot 2^{x-3}-1$。

(二)、　兩個箱子相鄰一個分開($A_{x,x-1,z}$)

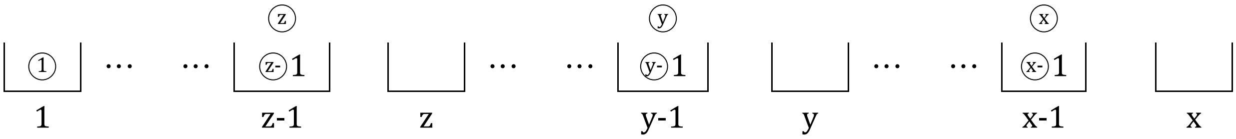
$A_{x,x-1,z}$ 相當於將本來置於第 x 個箱子、第 x-1 個箱子和第 z 個箱子裡的球拿出，分別往前放入第 x-2 個箱子和第 z-1 個箱子。此時若將第 x-2 號箱子內的 2 顆球拿出，則會有 $C_2^3A_{x-1,x-2,z}$ 種放法，若將 1 球拿出，則會有 $C_1^3A_{x-2,z}$ 種放法，若 3 顆球皆不動，則討論第 z-1 號箱子內的情形。若將第 z-1 號箱子內的 1 顆球拿出，則會有 $C_1^2A_{z-1}$ 種放法，若 2 球皆不動，則有 1 種放法。最後整理得到，$A_{x,x-1,z}=C_2^3A_{x-1,x-2,z}+C_1^3A_{x-2,z}+C_1^2A_{z-1}+1$。

$$A_{x,x-1,z}=3A_{x-1,x-2,z}+3A_{x-2,z}+2A_{z-1}+1$$
$$\rightarrow A_{x,x-1,z}+3A_{x-1,z}+2^{z}-2=3(A_{x-1,x-2,z}+3A_{x-2,z}+2^{z}-2)$$

$$A_{z+3,z+2,z}+3A_{z+2,z}+2^{z}-2=3(A_{z+2,z+1,z}+3A_{z+1,z}+2^{z}-2)$$
$$A_{z+4,z+3,z}+3A_{z+3,z}+2^{z}-2=3(A_{z+3,z+2,z}+3A_{z+2,z}+2^{z}-2)$$
$$\cdots$$
$$\times)\quad A_{x,x-1,z}+3A_{x-1,z}+2^{z}-2=3(A_{x-1,x-2,z}+3A_{x-2,z}+2^{z}-2)$$
$$A_{x,x-1,z}+3A_{x-1,z}+2^{z}-2=3^{x-z-2}(A_{z+2,z+1,z}+3A_{z+1,z}+2^{z}-2)$$
$$\rightarrow A_{x,x-1,z}=3^{x-z-1}\cdot 2^{2z-1}-2\cdot 3^{x-2}-2^{x-z-1}\cdot 3^{z}+3\cdot 2^{x-2}+2^{z-1}-1$$

整理後得 $A_{x,x-1,z}=3^{x-z-1}\cdot 2^{2z-1}-2\cdot 3^{x-2}-2^{x-z-1}\cdot 3^{z}+3\cdot 2^{x-2}+2^{z-1}-1$。

(三)、　三個箱子互不相鄰($A_{x,y,z}$)

