中華民國第53屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040408

來人阿！把訊息傳出去

學校名稱：國立楊梅高級中學

作者：	指導老師：
高一 傅筱婷	賴申洲
高一 陳芊澐	蘇重文
高一 康書維	

關鍵詞：樹、訊息傳遞、高斯

摘要

因要轉達消息至全班同學，而開始探討如何有效的將訊息傳達至每一位同學手中，利用圖論中樹的分析架構，轉化為實際的樹狀結構，並訂出最快的處理策略：整合+互補+傳達，找出在 m 個人中各自擁有一項不同的訊息，每一次對談人數為 n 個人，則最快讓此 m 個人擁有所有的訊息的次數為 $\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil + n + \left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil$，其中 $m \geq n^2$，並以此思維架構化簡更為精簡圖形架構模型。

壹、研究動機

某天放學，導師告知一群尚未離校的同學隔日課程調動，原訂服裝將由制服更改為體育服，並請這些同學以電話通知將此訊息轉告至班上所有同學。

因此，我們對這訊息傳達過程產生了強烈的好奇心，現在是個講求效率的社會，利用最少成本達到最大效益已經是必要的條件。如何才能利用最少的傳遞次數使所有人均得知訊息。我們反覆畫出訊息傳遞的可能，希望能夠利用此次科展的機會，得出傳遞所能的夠的「最佳」且「最快」方式，並能廣泛運用於生活中。

貳、研究目的

一、分析對談過程，以釐清整合方式的差異。
二、證明最佳的對談模式。
三、找尋最佳對談次數的函數關係。
四、簡化對談流程。

參、研究設備及器材

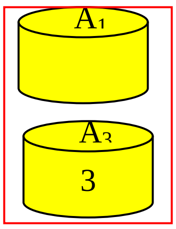
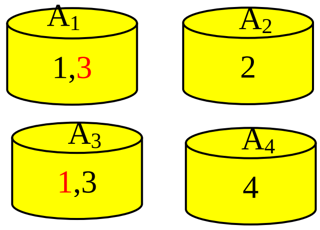
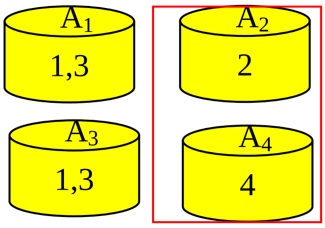
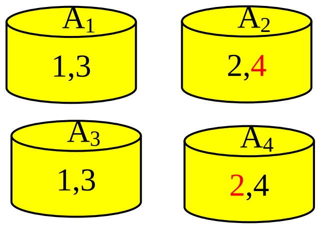
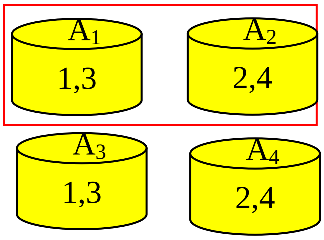
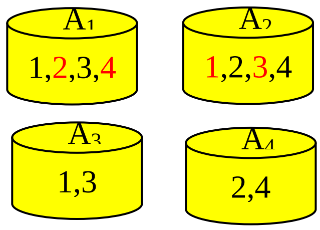
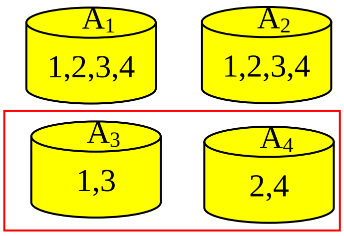
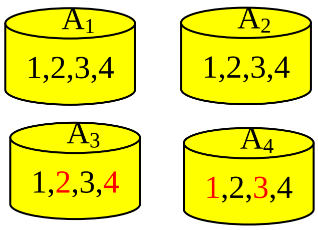
一、紙、筆
二、excel、c#

肆、研究過程及方法

一、對談

例子 1：

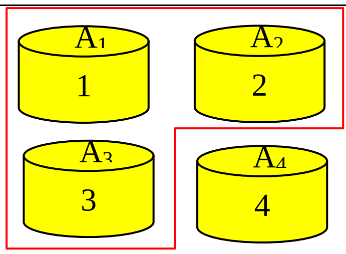
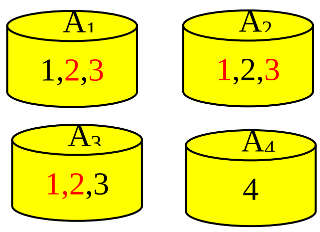
設有 4 個人，且每一個人擁有一個訊息且訊息都不同，即 A_1 擁有 1 號訊息，A_2 擁有 2 號訊息，A_3 擁有 3 號訊息，A_4 擁有 4 號訊息，每一次的對談，都將手中彼此的訊息交換，則此 4 個人對談的一種過程如表 1-1 所示，一共需要 4 個步驟可讓此 4 人擁有全部的訊息：

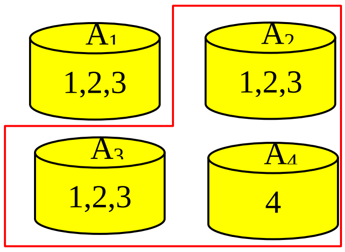
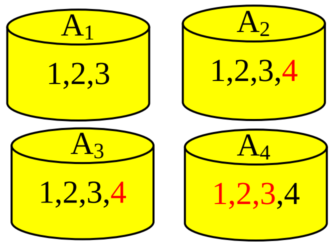
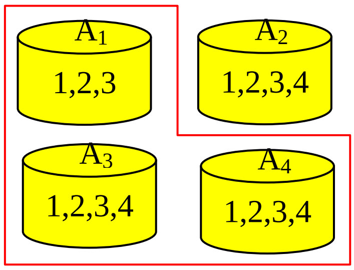
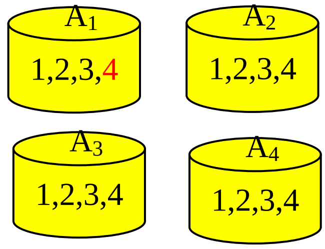
步驟	對談人員	訊息狀態		圖示	
				對談前狀態	對談後狀態
1	A_1和 A_3	A_1 A_2 A_3 A_4	1,3 2 1,3 4		
2	A_2和 A_4	A_1 A_2 A_3 A_4	1,3 2,4 1,3 2,4		
3	A_1和 A_2	A_1 A_2 A_3 A_4	1,2,3,4 1,2,3,4 1,3 2,4		
4	A_3和 A_4	A_1 A_2 A_3 A_4	1,2,3,4 1,2,3,4 1,2,3,4 1,2,3,4		

《表 1-1：總人數 4 人，每次交談人數為 2 人的對談過程》

例子 2：

設有 4 個人，每一個人擁有一個訊息且訊息都不同，即 A_1擁有 1 號訊息，A_2擁有 2 號訊息，A_3擁有 3 號訊息，A_4擁有 4 號訊息，每一次可參與對談的人數為 3 人，對談後都將手中彼此的訊息交換，則此 4 個人對談的過程如表 1-2，需要 3 次可讓此 4 人擁有全部的訊息

步驟	對談人員	訊息狀態		圖示	
				對談前狀態	對談後狀態
1	A_1、A_2和 A_3	A_1 A_2 A_3 A_4	1,2,3 1,2,3 1,2,3 4		

2	A_2、A_3和 A_4	A_1 A_2 A_3 A_4	1,2,3 1,2,3,4 1,2,3,4 1,2,3,4		
3	A_1、A_3和 A_4	A_1 A_2 A_3 A_4	1,2,3,4 1,2,3,4 1,2,3,4 1,2,3,4		

《表 1-2：總人數 4 人，每次交談人數為 3 人的對談過程》

二、名詞定義：

(一)對談分類定義

設 A_1、A_2、.....、A_n 分別為 n 個人所擁有訊息的集合，S 為全部的訊息所形成的集合，B 為部分的訊息所形成的集合，則所有對談的過程分為三種狀況，描述如下：

整合：當 $A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n = B$ ，其中 $|A_i| < |B| < |S|$ 且，$1 \le i \le n$ 時稱為整合步驟。

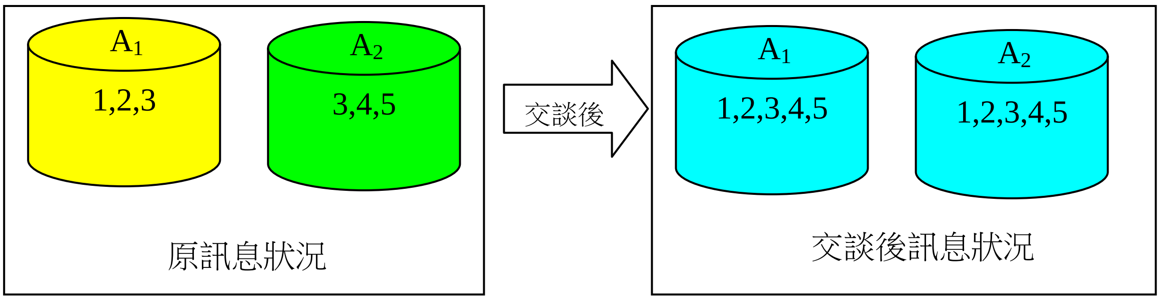
互補：當 $A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n = S$ ，其中 $|A_i| < |S|$ ，$1 \le i \le n$ 時稱為互補步驟。若滿足最小 k 值，使得 $A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_k = S$ ，則稱 A_1、A_2、.....、A_k 為互補基底，k 為互補基底數。

傳達：當 $A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n = S$ ，存在 $|A_i| = |S|$ ，$1 \le i \le n$ 時稱為傳達步驟。

<說明>

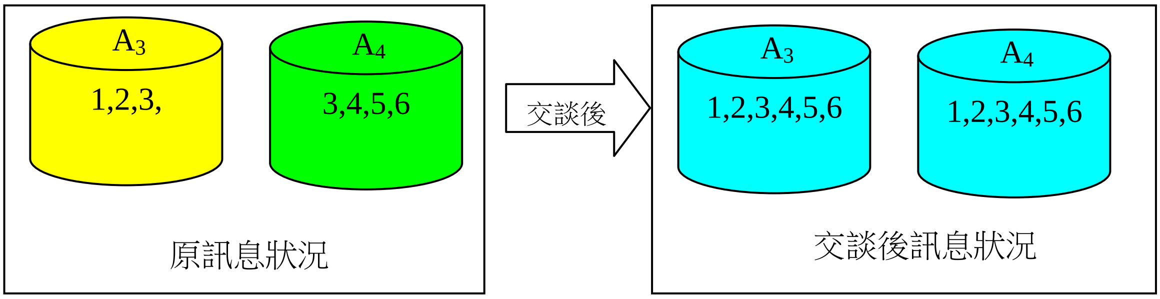
設所有的訊息有 6 條且這 6 條訊息都不同，分別以數字 1 到 6 進行編號，即全部訊息 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。

1、整合：例如 A_1 擁有編號 1,2,3 訊息，A_2 擁有編號 3,4,5 訊息以集合 $A_1 = \{1, 2, 3\}$ ，$A_2 = \{3, 4, 5\}$ 經過 A_1 及 A_2 交談，則這兩個都擁有彼此的訊息為成 $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 及 $A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 如此訊息合併的對談過程稱為**整合過程**，如圖 2-1 所示。



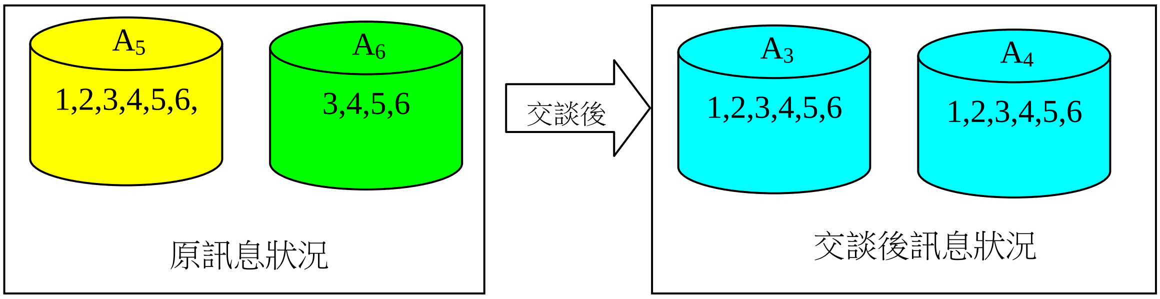
《圖 2-1：整合過程圖例》

2、互補：例如 A_3 擁有編號 1,2,3 訊息，A_4 擁有編號 3,4,5,6 訊息以集合表 $A_3=\{1,2,3\}$，$A_4=\{3,4,5,6\}$ 經過 A_1 及 A_2 交談過則這兩個都擁有彼此的訊息，是為 $A_3=\{1,2,3,4,5,6\}$ 及 $A_4=\{1,2,3,4,5,6\}$，且 A_3、A_4 合併後為全部的訊息，則此對談過程稱為**互補過程**，如下圖 2-2 所示。



《圖 2-2：互補過程圖例》

3、傳達：例如 A_5 擁有編號 1,2,3,4,5,6 訊息(即全部的訊息)，A_6 擁有編號 3,4,5,6 訊息，以集合表示 $A_5=\{1,2,3,4,5,6\}$、$A_6=\{3,4,5,6\}$，經過 A_5 及 A_6 交談則 A_5 將手中完整的訊息全傳給了 A_6，為成 $A_5=\{1,2,3,4,5,6\}$ 及 $A_6=\{1,2,3,4,5,6\}$，則 A_5 將完整的訊息傳出去的對談過程為**傳達過程**，如下圖 2-3 所示。



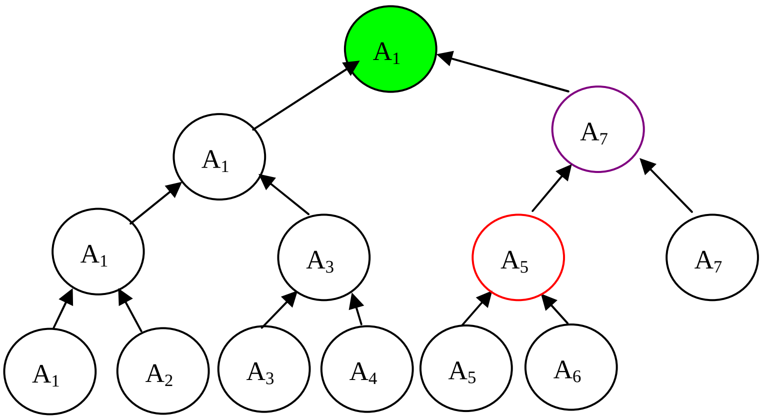
《圖 2-3：傳達過程圖例》

(二)樹的定義：樹 $T=(V,E)$，由一個或是多個節點所構成之有限集合，且有一個特定節點稱為樹根(root)。其中 V 為節點所構成的集合，E 為連接邊所構成的集合；除去樹根的節點可分為集合 T_1、T_2、$T_3 \cdots T_n$，其中各集合亦為樹，則稱 T_1、T_2、$T_3 \cdots T_n$ 為樹根之子樹。

樹的專有名詞：

1. 節點的階層數：由樹根到節點的最大距離稱為該節點的階層數。
2. 樹的高度：樹中的節點具有最大的階層數稱為樹的高度。
3. 葉節點：沒有子節點的節點稱為葉節點。
4. 父節點、子節點：若 A_1 和 A_2 有邊相連(對談)後，A_1 又和 A_3 有邊相連(對談)，則稱 A_1 為 A_2 的父節點，A_2 為 A_1 的子節點。

<說明>



《圖 2-4：樹的構念圖》

以圖 2-4 為例，A_7 為 A_5 的父節點，反之 A_5 為 A_7 的子節點，A_1 為整個樹的樹根(若訂為起點 0)，則圖中 A_5 出現兩次到 A_1 的距離分別為 2 和 3，取最大值為 A_5 的階層為 3，整個樹中最大的階層為 3，因此樹的高度為 3。

(三)平衡樹：當樹的高度為 h 且葉的階層皆為 h 或 h-1 時，則稱為平衡樹。

(四)歪斜樹：當每一層節點的子節點為子樹的個數最多只有 1 個時，稱為歪斜樹。

(五)上高斯符號：不小於 x 的最小整數，以符號 $\lceil x \rceil$ 表示，性質：

1. $n+\lceil x \rceil = \lceil n+x \rceil$,其中 $n \in N$

2. $\lceil a \rceil + \lceil b \rceil \geq \lceil a+b \rceil$,其中 $a \geq 0, b \geq 0$

(六)類高斯符號：

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0 \quad , & \text{if} \quad x = 1 \\ [x] \, , & \text{if} \quad x \neq 1 \end{cases}$$

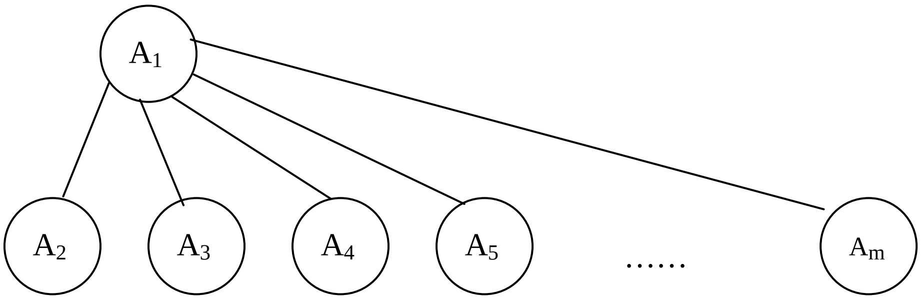
三、整合方式的差異

一開始我們先將問題進行簡化，若有 m 個人，而其中已知訊息人數為 1 人，及已知訊息人數有 2 人，以此方向討論至 n 人，試圖找出處理的關鍵想法，來求得所需最少的交談次數。

[定理 3-1]：設 m 人之中有 1 人已知訊息，每一次的對談人數為 2，則需要 m-1 次可將訊息全部傳達完成。

〈pf〉

因為每一個未知訊息的人都需要由已知的人傳達一次才會知道，故 m-1 個人需要 m-1 次的傳達次數，如圖 3-1 所示。



《圖 3-1：1 人已知所有訊息且每次 2 人對談，傳達至 m 人的圖例》

[定理 3-2]：設 m 人之中有 2 人為已知訊息且此兩人的訊息皆不同，每一次的對談人數為 2，則需要 m-1 次可將訊息全部傳達完成。

〈pf〉

不失一般性，設 m 人分別為 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_m$，其中 A_1 及 A_2 為已知訊息且 $A_1 \neq A_2$，分為以下狀況分別討論。

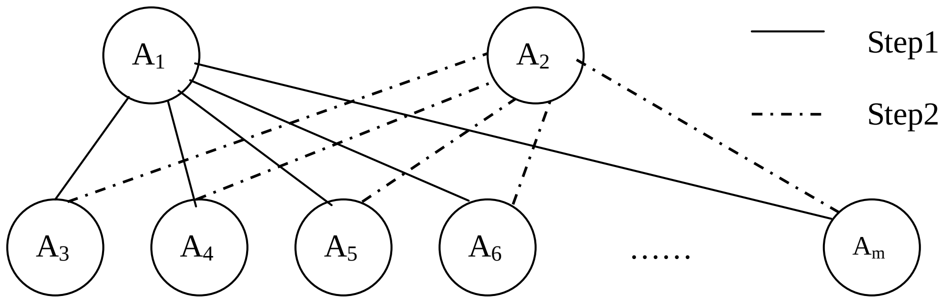
Case1：分別傳達(即 A_1,A_2 各別獨立傳達至未知訊息者)

Step1：A_1 先將訊息依序($A_3,A_4,\cdots,A_m$)傳達，需要 m-2 次。

Step2：由 A_2 依序($A_3,A_4,\cdots,A_m$)傳達，需 m-2 次。

再加上 A_1、A_2 之間的傳達 1 次，

所以所需的傳達次數共為 2(m-2)+1=2m-3 次，如下圖 3-2。



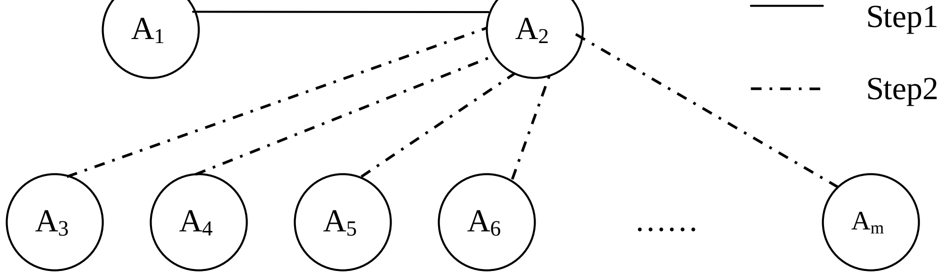
《圖 3-2：2 人已知訊息且每次 2 人對談，傳達至 m 人的圖例》

Case2：先集中再傳達

Step1：A_1 傳達至 A_2，則 A_1 及 A_2 知道彼此訊息，需要 1 次。

Step2：再由 A_1 或 A_2 將訊息傳達至其他 m-2 人，需要 m-2 次。

所以所需的傳達次數共為 1+(m-2)=m-1 次，如下圖 3-3。



《圖 3-3：一次 2 人對談下，先整合至一人，再傳給 m 人之圖例》

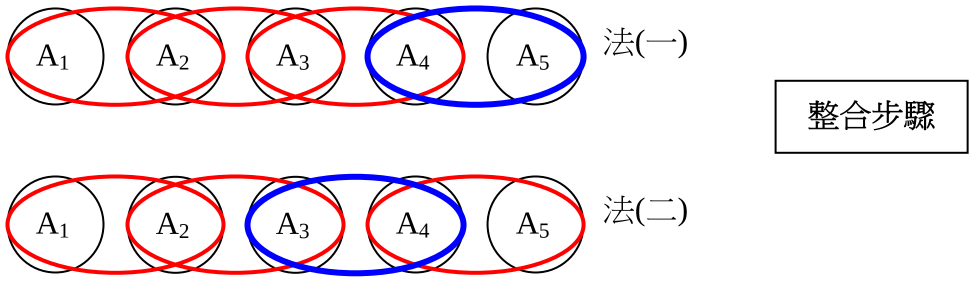
故 m 人中有 2 人知道訊息，且訊息皆不同，需 m-1 次才能傳達完成。

由以上討論我們可以知道傳達訊息需先將不同的訊息整合至少數人之中，再進行傳達所需的次數，所得出的為最小值。

因此我們訂出最小對談次數為：**整合次數+傳達次數**，依這個想法首先我們試圖找出整合過程之間的關聯性。

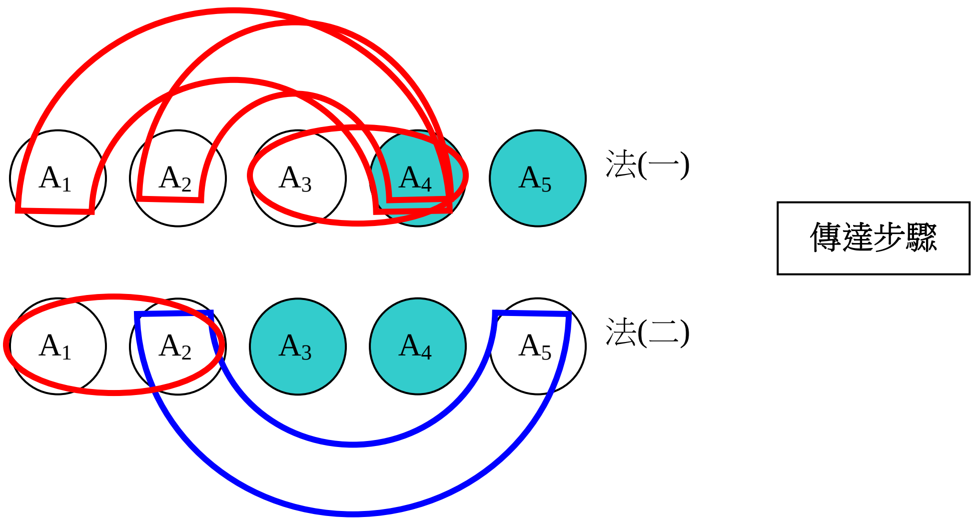
但在我們嘗試其他的畫法時，發現雖然同為**整合次數+傳達次數**，但最後所需要的對談次數卻不相同。