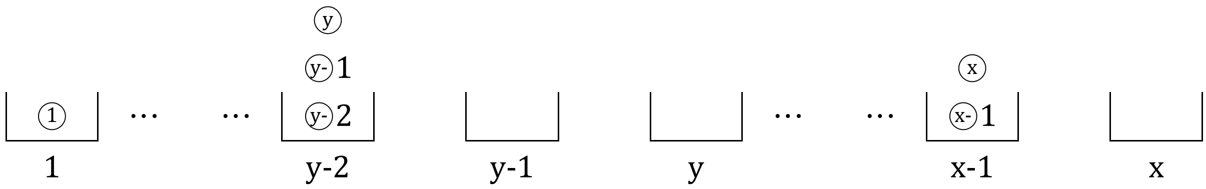


$A_{x,y,z}$ 相當於將本來置於第 x 個箱子、第 y 個箱子和第 z 個箱子裡的球拿出，分別往前放入第 x-1 個箱子、第 y-1 個箱子和第 z-1 個箱子。此時若將第 x-1 號箱子內的 1 顆球拿出，則會有 $C_1^2 A_{x-1,y,z}$ 種放法，若 2 球皆不動，則在討論第 y-1 號箱子內的情形。若將第 y-1 號箱子內的 1 顆球拿出，則會有 $C_1^2 A_{y-1,z}$ 種放法，若 2 球皆不動，則最後討論第 z-1 號箱子內的情形。若將第 z-1 號箱子內的 1 顆球拿出，則會有 $C_1^2 A_{z-1}$ 種放法，若 2 球皆不動，則 1 種放法。最後整理得到，$A_{x,y,z}=C_1^2 A_{x-1,y,z}+C_1^2 A_{y-1,z}+C_1^2 A_{z-1}+1$。

$$A_{x,y,z}=2A_{x-1,y,z}+2A_{y-1,z}+2A_{z-1}+1$$
$$\rightarrow A_{x,y,z}+2A_{y-1,z}+2A_{z-1}+1=2(A_{x-1,y,z}+2A_{y-1,z}+2A_{z-1}+1)$$

$$A_{y+2,y,z}+2A_{y-1,z}+2A_{z-1}+1=2(A_{y+1,y,z}+2A_{y-1,z}+2A_{z-1}+1)$$
$$A_{y+3,y,z}+2A_{y-1,z}+2A_{z-1}+1=2(A_{y+2,y,z}+2A_{y-1,z}+2A_{z-1}+1)$$
$$\cdots$$
$$\times)\quad A_{x,y,z}+2A_{y-1,z}+2A_{z-1}+1=2(A_{x-1,y,z}+2A_{y-1,z}+2A_{z-1}+1)$$
$$A_{x,y,z}+2A_{y-1,z}+2A_{z-1}+1=2^{x-y-1}(A_{y+1,y,z}+2A_{y-1,z}+2A_{z-1}+1)$$

(四)、　兩個箱子相鄰一個分開($A_{x,y,y-1}$)



$A_{x,y,y-1}$ 相當於將本來置於第 x 個箱子、第 y 個箱子和第 y-1 個箱子裡的球拿出，分別往前放入第 x-1 個箱子和第 y-2 個箱子。此時若將第 x-1 號箱子內的 1 顆球拿出，則會有 $C_1^2 A_{x-1,y,y-1}$ 種放法，若 2 顆球皆不動，則討論第 y-2 號箱子內的情形。若將第 y-2 號箱子內的 2 顆球拿出，則會有 $C_2^3 A_{y-1,y-2}$ 種放法，若將 1 球拿出，則會有 $C_1^3 A_{y-2}$ 種放法，若 3 球皆不動，則有 1 種放法。最後整理得到，$A_{x,y,y-1}=C_1^2 A_{x-1,y,y-1}+C_2^3 A_{y-1,y-2}+C_1^3 A_{y-2}+1$。

$$A_{x,y,y-1}=2A_{x-1,y,y-1}+3A_{y-1,y-2}+3A_{y-2}+1$$

$$\rightarrow A_{x,y,y-1}+3A_{y-1,y-2}+3A_{y-2}+1=2(A_{x-1,y,y-1}+3A_{y-1,y-2}+3A_{y-2}+1)$$

$$A_{y+2,y,y-1}+3A_{y-1,y-2}+3A_{y-2}+1=2(A_{y+1,y,y-1}+3A_{y-1,y-2}+3A_{y-2}+1)$$

$$A_{y+3,y,y-1}+3A_{y-1,y-2}+3A_{y-2}+1=2(A_{y+2,y,y-1}+3A_{y-1,y-2}+3A_{y-2}+1)$$

$$\cdots$$

$$\times)\quad \underline{A_{x,y,y-1}+3A_{y-1,y-2}+3A_{y-2}+1=2(A_{x-1,y,y-1}+3A_{y-1,y-2}+3A_{y-2}+1)}$$

$$A_{x,y,y-1}+3A_{y-1,y-2}+3A_{y-2}+1=2^{x-y-1}(A_{y+1,y,y-1}+3A_{y-1,y-2}+3A_{y-2}+1)$$

有上述的討論，我們可以得到空任意三個箱子的方法數。
由於此四條式子都較為複雜，因此加總部份，藉由下一個主題做討論。

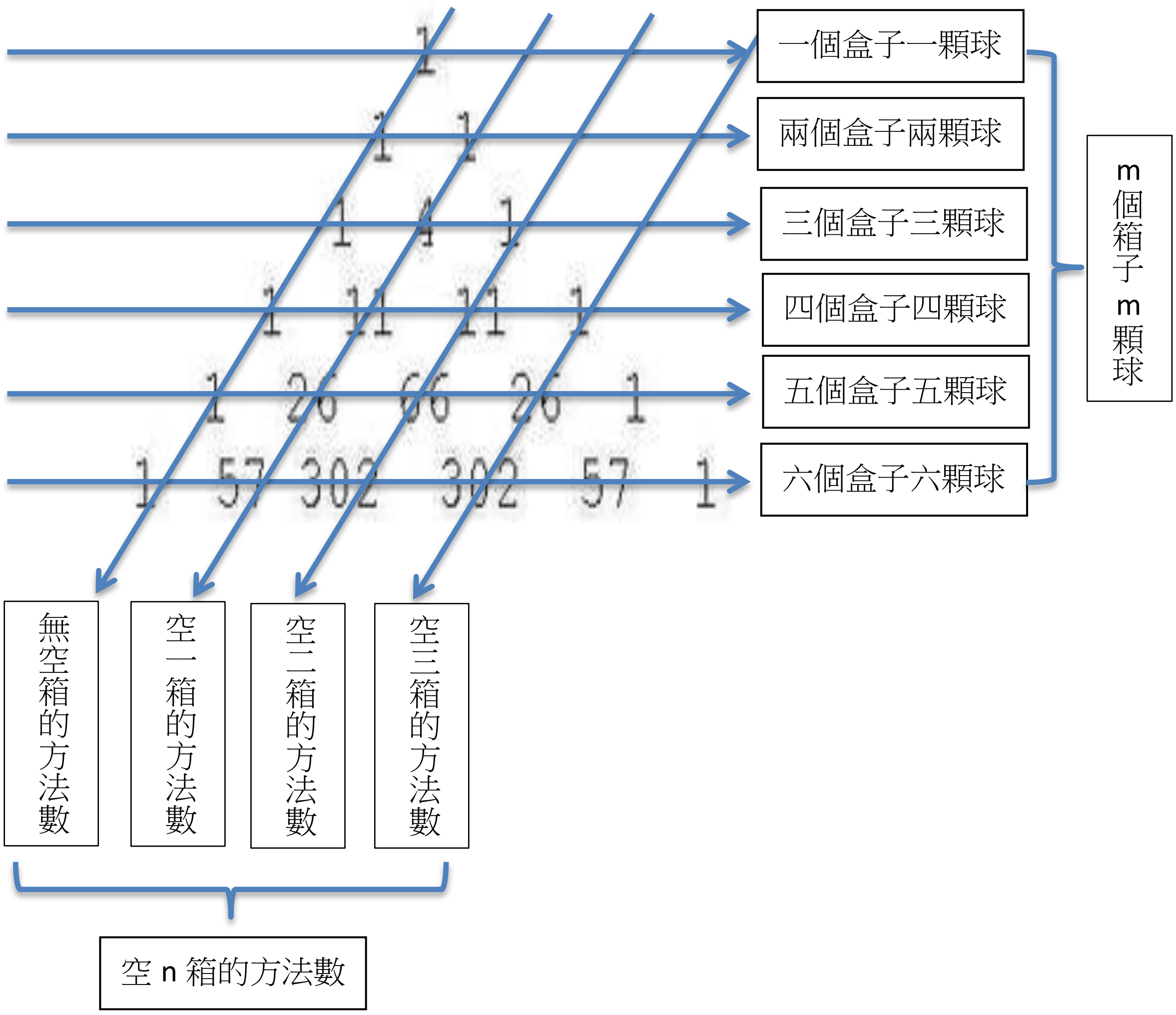
五、 空 n 個箱子的情況：

我們將得到的結果，放入下圖中。

$S_{1,0}$					
$S_{2,0}$	$S_{2,1}$				
$S_{3,0}$	$S_{3,1}$	$S_{3,2}$			
$S_{4,0}$	$S_{4,1}$	$S_{4,2}$	$S_{4,3}$		
$S_{5,0}$	$S_{5,1}$	$S_{5,2}$	$S_{5,3}$	$S_{5,4}$	
$S_{6,0}$	$S_{6,1}$	$S_{6,2}$	$S_{6,3}$	$S_{6,4}$	$S_{6,5}$