所以我們以 5 個人各自都擁有不同訊息，每次對談人數為 2 人為例，如圖 3-4 所示：我們分成上下兩種畫法，每一個紅圈內的人代表當次對談的人，皆由左至右對談，所以法(一)花了 4 次進行集中，藍圈代表最後一次對談；法(二)也花了 4 次對談進行集中，但不同的是它是先進行 A_4 和 A_5 的對談，再進行 A_3 和 A_4 對談。



《圖 3-4：集中步驟比較》

而現在擁有全部訊息的人，我們現在就以塗藍色表示，但接下來的傳達步驟，如圖 3-5 所示，法(一)就必須再花 3 次對談(A_4 和 A_3 的對談，A_4 和 A_2 對談，A_4 和 A_1 對談)，讓所有人得到全部訊息；而法(二)卻可以先利用 A_5 和 A_2 對談就可以讓這兩人同時擁有全部訊息(我們用藍線表示)，接下來再讓 A_1 和 A_2 對談即可，所以只花了 2 次對談。



《圖 3-5：傳達步驟比較》

以集中次數+傳達次數來觀察：

法(一)共花了： $4+3=7$ 次對談

法(二)共花了： $4+2=6$ 次對談

我們可以觀察到在傳達步驟時法(二)的關鍵步驟是：A_5 和 A_2 對談，因為此次對談一次就讓 2 人擁有所有訊息，而其他次的對談都只能多讓 1 人擁有所有訊息(另一人一定是本來就擁有所

有訊息)，所以我們有必要把這種狀況獨立出來，於是，我們將對談次數訂為：**整合次數+互補次數+傳達次數。**

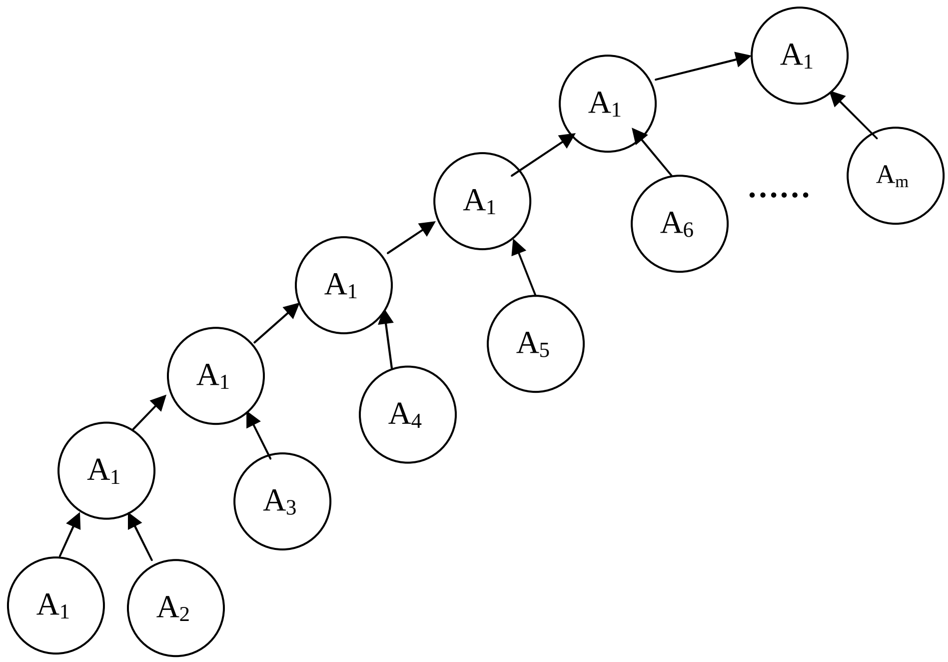
問題一：設 m 個人中各自擁有一項不同的訊息，每一次對談人數為 n 個人，則最少需要幾次，可讓此 m 個人的訊息集中到 n 個人，且此 n 個人中無人知道全部的訊息？

[引理一]：設 m 個人中各自擁有一項不同的訊息，每一次對談人數為 n 個人，則整合次數的最小值為 $\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil$。

《說明》:

第一次對談可整合 n 個人的訊息，之後每一次對談最多可增加 $n-1$ 個人的訊息，因此整合的過程是首項 $a_1 = n$ ，公差 $d = n-1$ 的等差數列，設所需要的次數為 x ，則可寫出關係式 $n+(n-1)x > m$ ，即可得到 $x > \frac{m-n}{n-1}$ ，故最少需要次數為 $\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil$。

經過以上的說明，我們發現此代數想法可用圖形的方式來進行呈現，因此利用樹的結構以圖形的方式呈現這樣的想法，如圖 3-6 所示以 $n=2$ 為例，在圖中我們發現此圖所呈現的為樹中高度層數最多的歪斜樹，其中葉節點為不同訊息，將其整合至父節點的過程，因此我們開始猜測如果用不同方式來整合是否可能用更少的次數整合完畢，於是另一種樹的結構呈現在下一個探討目標—平衡樹。



《圖 3-6：歪斜樹(循序整合)》

[引理二]：設 m 個人中各自擁有一項不同的訊息，每一次對談人數為 n 個人，平衡樹的整合次數為 $\sum_{i=1}^{k}\left\langle\frac{m_i}{n}\right\rangle$，其中 $m_{i+1}=m_i-(n-1)\left[\frac{m_i}{n}\right]$，$m_1=m$，$k=\min(\left\{i\,\middle|\,\left\langle\frac{m_i}{n}\right\rangle=\left\langle\frac{m_{i+1}}{n}\right\rangle=0\right\})$。

《說明》

為了方便計算及次序性，原本總人數是 m 人，我們將它改為 m_1 人。以平衡樹整合時，在第一層我們會先以每 n 人一組進行對談，每組內的人不重複，所以需要 $\left[\frac{m_1}{n}\right]$ 次對談，但若現在總人數只有 n 人時，依照定義，我們知道不需要整合才對(也就是需要 0 步整合)，所以我們再將第一層的整合次數符號改成類高斯符號 $\left\langle\frac{m_1}{n}\right\rangle$，其中 $\langle x\rangle=\begin{cases}0\ , & \text{if}\ \ x=1\\ [x]\ , & \text{if}\ \ x\neq 1\end{cases}$。到第二層整合時，我們只需要將第一層整合過的每組派出1人當代表，再加上在第一層整合時，沒被分組交談餘下的人，即是這組需要整合的訊息個數 m_2

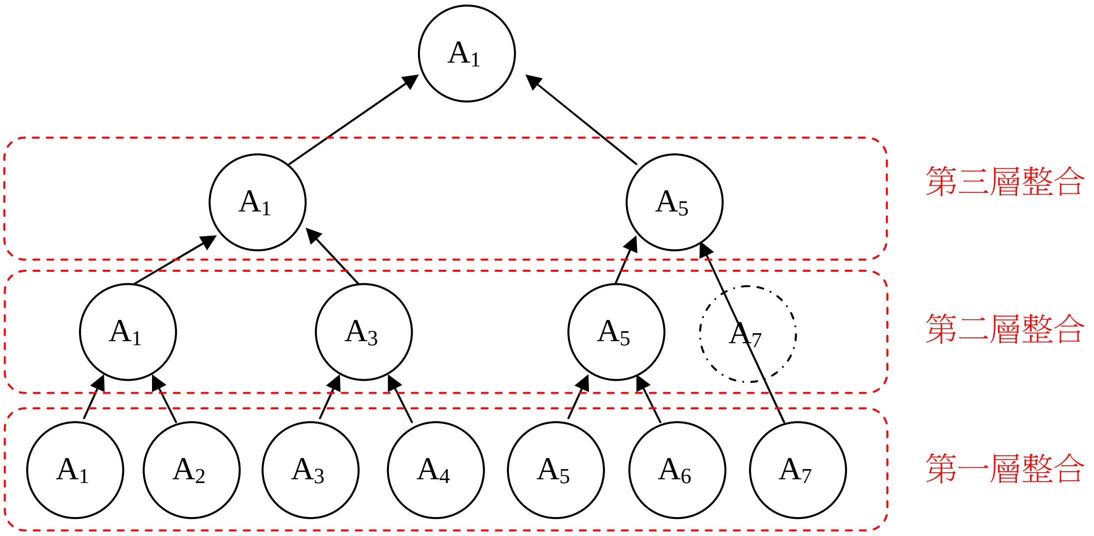
(m_2 =第一層整合組數(次數)+第一層餘下未交談的人數 $=\left\langle\frac{m_1}{n}\right\rangle+(m_1-n\times\left\langle\frac{m_1}{n}\right\rangle)$ ，

為了方便運算，且若 $m_1=n\Rightarrow\left\langle\frac{m_1}{n}\right\rangle=0$ 就代表不需要再整合，排除這狀況，我們用

「高斯符號」來表示其精神，於是 $m_2=\left[\frac{m_1}{n}\right]+(m_1-n\times\left[\frac{m_1}{n}\right])$ $=m_1-(n-1)\times\left[\frac{m_1}{n}\right]$)

第三層的整合次數也同理於前面方式，於是第三層的訊息個數有 $m_3=m_2-(n-1)\left[\frac{m_2}{n}\right]$ 個，且該層整合的次數為 $\left\langle\frac{m_3}{n}\right\rangle$，最後平衡樹的整合次數為：$\left\langle\frac{m_1}{n}\right\rangle+\left\langle\frac{m_2}{n}\right\rangle+\ldots+\left\langle\frac{m_k}{n}\right\rangle=\sum_{i=1}^{k}\left\langle\frac{m_i}{n}\right\rangle$，其中 $m_{i+1}=m_i-(n-1)\left[\frac{m_i}{n}\right]$。

以圖 3-7 為例：設 7 個人中各自擁有一項不同的訊息，每一次對談人數為 2 個人。



《圖 3-7：平衡樹(樹狀整合)》

在第一層整合：我們將全部人每 2 個分成一組，所以需要對談 $\left\langle \frac{7}{2} \right\rangle = \left[\frac{7}{2} \right] = 3$ 次，且會餘下 P_7 沒有對談過。

在第二層整合：將第一層對談過的每組派出1人當代表，再加上在第一層整合時，加上沒被分組交談餘下的人(P_7)，所以共有 $m_2 = m_1 - (n-1) \times \left[\frac{m_1}{n} \right] = 7 - (2-1) \times \left[\frac{7}{2} \right] = 4$ 個不同的訊息待整合，於是需要 $\left\langle \frac{4}{2} \right\rangle = \left[\frac{4}{2} \right] = 2$ 次對談。

在第二層整合：同理共有 $m_3 = m_2 - (n-1) \times \left[\frac{m_2}{n} \right] = 4 - (2-1) \times \left[\frac{4}{2} \right] = 2$ 個不同的訊息待整合，於是需要 $\left\langle \frac{2}{2} \right\rangle = 0$ 次對談。

所以我們若要使用平衡數整合，就需要 $\sum_{i=1}^{3} \left\langle \frac{m_i}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{7}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{4}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{2}{2} \right\rangle = 5$ 次整合步驟。

有了這樣的想法，我們先利用程式來協助我們確定平衡樹及歪斜樹的整合次數是否相同，經過有限的測試，初步肯定這樣的想法，如圖(3-8)所示。

《圖 3-8：用軟體確認整合次數相同》

[定理 3-3]：設 m 個人中各自擁有一項不同的訊息，每一次對談人數為 n 個人，則歪斜樹的整合次數與平衡樹的整合次數相同。

符號解釋：$[x]$:高斯符號

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0 \quad , & \text{if} \quad x = 1 \\ [x] \, , & \text{if} \quad x \neq 1 \end{cases}$$

為了方便閱讀，原本總人數是 m 人，改為 m_1 人，由引理一及引理二的定義得知：令有 m_1 人，每次 n 人對談，則歪斜樹的整合次數 $= \left[\frac{m_1 - n}{n-1} \right]$。

$$平衡樹的整合次數=\left\langle \frac{m_1}{n} \right\rangle+\left\langle \frac{m_2}{n} \right\rangle+...+\left\langle \frac{m_k}{n} \right\rangle$$

$$m_2 = m_1 - (n-1)\left\lfloor \frac{m_1}{n} \right\rfloor$$

$$其中\ m_3 = m_2 - (n-1)\left\lfloor \frac{m_2}{n} \right\rfloor$$

$$m_4 = m_3 - (n-1)\left\lfloor \frac{m_3}{n} \right\rfloor ...$$

①當 $m_1 = n$ 時：$\left\lceil \frac{n-n}{n-1} \right\rceil = \left\langle \frac{n}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle + ... = 0$ 成立

當 $m_1 = n+1$ 時：$\left\lceil \frac{(n+1)-n}{n-1} \right\rceil = \left\langle \frac{n+1}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{2}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{2}{n} \right\rangle + ... = 1$ 成立

當 $m_1 = n+2$ 時：$\left\lceil \frac{(n+2)-n}{n-1} \right\rceil = \left\langle \frac{n+2}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{n} \right\rangle + ... = 1$ 成立

…

當 $m_1 = n+(n-1) = 2n-1$ 時：$\left\lceil \frac{(2n-1)-n}{n-1} \right\rceil = \left\langle \frac{2n-1}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{n-1}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{n-1}{n} \right\rangle + ... = 1$ 成立

當 $m_1 = n+n = 2n$ 時：$\left\lceil \frac{(2n)-n}{n-1} \right\rceil = \left\langle \frac{2n}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{2}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{2}{n} \right\rangle + ... = 2$ 成立

②設當 $m_1 = p$ 時成立，即$\left\lceil \frac{p-n}{n-1} \right\rceil = \left\langle \frac{m_1}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{m_2}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{m_3}{n} \right\rangle + ... + \left\langle \frac{m_k}{n} \right\rangle$

$$其中\ k = \min(\left\{ i \middle| \left\langle \frac{m_i}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{m_{i+1}}{n} \right\rangle = 0 \right\})$$

③則若 $m_1' = p+(n-1) = m_1+(n-1)$ 時：

歪斜樹的整合次數：$\left\lceil \frac{[p+(n-1)]-n}{n-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{p-n}{n-1} + 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{p-n}{n-1} \right\rceil + 1$

平衡樹的整合次數：$\left\langle \frac{m_1'}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{m_2'}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{m_3'}{n} \right\rangle + ... + \left\langle \frac{m_k'}{n} \right\rangle$

$$m_1' = m_1 + n - 1 = p + n - 1$$

其中

$$m_2' = m_1' - (n-1)\left\lfloor \frac{m_1'}{n} \right\rfloor$$

$$m_3' = m_2' - (n-1)\left\lfloor \frac{m_2'}{n} \right\rfloor$$

$$m_4' = m_3' - (n-1)\left\lfloor \frac{m_3'}{n} \right\rfloor ...$$

設 $m_1 = a_i \cdot n^i + a_{i-1} \cdot n^{i-1} + ... + a_1 \cdot n^1 + a_0 \cdot n^0 \geq n$，其中 $a_j \in \{0,1,2,3,4,...,n-1\}$，$1 \leq j \leq i$

則$\left\langle \frac{m_1}{n} \right\rangle = a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + a_2 \cdot n^1 + a_1 + \left[\frac{a_0}{n} \right]$

$= a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + a_2 \cdot n^1 + a_1$

$$m_2 = a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + a_2 \cdot n + a_1 + a_0$$

$$\left\langle \frac{m_2}{n} \right\rangle = a_i \cdot n^{i-2} + a_{i-1} \cdot n^{i-3} + \ldots + a_3 \cdot n + a_2 + \left[\frac{a_1 + a_0}{n} \right]$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{m_1'}{n} \right\rangle = a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + a_2 \cdot n + a_1 + \left[\frac{a_0 + (n-1)}{n} \right]$$

現在就依據a_0是否為 0 分段討論：

Case.1 若$a_0 \neq 0$，

則$\left\langle \frac{m_1'}{n} \right\rangle = a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + a_2 \cdot n + a_1 + \left[\frac{a_0 + (n-1)}{n} \right]$

$= a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + a_2 \cdot n + a_1 + 1 + \left[\frac{a_0 - 1}{n} \right]$

$= a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + a_2 \cdot n + a_1 + 1$

$= \left\langle \frac{m_1}{n} \right\rangle + 1$

則$m_2' = \left(a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + a_2 \cdot n + a_1 + 1 \right) + a_0 - 1$

$= a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + a_2 \cdot n + a_1 + a_0$

$= m_2$

$\Rightarrow m_3' = m_3$, $m_4' = m_4$, $m_5' = m_5$ ...

Case.2：若a_0=0 ，

則$\left\langle \frac{m_1'}{n} \right\rangle = a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + a_2 \cdot n + a_1 + \left[\frac{a_0 + (n-1)}{n} \right]$

$= a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + a_2 \cdot n + a_1$

$= \left\langle \frac{m_1}{n} \right\rangle$

則$m_2' = \left(a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + a_2 \cdot n + a_1\right) + a_0 + (n-1)$

$= m_2 + (n-1)$

不失一般性，$1 \le j \le k$，討論m_j項與m_{j+1}項之間的變化關係。

設$m_j = b_i \cdot n^i + b_{i-1} \cdot n^{i-1} + \ldots + b_1 \cdot n + b_0$，其中$b_l \in \{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$，$1 \le l \le i$，$1 \le j \le k$則

$$\left\langle \frac{m_j}{n} \right\rangle = b_i \cdot n^{i-1} + b_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + b_2 \cdot n + b_1 + \left[\frac{b_0}{n}\right]$$

$$= \mathrm{b}_i \cdot n^{i-1} + b_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + b_2 \cdot n + b_1$$

則$m_{j+1} = \mathrm{b}_i \cdot n^{i-1} + b_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + b_2 \cdot n + b_1 + b_0$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{m_{j+1}}{n} \right\rangle = b_i \cdot n^{i-2} + b_{i-1} \cdot n^{i-3} + \ldots + b_3 \cdot n + b_2 + \left[\frac{b_1 + b_0}{n}\right]$$

現令$m_j' = m_j + (n-1)$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{m_j'}{n} \right\rangle = b_i \cdot n^{i-1} + b_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + b_2 \cdot n + b_1 + \left[\frac{b_0 + n - 1}{n}\right]$$

同理依據b_0是否為 0 分段討論：

Case.1：若$b_0 \ne 0$，

$$則\left\langle \frac{m_j'}{n} \right\rangle = b_i \cdot n^{i-1} + b_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + b_2 \cdot n + b_1 + \left[\frac{b_0 + n - 1}{n}\right]$$

$$= b_i \cdot n^{i-1} + b_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + b_2 \cdot n + b_1 + 1 + \left[\frac{b_0 - 1}{n}\right]$$

$$= b_i \cdot n^{i-1} + b_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + b_2 \cdot n + b_1 + 1$$

$$= \left\langle \frac{m_j}{n} \right\rangle + 1$$

則$m_{j+1}' = \left(b_i \cdot n^{i-1} + b_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + b_2 \cdot n + b_1 + 1\right) + b_0 - 1$

$$= b_i \cdot n^{i-1} + b_{i-1} \cdot n^{i-2} + \ldots + b_2 \cdot n + b_1 + b_0$$

$$= m_{j+1}$$

$$\Rightarrow m_{j+2}' = m_{j+2} \text{ , } m_{j+3}' = m_{j+3} \text{ , } m_{j+4}' = m_{j+4} \text{ ...}$$

Case.2 若 b_0=0 ，

$$則\left\langle \frac{m_j'}{n} \right\rangle = b_i \cdot n^{i-1} + b_{i-1} \cdot n^{i-2} + ... + b_2 \cdot n + b_1 + \left[\frac{b_0 + n - 1}{n} \right]$$

$$= b_i \cdot n^{i-1} + b_{i-1} \cdot n^{i-2} + ... + b_2 \cdot n + b_1 = \left\langle \frac{m_j}{n} \right\rangle$$

$$則 m_{j+1}' = \left(b_i \cdot n^{i-1} + b_{i-1} \cdot n^{i-2} + ... + b_2 \cdot n + b_1 \right) + b_0 + n - 1$$

$$= m_{j+1} + n - 1$$

由上述敘述得知：

1.若有最大的 j (其中$1 \le j \le k$) ，使得$\left\langle \frac{m_j'}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{m_j}{n} \right\rangle + 1$ ，則

$$m_{j+1}' = m_{j+1} \text{ , } m_{j+2}' = m_{j+2} \text{ , } m_{j+3}' = m_{j+3} \text{ , ...}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{m_{j+1}'}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{m_{j+1}}{n} \right\rangle , \left\langle \frac{m_{j+2}'}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{m_{j+2}}{n} \right\rangle , \left\langle \frac{m_{j+3}'}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{m_{j+3}}{n} \right\rangle , ...$$

$$而且 \left\langle \frac{m_1'}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{m_1}{n} \right\rangle , \left\langle \frac{m_2'}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{m_2}{n} \right\rangle , ..., \left\langle \frac{m_{j-1}'}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{m_{j-1}}{n} \right\rangle$$

2.若$\left\langle \frac{m_1'}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{m_1}{n} \right\rangle , \left\langle \frac{m_2'}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{m_2}{n} \right\rangle , ..., \left\langle \frac{m_k'}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{m_k}{n} \right\rangle$

代表若$\left\langle \frac{m_1'}{n} \right\rangle = a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + ... + a_2 \cdot n + a_1 + \left[\frac{a_0 + (n-1)}{n} \right]$

$$= \left\langle \frac{m_1}{n} \right\rangle \Rightarrow a_0 = 0$$

$$而 m_2' = \left(a_i \cdot n^{i-1} + a_{i-1} \cdot n^{i-2} + ... + a_2 \cdot n + a_1 \right) + a_0 + (n-1)$$

$$= m_2 + (n-1)$$

$$\left\langle \frac{m_2'}{n} \right\rangle = a_i \cdot n^{i-2} + a_{i-1} \cdot n^{i-3} + ... + a_3 \cdot n + a_2 + \left[\frac{a_1 + a_0 + (n-1)}{n} \right]$$

$$= \left\langle \frac{m_2}{n} \right\rangle \Rightarrow a_1 = 0$$

依此規則下去，會發現 $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0 \Rightarrow m_1 = 0$ 矛盾

所以會得到平衡樹的整合次數：$\left\langle \dfrac{m_1'}{n} \right\rangle + \left\langle \dfrac{m_2'}{n} \right\rangle + \left\langle \dfrac{m_3'}{n} \right\rangle + ... + \left\langle \dfrac{m_k'}{n} \right\rangle$

$$= \left\langle \frac{m_1}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{m_2}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{m_3}{n} \right\rangle + ... + \left\langle \frac{m_k}{n} \right\rangle + 1$$