1					
1	1				
1	4	1			
1	11	11	1		
1	26	66	26	1	
1	57	302	302	57	1

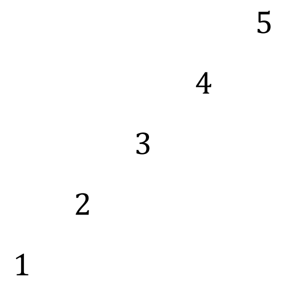
結果發現，與 Euler's triangle 完全符合



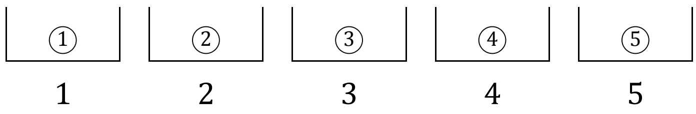
根據文獻的參考 Euler's triangle 是用在討論 1,2,3,⋯,n 的數列，經過數次元素變換所得新數列之各元素上升、下降關係，而我們研究的問題亦有類似之處。

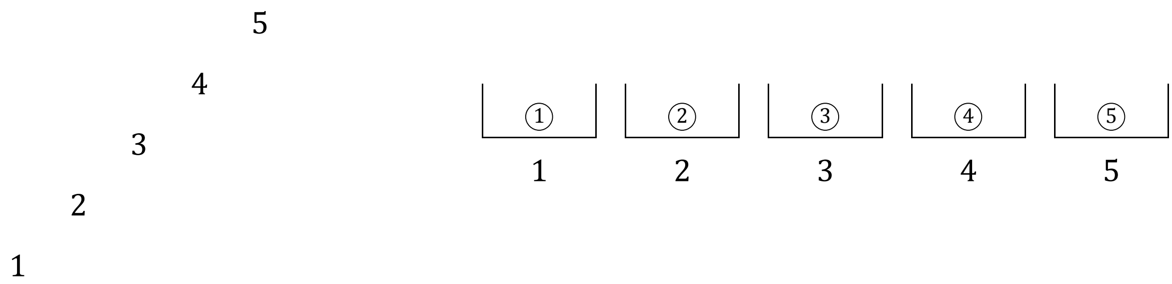
Euler's triangle 本來是藉由元素多次變換來產生不同元素之上升下降關係，由於所有的可能都可以分解成多次兩兩變換的結果，所以為了討論方便，我們設定一套規則：

(一)、 (m,n)代表元素 m 與元素 n 交換，其中 m>n 且 n 為 m 左側之第一個下降。舉例來說，右圖中元素 2 為元素 5 和 4 的左側之第一個下降。