由數學歸納法得知 $\forall m_1 \geq n$ ，歪斜樹的整合次數

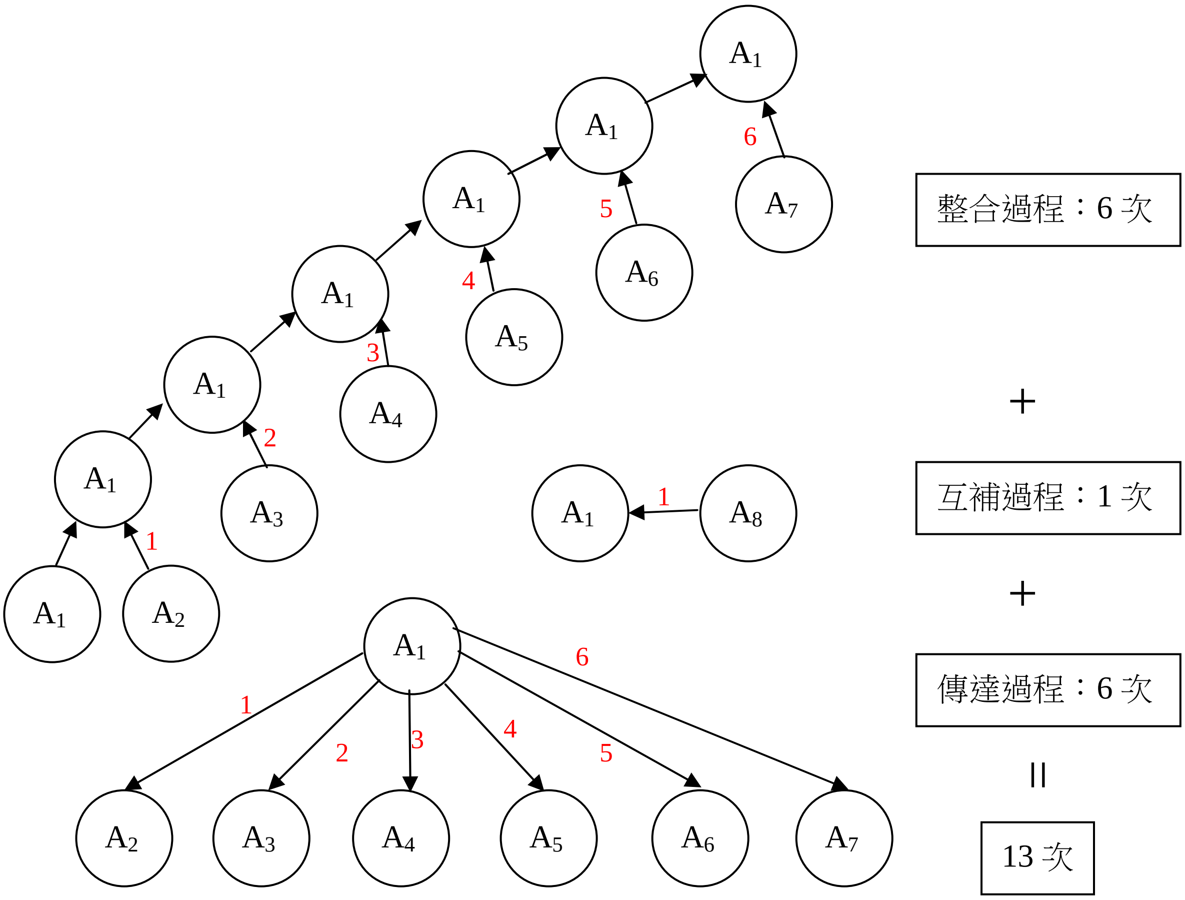
$$= \left\lceil \frac{m_1 - n}{n-1} \right\rceil = \left\langle \frac{m_1}{n} \right\rangle + \left\langle \frac{m_2}{n} \right\rangle + ... + \left\langle \frac{m_k}{n} \right\rangle$$

$=$ 平衡樹的整合次數

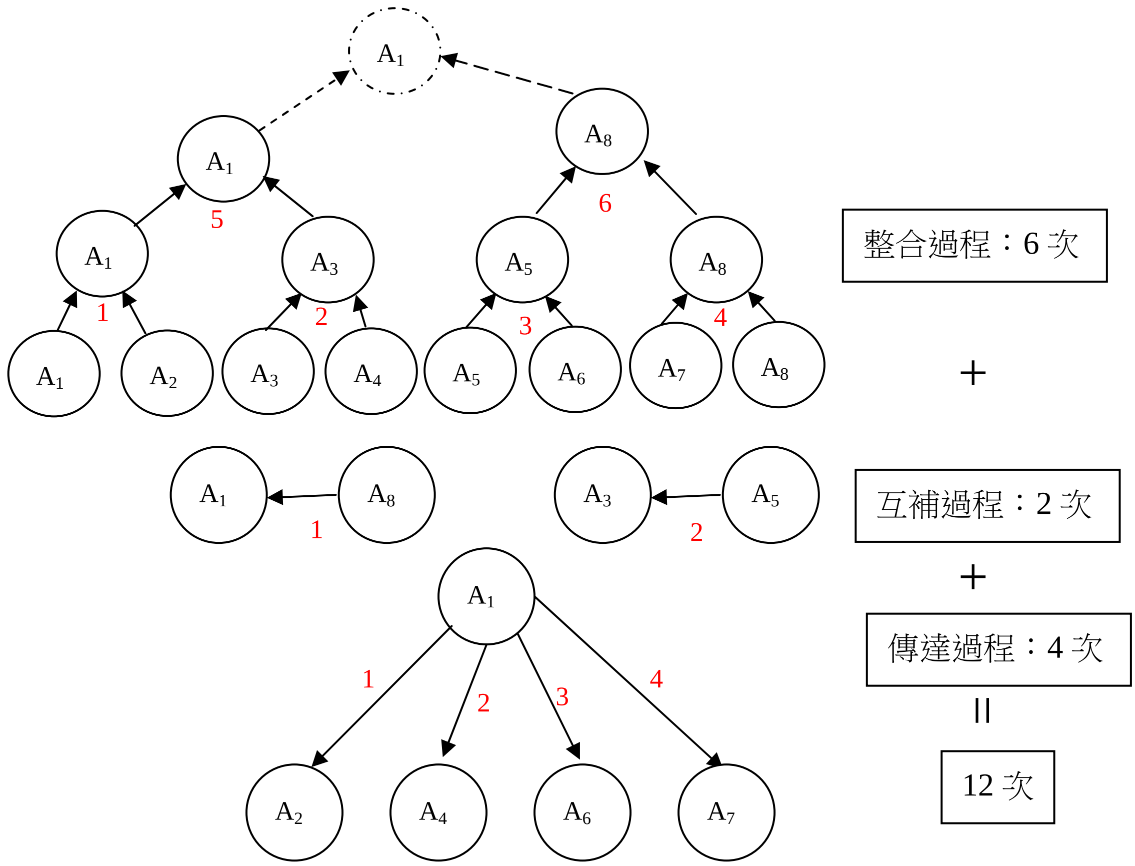
四、歪斜樹 V.S.平衡樹互補組數的討論與影響

歪斜樹 V.S.平衡樹互補的觀察

藉由上面的證明我們確認了不論何種整合的方式，只要是在最快的原則下，所需要的次數是一樣的，然而在這之中也意外的發現，雖然整合的次數一樣，但是對於之後的傳達過程，卻有不同的影響。如下圖 4-1 及圖 4-2 所示，在平衡樹及歪斜樹的整合次數都一樣，但是歪斜樹只能產生一組互補($A_1 \rightarrow A_8$)，之後只能利用傳達來完成交談，然而平衡樹卻還有另一組互補($A_3 \rightarrow A_5$)，而每產生一組互補就減少一個人次的傳達，因此進行互補組數的探討。



《圖 4-1：歪斜樹對談》



《圖 4-2：平衡樹對談》

[定理 4-1]：設總人數 m，對談人數為 n 人($m \ge n^2$)，若為平衡樹的整合，且互補組數為 k，則 $k \ge n$。

<pf>

設 $k < n$, $A_{1,1} \cup A_{1,2} \cup \ldots \cup A_{1,n} = S$ 為其中一組互補的對談且互補底數為 k，不失一般性 $A_{1,1}$、$A_{1,2}$ 為其互補基底，則必有 n 個個體與 $A_{1,1}$ 等價即 $A_{1,1} = A_{2,1} = \ldots = A_{n,1}$ 同理亦有 n 個個體與 $A_{1,2}$ 等價即 $A_{1,2} = A_{2,2} = \ldots = A_{n,2}$，因此互補組數 $k \ge n$，與假設矛盾。

[定理 4-2]：設對談人數為 n 人的平衡樹整合，若互補的組數 $k > n$, 則不為最快產生互補的整合過程。

<pf>

設最快的整合過程所產生 k 組互補為 $\{A_{1,1}、A_{1,2}、\ldots、A_{1,n}\}$、$\{A_{2,1}、A_{2,2}、\ldots、A_{2,n}\}$、$\{A_{3,1}、A_{3,2}、\ldots、A_{3,n}\}$、…、$\{A_{k,1}、A_{k,2}、\ldots、A_{k,n}\}$，其中 $k > n$ 且互補基底數為 2，而 $\{A_{1,1}、A_{1,2}\}$、

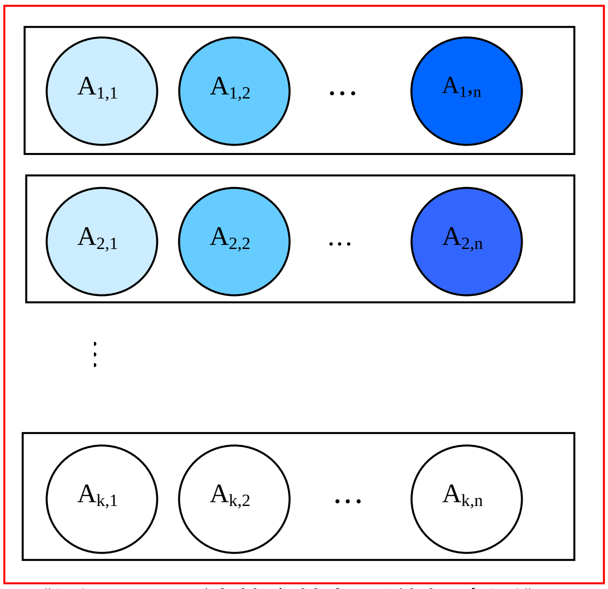
$\{A_{2,1}、A_{2,2}\}$、$\{A_{3,1}、A_{3,2}\}$、⋯、$\{A_{k,1}、A_{k,2}\}$分別為其互補基底，我們分兩種狀況來討論。

Case1：(互補基底皆相同，如圖 4-3 所示)

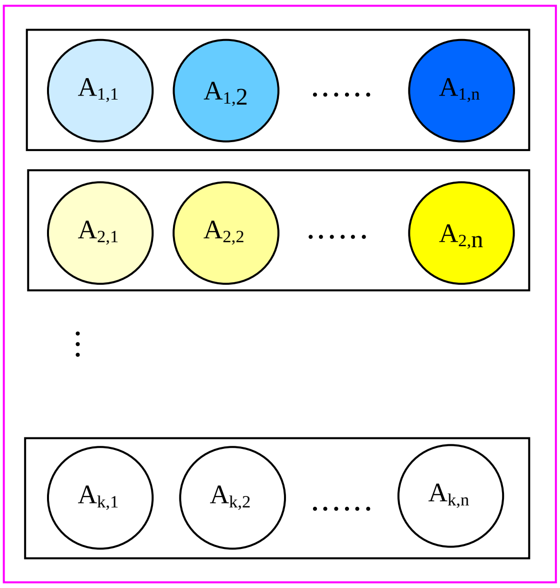
此 k 組互補基底對應全同即 $A_{1,1} = A_{2,1} = ... = A_{k,1}$，$A_{1,2} = A_{2,2} = ... = A_{k,2}$，因為 $k > n$，且每一次對談最多會有 n 組相同的成員，因此要讓 k 個成員($A_{1,2} = A_{2,2} = ... = A_{k,2}$)訊息都相同至少需要 2 次的整合，同理 $A_{1,2} = A_{2,2} = ... = A_{k,2}$ 亦需 2 次以上的整合，因此產生大於 n 組互補會比產生 n 組互補至少多 2 次的整合次數，故不為最快的整合過程。

Case2：(互補基底不全相同，如圖 4-4 所示)

此 k 組互補基底對應不全相同，設最小相異數為 2(即如下所示 $A_{1,1} = A_{2,1} = ... = A_{n,1}, A_{n+1,1} = A_{n+2,1} = ... = A_{k,1}$)，最小需要 2 次的整合次數，同理 $A_{1,2} = A_{2,2} = ... = A_{n,2}, A_{n+1,2} = A_{n+2,2} = ... = A_{k,2}$ 亦需要 2 次的整合次數，與 Case1 同至少多 2 次的整合次數，故不為最快的整合過程。



《圖 4-3：互補基底皆相同的概念圖》



《圖 4-4：互補基底不全相同的概念圖》

[推論一]：設對談人數為 n 人的平衡樹整合，若最快產生互補的整合過程，則互補組數為 n 組。

<pf>

Case1：

設互補的組數為 k 且 $k > n$ 為平衡樹整合最快產生互補的整合過程，與定理矛盾，故 $k > n$ 不合。

Case2：

設互補的組數為 k 且 $k < n$ 為平衡樹整合最快產生互補的整合過程，與定理互補數 $k \geq n$ 矛盾，亦不合。

故最快產生互補的整合過程，則互補組數為 n 組。

[推論二]：設對談人數為 n 人的平衡樹整合，若互補數為 n 組所需的最快整合次數為 t 次，則產生 $2n$ 組互補，至少需要 $t+2$ 次。

<pf>

依前述定理所討論不論互補基底相同與否，每一次的對談只能產生 n 個等價關係，因此要產生 $2n$ 組互補，至少多 2 次整合步驟。

[定理 4-3]：對談人數為 n 人的歪斜樹整合互補組數為 1。

<pf>

很明顯的，整合互補組不可能為 0，若整合互補組數為 k，且 $k>1$,不失一般性，設 $\{A_1、A_2、\ldots、A_n\}$ 及 $\{B_1、B_2、\ldots、B_n\}$ 為其中兩組互補對談，分為以下三種狀況討論：