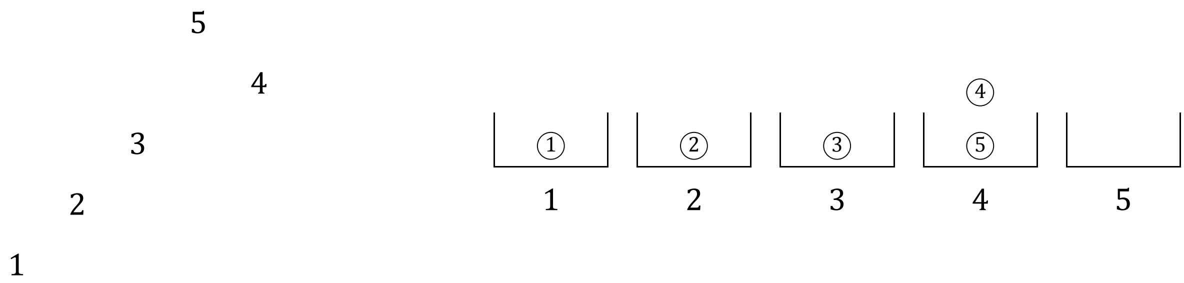


(二)、 元素 m 在交換的步驟中，須由大而小。舉例來說(5,4)→(5,3) →(4,3)是正確的，而(5,4) →(4,3) →(5,3)是錯誤的。

以數列 1,2,3,4,5 對應  來說明。

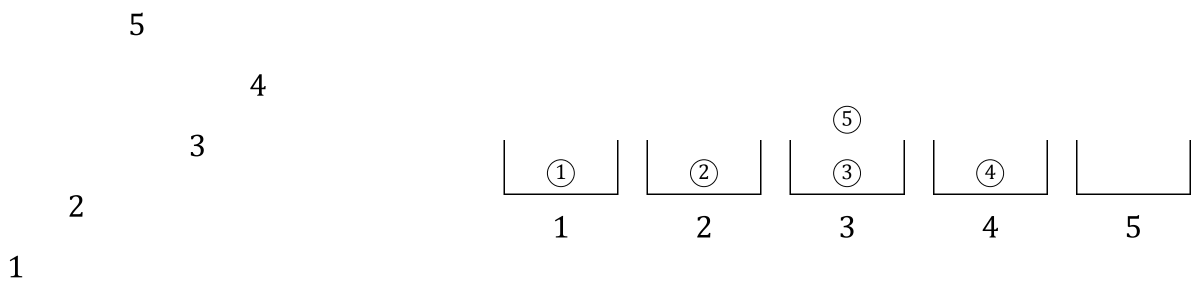


第一次交換(5,4)



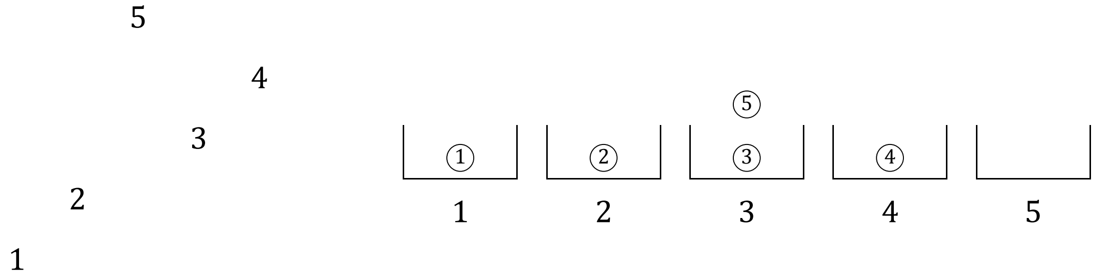
進行完(5,4)之後，數列出現一個下降，對應到我們的題目，就是將四號球和五號球互換位置，而四號球無法放入五號箱，因此必須往前放入四號箱中。

第二次交換(5,3)

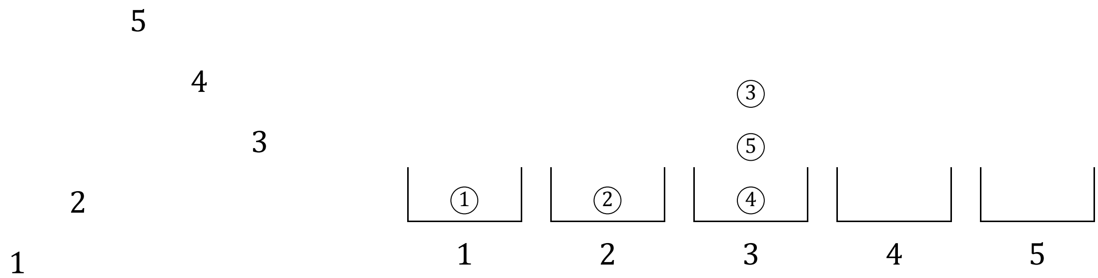


進行完(5,3)之後，同樣維持一個下降，對應到我們的題目，就是將三號球和五號球互換位置，而三號球無法放入四號箱，因此必須往前放入三號箱中。

對於空兩個箱子的情況，我們從 1,2,5,3,4 開始。

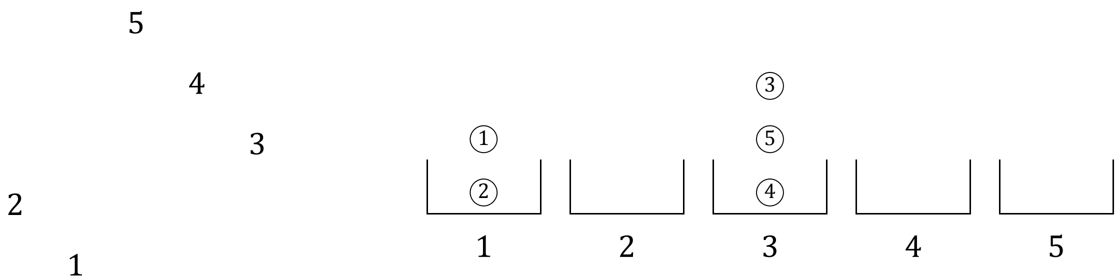


進行(4,3)



進行完(4,3)之後，變成兩個下降，對應到我們的題目，就是將三號球和四號球交換位置，而三號球無法放入四號箱中，因此必須往前放入三號箱中。

進行(2,1)



進行完(2,1)之後，變成三個下降，對應到我們的題目，就是將一號球和二號球交換位置，而一號球無法放入二號箱中，因此必須往前放入一號箱中。

最後我們可以得到數列的上升下降關係可以對應到我們的題目，而下降的個數會等於空箱的數目。

另外，Euler's triangle 的遞迴關係式為 A(n,m)=(n-m)A(n-1,m-1)+(m+1)A(n-1,m)而可轉變為我們報告中的 $S_{m,n}=(m-n)\,S_{m-1,n-1}+(n+1)\,S_{m-1,n}$。

首先，我們將第 m 號球取出，暫不討論。

(一)、　將前 m-1 個箱子以任意方式空出 n 箱，再來選擇 m 個箱子中的任一個空箱將第 m 號球放入，則會產生 m 個箱子空 n 個箱子的情形，可記為$(n+1)\,S_{m-1,n}$。

(二)、　將前 m-1 個箱子以任意方式空出 n-1 箱，再來選擇 m 個箱子中的任一個有球的箱子將第 m 號球放入，則會產生 m 個箱子空 n 個箱子的情形，可記為$(m-n)\,S_{m-1,n-1}$。

將上述兩種情況做加總，便得到 $S_{m,n}=(m-n)\,S_{m-1,n-1}+(n+1)\,S_{m-1,n}$，因此可以證明我們研究的題目其遞迴關係與 Euler's triangle 是一致的。

而利用 Euler's triangle 的通式可以得到 m 個箱子空任 n 個箱子的公式：

$$S_{m,n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^{m+1}(n+1-k)^m$$

陸、　研究結果

一、m 個箱子空第 a 個箱子的方法數為 $A_a=2^{a-1}-1$。$(a\leq m)$

二、m 個箱子空任一個箱子的總方法數為 $S_{m,1}=2^m-(m+1)$。

三、m 個箱子空第 a 和 b 個箱子的方法數為 $A_{b,a}=2^{b-a-1}\cdot(2\cdot 3^{a-1}-3\cdot 2^{a-1}+2^{a-1})-(2^{a-1}-1)$。$(a<b\leq m)$

四、m 個箱子空任兩個箱子的總方法數為

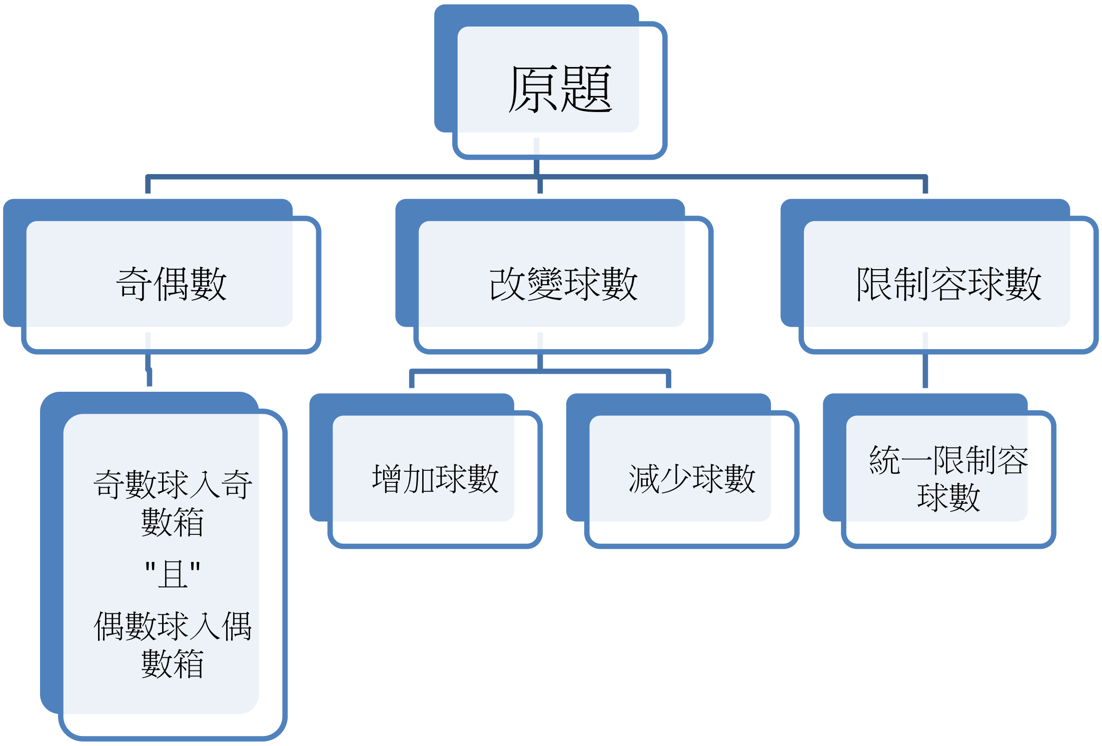
$$S_{m,2}=\sum_{j=1}^{m-1}\left[\left(2^{m-j}-1\right)\left(2\cdot 3^{j-1}-2\cdot 2^{j-1}\right)-\left(2^{j-1}-1\right)(m-j)\right]$$