Case1：此兩組完全相同

因為這兩組完全相同 $(A_i=B_i, 1\le i\le n)$ 即 A_i, B_i 為同構關係，則 A_i 為 B_i 的子樹(或 B_i 為 A_i 的子樹)，與歪斜樹的定義矛盾(子樹的個數最多只有 1 個)。

Case2：此兩組不全相同

因 $\{A_1、A_2、\ldots、A_n\}$、$\{B_1、B_2、\ldots、B_n\}$ 為歪斜樹的對談，令 A_1 及 B_1 為其子樹，A_i 及 B_i 分別為其葉節點且滿足 $A_i<A_{i+1}, B_i<B_{i+1}$ 其中 $2\le i\le n$，分以下狀況討論。

Case2.1：$(A_1=B_1,$ 部分 $A_i\ne B_i$ 其中 $2\le i\le n)$

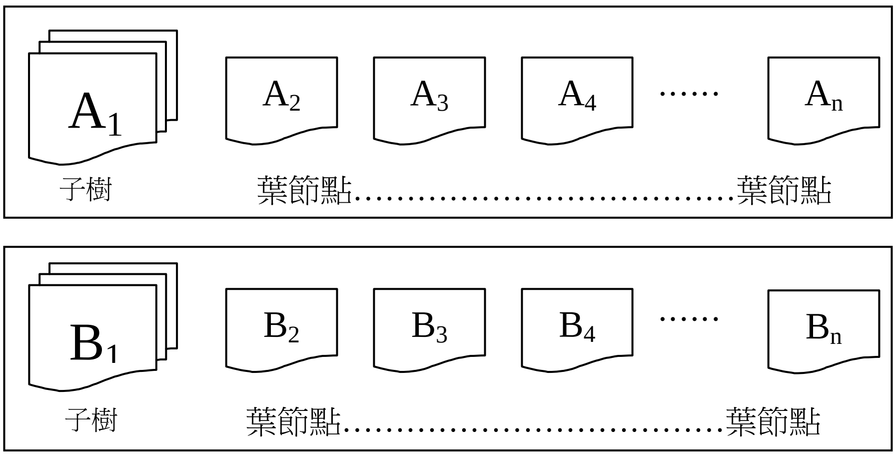
因為部分不同，故至少存在一個元素不同，故假設 $A_2\ne B_2$，則 $A_2\cup(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n)\subset S$ 與 $(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n)\subset S$ 矛盾，故不合。

Case2.2：$(A_1\ne B_1, A_i=B_i)$，則 $(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)\cup(B_1)\subset S$ 與 $(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=S$ 矛盾，亦不合。

Case3：此兩組完全不同

因為兩組完全不同，即 $(A_1\ne B_1, A_i\ne B_i)$ 其中 $2\le i\le n$ 則 $\forall B_i\in A_1, 2\le i\le n$ 即 A_1 為 B_i 的父節點，B_i 所擁有的訊息不只一個與 B_i 為葉節點(只擁有一個訊息)矛盾。因此互補的組數 $k>1$ 假設錯誤。

故互補的組合 $k=1$。



《圖 4-5：歪斜樹互補概念圖》

五、尋求最速解

[定理 5-1]：設 m 個人中各自擁有一項不同的訊息，每一次對談人數為 n 個人，則最快讓此 m 個人擁有所有的訊息的次數為 $\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil + n + \left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil$，其中 $m \geq n^2$。

<pf>

假設最快將 m 個不同的訊息整合到 n 個人之中，且此 n 個人無人擁有全部訊息，所需要的次數為 T，依前述的討論的方式，讓 m 個人知道所有的訊息必定經過：整合+互補+傳達，因此我們以互補的狀況分為下列四種狀況進行討論。

討論原則 (互補次數)		整合次數	互補次數	傳達次數	總次數
Case1	1	T	1	$\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil$	T+1+$\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil$
Case2	$k<n$	T	k	$\left\lceil \frac{m-kn}{n-1} \right\rceil$	T+$k+\left\lceil \frac{m-kn}{n-1} \right\rceil$
Case3	n	T	n	$\left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil$	T+ n +$\left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil$
Case4	$k>n$	$T+2\left\lceil \frac{k-n}{n} \right\rceil$	k	$\left\lceil \frac{m-kn}{n-1} \right\rceil$	$T+2\left\lceil \frac{k-n}{n} \right\rceil+k+\left\lceil \frac{m-kn}{n-1} \right\rceil$

《表 5-1：互補次數對總次數的關係》

依前述[定理 3-3]所得若互補組數 k，其中 $1 \leq k \leq n$，則最快的整合次數皆為 T，若 $k>n$ 時每產生一組互補在整合次數上會增加 2 次，故整合次數為 $T+2k$，而傳達次數為 $\left\lceil \frac{\text{總人數}-\text{互補組數}\times\text{對談人數}}{\text{對談人數}-1} \right\rceil$。

為了方便討論，令 Case1= T+1+$\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil$，Case2= T+$k+\left\lceil \frac{m-kn}{n-1} \right\rceil$，Case3= T+ n +$\left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil$，

Case4=$T+2k+\left\lceil \frac{m-kn}{n-1} \right\rceil$，比較此四個狀態中何者為最小值。

Case1 與 Case3 的比較

Case1 化簡為 T+1+$\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil$= T+$\left\lceil 1+\frac{m-n}{n-1} \right\rceil$= T+$\left\lceil \frac{m-n+(n-1)}{n-1} \right\rceil$=T+$\left\lceil \frac{m-1}{n-1} \right\rceil$

Case3 化簡為 T+ n +$\left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil$= T +$\left\lceil n+\frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil$= T +$\left\lceil \frac{m-n^2+n(n-1)}{n-1} \right\rceil$ =T+$\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil$

令 A=$\frac{m-1}{n-1}$，C=$\frac{m-n}{n-1}$

因為$A-C=\frac{m-1}{n-1}-\frac{m-n}{n-1}=\frac{n-1}{n-1}=1>0$，所以 Case3 比 Case1 為快速。

$\boxed{\text{Case2 與 Case3 的比較}}$

Case2 化簡為 T+$k+\left\lceil\frac{m-kn}{n-1}\right\rceil$=T+$\left\lceil k+\frac{m-kn}{n-1}\right\rceil$= T+$\left\lceil\frac{m-kn+k(n-1)}{n-1}\right\rceil$=T+$\left\lceil\frac{m-k}{n-1}\right\rceil$

Case3 為 T+$\left\lceil\frac{m-n}{n-1}\right\rceil$

令 B=$\frac{m-k}{n-1}$，C=$\frac{m-n}{n-1}$

因為$B-C=\frac{m-k}{n-1}-\frac{m-n}{n-1}=\frac{n-k}{n-1}$>0，所以 Case3 比 Case2 較為快速。

$\boxed{\text{Case4 與 Case3 的比較}}$

Case4 化簡為$T+2\left\lceil\frac{k-n}{n}\right\rceil+k+\left\lceil\frac{m-kn}{n-1}\right\rceil=T+2\left\lceil\frac{k-n}{n}\right\rceil+\left\lceil\frac{m-kn+k(n-1)}{n-1}\right\rceil=$

$$T+2\left\lceil\frac{k-n}{n}\right\rceil+\left\lceil\frac{m-kn+k(n-1)}{n-1}\right\rceil=T+2\left\lceil\frac{k-n}{n}\right\rceil+\left\lceil\frac{m-k}{n-1}\right\rceil\geq$$

$$T+\left\lceil\frac{2(k-n)}{n}+\frac{m-k}{n-1}\right\rceil=T+\left\lceil\frac{2(k-n)(k-n)+(m-k)n}{n(n-1)}\right\rceil=$$

$$T+\left\lceil\frac{mn-n^2-n^2-2k+2n+kn}{n(n-1)}\right\rceil=T+\left\lceil\frac{mn-n^2+(k-n)(k-2)}{n(n-1)}\right\rceil$$

C 為 T+$\left\lceil\frac{m-n}{n-1}\right\rceil=T+\left\lceil\frac{mn-n^2}{n(n-1)}\right\rceil$

令 D=$\frac{mn-n^2+(k-n)(k-2)}{n\left(n-1\right)}$，E=$\frac{mn-n^2}{n(n-1)}$

所以$D-E=\frac{mn-n^2+(k-n)(k-2)}{n(n-1)}-\frac{mn-n^2}{n(n-1)}=\frac{(k-n)(k-2)}{n(n-1)}>0$(因為$k>n>2$)，所以 Case3 較為快速。

由以上得討論得知 Case 3 為最小值，即 T+ n +$\left\lceil\frac{m-n^2}{n-1}\right\rceil$為最佳的訊息傳播方法，因此每一次對談人數為$n$個人，最快讓此$m$個人得知所有的訊息的次數為$\left\lceil\frac{m-n}{n-1}\right\rceil+n+\left\lceil\frac{m-n^2}{n-1}\right\rceil$。

六、最速解函數的討論

我們利用定理 5-1 的結論將式子進行化簡可以得到下面三個推論。

[推論三]：設 m 個人中各自擁有一項不同的訊息，每一次對談人數為 n 個人且 $m \geq n^2$，則最快讓此 m 個人擁有所有的訊息的次數為 $2\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil$。

<pf>

由定理 5-1 的結論討論出來的最快步驟為 $\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil + n + \left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil$，過程如下所示：

$$\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil + n + \left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil + \left\lceil n + \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil + \left\lceil \frac{m-n^2+n(n-1)}{n-1} \right\rceil = 2\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil 。$$

[推論四]：設 m 個人中各自擁有一項不同的訊息，每一次對談人數為 n 個人且 $m \geq n^2$，則最快讓此 m 個人擁有所有的訊息的次數為 T，則 $\frac{T}{2}n - \frac{T}{2} + 1 < m \leq \frac{T}{2}n - \frac{T}{2} + n$。

<pf>

由定理 5-1 的結論轉換成其它的等價概念。過程如下所示：

$$\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil + n + \left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{m-n-n(n-1)}{n-1} + n \right\rceil + n + \left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{m-n-n^2+n}{n-1} + n \right\rceil + n + \left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil + n + n + \left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil = 2(n + \left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil)$$

因此 T$= 2(n + \left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil)$ 將此式進行化簡 $\frac{T}{2} - n = \left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil$

$$\Rightarrow (\frac{T}{2} - n - 1)(n-1) < m - n^2 \leq (\frac{T}{2} - n)(n-1) \Rightarrow (\frac{T}{2} - n - 1)(n-1) + n^2 < m \leq (\frac{T}{2} - n)(n-1) + n^2$$

$\Rightarrow \frac{T}{2}n - \frac{T}{2} + 1 < m \leq \frac{T}{2}n - \frac{T}{2} + n$，故得證。

[推論五]：設 m 個人中各自擁有一項不同的訊息，每一次對談人數為 n 個人且 $m \geq n^2$，若最快讓此 m 個人擁有所有的訊息，所需的對談次數為 T，則有 $n-1$ 個不同的總人數 m 有相同的 T。

<pf>

由以上的推論，我們可以知道最大值為 $\frac{T}{2}n - \frac{T}{2} + n$，最小值為 $\frac{T}{2}n - \frac{T}{2} + 1$，因此在相同的對談次數下相同的總人數最多有 $n-1$ 個。

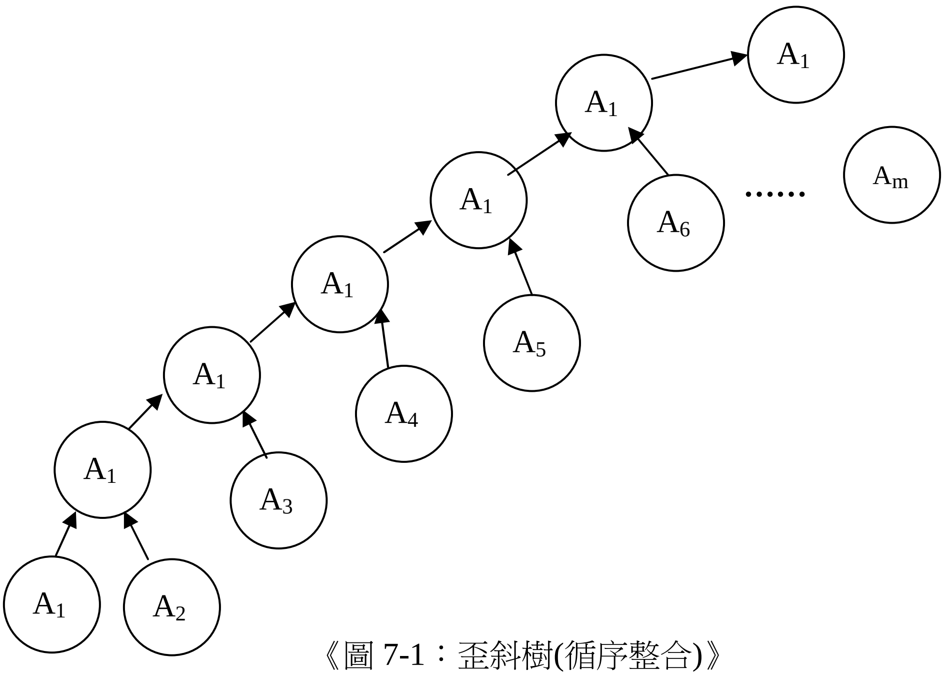
七、簡化處理流程

基於上述的證明的結論我們可以歸納出兩點必要的條件：

1. 不管是用歪斜樹或平衡樹的畫法，在整合步驟中都是相等的(定理 2-3)。
2. 若在對談人數為 n 人的狀況下，一定要做出 n 組互補才會是最快的方法(推論一)。

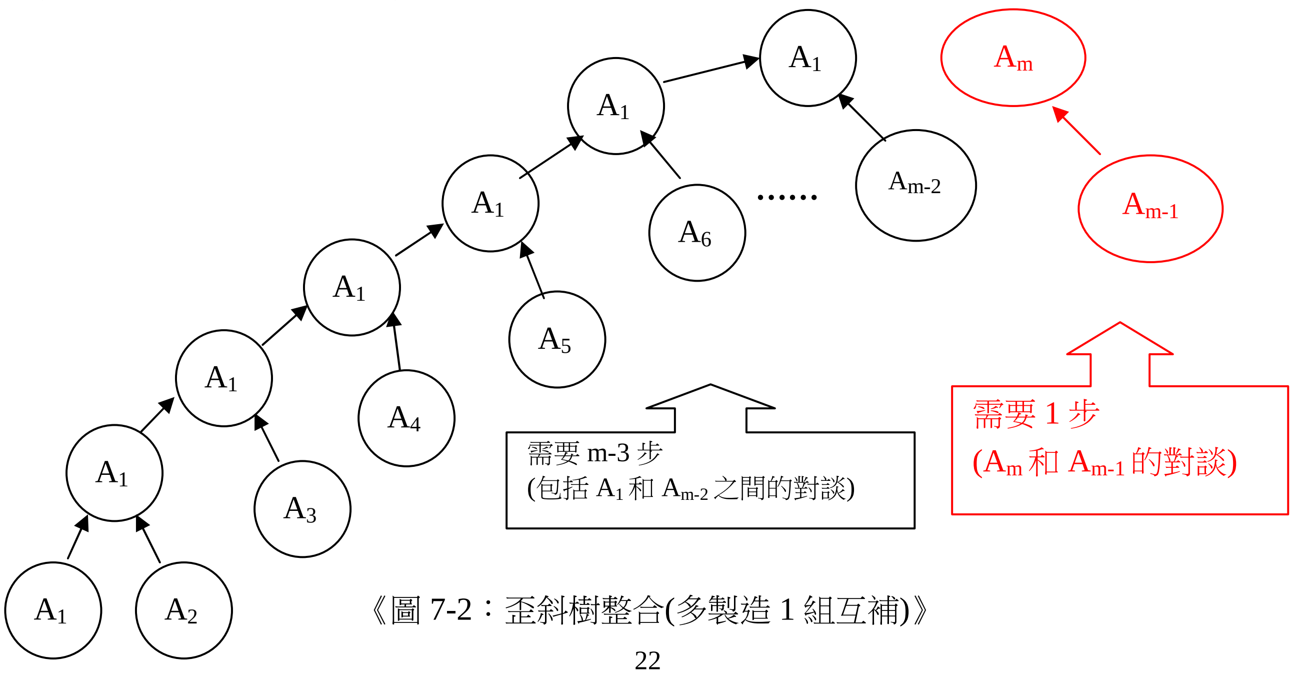
而且歪斜樹的畫法也較平衡樹的畫法簡單(先不管是否為最快畫法)，所以我們就以歪斜樹的基本想法去改良，使得新畫法為最快的方法。

首先觀察歪斜樹的畫法，圖 6-1：
(以總人數為 m 人，對談人數為 2 人為例，需要 $m-2$ 步整合)



《圖 7-1：歪斜樹(循序整合)》

雖然在整合步驟上為最快，但卻產生不了 2 組互補，所以對整體而言不為最快的方法，於是我們嘗試直接加上另一組互補，即提出 A_m、A_{m-1} 兩人先進行對談一次，如圖 6-2 所示。



《圖 7-2：歪斜樹整合(多製造 1 組互補)》

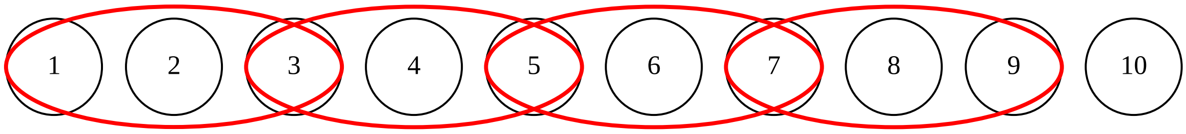
此時即符合上述條件 1 最快的方法（總共 m 人，原本歪斜樹整合時需要 $m-2$ 步，再加上 1 組互補的 1 步時，最後需要 $(m-3)+1=m-2$ 步，所以一樣快，即符合條件 1，且有 2 組互補，條件 2 同樣滿足）。

所以我們希望能在任何狀況下都能畫出這種方法。

例子 1

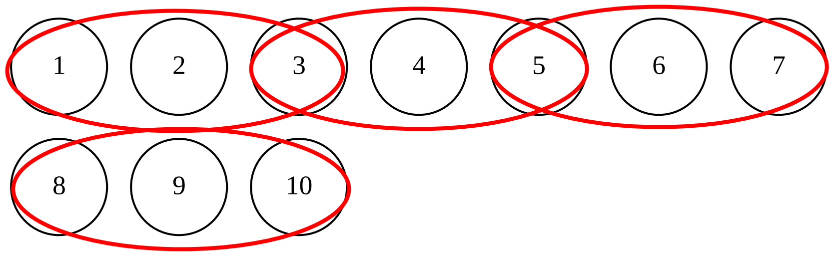
現在以總人數為 10 人，對談人數為 3 人為例。為了方便觀察，我們用下列圖示表達（一個紅圈代表一次對談，且該圓圈內的號碼為當次對談的人）：

以歪斜樹（循序整合）的方式畫，如圖 6-3：由左至右，由上到下，易觀察出需要 4 步整合。



《圖 7-3：一般的歪斜樹整合(總人數 10 人每次 3 人對談為例)》

此時面對一樣的問題：整合雖然最快，但互補卻只有 1 組，於是我們把 10、9、8 號提出來，如圖 6-4 所示：

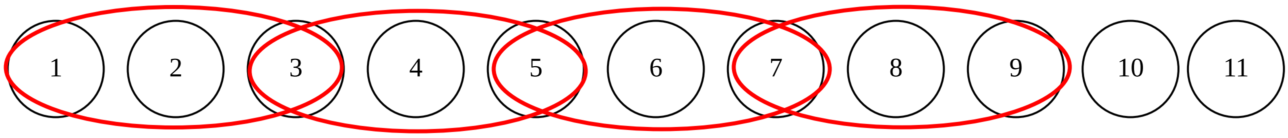


《圖 7-4：改良的歪斜樹整合(總人數 10 人每次 3 人對談為例)》

現在就和歪斜樹整合次數一樣多(4 步)，所以符合條件 1；且 5、6、7 號和 8、9、10 號為互補基底，有 3 組互補，所以符合條件 2 為最快的方法。

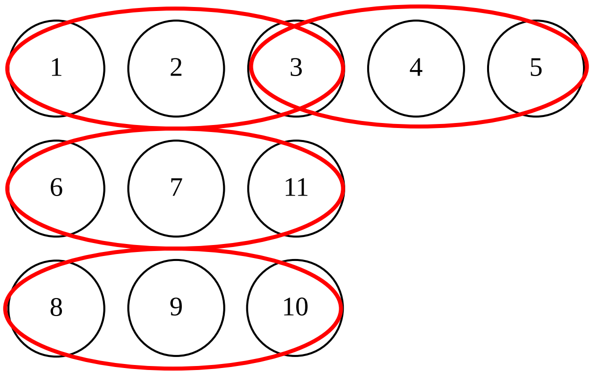
例子 2

現在改成總人數為 11 人，對談人數為 3 人，以歪斜樹（循序整合）的方式畫，如圖 6-5：易觀察出同樣需要 4 步整合。



《圖 7-5：一般的歪斜樹整合(總人數 11 人每次 3 人對談為例)》

現在再將 10、9、8 號，11、7、6 號分別提出來如圖 6-6 所示：



《圖 7-6：改良的歪斜樹整合(總人數 11 人每次 3 人對談為例)》

現在就和歪斜樹整合次數一樣多(4 次)，且 3、4、5 號，6、7、11 號和 8、9、10 為互補基底，同樣有 3 組互補，所以就為最快整合方式。

【化簡流程步驟】

所以我們可以得到新的交談方法。若現在總人數為 m 人，對談人數為 n 人：

STEP1.

先利用歪斜樹的整合方式，看最後會餘下幾個人還沒交談過。

(餘下的人數 $=m-\left((n-1)\times\left\lceil\dfrac{m-n}{n-1}\right\rceil+1\right)$，其中 $\left\lceil\dfrac{m-n}{n-1}\right\rceil$ 為歪斜樹的整合次數，再乘上每次對談可以多整合 $n-1$ 人，最後再加上第一次整合會多 1 人，最後再用總人數 m 扣掉整合過的人數)

STEP2.

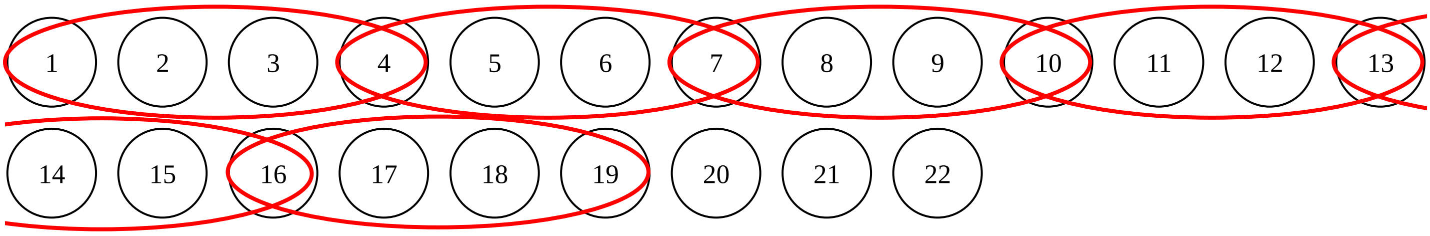
將每個餘下的人跟其餘 $n-1$ 人當作一組交談，即可完成最快整合方式(和歪斜樹整合次數相同、有 n 組互補)。

STEP3.