五、m 個箱子空任 n 個箱子的總方法數藉由 Euler's triangle

$$S_{m,n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^{m+1}(n+1-k)^m$$

柒、 討論

題目變形



(一)、 奇偶數(奇數球入奇數箱"且"偶數球入偶數箱)

我們認為此類題目的解法為奇數箱與球和偶數箱與球分開討論。

1. 空一個箱子的情況

10 個箱子，10 顆球為例:

空 10 號箱子→奇數球 1 種放法，偶數球 A_5 種放法

空 9 號箱子→奇數球 A_5 種放法，偶數球 1 種放法

空 8 號箱子→奇數球 1 種放法，偶數球 A_4 種放法

…

空 2 號箱子→奇數球 1 種放法，偶數球 A_1 種放法

+) 空 1 號箱子→奇數球 A_1 種放法，偶數球 1 種放法

得 $2(A_5+ A_4+ A_3+ A_2+ A_1)=2S_{5,1}$

推廣到 n 個箱子，n 顆球，空 1 個箱子的所有可能:

(1). 若 n 為偶數:$2 \cdot S_{n/2,1}$

(2). 若 n 為奇數: $S_{(n+1)/2,1} + S_{(n-1)/2,1}$

2. 空兩個箱子的情況

10 個箱子，10 顆球為例:

兩個空箱皆為奇數→奇數球 $S_{5,2}$ 種放法・偶數球 1 種放法

兩個空箱皆為偶數→奇數球 1 種放法・偶數球 $S_{5,2}$ 種放法

+) 一個空箱為奇數，一個空箱為偶數→奇數球 $S_{5,1}$ 種放法・偶數球 $S_{5,1}$ 種放法

得 $2 \cdot S_{5,2} + S_{5,1} \cdot S_{5,1}$

推廣到 n 個箱子，n 顆球，空 2 個箱子的所有可能:

(1). 若 n 為偶數:$2 \cdot S_{n/2,2} + S_{n/2,1} \cdot S_{n/2,1}$

(2). 若 n 為奇數: $S_{(n+1)/2,2} + S_{(n-1)/2,2} + S_{(n+1)/2,1} \cdot S_{(n-1)/2,1}$

(二)、 改變球數(增加球數)(n 個箱子 n 顆球，設定多 n+1 號球)

我們認為此類題目的解法為將 n+1 號球單獨擺放與否分開討論。

1. 空一個箱子的情況

5 個箱子，5 顆球為例：

(1). 若 6 號球不單獨擺放：

我們先讓前五顆球進行空一個箱子的擺放，得到 $S_{5,1}$ 種放法，接著我們將 6 號球也放入，扣除一個空箱，總共會有 4 個箱子可以放置，因此若 6 號球不單獨擺放，則共有 $4 \cdot S_{5,1}$ 種放法。

(2). 若 6 號球單獨擺放：

我們先讓前五顆球進行空兩個箱子的擺放，得到 $S_{5,2}$ 種放法，接著我們將 6 號球放入一開始空下的箱子中，總共會有C_1^2個選擇，因此若 6 號球單獨擺放，則共有$C_1^2 \cdot S_{5,2}$ 種放法。