完成 n 次互補(需要 n 次)，再將完整訊息傳達給剩下的人，完成最快訊息傳遞(再加上 $\left\lceil\dfrac{m-n^2}{n-1}\right\rceil$ 次)。

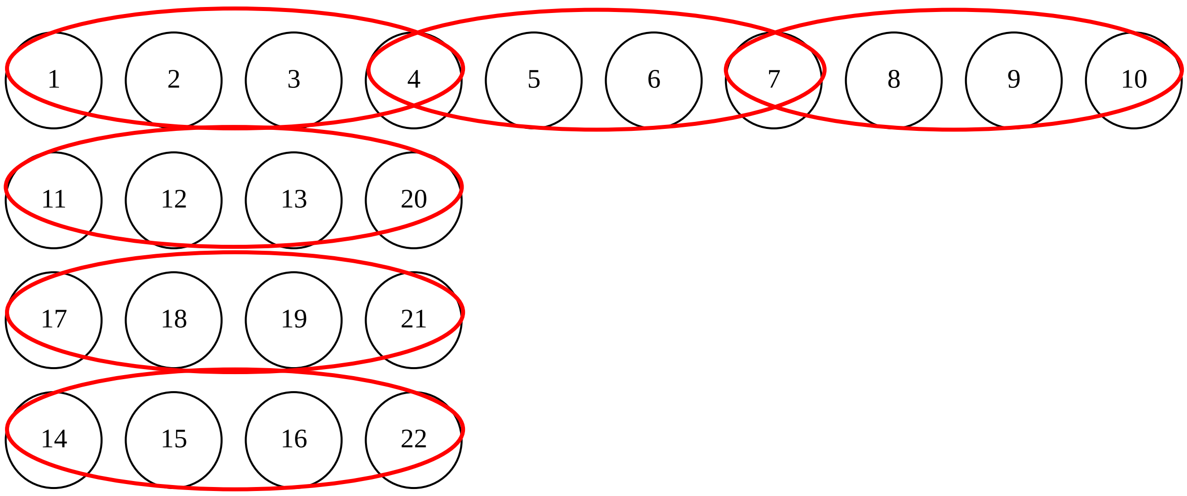
我們舉一個例子。若現在總人數為 22 人，對談人數為 4 人為例：

STEP1.以歪斜樹整合方式需要 6 步整合，餘下 20、21、22 號沒交談過，如圖 6-7 所示。(或可以代入公式歪斜樹整合需要 $\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{22-4}{4-1} \right\rceil = 6$ 步，且會餘下 $22-\left((4-1)\times\left\lceil \frac{22-4}{4-1} \right\rceil+1\right)=3$ 人)



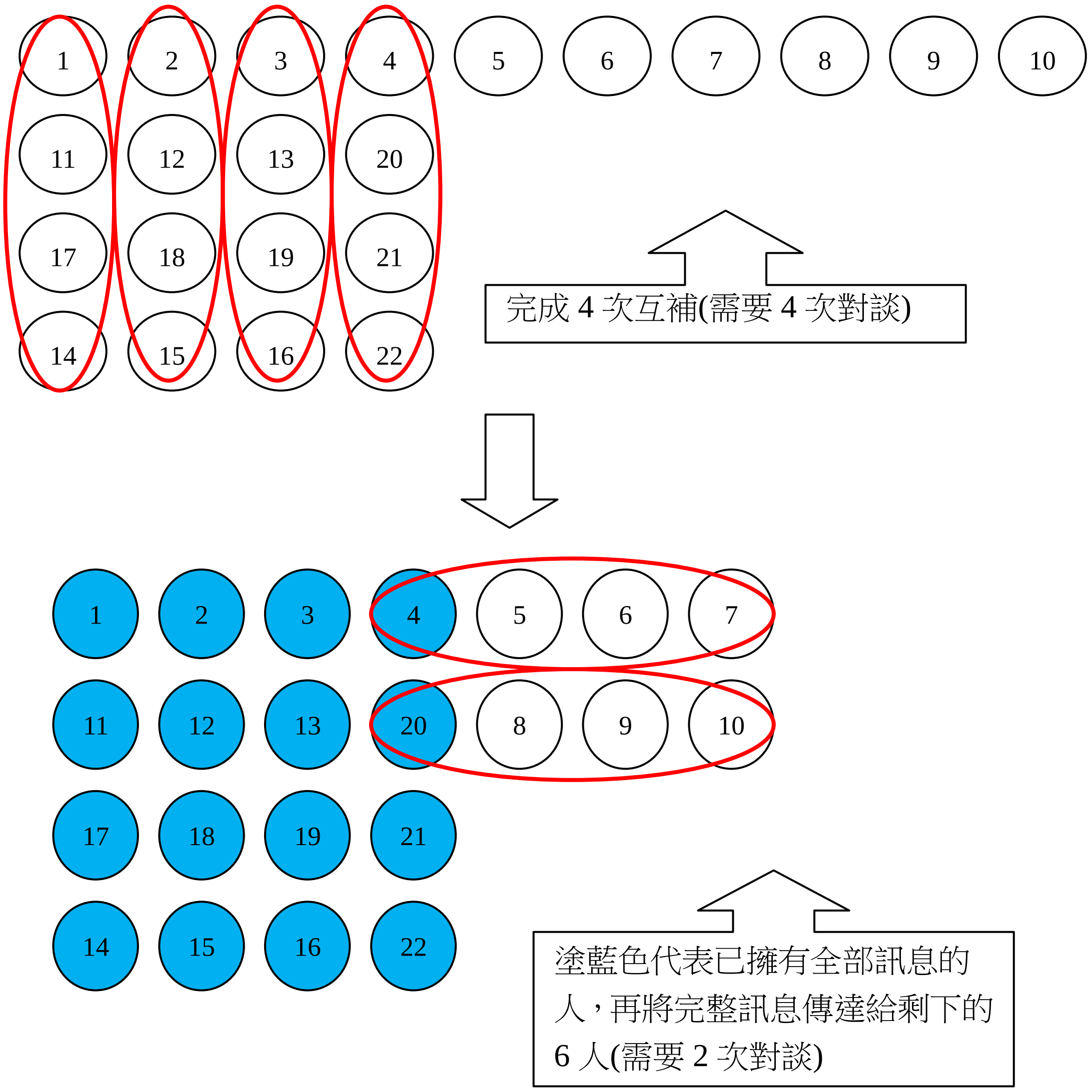
《圖 7-7：化簡流程步驟 Step1(總人數 22 人每次 4 人對談為例)》

STEP2. 將 11、12、13、20 號與 14、15、16、21 號與 17、18、19、22 號分別提出來，以同列去做對談，如圖 6-8，而這種對談方式就是最快整合方式（和歪斜樹整合次數相同、有 4 組互補）：



《圖 7-8：化簡流程步驟 Step2(總人數 22 人每次 4 人對談為例)》

STEP3. 完成 4 次互補(需要 4 次對談)，再將完整訊息傳達給剩下的人，完成最快訊息傳遞給所有人(再加上 $\left\lceil \frac{22-4^2}{4-1} \right\rceil = 2$ 次對談)如圖 6-9 所示。



《圖 7-9：化簡流程步驟 Step3(總人數 22 人每次 4 人對談為例)》

所以我們可以知道，總共需要 $6+4+2$ 次對談($\left\lceil \frac{m-n}{n-1} \right\rceil + n + \left\lceil \frac{m-n^2}{n-1} \right\rceil$)完成最快訊息傳達給所有人。

> ※不難看出，如果都要能以這種方式去整合的話，最少 n^2 個人（ n 為對談人數，由歪斜樹方式整合，最多可以餘下 $n-1$ 人，亦即需要 $(n-1)+(n-1)\times(n-1)$ 個人就是(餘下的人數)+(餘下的人數)×(補上的人數)，再加原本至少人 n 人，全部加總起來：
>
> $(n-1)+(n-1)\times(n-1)+n=n^2$ ）。

八、附件

總人數 *m* 人及對談人數 *n* 人，最快對談次數表

m \ n	2	3	4	5	m \ n	2	3	4	5
2	1				27	50	24	16	12
3	3	1			28	52	26	16	12
4	4	3	1		29	54	26	18	12
5	6	3	3	1	30	56	28	18	14
6	8	4	3	3	31	58	28	18	14
7	10	5	3	3	32	60	30	20	14
8	12	6	4	3	33	62	30	20	14
9	14	6	5	3	34	64	32	20	16
10	16	8	5	4	35	66	32	22	16
11	18	8	6	5	36	68	34	22	16
12	20	10	6	5	37	70	34	22	16
13	22	10	7	5	38	72	36	24	18
14	24	12	8	6	39	74	36	24	18
15	26	12	8	6	40	76	38	24	18
16	28	14	8	7	41	78	38	26	18
17	30	14	10	7	42	80	40	26	20
18	32	16	10	8	43	82	40	26	20
19	34	16	10	8	44	84	42	28	20
20	36	18	12	8	45	86	42	28	20
21	38	18	12	9	46	88	44	28	22
22	40	20	12	10	47	90	44	30	22
23	42	20	14	10	48	92	46	30	22
24	44	22	14	10	49	94	46	30	22
25	46	22	14	10	50	96	48	32	24
26	48	24	16	12	51	98	48	32	24

《表 8-1：總人數 m 人及對談人數 n 人，最快對談次數表》

九、生活應用

在現實社會中，訊息傳遞的保密性是很重要的，但卻沒有完美的保密方法，所以必須盡可能的減少傳遞訊息的次數，才能確保情報安全。假設有一群間諜各在不同的地方蒐集情報，如果每個人都必須獲得完整的的訊息，而且在做訊息傳遞時只能一次 *n* 個人(或 *n* 種訊息)做交流，則我們可以利用研究的結果，計算出最少訊息傳遞的次數，而且也可以提供一套相對應方法或步驟，以最少的次數做訊息傳遞。

伍、結論

一、我們可以把對談的過程依性質差異分成：整合步驟、互補步驟、傳達步驟。而在整合步驟中，證明以歪斜樹或平衡樹的整合方式，其所需要的對談次數都相同。

二、在整個對談的過程中，最關鍵的是互補步驟，若互補能越多則越能節省對談次數，發現若以一次 n 個人對談，則剛好做出 n 組互補，將會有最快的對談次數。

三、得到在總人數為 m 人，一次對談人數為 n 人的條件下，所對應的最快訊息傳遞次數之函數關係為：$\left\lceil \dfrac{m-n}{n-1} \right\rceil + n + \left\lceil \dfrac{m-n^2}{n-1} \right\rceil$ 次，其中 $m \geq n^2$ 。

四、設 m 個人中各自擁有一項不同的訊息，每一次對談人數為 n 個人且 $m \geq n^2$，則最快讓此 m 個人擁有所有的訊息的次數為 T，則 $\dfrac{T}{2}n - \dfrac{T}{2} + 1 < m \leq \dfrac{T}{2}n - \dfrac{T}{2} + n$ 。

五、設 m 個人中各自擁有一項不同的訊息，每一次對談人數為 n 個人且 $m \geq n^2$，若最快讓此 m 個人擁有所有的訊息所需的對談次數為 T，則有 $n-1$ 個不同的總人數 m 有相同的 T。

六、對照最快訊息傳遞次數之函數關係，我們提供一種較簡易的對談流程。

七、我們製出最快對談次數表格，發現若在總人數為 m 人，一次對談人數為 n 人的條件下，要出現結論(三)的函數關係，至少要在總人數超過 n^2 人時，才會開始出現。

陸、未來展望

一、若是對談改成為單向的方式(一次對談，只有一方傳遞，另一方則接收訊息)，則至少需要多少次對談，才能完成訊息傳達。

二、若是以一個單位時間內，大家可以同時進行對談，則最少需要多少單位時間才能完成訊息的傳達。

柒、參考資料：

1、Data Structures: Tree。取自http://imil.au.edu.tw/~hsichcl/DataStructure/Data%20Structures(Tree).pdf

2、林福來(民 101)。高中數學第二冊。台南市：南一版

3、黃子嘉(民 88)。離散數學。臺北市：鼎茂。

4、數學歸納法。取自 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%BD%92%E7%BA%B3%E6%B3%95

【評語】040408

定義了整合、互補、傳達並利用這三個來處理分類訊息整合的想法相當好。定理 3-3 中平衡樹與歪斜樹的整合次數相同其實在組合理論中有相應的廣度分析及深度分析可多查相關資料，記錄在文章中。文章中定理 3-3 的數學歸納法的証明（p.11）有很大問題要重新敘述清楚。建議可再進一步考慮 m 人，每人有 k 個訊息，每次交談為 n 人（訊息總數 S）的情形·