推廣到 n 個箱子，n+1 顆球，空 1 個箱子的所有可能為$(n-1) \cdot S_{n,1} + C_1^2 \cdot S_{n,2}$

2. 空兩個箱子的情況

5 個箱子，5 顆球為例：

(1). 若 6 號球不單獨擺放：

我們先讓前五顆球進行空兩個箱子的擺放，得到 $S_{5,2}$ 種放法，接著我們將 6 號球也放入，扣除兩個空箱，總共會有 3 個箱子可以放置，因此若 6 號球不單獨擺放，則共有 $3 \cdot S_{5,2}$ 種放法。

(2). 若 6 號球單獨擺放：

我們先讓前五顆球進行空三個箱子的擺放，得到 $S_{5,3}$ 種放法，接著我們將 6 號球放入一開始空下的箱子中，總共會有C_1^3個選擇，因此若 6 號球單獨擺放，則共有C_1^3 · $S_{5,3}$ 種放法。

推廣到 n 個箱子，n+1 顆球，空 2 個箱子的所有可能為$(n-2)\cdot S_{n,2}+C_1^3\cdot S_{n,3}$

3. 空 m 個箱子的情況

(1). 若 n+1 號球不單獨擺放：

我們先讓前 n 顆球進行空 m 個箱子的擺放，得到 $S_{n,m}$ 種放法，接著我們將 n+1 號球也放入，扣除 m 個空箱，總共會有 n－m 個箱子可以放置，因此若 n+1 號球不單獨擺放，則共有$(n-m)\cdot S_{n,m}$ 種放法。

(2). 若 n+1 號球單獨擺放：

我們先讓前 n 顆球進行空 m+1 個箱子的擺放，得到 $S_{n,m+1}$ 種放法，接著我們將 n+1 號球放入一開始空下的箱子中，總共會有C_1^{m-1}個選擇，因此若 n+1 號球單獨擺放，則共有$C_1^{m-1}\cdot S_{n,m+1}$ 種放法。

n 個箱子，n+1 顆球，空 m 個箱子的所有可能為$(n-m)\cdot S_{n,m}+C_1^{m-1}\cdot S_{n,m+1}$

(三)、 改變球數(減少球數) (n 個箱子 n 顆球，設定少 1 號球)

若只空一個箱子，代表同一個箱子不能出現兩顆以上的球。因此我們分別討論每一顆球的放法。

2(2 號球選 2 號箱 or1 號箱)

2(3 號球選 3 號箱 or 前面剩下未選的空箱)

2(4 號球選 4 號箱 or 前面剩下未選的空箱)

…

×) 2(n 號球選 n 號箱 or 前面剩下未選的空箱)

2^n

n 個箱子 n 顆球，少 1 號球，空一個箱子的所有可能為 2^n

捌、 結論及未來展望

本研究在討論空一個箱子的想法出發，進而發現空兩個、三個箱子的想法都是一樣的，最後搭配 Euler's triangle 將空 n 個箱子的總方法數成功得出。

原題變形部分，我們成功找到奇數球入奇數箱"且"偶數球入偶數箱的解法，然而若只限制其中一項，則尚無法找到有系統的討論方式。增減球數方面，增加球數尚能找到解法，減少球數則較難討論，還需時間研究。限制容球數也十分棘手，希望接下來我們能將其解出。

我們也在尋找此份報告與生活之間的連結，希望能使本研究不只是艱澀的文字，而是能實際運用的作品。

玖、 參考資料及其他

一、2011 年亞太數學奧林匹亞競賽初選考題

取自 http://www.ncu.edu.tw/~cdfuh/_files/2011APMO_PreTest_Ans.pdf

二、維基百科。Eulerian number。

取自 http://en.wikipedia.org/wiki/Eulerian_number

三、整數數列線上大全(OEIS)。編號 A123125 Triangle of Eulerian numbers。

取自 http://oeis.org/A123125

【評語】040409

作者首先應說明每個箱子可以放超過一個球。其次，本作品內所使用的遞迴式觀念皆十分類似，但是就最原始的概念，為何 $A_n=2A_{n-1}+1$ 卻沒有說明清楚 n-1 所指的減 1 到底是指哪個箱子？而這正是最關鍵之處！且作者並未察覺符號 A_x 定義的失誤，正是因為未透析了解此一關鍵處之故。最後，$S_{m,n}$ 的公式套用 Eulertriangular 的遞迴關係更是神奇地〝未卜先知〞。建議應該先對 $S_{m,n}$ 做更詳細解析，而不是一口氣直接套上結論。